COLLECTION PYRAMIDE

Guide du Professeur

# Mon livre de MATHÉMATIQUES

# 1re D

CORRIGÉS DES EXERCICES

- Découverte des habiletés
- Des questions d'évaluation
- Mes séances d'exercices

JD Editions
L'Edition autrement

COLLECTION PYRAMIDE

# Guide du Professeur

# Mon livre de Mathématiques

## 1re D

CORRIGÉS DES EXERCICES

- Découverte des habiletés
- Des questions d'évaluation
- Mes séances d'exercices

JD Éditions
21 B.P. 3636 Abidjan 21
Côte d'Ivoire

# SOMMAIRE

*Ce document pourrait contenir des erreurs au fautes de frappes.*
*Prière les signaler à l'adresse : kyoussouphou@gmail.com*

# 1 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

## I -SITUATION D'APPRENTISSAGE

En vue de faire plaisir à leur petit frère Honoré à l'occasion de son anniversaire, Juliette et Simon décident de peindre les murs de sa chambre. S'ils travaillaient ensemble, ils mettraient 36 min pour finir le travail. En travaillant seul, Simon aurait besoin d'une demi-heure de plus que Juliette pour accomplir cette même tâche.

Simon voudrait connaître le temps qu'il lui faudrait pour repeindre le mur en travaillant seul. Pour cela, il sollicite ses camarades de classe pour l'aider en se référant aux équations et inéquations dans IR.

| Constituants de la situation | Exemples de questions possibles | Réponses possibles des élèves |
|---|---|---|
| Contexte | Où et quand se déroule la scène ? | l'occasion de son anniversaire de leur petit frère Honoré |
| Circonstances | Quel est le problème auquel Juliette et Simon sont confrontés ? | Juliette et Simon décident de peindre les murs de sa chambre. S'ils travaillaient ensemble, ils mettraient 36 min pour finir le travail. En travaillant seul, Simon aurait besoin d'une demi-heure de plus que Juliette pour accomplir cette même tâche. Simon voudrait connaître le temps qu'il lui faudrait pour repeindre le mur en travaillant seul |
| Tâche | Qu'est-ce que ses camarades de classe se proposent de faire ? | Pour cela, il sollicite ses camarades de classe pour l'aider en se référant aux équations et inéquations dans IR |

## II- DECOUVERTE DES ACTIVITES

**Activité 1** :

a) $p(x) = (x-2)^2 - 25$ ; b) $p(x) = (x-7)^2 + 4$ ; c) $p(x) = -9((x+1)^2 - \frac{16}{9})$ ; d) $p(x) = 4(x-\frac{3}{2})^2$

2- $p(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$ or $x^2 + \frac{b}{a}x = (x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b}{4a^2}^2 + \frac{4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

**Exercice de fixation 1**

a) Vrai ; b) Faux ; c) Faux ; d) Vrai.

**Activité 2**

1- $P_1(x)$ : $\Delta = 100$ $P_2(x)$ : $\Delta = -36$ $P_3(x)$ : $\Delta = 0$ $P_4(x)$ : $\Delta = -12$

$P_5(x)$ : $\Delta = 0$ $P_6(x)$ : $\Delta = 144$.

2- $P_1(x) = -2x^2 - 6x + 8$ ; $P_1(x) = -2\left[(x+\frac{3}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2\right]$ identité remarquable
$P_1(x) = -2(x-1)(x+4)$

$P_2(x) = 9x^2 - 18x + 10 = 9\left[(x-1)^2 + \frac{36}{324}\right]$ ( n' est pas factorisable)

$P_3(x) = -3x^2 - 12x - 12 = -3(x+2)^2$ ; $P_4(x) = -\left[(x+2)^2 + 3\right]$ (n'est pas factorisable)

$P_5(x) = 6(x-5)^2$ ; $P_6(x) = (x-3)(x+9)$

3- a)

| **Polynômes** | $p_1(x)$ | $p_2(x)$ | $p_3(x)$ | $p_4(x)$ | $p_5(x)$ | $p_6(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Signes de $\Delta$** | + | - | 0 | - | 0 | + |
| **Forme factorisée (si possible)** | $-2(x-1)(x+4)$ | non factorisable | $-3(x+2)^2$ | Non factorisable | $6(x-5)^2$ | $(x-3)(x+9)$ |

b) On conjecture que : si $\Delta < 0$ P n'est pas factorisable ; si $\Delta > 0$ P est factorisable et si $\Delta = 0$ P est factorisable

4- a) $P(x)$ est factorisable au cas où $\Delta > 0$ et au cas où $\Delta = 0$

b) au cas où $\Delta > 0$ $P(x) = a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2\right] = a\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a})$

**Exercice de fixation 2**

1- $x_1 = \frac{-v-\sqrt{\Delta}}{2u}$ et $x_2 = \frac{-v+\sqrt{\Delta}}{2u}$

2- a) On a : $P(x) = a(x+5)(x-3)$ et $P(-1) = 64$

Par calcul, on a : $a = -4$. Donc : pour tout nombre réel $x$, $P(x) = -4(x+5)(x-3)$.

b) On a : $P(x) = a\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$ et $P(0) = 1$.

Par calcul, on a : $a = \frac{9}{4}$. Donc : pour tout nombre réel $x$, $P(x) = \frac{9}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$.

c) On a : $\Delta = 17^2 - 4 \times 5 \times 6 = 169 = 13^2$

Donc : $x_1 = \frac{17-13}{2\times 5} = \frac{2}{5}$ et $x_2 = \frac{17+13}{2\times 5} = 3$

D'où : pour tout nombre réel $x$, $P(x) = 5\left(x-\frac{2}{5}\right)(x-3)$

d) On a : $\Delta = \left(6\sqrt{2}\right)^2 - 4 \times 3 \times 6 = 72 - 72 = 0$

Donc : $x_0 = \frac{6\sqrt{2}}{2\times3} = \sqrt{2}$. D'où : pour tout nombre réel $x$, $P(x) = 3\left(x - \sqrt{2}\right)^2$

**Activité 3**

Si □ > 0 d'après la forme factorisée vue en activité 2

P($x$) = 0 ⇔ $a(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}) = 0$ ⇔ $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ainsi les solutions de l'équation P($x$) = 0 sont $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

b) Si ) $\Delta < 0$ d'après l'activité 2 P($x$) n' a pas de zéro donc l'équation P($x$) = 0 n'a pas de solution.

c) Si □ = 0 , P($x$) = 0 ⇔ $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ et la solution est $\frac{-b}{2a}$

**Exercice de fixation 3**

1- On calcule le discriminant de chaque polynôme et on conclut à partir de son signe.
a) Deux solutions ; b) une solution ; c) Aucune solution

2- a) la solution est : $-\frac{q}{2p}$ ; b) les solutions sont : $\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2p}$ et $\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2p}$.

a) Les solutions sont : $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ ; b) La solution est $\frac{1}{9}$ ; c) Aucune solution

**Activité 4**

1)

| Courbe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $a$ | + | - | + | - | + | - |
| Signe de $\Delta$ | + | + | 0 | 0 | - | - |

2) Si $\Delta > 0$ le polynôme a le signe de $a$ à l'extérieur des racines et le signe contraire de $a$ à l'intérieur des racines.

Si $\Delta = 0$ le polynôme a le signe de $a$ sauf en $x_0$ où il s'annule.

Si $\Delta < 0$ le polynôme a le signe de $a$

**Exercice de fixation 4**

1.Faux ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Vrai.

**Activité 5**

1.

| $x$ | -∞ -3 1 +∞ |
|---|---|
| P($x$) | - 0 + 0 - |

2. $\forall\, x \in\, ]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[\,,\ P(x) \leq 0$

**Exercice de fixation 5**

a) $S_{\mathbb{R}} = ]-\infty; -3] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ ; b) $S_{\mathbb{R}} = ]-3; 1[$ ; c) $S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty; -\frac{3}{4}\right] \cup [1; +\infty[$

**Activité 6**

1- : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

2- $x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$ b) $x_1 \times x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} . \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2}$

$= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$

$= \frac{c}{a}$

**Exercice de fixation 6**

**1-** a) $x_1 + x_2 = -\frac{\pi}{m}$ et $x_1 x_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{m}$ ; b) $x_1 + x_2 = -\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}$ et $x_1 x_2 = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

2- a) $x^2 + 3x - 3 = 0$ ; b) $x^2 - (\sqrt{3} - 2\sqrt{2})x - 2\sqrt{6} = 0$

3. a) $S = \frac{4}{5}$ et $P = \frac{-3}{5}$ ; b) $S = 2$ et $P = \frac{-1}{3}$

**Activité 7**

1- $x + y = S$ et $x.y = P$ on a $y = S - x$ et $x(S-x) = P$ on développe et on a $X^2 - SX + P = 0$

*(On pourra écrire x= S - y et avoir la même équation) donc* $x$ et $y$ sont solutions de l'équation du second degré: $X^2 - SX + P = 0$.

2- Le discriminant de cette équation est $S^2 - 4P$. Donc lorsque ces deux nombres existent, on a : $S^2 - 4P \geq 0$

**Exercice de fixation 7**

En désignant par $L$ et $l$ la longueur et la largeur, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} L + l = 13 \\ Ll = 80 \end{cases}$$

Ces deux dimensions sont solutions de l'équation : $x^2 - 13x + 40 = 0$

On résout cette équation et on trouve comme solutions 8 et 5.

**Conclusion** : ce terrain a pour longueur 8 m et pour largeur 5 m.

**Exercice de fixation 8**

Ces deux nombres s'ils existent sont solutions de l'équation : $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0$

Ainsi c es nombres sont $\frac{3}{4}$ et $-\frac{1}{2}$

## DES QUESTIONS D'EVALUATION

**Question 1 Comment résoudre une équation irrationnelle du type $\sqrt{P(x)} = Q(x)$ ?**

**Exercice non corrigé**

Résolution de l'équation (E).

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 + 1 = (2x-1)^2 \end{cases} ; \quad (E) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2 - 4x = 0 \end{cases}$$

On résout et on obtient : $\frac{4}{3}$

**Conclusion** : la solution de l'équation est $\frac{4}{3}$.

**Question 2 Comment résoudre l'inéquation irrationnelle du type $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$** ?

**Exercice non corrigé**

Résolution de l'inéquation (I).

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \\ 2x + 2 \leq (3-x)^2 \end{cases} ; \quad (I) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 8x + 7 \geq 0 \end{cases}$$

On résout et on obtient comme ensemble de solutions l'intervalle $[-1;1]$

**Conclusion** : l'inéquation (I) a pour ensemble de solutions : $[-1;1]$

**Question3 Comment résoudre une équation du type *ax*$^4$ + *bx*$^2$ + c = 0** ?

**Exercice non corrigé**

Résolution de l'équation (E).

Posons : $X = x^2$

$$(E) \Leftrightarrow 4X^2 - 20X + 25 = 0 \ ; \quad (E) \Leftrightarrow (2X-5)^2 = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow (2x^2-5)^2 = 0 \ ; \quad (E) \Leftrightarrow 2x^2 - 5 = 0$$

**Conclusion** : $S = \left\{ -\frac{\sqrt{10}}{2} ; \frac{\sqrt{10}}{2} \right\}$

**Question3 Comment déterminer deux nombres connaissant leur somme et leur produit** ?

**Exercice non corrigé**

a) $S^2 - 4P = \frac{81}{400}$ , $S^2 - 4P > 0$ donc on résous l'équation : $x^2 + \frac{1}{20}x - \frac{1}{20} = 0$
les deus nombres sont $\frac{1}{5}$ et $-\frac{1}{4}$

b) $S^2 - 4P = -12$ , $S^2 - 4P < 0$ donc ces deux nombres n'existent pas.

## MES SEANCES D'EXERCICES

### Exercices de fixation

**Exercice 1**

1. c ;  2- b

**Exercice 2**

1-V ; 2 – V ; 3 – F ; 4 – F

**Exercice 3**

1- F ; 2 – F ; 3 – V

**Exercice 4**

1 – a ; 2 – a ; 3 – b.

**Exercice 5**

1 – a  ; 2 – a et c

**Exercice 6**

1 - V ; 2 – F ; 3 – V

**Exercice 7**

a) S = -2 et P = $-\frac{1}{3}$  b) S = $\sqrt{2}$ - $\sqrt{3}$ et P = $-\sqrt{6}$ ; c) S = $\frac{-a}{a^2+1}$ et P = $\frac{-1}{a^2+1}$

**Exercice 8**

1 – c ; 2 – d

**Exercice 9**

□□ < 0

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| Signe de $f(x)$ | Signe de a |

□□= 0

| $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)$ | signe de a | 0 | Signe de a |

□ > 0

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f(x)$ | signe de $a$ | 0 | signe de $-a$ | 0 | Signe de $a$ |

**Exercice 10**

Courbe 1 : $a < 0$; $\Delta < 0$ le tableau de signe est

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $P(x)$ | - |

Courbe 2 : $a > 0$; $\Delta > 0$ le tableau de signe est

| $x$ | $-\infty$ $x_1$ $x_2$ $+\infty$ |
|---|---|
| $P(x)$ | + 0 - 0 + |

Courbe 3 : $a > 0$; $\Delta = 0$ le tableau de signe est

| $x$ | $-\infty$ $x_0$ $+\infty$ |
|---|---|
| $P(x)$ | + 0 + |

**Exercice 11**

1 ) $f(x) = a(x - u)(x - v)$ ; 2 ) $f(x) = a(x - r)^2$

**Exercice 12**

1) $f(x) = 3(x+6)(x-2)$ ; 2) $f(x) = -2(x+7)^2$ ; 3) $f(x) = 5\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{8}{7}\right)$

**Exercice 13**

$f(x) = (3x+5)(x-1)$ ; $g(x) = (0{,}01x + 0{,}85)(x-5)$ ; $h(x) = (-2x + 2\sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

$k(x)$ n'est pas factotisable.

**Exercice 14**

$$f(x) = \frac{1}{3}(x+3)(x-6) \quad ; g(x) = \frac{1}{3}\left(x-1+\sqrt{7}\right)\left(x-1-\sqrt{7}\right)$$

$$h(x) = -2\left(x - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}\right) \quad ; \quad k(x) = \frac{4}{9}\left(x - \frac{9}{4}\right)^2$$

**Exercice 15**

Le tableau de signe de $f_1(x)$ est

| $x$ | $-\infty$ $-0{,}5$ $4$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f_1(x)$ | + 0 - 0 + |

Ainsi le signe de $f_1(x)$ est $\forall x \in ]-\infty; -0{,}5[ \cup ]4; +\infty[, f_1(x) > 0$

$$\forall x \in ]-0{,}5; 4[, f_1(x) < 0$$

$$\forall x \in \{-0{,}5 ; 4\}, f_1(x) = 0$$

De même $\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) > 0$ ;

$$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{5}{2}\right[ \cup ]1; +\infty[, f_3(x) < 0$$

$\forall x \in \left]-\frac{5}{2};1\right[$ , $f_3(x) > 0$

$\forall x \in \left\{-\frac{5}{2};1\right\}$, $f_3(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}, f_4(x) < 0$

$\forall x \in ]-\infty ;1[ \cup ]1 ;+\infty[$ , $f_5(x) < 0$ et $f_5(1) = 0$

**<u>Exercice</u> 16**

1) $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) > 0$ ; 2) $\forall x \in [-1;1], f_2(x) > 0$ ; 3) $\forall x \in \left[-\frac{3}{10};\frac{3}{10}\right], f_3(x) < 0$

4) $\forall x \in [2 ;5], f_4(x) > 0$ ; 5) $\forall x \in [0 ; +\infty[$ , $f_5(x) < 0$

6) $\forall x \in [0 ;1[$ , $f_6(x) < 0$ et $\forall x \in ]1 ; 3[$ , $f_6(x) > 0$ et $f_6(1) = 0$

**<u>Exercice</u> 17**

**1)** $x_1 = -\frac{1}{3}$ et $x_1 + x_2 = \frac{1}{6}$ donc $x_2 = \frac{1}{2}$

**2)** $x_1 = -\sqrt{3}$ et $x_1.x_2 = -\sqrt{6}$ donc $x_2 = \sqrt{2}$

**3)** $x_1 = a$ et $x_1.x_2 = -2a^2$ donc $x_2 = -2a$

**<u>Exercice</u> 18**

a) $S^2 - 4P = 16$ donc ( $u$ ;$v$) est solution de l'équation $X^2 - 2X - 3 = 0$ ainsi ($u$ ;$v$) = (-1 ;3) ou ($u$ ;$v$)= (3 ;-1)

b) $S^2 - 4P = -23$ donc le système n'a pas de solution.

c) $\begin{cases} u - v = 6 \\ uv = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + (-v) = 6 \\ u.(-v) = -16 \end{cases}$ ainsi $u = 8$ et $v = 2$

**<u>Exercice</u> 19**

L = longueur et l = largeur on a : $\begin{cases} 2(L + l) = 60 \\ L.l = 221 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L + l = 30 \\ L.l = 221 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L = 17 \\ l = 13 \end{cases}$

**<u>Exercice</u> 20**

a) l'équation $x^2 + x - 132 = 0$ a pour solution $S_{\mathbb{R}} = \{11; 12\}$

b) $x^2 + x\sqrt{3} + 4 = 0$ , □ = - 13 donc il n'y a pas de solution

c)$x^2\sqrt{2} - 3x + \sqrt{2} = 0$, □□= 1 donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right\}$;

d) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1 = 0$ , $\Delta = \frac{1}{4}$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{-2; -1\}$;

e) $35x^2 - 26x - 48 = 0$, □ = 7396 donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{6}{7}; \frac{8}{5}\right\}$.

**<u>Exercice</u> 21**

a) $x+2x^2+1=0$, $\Delta = -7$ pas de solution ; b) $x^2 - x = 1$, $\Delta = 5$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

c) $x(8-x)+1=0$, $\Delta = 68$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{4-\sqrt{17}; 4+\sqrt{17}\}$.

**<u>Exercice</u> 22**

a) $x^2 - 2x - 24 > 0$ $\Delta = 100$; $x1 = -4$; $x2 = 6$ $S_{\mathbb{R}} = ]-\infty; -4[ \cup ]6; +\infty[$ ;

b) $x^2 - 3x - 1 \leq 0$ $S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$ ; c) $S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty; 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right[ \cup \left]2 + \frac{2\sqrt{3}}{2}; +\infty\right[$ ;

d) $5x^2 + 1 < 3x$ ; $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

e) $-x^2 \geq x + 1$ $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

f) $x^2\sqrt{7} + 6x - \sqrt{7} \geq 0$. $S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty; \frac{-6-2\sqrt{2}}{2\sqrt{7}}\right] \cup \left[\frac{-6+2\sqrt{2}}{2\sqrt{7}}; +\infty\right[$

**<u>Exercice</u> 23**

Résolvons l'inéquation $x \geq x^2$ . ce qui équivaut à $x(x-1) \leq 0$ et la solution est $[0; 1]$

**<u>Exercice</u> 24**

1-a) ($C_f$) n'a aucun point d'intersection avec l'axe des abscisses donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$ .

a) ($C_g$) coupe l'axe des abscisses au point O. donc $S_{\mathbb{R}} = \{0\}$
b) ($C_h$) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses -2,25 et -3,75, donc $S_{\mathbb{R}} = \{-2,24 ; -3,75\}$.

2-a) ($C_f$) est situé au-dessus de l'axe des abscisses, donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

a) ($C_g$) est situé au-dessus de l'axe des abscisses, donc $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.
b) D'après le graphique, on a : $S_{\mathbb{R}} = ]-\infty ; -3,75] \cup [-2,25 ; +\infty[$.

**<u>Exercice</u> 25**

a) $\sqrt{x+1} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \ (I_1) \\ x+2 \geq 0 \ (I_2) \\ x+1 = (x+2)^2 \ (E) \end{cases}$ $I_2 \ et I_2 \Leftrightarrow x \in \lfloor -1. +\infty \rfloor$

(E) n'a pas de solution donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

b) $\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \ (I_1) \\ \frac{1}{2}x \geq 0 \ (I_2) \\ x+1 = (\frac{1}{2}x)^2 \ (E) \end{cases}$ ; $I_2 \ et I_2 \Leftrightarrow x \in \lfloor 0. +\infty \rfloor$

appelons Ev l'intervalle $\lfloor 0. +\infty \rfloor$ . les solution de (E) sont $2 + 2\sqrt{2} \in$ E v et $2 - 2\sqrt{2}$ qui n'appartient pas à Ev donc $S_{\mathbb{R}} = \{2 + 2\sqrt{2}\}$ ;

c) $\sqrt{x^2+9}=1-x \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+9 \geq 0 \ (I_1) \\ 1-x \geq 0 \ (I_2) \\ x^2+9=(1-x)^2 \ (E) \end{cases}$ ; $I_2 \, et I_2 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; 1]$; (E) a pour solution -4 ∈ E v donc $S_{\mathbb{R}} = \{-4\}$ ;

d) $\sqrt{x^2-2x-3}=x+1 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3 \geq 0 \ (I_1) \\ x+1 \geq 0 \ (I_2) \\ x^2-2x-3=(x+1)^2 \ (E) \end{cases}$ $\quad I_2 \, et I_2 \Leftrightarrow x \in \{-1\} \cup [3.+\infty]$

(E) a pour solution -1 ∈ E v donc $S_{\mathbb{R}} = \{-1\}$

e) $\sqrt{x^2-2x}=3+x$ de même $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{9}{8}\right\}$

**<u>Exercice</u> 26**

a) $\sqrt{x^2-2x} \leq 3+x \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x \geq 0 \ (I_1) \\ 3+x \geq 0 \ (I_2) \\ x^2-2x \leq (3+x)^2 \ (I_3) \end{cases}$ $\quad I_2 \, et I_2 \Leftrightarrow x \in [-3,0] \cup$ $[2;+\infty[$; $I_3 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{9}{8};+\infty\right[$ ainsi $S_{\mathbb{R}} = \left[-\frac{9}{8};0\right] \cup [2;+\infty[$ ;

b) $\sqrt{-x^2+3x+4} \leq \frac{1}{2}x+2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x+4 \geq 0 \ (I_1) \\ \frac{1}{2}x+2 \geq 0 \ (I_2) \\ -x^2+3x+4 \leq (\frac{1}{2}x+2)^2 \ (I_3) \end{cases}$ $\quad I_2 \, et I_2 \Leftrightarrow$ $x \in [-1,4]$; $I_3 \Leftrightarrow x \in [-\infty;0[ \cup \left[\frac{4}{5};+\infty\right[$ ainsi $S_{\mathbb{R}} = [-1;0] \cup \left[\frac{4}{5};4\right]$ ;

c) $\sqrt{5x+6} \leq x+2$ ;on obtient $S_{\mathbb{R}} = [-1;2]$

d) $\sqrt{9-x} \leq x-3$ on obtient $S_{\mathbb{R}} = [3;9]$.

**<u>Exercice</u> 27**

a) $4x^4-9x^2+2=0$ ; on pose$X = x^2 et \ on \ a \ X^2-9X+2=0 \ on \ résoud \ et \ on \ a \ X = 2 \ ou \ X = \frac{1}{4}$ $et \ donc \ x = -\sqrt{2} \ ou \ x = \sqrt{2} \ ou \ x = -\frac{1}{2} \ ou \ x = \frac{1}{2}$ $\quad S_{\mathbb{R}} = \left\{-\sqrt{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\sqrt{2}\right\}$

b) $x^4+3x^2-4=0$ $S_{\mathbb{R}} = \{-1;1\}$ ;

c) $x^2+\sqrt{3}+\frac{6}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^4+\sqrt{3}x^2+6=0$ ; on pose$X = x^2 et \ on \ a \ X^2+\sqrt{3}X+6=0$ cette équation n'a pas de solution donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

d) $\frac{1}{5}x+2\sqrt{x}-5=0$ on pose$X = \sqrt{x}$ $et \ on \ a \ \frac{1}{5}X^2+2X-5=0$ on obtient $S_{\mathbb{R}} = \left\{(5\sqrt{2}-5)^2\right\}$

## <u>Exercices de renforcement / Approfondissement</u>

**<u>Exercice 28</u>**

1) $3x^2-5x-12=14x+2 \Leftrightarrow 3x^2-19x-14=0$ cette équation a pour solution $-\frac{2}{3}$ ; 7

2) En remplaçant ces valeurs dans l'équation de la droite on obtient les coordonnées des points d'intersection comme suit $\left(-\frac{2}{3};-\frac{34}{3}\right)$ $et(7;36)$

**Exercice 29**

1- $12x-3>25x^2-8x-142 \Leftrightarrow 25x^2-20x-139<0$ inéquation qui a pour solution $]-1{,}99; 2{,}79[$

2-Sur l'intervalle$]-\infty; -1{,}99[\ \cup\ ]2{,}79; +\infty[$ la courbe est au dessus de la droite
et sur l'intervalle$]-1{,}99; 2{,}79[$ la courbe est au dessous de la droite . La courbe et la droite se coupent aux points d'abscisses $x_1$= -1,99 et $x_2$ = 2,79

**Exercice 30**

1) $a<0$ et $f(0)=c=\ -10$

2) Le sommet est atteint en $x=-\frac{b}{2a}=-3$ d'où $b=6a$ et $\Delta$=$36a^2$+$40a$ ; la forme canonique est $f(x)=a\left[(x+3)^2-\frac{9a+10}{a}\right]$

3) $f(x)=ax^2+6ax-10$

4) $f(-3)=\ -5 \Leftrightarrow a=-\frac{5}{3}$ ; $b=6a=-10$

**Exercice 31**

a) $\begin{cases}\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{5}{2}\\ uv=-\frac{2}{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{u+v}{uv}=\frac{5}{2}\\ uv=-\frac{2}{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u+v=-\frac{5}{3}\\ uv=-\frac{2}{3}\end{cases}$

la résolution de ce système donne pour solution $u$=-$\frac{1}{3}$ et $v=2$ ou $u$=2 et $v=-\frac{1}{3}$

b) $\begin{cases}\frac{1}{u}-\frac{1}{v}=-\frac{26}{5}\\ uv=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{v-u}{uv}=-\frac{26}{5}\\ uv=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u-v=-\frac{26}{5}\\ uv=-1\end{cases}$

En posant $v'$ = -$v$ le système devient $\begin{cases}u+v'=-\frac{26}{5}\\ uv'=1\end{cases}$

La résolution de ce système donne $u=-5$ et $v=\frac{1}{5}$ ou $u=-\frac{1}{5}$ et $v=5$

c) $\begin{cases}u^2+v^2=25\\ uv=12\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u^2+v^2=25\\ u^2v^2=144\end{cases}$

En posant $u' = u^2$ et $v' = v^2$ le système devient $\begin{cases}u'+v'=25\\ u'v'=144\end{cases} \Rightarrow \Delta=25^2-4\times 144=49$ donc $u'=9$ et $v'=16$ ou $u'=16$ et $v'=9$

puisque $u' = u^2$ et $v' = v^2$ on a $u$ = 4 et $v$ = 3 ou $u$ = -4 et $v$ = -3 ou $u$ = 3 et $v$ = 4 ou $u$ = -3 et $v$ = -4.

Donc $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ = {(4 ;3),(-4 ;-3),(3 ;4),(-3 ;-4)}

d) $\begin{cases}u^3+v^3=19\\ uv=-6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u^3+v^3=19\\ u^3v^3=-6^3\end{cases}$

En posant $u' = u^3$ et $v' = v^3$ le système devient : $\begin{cases}u'+v'=19\\ u'v'=-6^3\end{cases}$ donc $\Delta=19^2-4\times(-6^3)=35^2$

On a donc $u' = -8$ et $v' = 27$ ou $u' = 27$ et $v' = -8$ d'où puisque $u' = u^3$ et $v' = v^3$ on a :
$u = -2$ et $v = 3$ ou $u = 3$ et $v = -2$ donc $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(-2;3), (3;-2)\}$

**<u>Exercice</u> 32**

$(3 - x)(x^2 - 5x + 6) > 0$

$(3 - x)(x^2 - 5x + 6) = (3 - x)(x - 2)(x - 3) = -(x - 3)^2(x - 2)$
Or quelque soit le réel $x$, $(x - 3)^2 > 0$ donc le signe du polynôme dépend de $2 - x$
Ainsi $\forall x \in ]-\infty ; 2[$, $2 - x > 0$ donc $S_{\mathbb{R}} = ]-\infty ; 2[$.

a) $(2x^2 - 7x)(-x^2 - 1) \geq 0$.

Or pour tout nombre réel $x$, $(x^2 + 1) > 0$ donc le signe de $(2x^2 - 7x)(-x^2 - 1)$ est celui de $(7x - 2x^2)$. Or $7x - 2x^2 = x(7 - 2x)$

Donc pour tout réel $x \in ]-\infty ; 0] \cup [3,5 ; +\infty[$, $x(7 - 2x) \leq 0$ ;

pour tout réel $x \in [0 ; 3,5]$, $x(7 - 2x) \geq 0$

on en déduit que $S_{\mathbb{R}} = [0 ; 3,5]$

c) $(4 - x^2)(3x^2 + 8x - 3) < 0$.

Posons $P(x) = 3x^2 + 8x - 3$. □ $= 8^2 - 4\times3\times(-3) = 100$ donc $P(x) = (x + 3)(3x - 1)$

| $x$ | $-\infty$ $\quad -3$ | $-2$ | $\frac{1}{3}$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4 - x^2$ | - | - | + | + | - |
| $3x^2 + 8x - 3$ | + | - | - | + | + |
| $(4 - x^2)(3x^2 + 8x - 3)$ | - | + | - | + | - |

On déduit de ce tableau que $S_{\mathbb{R}} = ]-\infty ; -3[ \cup ]-2 ; \frac{1}{3}[ \cup ]2 ; +\infty[$

**<u>Exercice</u> 33**

$2x^4 - 7x^2 + 6 \leq 0$

Posons $X = x^2$ l'inéquation devient $2X^2 - 7X + 6 \leq 0$. □ $= 7^2 - 4\times2\times6 = 49 - 48 = 1$

On obtient donc $2X^2 - 7X + 6 = (2X - 3)(X - 2)$ puisque $X = x^2$ alors on a :

$$2X^2 - 7X + 6 = \left(\sqrt{2}x - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$$

| $X$ | $-\infty$ | $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ | $-\sqrt{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ | $\sqrt{2}$ $\quad +\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2 - 3$ | + | - | - | + | + |
| $x^2 - 2$ | + | + | - | - | + |
| $(2x^2 - 3)(x^2 - 2)$ | + | - | + | - | + |

D'après le tableau ci-dessus on a : $S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty ; -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[-\sqrt{2} ; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right] \cup \sqrt{2} ; +\infty\left[\right.$

b) $-x^4 - x^2 + 12 > 0$

Posons X = $x^2$ donc $-X^2 - X + 12 = -(X+4)(X-3) = -(x^2+4)(x^2-3)$

D'où $-x^4 - x^2 + 12 = (x^2+4)(3-x^2)$ on en déduit que $S_{\mathbb{R}} = \left]-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right[$.

c) $2x^2 - 7x^4 < 0$.

$2x^2 - 7x^4 = x^2(2 - 7x^2)$ donc $S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty; -\sqrt{\frac{2}{7}}\right[ \cup \left]\sqrt{\frac{2}{7}}; +\infty\right[$

**<u>Exercice</u> 34**

1- Déterminons les réels $a$, $b$ et c tel que $P(x) = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c)$.
   $P(x) = (x^2 - 1)(-3x^2 - 1)$ donc $a = -3$ , $b = 0$ , c = -1.
   **<u>NB</u>** : On pourra utiliser la méthode des coefficients indéterminés ou faire une division euclidienne.
2- Les zéros de P
   $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$ donc $x = 1$ ou $x = -1$. Ainsi les zéros de P sont -1 et 1.

**<u>Exercice</u> 35**

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 3x^2 + 2x - 8 \geq 0\}$
   $3x^2 + 2x - 8 = (3x - 4)(x + 2)$ donc $D_f = \left]-\infty; -2\right] \cup \left[\frac{4}{3}; +\infty\right[$
b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2(x-1)^2 + x}}$
   $D_g = \{x \in \mathbb{R} / 2(x-1)^2 + x > 0\}$ or $2(x-1)^2 + x = 2x^2 - 3x + 2$
   Or □ = $3^2 - 4\times2\times2 = -7$ donc pour tout nombre réel $x$, $2x^2 - 3x + 2 > 0$.
   Dg = $\mathbb{R}$.

c) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2(x-1)^2 - x}}$

$D_h = \{x \in \mathbb{R} / 2(x-1)^2 - x > 0\}$ or $2(x-1)^2 - x = 2x^2 - 5x + 2$

□ = $5^2 - 4\times2\times2 = 25 - 16 = 9$

$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$ et $x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$. Donc $D_h = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[ \cup \left]2; +\infty\right[$

**<u>Exercice</u> 36**

Je détermine le réel $m$ pour que ($C_f$) et (D) :

**1- aient exactement un point d'intersection**

Il s'agit ici de résoudre l'équation $x^2 + x + 1 = 3x + m \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - m = 0$

□ = $4 - 4(1 - m) = 4m$ . ($C_f$) et (D) ont exactement un point d'intersection si □ = 0 c'est-à-dire $m = 0$.
On a ainsi $x_o = -1$ et $y_0 = -3$. Le point d'intersection de ($C_f$) et (D) est le point □(-1 ;-3)

**2- aient exactement deux points d'intersection**

($C_f$) et (D) ont exactement deux points d'intersection si □ > 0, c'est-à-dire $m > 0$. Dans ces conditions on a : $x_1 = \frac{2-\sqrt{4m}}{2} = 1 - \sqrt{m}$ ou $x_2 = 1 + \sqrt{m}$ avec $m > 0$.

Ainsi pour $x = 1 - \sqrt{m}$ on a $y = 3 - 3\sqrt{m} + m$ et pour $x = 1 + \sqrt{m}$ on a
$y = 3 + 3\sqrt{m} + m$

Donc ($C_f$)∩(D) = $\{A(1 - \sqrt{m}; 3 - 3\sqrt{m} + m), B(1 + \sqrt{m}; 3 + 3\sqrt{m} + m)\}$ avec $m > 0$.

**3- n'aient aucun point d'intersection.**

S'il n'y a aucun point d'intersection alors □ < 0 , c'est-à-dire $m < 0$

**<u>Exercice</u> 37**

1- Factorisation de $x^4 - 6x^2 + 9$ .
$x^4 - 6x^2 + 9 = (x^2 - 3)^2$

2- Je détermine l'ensemble $I_1$.

$x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -\sqrt{3}] \cup \sqrt{3}; +\infty[$ donc $I_1 = ]-\infty; -\sqrt{3}] \cup \sqrt{3}; +\infty[$

Je détermine l'ensemble $I_2$

$x^2 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ donc $I_2 = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

3- Expression simplifiée de $f$

- Sur $I_1$

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 6x^2 + 9} = \sqrt{(x^2 - 3)^2} = x^2 - 3 \text{ pour } x \in I_1$$

- Sur $I_2$

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 6x^2 + 9} = \sqrt{(x^2 - 3)^2} = 3 - x^2 \text{ pour } x \in I_2$$

**<u>Exercice</u> 38**

1- Ensemble de validité de (E).

$E_v = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2- Calcule de $X^2$

$$X^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

3- On sait que $X = x + \frac{1}{x}$ et que $X^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$. Or $x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ donc on déduit que $x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = X^2 - 2 + X - 4 = X^2 + X - 6$ d'où

$$x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 6 = 0 \text{ avec } X = x + \frac{1}{x}$$

4- Résolution de l'équation $X^2 + X - 6 = 0$

$X^2 + X - 6 = (X - 2)(X + 3)$ donc les solutions de l'équation $X^2 + X - 6 = 0$ sont 2 et -3.

Solutions de l'équation (E).

$$X=2 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \text{ donc } x=1$$

$$X=-3 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=-3 \Leftrightarrow x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$

Donc $S_{\mathbb{R}}=\left\{1;\frac{-3-\sqrt{5}}{2};\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

**Exercice 39**

1- Pour $x^2+x+1=0$ on a : □ = 1 – 4 = - 3 donc □ < 0 ainsi $D_f=\mathbb{R}$.
2- Nombre de points d'intersection de (C) et la droite d'équation y = 1.

Il suffit pour cela de résoudre l'équation $\frac{1-2x^2}{x^2+x+1}=1 \Leftrightarrow 1-2x^2=x^2+x+1$

$3x^2+x=0 \Leftrightarrow x(3x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-\frac{1}{3}$ donc (C) et la droite d'équation y = 1 ont deux points d'intersection d'abscisses respectives 0 et $-\frac{1}{3}$.

**3- Je démontre que le numérateur est majoré par 1 sur $\mathbb{R}$.**

On sait que pour tout réel $x$, $-2x^2 \leq 0$ donc $1-2x^2 \leq 1$. On dit que $1-2x^2$ est majoré par 1

On sait que $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ donc

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ d'où $x^2+x+1 \geq \frac{3}{4}$ donc le dénominateur est minoré par $\frac{3}{4}$.

**4- Majoration de $f$ sur $\mathbb{R}$.**

On sait que pour tout réel $x$, $1-2x^2 \leq 1$ (1) et $x^2+x+1 \geq \frac{3}{4}$ donc $\frac{1}{x^2+x+1} \leq \frac{4}{3}$ (2)

Des relations (1) et (2) on déduit que $\frac{1-2x^2}{x^2+x+1} \leq \frac{4}{3} \Rightarrow f(x) \leq \frac{4}{3}$ donc $f$ est majoré par $\frac{4}{3}$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 40**

**1-** N étant le symétrique de M par rapport à A, alors on a : $x_N=2x_A-x_M$ et $y_N=2y_A-y_M$.
Si $x_M=13$ alors $x_N=-3$ or $-3 \notin D_g$ donc N n'est pas un point de (C) si $x_M=13$.

2- Je démontre que dans le cas où N appartient à la courbe (C) les abscisses de M et N vérifient l'équation $x^2 - 10x - 37 = 0$.

Soit $x$ l'abscisse du point M. Alors M étant un point de (C), on a : $y_M = \frac{1}{x+3} + 4$

N étant le symétrique de M par rapport à A on a : $x_N = 2x_A - x$ et $y_N = 2y_A - y_M$

Sachant que N est un point de la courbe (C) on a :

$y_N = \frac{1}{x_N + 3} + 4$ or $x_N = 2 \times x_A - x = 2 \times 5 - x$ donc $x_N = 10 - x$ et on en déduit que

$y_N = \frac{1}{13 - x} + 4$. De la relation $y_N = 2y_A - y_M$ on déduit que

$\frac{1}{13-x} + 4 = 2 \times 8 - \left(\frac{1}{x+3} + 4\right) \Leftrightarrow \frac{1}{13-x} = 8 - \frac{1}{x+3}$ de cette égalité on obtient l'équation suivante $x^2 - 10x - 37 = 0$.

1- Je résous cette équation et j'en déduis les coordonnées de M et N.

Soit à résoudre l'équation $x^2 - 10x - 37 = 0$.

$\Delta = 10^2 - 4 \times (-37) = 248$

$x_1 = \frac{10 - 2\sqrt{62}}{2} = 5 - \sqrt{62}$ ou $x_2 = \frac{10 + 2\sqrt{62}}{2} = 5 + \sqrt{62}$

Pour $x_M = 5 - \sqrt{62}$ on a $y_M = \frac{1}{8 - \sqrt{62}} + 4$ et

$x_N = 2x_A - x_M = 10 - \left(5 - \sqrt{62}\right) = 5 + \sqrt{62}$ et $y_N = 2y_A - y_M = 16 - \left(\frac{1}{8 - \sqrt{62}} + 4\right) = 12 - \frac{1}{8 - \sqrt{62}}$

Pour $x_M = 5 + \sqrt{62}$ on a $y_M = \frac{1}{8 + \sqrt{62}} + 4$ et

$x_N = 2x_A - x_M = 10 - \left(5 + \sqrt{62}\right) = 5 - \sqrt{62}$ et $y_N = 2y_A - y_M = 16 - \left(\frac{1}{8 + \sqrt{62}} + 4\right) = 12 - \frac{1}{8 + \sqrt{62}}$

## Situation complexe

**Exercice 41**

L'aire A de la rizière est : $A = x^2 + (50 - x)(30 - x)$ donc $A = 2x^2 - 80x + 1500$. A est une fonction polynôme du second degré avec $a = 2 > 0$. La fonstion A possède un minimum atteint en $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-80}{4} = 20$

Donc l'aire minimale de la rizière est $A(20) = 2(20)^2 - 80 \times 20 + 1500 = 700$

D'où l'aire minimale de la rizière est 700 $m^2$.

**<u>Exercice</u> 42**

soit $A$ l'aire de la nouveau terrain et $x$ la longueur diminuée

on a :

$A = (40 - x)(25 - x)$

$A = 672{,}75 \;\Leftrightarrow (40 - x)(25 - x) = 672{,}75 \;\Leftrightarrow x^2 - 65x + 327{,}25 = 0$

On obtient $x = \frac{119}{2} = 59{,}5$ ou $x = \frac{11}{2} = 5{,}5$

or $x < 40$ donc $x = \frac{11}{2}$

ainsi la longueur du nouveau terrain est 34,5 m et la largeur est 19,5 m

**<u>Exercice</u> 43**

Soit $q$ le taux d'intérêt

le capital de départ est 500 000

le 10 octobre 2020, il recoit $500\,000 + 500\,000 \times \frac{q}{100}$ soit $500\,000 \times \left(1 + \frac{q}{100}\right)$

le 10 octobre 2021, il recoit $500\,000 \times \left(1 + \frac{q}{100}\right) + 500\,000 \times \left(1 + \frac{q}{100}\right) \times \frac{q}{100}$

soit $500\,000 \times \left(1 + \frac{q}{100}\right)^2$ or la somme reçue le10 octobre 2021 est 561 800

on a donc

$500\,000 \times \left(1 + \frac{q}{100}\right)^2 = 561\,800$

$\left(1 + \frac{q}{100}\right)^2 = 1{,}1236$

$1 + \frac{q}{100} = 1{,}06$

$q = 6$

ainsi le taux d'intérêt chaque année est 6 %.

# 2 DÉNOMBREMENT

## SITUATION D'APPRENTISSAGE

| Constituants de la situation | Exemples de questions possibles | Réponses possibles des élèves |
|---|---|---|
| Contexte | Où et quand se déroule la scène ? | Le cabinet d'avocats « LAW FOR CITIZEN (LFC) » |
| Circonstances | Quel est le problème auquel Le cabinet d'avocats est confronté ? | Ce cabinet envisage ouvrir et donc redéployer une partie de ses avocats dans un autre pays où on parle l'arabe ou l'anglais.<br>Pour minimiser les coûts, il compte n'envoyer que des avocats qui parlent l'arabe et l'anglais mais pas le français. |
| Tâche | Qu'est-ce que des élèves en classe de première se proposent de faire ? | Ils se proposent d'aider ce cabinet à déterminer le nombre d'avocats à redéployer |

## DECOUVERTE DES HABILETES

**Activité 1**

1) Les nombres : 15 ; 77 ; 3 ; 9 et 13 sont des éléments de A.
2) On a : $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.

**Exercice de fixation 1**

1) On écrit : $F = \{\text{Kalifa}; \text{Anoh}; \text{Fodé}, \text{Yves}; \ \text{Fabienne}\}$.
2) L'ensemble F possède cinq éléments. Il est donc fini.

**Activité 2**

Déterminons d'abord tous les éléments de cet ensemble. On trouve :-4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4. L'ensemble F possède donc 9 éléments.

**Exercice de fixation 2**

On a $\text{card}(A) = 7$ et $\text{card}(B) = 1$.

**Activité 3**

1) On a : $A = \{112\,;114\,;116\,;118\,;120\,;122\,;124\,;126\}$ et

   $B = \{111; 114; 117; 120; 123; 126\}$

2) On a : $C = \{114; 120; 126\}$

**Exercice de fixation 3**

1) On a : $C = \{\theta; 2;\ \delta\}$
2) B est contenu dans $C \cap B$ : Faux
   - C est contenu dans $C \cap B$ : Faux
   - $C \cap B$ est contenu dans B :Vrai
   - $C \cap B$ est contenu dans C : Vrai

**Activité 4**

1. On a : $A = \{111; 114; 117; 120; 123; 126\}$ et $B = \{115; 120; 125\}$
2. On a : $G = \{111; 114; 115; 117; 120; 123; 125; 126\}$

**Exercice de fixation 4**

1. $C = \left\{\theta;\ -\sqrt{2};\ \sqrt{2}; 0{,}33;\ P;\ \pi; Q;\ 3{,}14;\ 2;\ \frac{1}{3};\ 0;\ \delta\right\}$ ;

2. a) Faux ; b)Vrai ; c) Vrai

**Activité 5**

On obtient les ensembles suivants : $A = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$ et $B = \{6\}$. Ces deux ensembles n'ont pas d'éléments communs.

**Exercice de fixation 5**

1) Deux ensembles qui n'ont aucun élément commun sont dits disjoints.
2) Le chiffre 2 est à la fois un nombre premier et un nombre pair. Il se retrouve 2 donc dans les deux ensembles. Les deux ensembles ne sont ne pas disjoints.
   La propriété est fausse.

**Activité 6**

1) On obtient : $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
2) $A = \{3; 6\}$ et $B = \{1; 2; 4; 5\}$. Ces deux ensembles sont bien disjoints et puis leur réunion est l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ c'est-à-dire E. Donc $A \cap B = \emptyset$ et $E = A \cup B$

**Exercice de fixation 6**

1.Les ensembles A et B sont complémentaires dans la figure 2.

2. On a :

   a) Le complémentaire de P dans K est l'ensemble :$\{1; 4; 7\}$
   b) Le complémentaire de Q dans K est l'ensemble :$\{1; 4; 7; 2; 3; 5; 6\}$

**Activité 7**

1) A l'aide de diagramme, on trouve : $\text{card}(C \cup N) = 10 + 5 + 5$ soit $\text{card}(C \cup N) = 20$
2) D'après les données, $\text{card}(C \cap N) = 5$. Donc $\text{cardC} + \text{cardN} - \text{card}(C \cap N) = 20$.

En définitive : $\text{card}(C \cup N) = \text{cardC} + \text{cardN} - \text{card}(C \cap N)$

**Exercice de fixation 7**

Notons A l'ensemble des professeurs de la 1èreD1 et B ceux de la 1èreD2.

On a $\text{cardA} = \text{cardB} = 8$ et $\text{card}(A \cap B) = 4$. $A \cup B$ est l'ensemble des professeurs des deux classes. En appliquant la propriété ci-dessus, on obtient : $\text{card}(A \cup B) = 12$ .

Le nombre professeurs des deux classes est donc 12.

**Activité 8**

1) a) L'ensemble C de tous les résultats possibles est : $C =$
$\{(1, F); (1, P); (2, F); (2, P); (3, F); (3, P); (4, F); (4, P); (5, F); (5, P); (6, F); (6, P)\}$.

b) Il résulte de la question précédente que : $\text{card}(C) = 12$

2) On a : $\text{cardA} = 6$ et $\text{cardB} = 2$. Donc $\text{card}(C) = (\text{cardA})x(\text{cardB})$

**Exercice de fixation 8**

1) Vrai
2) Faux
3) Faux

**Activité 9**

1) On recopie l'arbre de choix puis on le complète. Ensuite on compte les mots obtenus. On trouve au total 9 mots
2) a) On a : $ExE = \{AA; AB; AC; BB; BA; BC; CC; CA; CB\}$ . On trouve exactement les mêmes que dans l'arbre de choix.

**Exercice de fixation 9**

Un numéro de téléphone est un élément de l'ensemble $L^{10}$. C'est donc un 10-liste

Donc le nombre de numéros de téléphones est égal à : $8^{10}$.

**Activité 10**

On peut par exemple s'aider d'un arbre de choix dont il n'est pas nécessaire de dessiner toutes les branches.
Soit $V_1$ ; $V_2$ et $V_3$ les trois véhicules.

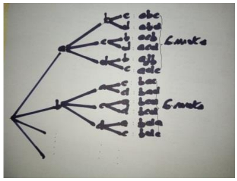
$V_1$ a 6 possibilités de stationner ; une fois qu'il stationne, $V_2$ a 5 possibilités de stationnemer et $V_3$ a quatre possibilités de stationner. En conclusion :

- Chacune des deuxièmes branches génère 4 stationnements possibles ;
- Chacune des premières branches génère 5 stationnements possibles ;
- Il y a 6 premières branches

Le nombre de stationnements possibles est 6x5x4 soit 120.

**Exercice de fixation 10**

1) D'après l'arbre de choix, chacune des quatre premières branches génère 6 mots. Le nombre de mots est donc : 4x6 soit 24 mots
2) Par exemple les mots BAC et CAB sont différents. Ensuite on ne peut pas répéter une lettre dans un mot. Donc un mot est un 3-arrangement.
   En appliquant la formule, on obtient : 4x3x2 soit 24 mots



**Activité 11 :**

On reprend l'arbre de choix de l'activité 10 mais cette fois-ci avec six véhicules.

On trouve au total : 6x5x4x3x2x1 stationnements possibles soit 120.

**Exercice de fixation 11**

Un rangement des cinq CD est une permutation des cinq CD.

Le nombre total de rangements est donc 5 ! soit 120.

**Activité 12 :**

1) Les tirages $\{1,3,5\}$ et$\{1; 5; 3\}$ sont les mêmes car les trois boules sortent en même temps il n'y a un aucun ordre de sortie à prendre en compte.

Tous les résultats sont : $\{1,2,3\}$ ; $\{1,2,4\}$ ; $\{1,2,5\}$ ; $\{1,3,4\}$ ; $\{1,3,5\}$ ; $\{1,4,5\}$ ; $\{2,3,4\}$ ; $\{2,3,5\}$ ; $\{2,4,5\}$ ; $\{3,4,5\}$.

2) Leur nombre donc 10.
3) Démontrons que $p\,!\,C_n^p = A_n^p$
   Chaque sous-ensemble à p éléments donne p ! permutations.
   Il y a $C_n^p$ sous-ensembles. Or une permutation de p éléments parmi n n'est rien d'autre qu'un arrangement de p éléments.
   Le nombre d'arrangements à p éléments est donc $p\,!\,C_n^p$ c'est-à-dire $A_n^p$

Donc : $p\,!\,\mathrm{C}_n^p = \mathrm{A}_n^p$. On divise les membres de l'égalité par p !; on obtient : $C_n^p = \frac{\mathrm{A}_n^p}{p!}$

**Exercice de fixation 12**

Un petit groupe de cinq personnes est une 5-combinaison.

Leur nombre total est donc $\binom{30}{5}$ . On sait que $\binom{30}{5} = \frac{A_{30}^5}{5!}$ . On trouve donc 142 506 petits groupes possibles.

**Activité 13**

1) a) n ! est le nombre de permutations de n éléments.

   b) On part de l'écriture $\mathrm{n}! = \mathrm{n}x(\mathrm{n}-1)x(\mathrm{n}-2)x \ldots x2x1$ ;

   On remarque que $(n-1)! = (\mathrm{n}-1)x(\mathrm{n}-2)x \ldots x2x1$ d'où le résultat.

   c) $6! = 6x5x4x3x2x1$ . On trouve $6! = 720$ et de même $5! = 120$

2) a) C'est le nombre d'arrangements de p éléments parmi n éléments.

   On trouve respectivement : $\mathrm{A}_{10}^3 = 720$ ; $\mathrm{A}_{20}^2 = 380$ ; $A_8^5 = 6\,720$.

   b) $\mathrm{n}! = \mathrm{n}x(\mathrm{n}-1)x(\mathrm{n}-2)x \ldots x(\mathrm{n}-\mathrm{p}+1)(\mathrm{n}-\mathrm{p})!$. Donc $\mathrm{n}! = \mathrm{A}_\mathrm{n}^\mathrm{p}(\mathrm{n}-\mathrm{p})!$.

3) On appelle une combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments est un sous-ensemble non ordonné de p éléments de cet ensemble.

   a) Toutes les combinaisons à 3 éléments de $E$ sont : {1,2,3} ; {1,2,4} ; {1,3,4} et {2,3,4}. On en déduit que $\mathrm{C}_4^3 = 4$

   b) On sait $\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{p} = \frac{\mathrm{A}_\mathrm{n}^\mathrm{p}}{\mathrm{p}!}$ d'où $\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{p} = \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)\ldots(\mathrm{n}-\mathrm{p}+1)}{\mathrm{p}!}$ qu'on peut écrire encore

   $\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{p} = \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)\ldots(\mathrm{n}-\mathrm{p}+1)(\mathrm{n}-\mathrm{p})(\mathrm{n}-\mathrm{p}-1)\ldots 2x1}{\mathrm{p}!(\mathrm{n}-\mathrm{p})(\mathrm{n}-\mathrm{p}-1)\ldots 2x1}$ et donc finalement on obtient

   $$\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{p} = \frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{p}!\,(\mathrm{n}-\mathrm{p})!}$$

   c) $\mathrm{C}_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!} = 120$ ; $\mathrm{C}_{20}^3 = \frac{20!}{20!17!} = 1140$ et $\mathrm{C}_4^4 = \frac{4!}{4!0!} = 1$

4) Pour tous nombres entiers naturels $n$ et $k$ tels que $1 \leq k \leq n$,

   a) $\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{n} = \frac{\mathrm{n}!}{n!0!} = 1$.

   b) $\mathrm{C}_{\mathrm{n}-1}^{\mathrm{p}-1} + \mathrm{C}_{\mathrm{n}-1}^\mathrm{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} = (n-1)!\,(\frac{1}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{1}{p!(n-p-1)!})$.

   On rend on même dénominateur puis on additionne.

   On trouve : $\mathrm{C}_{\mathrm{n}-1}^{\mathrm{p}-1} + \mathrm{C}_{\mathrm{n}-1}^\mathrm{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ d'où le résultat.

   c) $\mathrm{pC}_\mathrm{n}^\mathrm{p} = \mathrm{nC}_{\mathrm{n}-1}^{\mathrm{p}-1}$ se démontre en mettant $\frac{n}{p}$ en facteur dans la définition de $\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{p}$.

**Exercice de fixation 13**

1) $\frac{20!}{18!} = \frac{20x19x18!}{18!}$. Donc $\frac{20!}{18!} = 380$
2) On sait que : $C_{70}^{68} = C_{70}^{2}$. Soit donc $C_{70}^{68} = 2\ 415$.

## DES QUESTIONS D'EVALUATIONS

**Question 1** : Comment modéliser une expérience assimilable à un tirage simultané de $p$ objets pris parmi $n$ objets $(p \leq n)$ ?

**Exercice non corrigé**

1. $C_1^1 \times C_5^2 = 10$ ( il y'a une seule boule numérotée 1 et on tire deux boules parmi les 5 restantes
2. $C_3^3 = 1$ ( il y'a trois boules numérotées 1 ; 3 et 5 )

**Question 2** : Comment modéliser une expérience assimilable à un tirage successif de $p$ objets avec remise pris parmi $n$ objets ?

**Exercice non corrigé**

1. Un code est assimilable à un tirage successif avec remise de 4 chiffre Parmi 10 donc $10^4 = 10\ 000$ possibilités
2. Le chiffre 7 est fixé au début et les 4 chiffres paires à la fin il ne reste que qu' à tirer deux chiffres parmi les cinq chiffres impaires. Donc on a : $1^1 \times 5^2 \times 4^1 = 100$ possibilités

**Question 3** : Comment modéliser une expérience assimilable à un tirage successif de $p$ objets sans remise pris parmi $n$ objets. $(p \leq n)$ ?

**Exercice non corrigé**

1. $A_{32}^3 = 29\ 760$
2. $A_1^1 \times A_{31}^2 = 930$

**Question 3** : Comment modéliser une expérience assimilable à un tirage successif de $p$ objets pris chacun successivement p ensembles :
$E_1$ ; $E_2$ ; $E_3$ ;…. ; $E_p$ de cardinal respectifs non nuls : $n_1$ ; $n_2$ ; $n_3$ ;…. ; $n_p$

**Exercice non corrigé**

il y'a 20 consonnes et 10 chiffres donc on prend une consonne parmi les 20 et trois chiffres parmi les 10 chiffres. On a donc le nombre de codes possibles est : $20 \times 10^3 = 20\ 000$

## MES SEANCES D'EXERCICES

### EXERCICES DE FIXATION

**Exercice 1**

1) VRAI; 2) FAUX ; 3) VRAI ; 4) FAUX ; 5) FAUX ; 6) VRAI ; 7) VRAI ; 8) FAUX ; 9) VRAI

**Exercice 2**

1) $n^5$ est le nombre de 5-listes d'un ensemble à $n$ éléments.
2) $C_{12}^3$ est le nombre de 3-combinaisons d'un ensemble à 12 éléments.
3) 8! Est le nombre de permutations de 8 éléments.
4) 9x8x7x6 est $A_9^4$ c'est-à-dire le nombre de 4-arrangements de 9 éléments.

**Exercice 3**

1.D ; 2.C ; 3.B ; 4.B

**Exercice 4**

L'ensemble des nombres premiers inférieurs à 50 est :

$\mathrm{P} = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47\}$. Donc $\mathrm{cardP} = 15$

**Exercice 5**

L'ensemble des nombres entiers relatifs compris dans l'intervalle $[-5{,}75\ ;\ 6{,}01]$ est

$\{-5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Le cardinal est 12.

**Exercice 6**

1) $A \cap B = \{6; 12; 18\}$.

2) $A \cap B$ est l'ensemble des nombres qui appartiennent à la fois à A et à B.

**Exercice 7**

$G = \{1: 2; 3; 6; 9; 18\}$ et $H = \{1; 5; 7: 35\}$. Donc $G \cap H = \{1\}$.

*On dit que 18 et 35 sont premiers entre eux.*

**Exercice 8**

$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 15; 20\}$.

**Exercice 9**

$\mathrm{card}(\mathrm{E} \cup \emptyset) = \mathrm{cardE} + \mathrm{card}\emptyset - \mathrm{card}(\mathrm{E} \cap \emptyset)$. $\mathrm{card}\emptyset = 0$ et $\mathrm{E} \cap \emptyset = \emptyset$ d'où le résultat.

**Exercice 10**

$\mathrm{card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 40$

**Exercice 11**

L'ensemble de F est composé d'entiers strictement négatifs alors E est composé d'entiers positifs ou nuls. Donc E et F sont disjoints.

**Exercice 12**

$\mathrm{card}(A \cap B) = \mathrm{card}A + \mathrm{card}B - \mathrm{card}(A \cup B)$. Après calcul, $\mathrm{card}(A \cap B) = 0$ cela signifie que A et B n'ont pas d'éléments communs. Ils sont donc disjoints.

**Exercice 13**

1) Tous les éléments de A sont dans E.
2) $\overline{A} = \{b;\ -2; 3; 7; 9; 8\}$

**Exercice 14**

1) L'élève possède 14 billes dans sa poche.
2) Le complémentaire de V est l'ensemble des 6 billes bleues.

**Exercice 15**

Le nombre de couples est 320.

**Exercice 16**

$\mathrm{card}(A \cap B) = \mathrm{card}A + \mathrm{card}B - \mathrm{card}(A \cup B) = 10 + 15 - 19 = 6$.

**Exercice 17**

Le nombre de mots est $26^2$.

**Exercice 18**

Il y a dix chiffres. Chaque code PIN est un 4-listes. Le nombre de codes PIN est 10 000.

**Exercice 19**

Un résultat est 10-liste à partir de Face et Pile. Il y a donc $2^{10}$ résultats possibles.

**Exercice 20**

$4 \times 5 \times 3 = 60$

**Exercice 21**

Le nombre est 840.

**Exercice 22**

On peut s'aider d'un arbre de choix. On va noter E1 ; E2 et E3 les trois enfants.

On noter $C_1$ ; $C_2$ ; $C_3$ ; $C_4$ et $C_5$ les cadeaux.

E1 a 5 possibilités de recevoir son cadeau ; E2 à 4 possibilités de recevoir son cadeau et enfin E3 à 3 possibilités.

Le nombre de cas possibles est donc :60.

**Exercice 23**

Il y a 10 ! façons.

**Exercice 24**

Un mot est une permutation des cinq lettres. On dit que c'est anagramme.

Le nombre de mots est donc $5\,! = 120$

**Exercice 25**

Détermine le nombre de combinaisons de 5 éléments parmi 12.

Il y a 792 combinaisons possibles.

**Exercice 26**

Le nombre de rangements est $5^{10}$

**Exercice 27**

Notons D l'ensemble des dames et H celui des hommes.

Dans ce contexte, un couple est une paire. C'est un élément de l'ensemble HxD.

Ici HxD = DxH. Il y a donc 96 couples possibles.

**Exercice 28**

$C_{24}^{3} = 2024$

**Exercice 29**

$C_8^2 = 28$

**Exercice 30**

$A_{49}^{5} \times A_{10}^{1} = 2\,288\,260\,800$

**Exercice 31**

$C_{10}^3 \times C_5^2 = 28 = 1\ 200$

**EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT**

**Exercice 32**

Soit $\overline{\mathrm{A}}$ le complémentaire de A dans B. on a $\mathrm{cadB} = \mathrm{cardA} + \mathrm{card}\overline{\mathrm{A}}$.

Donc $\mathrm{cardA} \leq \mathrm{cardB}$.

Les ensembles A et B sont inclus dans $A \cup B$ d'où le résultat en utilisant la question 1).

**Exercice 33**

1. $6! = 720$
2. $4! \times 2! = 48$
3. On a : GFGFGG ou GGFGFG ou GFGGFG
   donc $4! \times 2! + 4! \times 2! + 4! \times 2! = 3 \times 48 = 144$
4. On a : FFGGGG ou GGFFGG ou GGGGFF
   donc $4! \times 2! + 4! \times 2! + 4! \times 2! = 3 \times 48 = 144$

**Exercice 34**

1. $C_{30}^4 = 27\ 405$
2. $C_{18}^4 = 3\ 060$
3. $C_{30}^4 - C_{18}^4 = 27\ 405 - \ 3\ 060 = 24\ 345$

**Exercice 35**

Il y a 24 lettres possibles ; ensuite les numéros chiffrés sont des 4-listes.
Le nombre total de véhicules à immatriculer est égal à : $24\text{x}10^4$ soit 240 000 véhicules.
*(La saturation est vite arrivée)*

**Exercice 36**

1) Un plat est un triplé (entrée ; plat de résistance ; dessert).
   Il y a donc 2x3x2 soit 12 types de plats possibles.
2) Ce sera une pomme pour elle au dessert. Il y donc 6 types de plats possibles qu'on peut lui servir.

**Exercice 37**

Le choix de trois pharmacies est une 3-combinaison.

Le nombre total de choix possibles est égal à 220.

**Exercice 38**

1) Un résultat du tirage est une 3-combinaison. Il y a donc 45 résultats possibles.
2) Là encore, on fait appel au complémentaire de A ; $\overline{\mathrm{A}}$: « on obtient des boules de la même couleur ». $\mathrm{card}\overline{\mathrm{A}} = \binom{3}{3} + \binom{5}{3} = 11.$

   Donc $\mathrm{cardA} = 45 - 11$ soit 34.

**Exercice 39**

1) Ces nombres sont des 5-listes. On obtient : $6^5$.
2) Ces nombres sont des 5-arrangements. On obtient : $A_6^5$.
3) Ces nombres sont des 3-listes. On obtient : $6^3$.
4) On obtient : 6x6x5.

**Exercice 40**

Il y a 5x4x3x2 programmations.

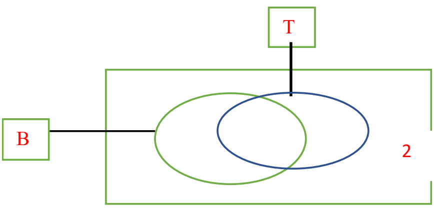
**Exercice 41**

1) Les résultats possibles sont des 5-listes formés à partir des chiffres 1 à 6.

   Donc on a : $\mathrm{cardE} = 6^5 = 7\,776.$
2) On a : $\mathrm{cardA} = 6^2 = 36.$
3) On a $\mathrm{cardB} = 250$ ou $\binom{5}{3}\mathrm{x}5^2$.
4) Le complémentaire s'énonce comme suit : « le numéro 6 n'apparait pas ».

   Dans ce cas, il y a $5^5$ résultats possibles. Le nombre cherché est donc : $6^5 - 5^5$ soit 4 651 résultats.

**Exercice 42**




Soit B l'ensemble des pratiquants de Basket-ball et T celui des pratiquants de Tennis.

On a : $\mathrm{card}(\mathrm{B} \cup \mathrm{T}) = 28.$

$\mathrm{card}(\mathrm{B} \cap \mathrm{T}) = \mathrm{cardB} + \mathrm{cardT} - \mathrm{card}(\mathrm{B} \cup \mathrm{T})$

Donc : $\mathrm{card}(\mathrm{B} \cap \mathrm{T}) = 9$. Le nombre de personnes qui pratiquent les deux sports est donc 9.

**Exercice 43**

1) Le rangement est le nombre 4-arrangement parmi 5. Cela donne 120.
2) a) Le nombre de rangements est 6.

   b) Soit A l'ensemble des rangements possibles.

   Le complémentaire de A est $\overline{\mathrm{A}}$ tel que :

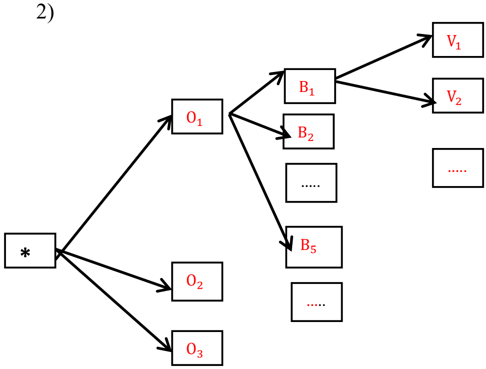
   $\overline{\mathrm{A}}$: " les livres S et A sont dans deux casiers consécutifs"

   - ils sont dans 1 et 2 : 12 possibilités ;
   - ils sont dans 2 et 3 : 12 possibilités ;
   -ils sont dans 3 et 4 : 12 possibilités ;
   - ils sont dans 4 et 5 : 12 possibilités

Au total : $\mathrm{card}\overline{\mathrm{A}} = 48$ possibilités. Donc $\mathrm{cardA} = 120 - 48$ soit 72.

**Exercice 44**

1) Le nombre de tirages est égal à $A_{10}^{3} = 720$. L'ensemble de tous les résultats possibles s'appelle l'univers des possibles.
2)




D'après l'arbre de choix, le cardinale de A est 30

3) On obtient trois boules de trois couleurs différentes

   a) On obtient une permutation de : orange-blanc-vert. Il y a 6 permutations possibles.
   Chacune des permutations donne 30 possibilités.
   Le cardinal de B est donc 180.

   b) L'ensemble $\overline{\mathrm{B}}$ peut-etre défini comme suit : « on n'obtient pas des boules de trois couleurs différentes »

c) Première méthode : $\text{card}\overline{\text{B}} = 720 - 180 = 540$.

Deuxième méthode :

– orange-orange-blanc : 90 possibilités ;

– orange-orange-orange : 6 possibilités

– orange-orange-vert : 36 possibilités

– blanc-blanc-orange : 180 possibilités ;

– blanc-blanc-blanc : 60 possibilités ;

blanc-blanc-vert : 120 possibilités ;

vert-vert-orange : 18 possibilités

La somme donne 540 possibilités

4) Il semble facile de calculer d'abord le cardinal du complémentaire de C.

$\text{C}$: " trois boules de couleurs différentes" donc $\overline{\text{C}}$: " trois boules de même couleur"

Le nombres des boules vertes n'atteint pas ; donc $\overline{\text{C}} = A_3^3 + A_5^3 = 66$.

$\text{cardC} = 720 - 66$ ; donc $\text{cardC} = 654$.

**Exercice 45**

1. $26^1 \times 10^3 = 26\,000$

2. $26^1 \times 9^3 = 18\,954$

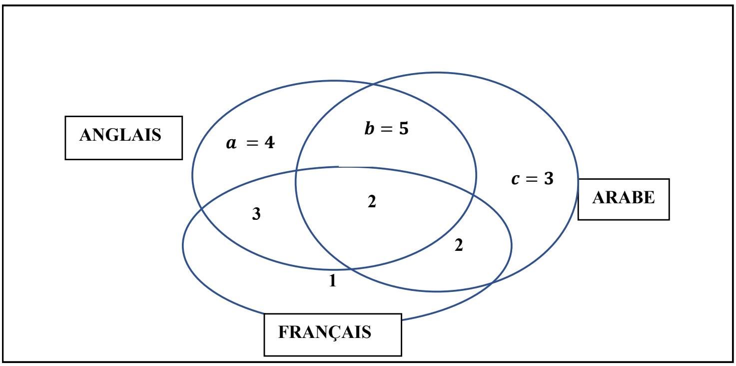
3. $26^1 \times 10^3 - 26^1 \times 9^3 = 26\,000 - 18\,954 = 7\,046$

4. $26^1 \times A_{10}^3 = 26 \times 720 = 18\,720$

5. $26^1 \times 10^3 - 26^1 \times A_{10}^3 = 26\,000 - 18\,720 = 7\,280$

**SITUATIONS COMPLEXES**

**Exercice 46**




AVOCATS

Notons a le nombre d'avocats qui parlent uniquement l'anglais, b qui parlent l'anglais et l'arabe mais pas le français et c le nombre d'avocats qui parlent uniquement l'arabe.

On a : $\begin{cases} a+b=9 \\ b+c=8 \\ a+b+c=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9-b \\ c=8-b \\ (9-b)+b+(8-b)=12 \end{cases}$ donc $\begin{cases} b=5 \\ a=4. \\ c=3 \end{cases}$

Il y a donc 5 avocats à redéployer.

**Exercice 47**

Un podium est un 3-arrangement. Le nombre de podiums possibles est donc : $A_5^3$ c'est-à-dire 60

**Exercice 48**

Pour déterminer le nombre de délégation possibles, nous allons déterminer le nombre de personnes susceptibles de participer à une délégation, ensuite il faut savoir que monsieur Coulibaly fera partie de la délégation en tant que porte-parole.

- Le CE compte 14 enseignants ;
- Le doyen des professeurs de mathématiques fait partie de la délégation (porte-parole) ;
- Une délégation est une combinaison une délégation ;
- Une délégation doit contenir au moins une dame ;

Soit l'ensemble A défini par : « la délégation contient le doyen et au moins une dame ».

Le cardinal de A est le nombre de délégations possibles.

Le doyen fait partie de la délégation, il reste 9 hommes ; les dames sont au nombre de 4.

- La délégation est composée d'une seule dame : $1\text{x}4\text{x}\binom{9}{3}$ possibilités ;
- La délégation est composée de deux dames exactement :$1\text{x}\binom{4}{2}\binom{9}{2}$ possibilités ;
- La délégation est composée de trois dames exactement : $1\text{x}\binom{4}{3}\binom{9}{1}$ possibilités ;

Au total : $\text{cardA} = 1\text{x}4\text{x}\binom{9}{3} + 1\text{x}\binom{4}{2}\binom{9}{2} + 1\text{x}\binom{4}{3}\binom{9}{1}$ ; $\text{cardA} = 588$.

Le nombre de délégations possibles est donc 588.

**Exercice 49**

On peut raisonner à l'aide d'un arbre de choix.

1$^{er}$ cas : le président est un garçon. Alors le vice-président est une fille.

Il y a 8x12x18 bureaux possibles.

2$^{nd}$ cas : le président est une fille. Alors le vice-président est un garçon.

Il y a 12x8x18 bureaux possibles.

Au total, on obtient 2x(8x12x18) bureaux possibles ; soit 3 456.

**Exercice 50**

Un rang est une permutation des huit élèves. Si en plus les cinq filles occupent les cinq premières, le nombre de rangs possibles est donc : 5 !3 ! soit 720 rangs.

**Exercice 51**

Soit l'ensemble : G : « gagner au moins un lot ».

Il s'agit de déterminer le cardinal de G.

Avant de déterminer le cardinal de G, nous allons :

- déterminer le cardinal de l'univers des possibilités ;

- définir le contraire $\overline{G}$ de G puis calculer son cardinal ;

-enfin nous déduirons le cardinal de G.

- Cardinal de G. Acheter cinq tickets revient à choisir 5 tickets parmi 50.
  Donc le cardinal de l'univers est $\binom{50}{5} = 2\ 118\ 760$
- $\overline{G}$ : « aucun des cinq tickets n'est gagnant ». Donc $\text{card}\overline{G} = \binom{38}{5} = 501\ 942$ ;
- Donc $\text{card}G = \binom{50}{5} - \binom{38}{5} = 1\ 616\ 818$

Le participant a donc 1 616 818 possibilités d'obtenir au moins un lot.

*Commentaire : ce nombre est certes « énorme» cependant il ne permet pas d'évaluer les chances de gagner au moins un lot. En réalité il a plus de 75% de chance de gagner au moins un lot.*

*La justification de cet argument sera faite dans le cours de probabilité.*

# 3 GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

## SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de troisième. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

| Constituants de la situation | Exemples de questions possibles | Réponses possibles des élèves |
|---|---|---|
| Contexte | Où ou quand se déroule la scène ? | La scène se déroule dans une salle de classe, pendant une séance de cours. |
| Circonstances | Pourquoi les élèves décident de se mettre en groupes pour traiter l'exercice ? | Les élèves décident de se mettre en groupes pour traiter l'exercice pour avoir le bonus promis par le professeur. |
| Tâche | Que décident de faire les élèves ? | Les élèves décident de se mettre en groupes pour traiter l'exercice |

## DÉCOUVERTE DES HABILETÉS

**Activité 1**

1) $D_f = \mathbb{R}$ car $f$ est une fonction polynôme.
   $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$, donc $D_g = \mathbb{R}$
   D'où $f$ et $g$ ont le même ensemble de définition.
2) $\forall x \in \mathbb{R}$ , $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \frac{x^4-1}{x^2+1} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1} = x^2 - 1$
   D'où $\forall x \in \mathbb{R}$ , $g(x) = f(x)$.

**Exercice de fixation 1**

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ et $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Donc $D_f = D_g$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $g(x) = 2x - 1 + \frac{4}{x+3} = \frac{(2x-1)(x+3)+4}{x+3} = \frac{2x^2+6x-x-3+4}{x+3} = \frac{2x^2+5x+1}{x+3}$
  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $g(x) = f(x)$
  Conclusion : $D_f = D_g$ et $\forall x \in D_f$, $g(x) = f(x)$. Donc les fonctions $f$ et $g$ sont égales

**Activité 2**

1) $D_f = \mathbb{R}$ , $D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ et $D_h = \mathbb{R}$
2) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$

   $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $g(x) = \frac{x^2-3x}{x-3} = \frac{x(x-3)}{x-3} = x$

   $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{x^2} = |x|$.

   D'où $\forall x \in ]-\infty, 0], h(x) = -x$ et $\forall x \in [0, +\infty[, h(x) = x$

   a) *f* et *g* coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

   b) *f* et *h* coïncident sur $[0, +\infty[$

   c) *g* et *h* coïncident sur $[3, +\infty[$.
3) C'est l'ensemble de définition de g.

**Exercice de fixation 2**

1-Faux ; 2-Fuax ; 3-Vrai

**Exercice de fixation 3**

• $D_f = \mathbb{R}$

• Écrivons *f*(*x*) sans le symbole de la valeur absolue

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-x^2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $\|1-x^2\|$ | $x^2-1$ | $0$ | $1-x^2$ | $0$ | $x^2-1$ |

$\forall x \in ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[, f(x) = x^2 - 1$

$\forall x \in [-1; 1], f(x) = 1 - x^2$

• La restriction de *f* à l'intervalle $]-\infty; -1]$ est la fonction *h* définie sur $]-\infty; -1]$ par :
$h(x) = x^2 - 1$

**Activité 3**

1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - g(x) = (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) - (-x^2 + x + 6) = x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6) = x(x+2)(x-3)$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - g(x) = x(x+2)(x-3)$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $0$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x-3$ | $-$ | $-$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)-g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$\forall x \in ]-\infty; -2[ \cup ]0; 3[, f(x) < g(x)$

$\forall x \in ]-2; 0[ \cup ]3; +\infty[, f(x) > g(x)$

$\forall x \in \{-2; 0; 3\}, f(x) = g(x)$

3) $(C_f)$ est au-dessous de $(C_g)$ sur $]-\infty; -2[$ et sur $]0; 3[$

   $(C_f)$ est au-dessous de $(C_g)$ sur $]-2; 0[$ et sur $]3; +\infty[$

   $(C_f)$ et $(C_g)$ se coupent aux points d'abscisses –2 ; 0 et 3.

**Exercice de fixation 4**

1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - g(x) = x^2 + 5x - 6$.
   Le discriminant de $x^2 + 5x - 6$ est $\Delta = 25 + 24 = 49$ et ses zéros sont
   $x_1 = \frac{-5-7}{2} = -6$ et $x_1 = \frac{-5+7}{2} = 1$.
   Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - g(x) = (x+6)(x-1)$.
2) D'après la question précédente, on a :
   $\forall x \in ]-\infty; -6[ \cup ]1; +\infty[, f(x) - g(x) > 0$, d'où $f(x) > g(x)$
   $\forall x \in ]-6; 1[, f(x) - g(x) < 0$, d'où $f(x) < g(x)$
   $\forall x \in \{-6; 1\}, f(x) - g(x) = 0$, d'où $f(x) = g(x)$
   On en déduit que :
   • $f$ est supérieure à g sur $]-\infty; -6[$ et sur $]1; +\infty[$ ;
   • $f$ est inférieure à g sur $]-6; 1[$ ;
   • $f$ est égale à g sur $\{-6; 1\}$

**Exercice de fixation 5**

1-B ; 2-C ; 3-A

**Activité 4**

Soient $f$ et $g$ les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :
$f(x) = \frac{1}{x-2}$ et $g(x) = \frac{x}{x+2}$.

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
2) a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in D_s \Leftrightarrow x \in D_f$ et $x \in D_g \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
   Donc $D_s = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
   b) $\forall x \in D_s$, $s(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{x+2+x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2-x+2}{x^2-4}$.
3) a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in D_p \Leftrightarrow x \in D_f$ et $x \in D_g \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
   Donc $D_p = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
   b) $\forall x \in D_p$, $p(x) = f(x) \times g(x) = \frac{1}{x-2} \times \frac{x}{x+2} = \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{x}{x^2-4}$.
4) a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in D_q \Leftrightarrow x \in D_f$ , $x \in D_g$ et $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ et $x \neq 0$
   Donc $D_q = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$
   b) $\forall x \in D_q$, $= q(x) = \frac{1}{x-2} \times \frac{x+2}{x} = \frac{x+2}{x(x-2)}$.

**Exercice de fixation 6**

On a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0;\ 1\}$ $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1) La fonction $f + g$ est la fonction définie sur $D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0;\ 1\}$ par
   $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{(x-2)(x-1)+3x}{x(x-1)^2} = \frac{x^2+2}{x(x-1)^2}$
2) La fonction $f - g$ est la fonction définie sur $D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0;\ 1\}$ par
   $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{(x-2)(x-1)-3x}{x(x-1)^2} = \frac{x^2-6x+2}{x(x-1)^2}$
3) La fonction $fg$ est la fonction définie sur $D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0;\ 1\}$ par
   $(fg)(x) = f(x) \times g(x) = \frac{x-2}{x(x-1)} \times \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{3(x-2)}{x(x-1)^3}$

4) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in D_{\frac{f}{g}}$ ssi $x \in D_f \cap D_g$ et $g(x) \neq 0$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \neq 0$, donc $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{0;\ 1\}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0;\ 1\}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-2}{x(x-1)} \times \frac{(x-1)^2}{3} = \frac{(x-2)(x-1)}{3x}$

**Activité 5**

1) On a $D_f = \mathbb{R}$ $D_g = [0; +\infty[$.
2) a) $f(a) = a^2 - 1$
   $g[f(a)]$ existe lorsque $f(a) \geq 0$, soit $a^2 - 1 \geq 0$
   $g[f(a)]$ existe lorsque $a \in ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$
   b) $g[f(a)] = g(a^2 - 1) = \sqrt{a^2 - 1}$

**Exercice de fixation 7**

$D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = [0; +\infty[$

• $x \in D_{g\circ f}$ ssi $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$
$x \in D_{g\circ f}$ ssi $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 + 1 \geq 0$
$D_{g\circ f} = \mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R}, g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$
• $x \in D_{f\circ g} \Leftrightarrow x \in D_g$ et $g(x) \in D_f$
$x \in D_{f\circ g} \Leftrightarrow x \geq 0$ et $(x^2 + 1) \in \mathbb{R}$
$D_{f\circ g} = [0; +\infty[$
$\forall x \in [0; +\infty[, f \circ g\,(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$

**Activité 6**

1) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in D_{ho(gof)} \Leftrightarrow x \in D_{gof}$ et $gof(x) \in D_h$
$\Leftrightarrow x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$ et $gof(x) \in D_h$
$\forall x \in \mathbb{R}, x \in D_{(hog)of} \Leftrightarrow x \in D_f$ et $f(x) \in D_{hog}$
$\Leftrightarrow x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$ et $gof(x) \in D_h$
D'où $ho(gof)$ et $(hog)of$ ont le même ensemble de définition.
2) Pour tout $x$ de cet ensemble, $(ho(gof))(x) = h((gof)(x)) = h\left(g(f(x))\right)$ et
$((hog)of)(x) = (hog)(f(x)) = h\left(g(f(x))\right)$
D'où Pour tout $x$ de cet ensemble, $(ho(gof))(x) = ((hog)of)(x)$

**Exercice de fixation 8**

$D_f = D_g = \mathbb{R}$ et $D_h = [0; +\infty[$
• $x \in D_{g\circ foh}$ ssi $x \in D_h$ et $h(x) \in D_h$ et $f(h(x)) \in D_g$
$x \in D_{g\circ foh}$ ssi $x \geq 0$ , $h(x) \in \mathbb{R}$ et $f(h(x)) \in \mathbb{R}$

$D_{g\circ foh} = [0; +\infty[$

• $\forall x \in [0; +\infty[, gofoh(x) = gof(h(x)) = gof(\sqrt{x}) = g(\sqrt{x} - 3) = (\sqrt{x} - 3)^2$

**Activité 7**

1) a) $\overrightarrow{MM_1}\begin{pmatrix} x-x \\ f(x)+b-f(x)\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{MM_1}\binom{0}{b}$. Par conséquent $\overrightarrow{MM_1} = b\overrightarrow{OJ}$

Comme $b\overrightarrow{OJ}$ est un vecteur constant, on conclut que $M_1$ est l'image de M par la translation de vecteur $b\overrightarrow{OJ}$.

b) Soit (C') la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x) + b$

Soit M($x$ ; $y$) un point quelconque de (C) et M'($x$' ; $y$') un point quelconque du plan.

M' = $t_{b\overrightarrow{OJ}}$(M) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = b\overrightarrow{OJ}$

$\Leftrightarrow x' - x = 0$ et $y' - y = b$

$\Leftrightarrow x' - x = 0$ et $y' = y + b$

$\Leftrightarrow x' = x$ et $y' = f(x) + b$, on a $y = f(x)$ car M($x$ ; $y$)∈(C)

$\Leftrightarrow$ M'($x$, $f$($x$) + $b$)

$\Leftrightarrow$ M'∈(C')

On en déduit que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x) + b$ est l'image de (C) par la translation de vecteur $b\overrightarrow{OJ}$.

2) a) On a M($x$– $a$, $f$($x$ – $a$)) et M2($x$, $f$($x$ – $a$)), d'où $\overrightarrow{MM_2}\begin{pmatrix} x-(x-a) \\ f(x-a)-f(x-a)\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{MM_2}\binom{a}{0}$.

Par conséquent $\overrightarrow{MM_2} = a\overrightarrow{OI}$

Comme $a\overrightarrow{OI}$ est un vecteur constant, on conclut que $M_2$ est l'image de M par la translation de vecteur $a\overrightarrow{OI}$.

b) Soit (C'') la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x - a)$

Soit M($x$ ; $y$) un point quelconque de (C) et M'($x$' ; $y$') un point quelconque du plan.

M' = $t_{a\overrightarrow{OI}}$(M) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{OI}$

$\Leftrightarrow x' - x = a$ et $y' - y = 0$

$\Leftrightarrow x' = x + a$ et $y' = y$

$\Leftrightarrow x' = x + a$ et $y' = f(x)$, on a $y = f(x)$ car M($x$ ; $y$)∈(C)

$\Leftrightarrow x' = x + a$ et $y' = f(x' - a)$

$\Leftrightarrow$ M'($x$', $f$($x$'$-a$))

$\Leftrightarrow$ M'∈(C'')

On en déduit que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x - a)$ est l'image de (C) par la translation de vecteur $a\overrightarrow{OI}$.

3) Soit (C'') la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x - a)$

Soit M($x$ ; $y$) un point quelconque de (C) et M'($x$' ; $y$') un point quelconque du plan.

M' = $t_{a\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{OJ}}$(M) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{OI} + b\overrightarrow{OJ}$

$\Leftrightarrow x' - x = a$ et $y' - y = b$

$\Leftrightarrow x' = x + a$ et $y' = y + b$

$\Leftrightarrow x' = x + a$ et $y' = f(x) + b$, on a $y = f(x)$ car M($x$ ; $y$)∈(C)

$\Leftrightarrow x' = x + a$ et $y' = f(x' - a) + b$

$\Leftrightarrow$ M'($x$', $f$(($x$'$-a$) + $b$))

$\Leftrightarrow$ M'∈(C'')

On en déduit que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x-a)+b$ est l'image de (C) par la translation de vecteur $a\overrightarrow{\mathrm{OI}}+b\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$.

**Exercice de fixation 9**

**Exercice 1**

1) C'est le vecteur $\vec{u}(0;-7)$
2) C'est le vecteur $\vec{u}(2;0)$
3) C'est le vecteur $\vec{u}(3;5)$
4) C'est le vecteur $\vec{u}(-1;-4)$

**Exercice de fixation 10**

1) C'est le vecteur $\vec{u}(1;0)$
2) C'est le vecteur $\vec{u}(0;6)$
3) C'est le vecteur $\vec{u}(-8;3)$

**Activité 8**

1) a) On a M($x$, $f(x)$) et $M_1$($x$, $-f(x)$), d'où $\overrightarrow{\mathrm{MM_1}}\begin{pmatrix} x-x \\ -f(x)-f(x) \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{MM_1}}\begin{pmatrix} 0 \\ -2f(x) \end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{\mathrm{MM_1}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ , donc ($MM_1$) ⊥(OI). De plus le milieu de [$MM_1$] a pour coordonnées ($x$ ; 0), donc il appartient à (OI).
   On en déduit que les points M et $\mathrm{M_1}$ sont symétriques par rapport à la droite (OI).
   b) Soit (C') la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto -f(x)$
   Soit M($x$ ; $y$) un point quelconque du plan.
   M($x$ ; $y$)∈(C') $\Leftrightarrow y=-f(x) \Leftrightarrow -y=f(x) \Leftrightarrow$N($x$ ; $-y$)∈(C)
   Or d'après la question précédente, M et N sont symétriques par rapport à (OI), donc que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto -f(x)$ est l'image de (C) par la symétrie orthogonale d'axe (OI).
2) a) On a M($x$, $f(x)$) et $M_2$($-x$, $f(x)$), d'où $\overrightarrow{\mathrm{MM_2}}\begin{pmatrix} -x-x \\ f(x)-f(x) \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{MM_2}}\begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{\mathrm{MM_2}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ , donc ($MM_2$) ⊥(OJ). De plus le milieu de [$MM_2$] a pour coordonnées (0 ; $f(x)$), donc il appartient à (OJ).
   On en déduit que les points M et $\mathrm{M_2}$ sont symétriques par rapport à la droite (OJ).
   b) Soit (C'') la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(-x)$
   Soit M($x$ ; $y$) un point quelconque du plan.
   M($x$ ; $y$)∈(C'') $\Leftrightarrow y=f(-x) \Leftrightarrow$N($-x$ ; $y$)∈(C)
   Or d'après la question précédente, M et N sont symétriques par rapport à (OJ), donc que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(-x)$ est l'image de (C) par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

**Exercice de fixation 11**

**Exercice 1**

1. (OJ)
2. (OI)

**Exercice de fixation 12**

1. On a : $g(x) = f(-x)$, donc c'est la symétrie orthogonal d'axe (OJ)
2. On a : $g(x) = -f(x)$, donc c'est la symétrie orthogonal d'axe (OI)

**Activité 9**

1) On a M($x$, $f(x)$) et $M_1(-x, -f(x))$. Soit K le milieu du segment [$MM_1$]
   On a $x_K = \frac{x-x}{2} = 0$ et $y_K = \frac{f(x)-f(x)}{2} = 0$. Le milieu du segment [$MM_1$] est le point O, donc les points M et $M_1$ sont symétriques par rapport au point O.
2) Soit M($x$, $y$) un point de (C) et M($x$', $y$') un point quelconque du plan.
   M' = $S_O$(M) $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$
   $\Leftrightarrow x' = -x$ et $y' = -y$
   $\Leftrightarrow x' = -x$ et $y' = -f(x)$, on a $y = f(x)$ car M($x$ ; $y$)∈(C)
   $\Leftrightarrow x' = -x$ et $y' = -f(-x')$ car $x = -x'$
   $\Leftrightarrow$M'$(x', -f(-x'))$
   $\Leftrightarrow$M'∈(C')
   La courbe représentative de la fonction $x \mapsto -f(-x)$ est l'image de (C) par la symétrie centrale de centre O.

**Exercice de fixation 13**

1. $-f(-x) = -((-x)^2 - 7) = -(x^2 - 7) = 7 - x^2 = g(x)$
   D'où ($C_g$) est le symétrique de ($C_f$) par rapport au point O.
2. $-f(-x) = -\frac{2}{-x+3} = \frac{2}{-(-x+3)} = \frac{2}{x-3}$ et $g(x)$
   D'où ($C_g$) est le symétrique de ($C_f$) par rapport au point O.

**Activité 10**

1) Non
2) Chaque élève a une et une seule date de naissance

**Exercice de fixation 14**

1-F ; 2-F ; 3-V ; 4-F

**Exercice de fixation 15**

*f*, g, *p* et *r* sont des applications
*h* n'est pas une application car –2 est associé à deux éléments dans l'ensemble d'arrivée
*h* n'est pas une application car *c* n'est associé à aucun élément dans l'ensemble d'arrivée

**Activité 11**

1) Soit *b* un élément quelconque de [0 ; 4].
   Si *b*∈[0 ; 2,8], alors la droite d'équation *y* = *b* coupe la courbe représentative de *h* en un seul point

Si $b \in ]2{,}8 ; 4]$, alors la droite d'équation $y = b$ ne coupe pas la courbe représentative de $h$

On en déduit que :

•si $b \in [0 ; 2{,}8]$, alors $b$ admet un unique antécédent par $h$ ;

•si $b \in ]2{,}8 ; 4]$, alors $b$ n'admet pas d'antécédents par $h$.

2) Soit $b$ un élément quelconque de $[-4 ; 6]$.

Si $b \in ]-4 ; 0[$, alors la droite d'équation $y = b$ coupe la courbe représentative de g en trois points

Si $b \in ]0 ; 6]$, alors la droite d'équation $y = b$ coupe la courbe représentative de g en un seul point

Si $b \in \{-4 ; 0\}$, alors la droite d'équation $y = b$ coupe la courbe représentative de g en deux points

On en déduit que :

•si $b \in ]-4 ; 0[$, alors $b$ admet trois antécédent par g ;

•si $b \in ]0 ; 6]$, alors $b$ admet un unique antécédent par g ;

•si $b \in \{-4 ; 0\}$, alors $b$ admet deux antécédents par g.

3) Pour tout élément $b$ de $[0 ; \pi]$, la droite d'équation $y = b$ coupe la courbe représentative de $h$ en un seul point. D'où $b$ admet un unique antécédent par $h$.

**Exercice de fixation 16**

1.c) ; 2.a) ; 3.b)

**Exercice de fixation 17**

• L'application $f$ est injective car chaque élément de l'ensemble d'arrivée admet zéro ou un antécédent dans l'ensemble de départ.

Elle n'est pas surjective car 3 n'a pas d'antécédent.

Elle n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.

• L'application g n'est ni injective (1 a deux antécédents), ni surjective (2 n'a pas d'antécédent). Elle n'est donc pas bijective.

• L'application $h$ est bijective car chaque élément de l'ensemble d'arrivée admet un unique antécédent dans l'ensemble de départ. On en déduit qu'elle est injective et surjective

• L'application $k$ n'est ni injective (1 a deux antécédents), donc elle n'est pas bijective.

Elle est surjective car chaque élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent dans l'ensemble de départ.

**<u>Activité 12</u>**

Comme $f$ est une application bijective, tout élément de B admet un unique antécédent dans A. ainsi que la correspondance de B dans A qui à tout élément de B associe son antécédent par $f$ est une bijection.

**Exercice de fixation 18**

Le nombre 2 est dans de $[0 ; 7]$ et est associé à 4 dans $[0 ; 49]$.

Le nombre 3 est dans de $[0 ; 7]$ et est associé à 9 dans $[0 ; 49]$.

Ainsi de suite.

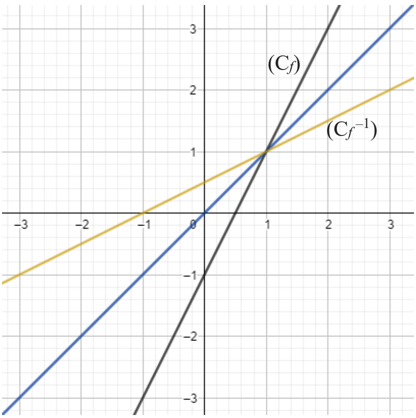
La bijection réciproque de $f$ est l'application de $[0 ; 49]$ dans $[0 ; 7]$ qui à tout nombre réel de $[0 ; 49]$ associe sa racine carrée.

**<u>Activité 13</u>**

Soit M($a$ ; $b$) un point quelconque de (C). Alors $f(a) = b$, par conséquent $f^{-1}(b) = a$. d'où le point N(b ; a) appartient à (C').
Justifions que (MN) ⊥(D)
Le coefficient directeur de (D) est 1 et celui de (MN) est $\frac{b-a}{a-b} = -1$.
Or $1\times(-1) = -1$, donc (MN) ⊥(D)
Justifions que le milieu de [MN] appartient à (D)
Soit K le milieu de [MN]. On a $x_{\mathrm{K}} = \frac{b+a}{2}$ et $y_{\mathrm{K}} = \frac{a+b}{2}$. Comme $y_{\mathrm{K}} = x_{\mathrm{K}}$, le point K est le milieu de [MN].
Conclusion : on a M($a$ ; $b$) ∈(C) ⟺ N(b ; a) ∈(C'), (MN) ⊥(D) et le milieu de [MN] appartient à (D). Donc (C) et (C') sont symétriques par rapport à (D).

**Exercice de fixation 19**
a-Faux ; b-Faux ; c-Vrai ; d-Faux

**Exercice de fixation 20**




## DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

Question 1 : Comment comparer deux fonctions ?

- Exercice non résolu
  Compare les fonctions $f$ et g de ℝ vers ℝ définies respectivement par :
  $f(x) = \frac{2x+1}{4x+1}$ et $g(x) = \frac{-2x+1}{-4x+1}$

***Corrigé***

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}\right\}\{1\}$ et $\mathrm{D}_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right\} \setminus \{1\}, \quad f(x) - g(x) = \frac{2x+1}{4x+1} - \frac{-2x+1}{-4x+1} = \frac{-4x}{16x^2-1}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{4}$ | | $0$ | | $\frac{1}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-4x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $16x^2-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)-g(x)$ | | $+$ | ▒ | $-$ | $0$ | $+$ | ▒ | $-$ | |

Conclusion :

$\forall x \in \left]-\infty;-\frac{1}{4}\right[ \cup \left]0;\frac{1}{4}\right[,\ f(x) > g(x)$

$\forall x \in \left]-\frac{1}{4};0\right[ \cup \left]\frac{1}{4};+\infty\right[,\ f(x) < g(x)$

$\forall x \in \{0\},\ f(x) = g(x)$

Question 2 : Comment démontrer qu'une application est injective, surjective, bijective ?

- Exercices non résolu

Voici trois fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ . Pour chacune d'elle :
a) détermine l'ensemble de définition ;
b) justifie si elle injective ; surjective ; bijective ;
c) comment peut-on la rendre bijective.

1) a) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$

b) $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x\mathbb{R}$ , $y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 = y + 4$

• si $y < 4$, alors l'équation n'a pas de solutions, donc $y$ n'a pas d'antécédent : $f$ n'est pas surjective.

• si $y > 4$, alors l'équation admet deux solutions, donc $y$ a deux antécédents : $f$ n'est pas injective

<u>Conclusion</u> : $f$ n'est ni injective ni surjective, donc $f$ n'est pas bijective.

c) Pour que $f$ soit bijective, l'équation $y = f(x)$ doit avoir une unique solution quel que soit $y$. Pour cela il faut que $y > 4$ et que $x$ prenne une seule valeur.

Pour que $f$ soit bijective, il faut prendre pour ensemble de départ $[0;+\infty[$ (ou $]-\infty;0]$) et pour ensemble d'arrivée $[-4;+\infty[$ .

2) a) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b) $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$ , $y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow xy = 1 - y$

• si $y = 0$, alors l'équation n'a pas de solutions, donc $y$ n'a pas d'antécédent : $f$ n'est pas surjective.

• si $y \neq 0$, alors l'équation admet une unique solution, donc $y$ a un antécédent unique

<u>Conclusion</u> : $f$ est injective et non surjective, donc $f$ n'est pas bijective.

c) Pour que $f$ soit bijective, il faut prendre pour ensemble de départ $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et pour ensemble d'arrivée $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

3) a) $D_f = \mathbb{R}$

b) • On a $f(-1) = f(1)$. Or , $-1 \neq 1$, donc $f$ n'est pas injective.

• L'équation $f(x) = -1$ n'admet pas de solutions, donc –1 n'a d'antécédent : $f$ n'est pas surjective.

Conclusion : $f$ n'est ni injective ni surjective, donc $f$ n'est pas bijective.

c) Pour que $f$ soit bijective, il faut prendre pour ensemble de départ $[0; +\infty[$ (ou $]-\infty; 0]$) et pour ensemble d'arrivée $[\sqrt{3}; +\infty[$

La restriction de f à l'ensemble de départ [-4 ; +∞[ et à l'ensemble d'arrivée $R^+$ est alors une bijection.

**Pour g :**

a) g(x) est défini pour tout $x \neq -1$donc D(g) = R\{-1}.

b) Etudions les solutions de l'équation $y = \frac{1}{x+1}$ où pour y donné, on cherche x.

$y = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{y}$. Pour tout $y \neq 0$, on trouve un et un seul x.

g est donc injective (un y n'a qu'un seul antécédent), mais elle n'est pas surjective (0 n'est pas atteint).

g n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.

c) La restriction de g à l'ensemble de départ Dg = R\{-1}. et à l'ensemble d'arrivée R\{0}. Est bien une bijection.

**Pour h :** (éléments de réponse)

a)D(h) = **R**

b)h n'est ni injective ni surjective ni bijective

c)La restriction de h à l'ensemble de départ $\mathbf{R}^+$ et à l'ensemble d'arrivée $[\sqrt{3}$ ; +∞[ est une bijection.

## MES SÉANCES D'EXERCICES

## EXERCICES DE FIXATION

### Égalité de deux fonctions

### Exercice 1

On a $D_f = D_g$ et $\forall x \in D_f, f(x) = \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} = g(x)$, donc les fonctions $f$ et $g$ sont égales.

### Exercice 2

On a $D_f = D_g = \mathbb{R}$ et $\forall x \in D_f, f(x) = \sqrt{(x-7)^2} = |x-7| = g(x)$, donc les fonctions $f$ et $g$ sont égales.

**Exercice 3**

1) On a $D_f = \mathbb{R}$ et On a $D_g = [0; +\infty[$
   Comme $D_f \neq D_g$ , les fonctions *f* et *g* ne sont pas égales.
2) On a $D_h = D_k = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $\forall x \in D_h$, $h(x) = 3 - \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{3(x-1)^2-3}{(x-1)^2} = \frac{3x^2-6x}{(x-1)^2} = k(x)$
   D'où les fonctions *h* et *k* sont égales.

**Restriction d'une fonction**

**Exercice 4**

On sait que $|x-2| = x-2$, si $x \geq 2$ et $|x-2| = -x+2$, si $x < 2$
Donc pour tout *x* de $]-\infty; 2[$, $f(x) = 2$ ; par suite $g(x) = 2$.

**Exercice 5**

$[-1; 0]$ est inclus dans l'intervalle $]-\infty; 1]$. Donc $h$ est définie sur $[-1; 0]$ par :
$h(x) = x^2 - 4$

**Comparaison de fonctions**

**Exercice 6**

Pour tout $x$ de $[0; +\infty[$, $g(x) - f(x) = x - 4 - \frac{x^2-x-2}{x+3} = \frac{(x-4)(x+3)-(x^2-x-2)}{x+3} = \frac{-10}{x+3}$.
Or $\frac{-10}{x+3} < 0$ sur $[0; +\infty[$, donc pour tout $x$ de $[0; +\infty[$, $g(x) \leq f(x)$.

**Exercice 7**

- Sur l'intervalle $]-\infty; -2[$, (Cf) est au-dessus de (Cg).
- Sur l'intervalle $]-2; 2[$, (Cf) est en-dessous de (Cg).
- Sur l'intervalle $]2; +\infty[$, (Cf) est au-dessus de (Cg).
- (Cf) et (Cg) se coupent aux points d'abscisses –2 et 2.

On en déduit que :

- $\forall x \in ]-\infty; -2[, f(x) \geq g(x)$
- $\forall x \in ]-2; 2[, f(x) \leq g(x)$
- $\forall x \in ]2; +\infty[, f(x) \geq g(x)$
- $\forall x \in \{-2; 2\}, f(x) = g(x)$

**Somme, produit et quotient de fonctions**

**Exercice 8**

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et $D_g = \mathbb{R}^*$ .
   $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$
2) Pour tout *x* de $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$, on a : $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x^2-1} + \frac{(x+1)(x+2)}{x}$.

**Exercice 9**

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et $D_g = \mathbb{R}^*$

   $D_{fg} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$

2) Pour tout $x$ de $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$, on a : $(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{(x^2-1)x}$

**Exercice 10**

1) $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ et $D_g = \mathbb{R}^*$

   $x \in D_{\frac{f}{g}} \Leftrightarrow x \in D_f$ et $x \in D_g$ et $g(x) \neq 0$ ; d'où $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1; -2\}$

2) Pour tout $x$ de $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$, on a : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x^2-1}}{\frac{(x+1)(x+2)}{x}} = \frac{x}{(x^2-1)(x+1)(x+2)}$.

**Composée de fonctions**

**Exercice 11**

1) $Df = IR - \{-1\}$; $Dg = IR - \{3\}$;

   $Dfog = IR - \{1; 3\}$.

   $Dgof = IR - \left\{-1; -\frac{1}{2}\right\}$ ;

   $Dfof = IR - \left\{-1; -\frac{3}{2}\right\}$

2) $\forall x \in Dfog,\ (fog)(x) = f\big(g(x)\big) = \frac{2}{3}\frac{2x-3}{x-1}$

   $\forall x \in Dgof, (gof)(x) = g\big(f(x)\big) = \dfrac{-2(x+2)}{2x+1}$

   $\forall x \in Dfof, \quad (fof)(x) = f\big(f(x)\big) = \dfrac{3x+4}{2x+3}$

**Exercice 12**

On a d'une part, $Dfo(goh) = D(fog)oh = \mathbb{R}$.

D'autre part pour tout $x$ de $Dfo(goh)$ :

• $(goh)(x) = F(x) = 2x^3 + 1$ d'où $fo(goh)(x) = foF(x) = (2x^3 + 1)^2$

• $(fog)(x) = H(x) = (2x + 1)^2$ d'où $(fog)oh(x) = Hoh(x) = (2x^3 + 1)^2$

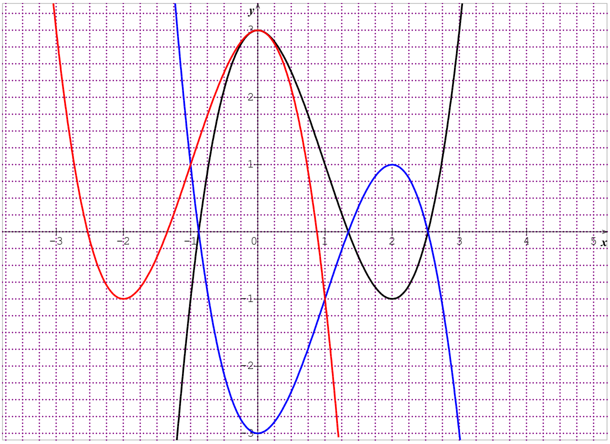
On a donc $fo(goh)(x) = (fog)oh(x)$

Conclusion : $fo(goh) = (fog)oh$

**Fonctions associées**

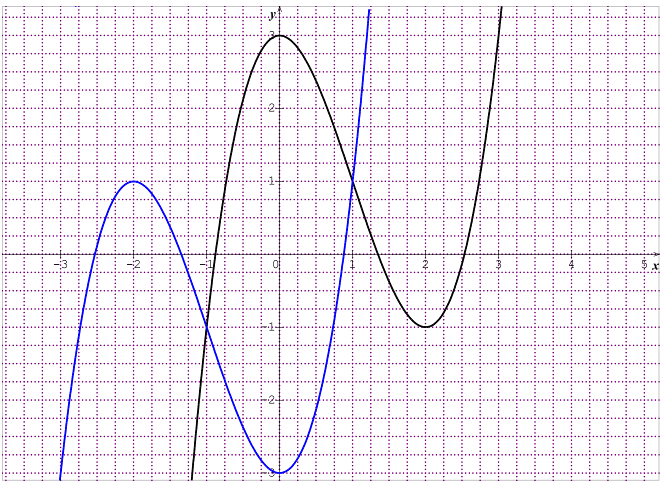
**Exercice 13**

Les courbes : $x \longmapsto f(x)$ *(en noir) ;* $x \longmapsto f(-x)$ *(rouge) et* $x \longmapsto -f(x)$ *(en bleu)*



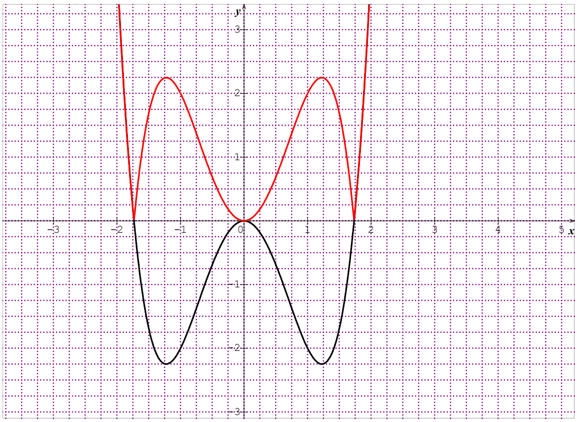

**Exercice 14**

$x \longmapsto -f(-x)$ *(en bleu)*



**Exercice 15**

$x \longmapsto |f(x)|$ *(en rouge)*



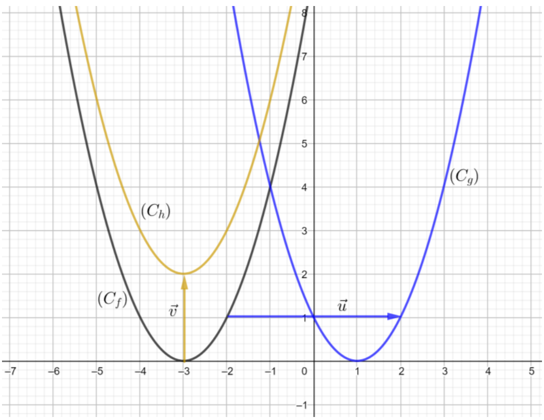

**Exercice 16**

$(Cf) = t_{\vec{u}}(Cg)$ avec

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$
2) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$
3) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$

**Exercice 17**

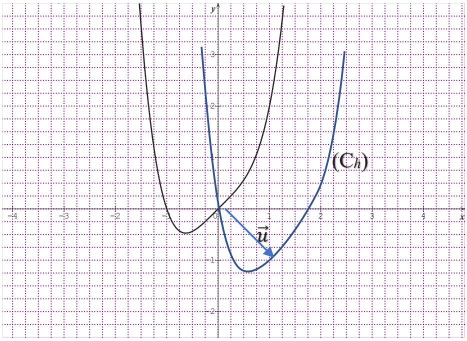
1)



2) • La courbe de g est l'image de celle de *f* par la translation de vecteur $\vec{u}(4; 0)$ (voir question précédente).
• La courbe de *h* est l'image de celle de *f* par la translation de vecteur $\vec{v}(0\,; 2)$ (voir question précédente).

**Exercice 18**

1)




2) La courbe de *h* est l'image de celle de *f* par la translation de vecteur $\vec{u}(1\,; -1)$ (voir question précédente).

**Applications**

**Exercice 19**

Soit $a$ et $b$ deux nombres réels quelconques positifs tels que $f(a) = f(b)$.
$f(a) = f(b) \Rightarrow a^2 = b^2 \Longrightarrow a = b$ car $a$ et $b$ sont positifs.
Donc $f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$ ; il en résulte que f est injective.

**Exercice 20**

Soit $y$ un élément quelconque de $[-1; +\infty[$. Cherchons si $y$ a au moins un antécédent par *f*.
Pour cela, on résout dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = y$.
$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 1 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y+1}$ ou $x = -\sqrt{y+1}$. L'équation admet deux solutions ; donc $y$ a au moins un antécédent par $f$.
Par conséquent $f$ est surjective.

**Exercice 21**

Soit $y$ un élément quelconque de $\mathbb{R}$. Cherchons si $y$ a au moins un antécédent par *f*. Pour cela, on résout dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = y$.
$f(x) = y \Leftrightarrow 2x - 3 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{2}$. L'équation admet une solution unique ; donc $y$ a un antécédent unique par $f$.
Par conséquent $f$ est bijective.

**Exercice 22**

1) Soit $b \in \mathrm{IR}^+$. L'équation : $f(x) = b$ admet une unique solution qui est $b^2$.
Donc f est une bijection de $\mathrm{IR}^+$ dans $\mathrm{IR}^+$

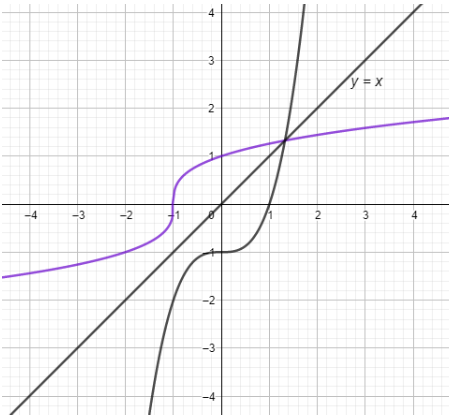
2) $\mathrm{f}^{-1}(2\sqrt{2}) = \mathrm{x} \Leftrightarrow \mathrm{f(x)} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \mathrm{x} = 8$. Donc $\mathrm{f}^{-1}(2\sqrt{2}) = 8$

$f^{-1}(5) = x \Leftrightarrow f(x) = 5 \Leftrightarrow x = 25$. Donc $f^{-1}(5) = 25$

3) $f^{-1}: IR^+ \to IR^+, tel\ que\ f^{-1}(x) = x^2$

**Exercice 23**

La courbe représentative de sa bijection réciproque est en bleu.




**EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT**

**Exercice 24**

1- Toute application bijective est surjective… ***VRAI*** *car une application est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective*
2- Soit $f$ une application de $IR$ dans $IR$ telle que : $f(-1) = f(3) = 9$
   a) L'application est injective…… ***FAUX*** *car 9 a deux antécédents*……..
   b) L'application est bijective ***FAUX*** *car cette application n'est pas injective*
3- Soit $f$ une application de $IR$ dans $IR$ telle que le nombre réel $-3$ n'a pas d'antécédent par $f$.
   Une telle application est surjective… ***FAUX*** *car il existe au moins un nombre réel qui n'a pas d'antécédent par f*
4- Si $g(x) = f(x+3)$ alors $(Cg) = t_{\vec{u}}(Cf)$ $avec\ \vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$… ***FAUX*** *car* …$\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$……..
5- Si $f$ est bijective, alors $(Cf)$ et $(Cf^{-1})$ sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice.

6- Si une application n'est pas bijective, alors elle n'est pas injective : ***FAUX*** *car l'application* $f: IR-\{1\} \to IR, x \mapsto \frac{2x+3}{x-1}$ *n'est pas bijective (car 2 n'a pas d'antécédent). Et pourtant on peut montrer qu'elle est injective.*

7- Les courbes des fonctions $f$ et $g: x \mapsto -f(x)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) sont symétriques par rapport à la droite (OJ)…***FAUX*** *car ces deux courbes sont plutôt symétriques par rapport à la droite (OI)*

8- Si $f(x)=\frac{x^2-1}{x+3}$ et si $g(x)=2x+5$ alors $fog(x)=\frac{(2x+5)^2-1}{x+3}$…***FAUX*** *car* $fog(x)=\frac{(2x+5)^2-1}{(2x+5)+3}$

9- Pour toutes fonctions $f$ et $g$ ; on a $fog=gof$ ***FAUX*** *car si* $f(x)=2x+1$ *et* $g(x)=-x+4$ *alors* $fog(0)=9$ *alors que* $gof(0)=3$

10- Les fonctions $f: IR \to IR, x \mapsto \frac{x+1}{x^2-1}$ ; $g: IR \to IR, x \mapsto \frac{1}{x-1}$ sont égales car $f(2)=g(2)=1$……***FAUX*** *car ces deux fonctions n'ont pas le même ensemble de définition. En effet,* $Df=IR-\{-1;1\}$ *alors que* $Dg=IR-\{1\}$

11- Les fonctions $f: IR \to IR, x \mapsto \frac{1}{(x-1)}$ et $g: IR \to IR, x \mapsto \frac{1}{|x-1|}$ car elles ont le même ensemble de définition. ***FAUX*** *car* $f(-2)=-\frac{1}{3}$ *alors* $g(-2)=\frac{1}{3}$

**Exercice 25**

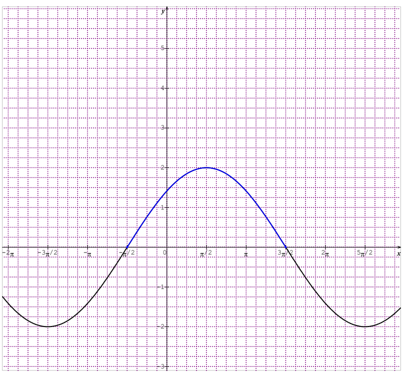
$Df=[0;+\infty[$ *et* $Dg=IR$. Les deux fonctions n'ont pas le même ensemble de définition. Donc elles ne sont pas égales.

**Exercice 26**

1) Soit $a$ et $b$ deux éléments de IR $-\{-5\}$ tel que $f(a)=f(b)$. Alors $\frac{2a-3}{a+5}=\frac{2b-3}{b+5}$ ce qui entraîne après calculs que $a=b$. Donc f est injective.
2) L'équation : $\frac{2x-3}{x+5}=2$ n'a pas de solution. Donc S $=\emptyset$
3) Cette application n'est pas surjective car le nombre réel 2 n'a pas d'antécédent par *f*. Il en résulte que *f* n'est pas bijective.

**Exercice 27**

Solution en bleu



1) Soit $y$ un élément quelconque de $[3;+\infty[$ tel que $g(x)=y$
$g(x)=y \Leftrightarrow (x-2)^2+3=y \Leftrightarrow x=-2+\sqrt{y-3}$.
L'équation admet une solution unique. Donc g est bijective.
2) $g^{-1}: [3;+\infty[ \longrightarrow IR^+ \ , x \mapsto -2+\sqrt{x-3}$

**Exercice 28**

$\forall x \in [-1;1], |x^2-1| = -x^2+1$
La restriction de $f$ à l'intervalle $[-1;1]$ est la fonction : $[-1;1] \to IR, \ x \mapsto x^2+1$

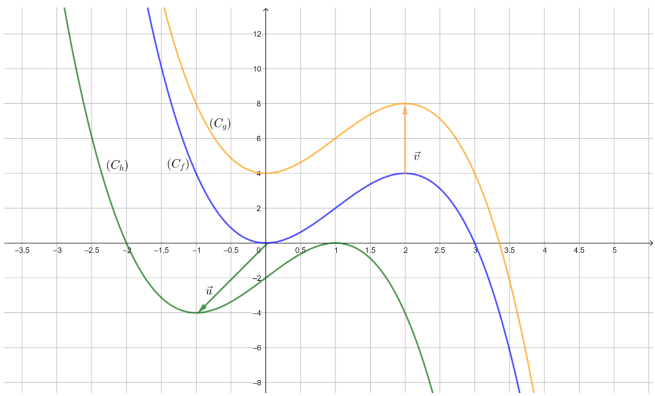
**Exercice 29**

1) $Df = \mathbb{R}-\{0\}$ et $Dg = \mathbb{R}-\{-3;3\}$
2) $Dfg = Df \cap Dg = \mathbb{R}-\{-3;0;3\}$ ; $D(f+g) = Df \cap Dg = \mathbb{R}-\{-3;0;3\}$
$D\dfrac{f}{g} = Df \cap Dg \cap \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } g(x) \neq 0\} = \mathbb{R}-\{-3;0;3\}$
3) $(fg)(x) = \frac{x(x+3)}{x(x^2-9)}$ ; $(f+g)(x) = \frac{x^3+4x^2-9x-27}{x(x^2-9)}$ ; $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\frac{x+3}{x}}{\frac{x}{x^2-9}} = \frac{(x^2-9)(x+3)}{x^2}$

**Exercice 30**

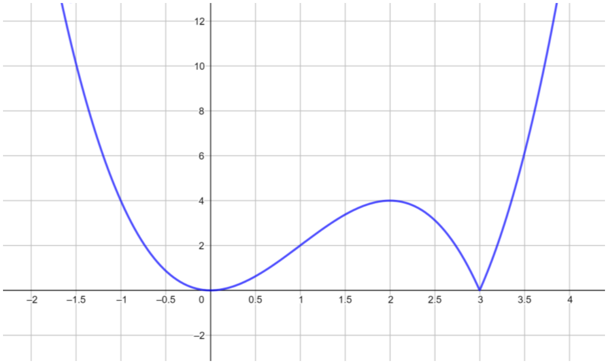
1) Pour $(E_1)$ on a S $=\{-2;2\}$ et pour $(E_2)$ on a S $=\{0\}$
2) Ensembles de définition
a) $D_f = [-3;+\infty[$ et $D_g = IR-\{-1;1\}$
b) $D_{fog} = [0;1] \cup ]1;+\infty[ \ et \ D_{gof} = \left]-1;-\frac{1}{3}\right] \cup ]-1;+\infty[$
c) Pour tout $x$ de $D_{fog}, (fog)(x) = \sqrt{\frac{3|x|-2}{|x|-1}}$ et pour tout $x$ de $D_{gof}$,
$(fog)(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}-1}$

**Exercice 31**

3)



4) a) • La courbe de $h$ est l'image de celle de $f$ par la translation de vecteur $\vec{u}(-1;-4)$ (voir question précédente).
• La courbe de g est l'image de celle de $f$ par la translation de vecteur $\vec{v}(0\,;4)$ (voir question précédente).

• Courbe de $k$



b) $g(x) = f(x) + 4 = 3x^2 - x^3 + 4$

$h(x) = f(x+1) - 4 = -x^3 + 3x - 2$

$k(x) = |f(x)| = |3x^2 - x^3|$.

**Exercice 32**

1) $f(x) = g(x-2) + 1$. Donc $(Cf) = t_{\vec{u}}(Cg)$ avec $\vec{u}\binom{2}{1}$

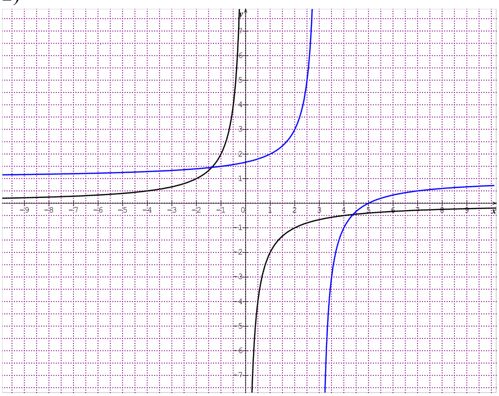
2) $f(x) = (x-2)^2 - 5$. Donc $f(x) = g(x-2) + 1$. Donc $(Cf) = t_{\vec{u}}(Cg)$ avec $\vec{u}\binom{3}{-5}$

3) $f(x) = g(x+7) - 10$. Donc $(Cf) = t_{\vec{u}}(Cg)$ avec $\vec{u}\binom{-7}{-10}$

**Exercice 33**

1) Une équation de la courbe (C') est : $y = -\frac{2}{x-3} + 1$

2)



**Exercice 34**

$g\colon x \mapsto f(x+1)-2$ ; $h\colon x \mapsto -f(-x)$ ; $k\colon x \mapsto |f(x)|$

| $x$ | $-3$ | | $-1$ | | $2$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-1$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-2$ | ↘ | $-7$ |

| $x$ | $2$ | | $0$ | | $-3$ | | $-6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $-1$ | ↘ | $-5$ | ↗ | $0$ | ↗ | $5$ |

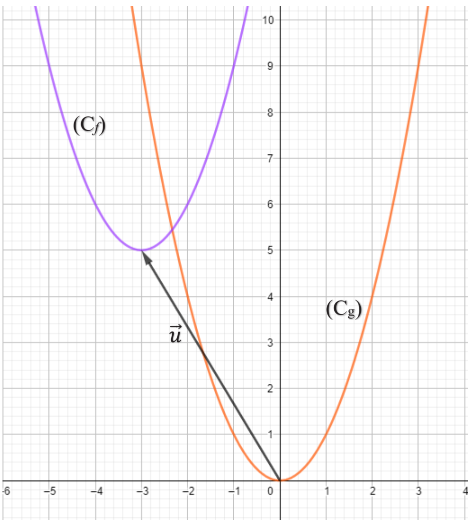
| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $3$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k(x)$ | $1$ | ↗ | $5$ | ↘ | $0$ | ↗ | $5$ |

**Exercice 35**

1) 0 a deux antécédents : -2 et 1. Donc $f$ n'est pas injective.
2) L'application $f$ n'est pas bijective car elle n'est pas injective.
3) Dans l'intervalle $[-2{,}5; 2]$ la droite d'équation $y = m$ pour $m$ variant dans $\mathbb{R}$, coupe au moins une fois la courbe (C). Donc $f$ est surjective.

**Exercice 36**

1) $f(x) = x^2 + 6x + 14 = (x+3)^2 + 5 = g(x+3) + 5$, donc $\vec{u}(-3; 5)$
2)



**Exercice 37**

1) $f(x) \leq g(x)$ dans l'intervalle $[-3; 3]$. L'ensemble des solutions est $[-2; 2]$

2) a) Si $x \in [-3; -1], g(x) = -x + 1$.

Donc $(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq -x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \leq 0$ .

Ensemble des solutions : $S = [-2; -1]$

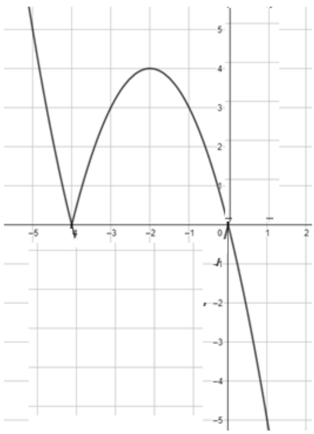
Si $x \in ]-1; 3], g(x) = \frac{x+7}{3}$. Donc $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq \frac{x+7}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - x - 10 \leq 0$

Ensemble des solutions : S = $[-1; 2]$

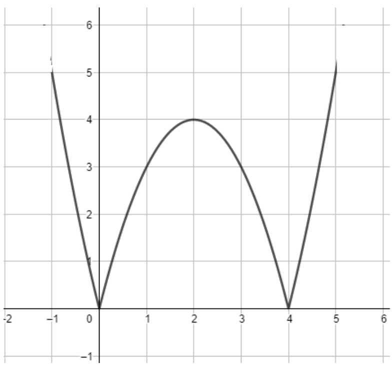
Finalement : l'ensemble des solution de l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$ est $[-2; -1] \cup [-1; 2]$. Soit $S = [-2; 2]$

b) On trouve le même ensemble de solutions.

Courbe de la fonction : $x \mapsto f(-x)$



Courbe de la fonction : $x \mapsto |f(x)|$



**Exercice 38**

Soit $f: IR \to [0;+\infty[$ , $x \mapsto (x+3)^2$ et $g: IR \to IR$, $x \mapsto \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

1) $gof(-1) = g(f(-1)) = g(4) = \frac{7}{2}$ et $fog(1) = f(g(1)) = f(4) = 49$.
2) *a)* $Df = IR$ *et* $= ]0;+\infty[$ donc $Dgof = IR - \{-3\}$ et $Dfog = ]0;+\infty[$

   *c)* $gof(x) = \frac{(x+3)^2+3}{|x+3|}$ *et* $fog(x) = (\frac{x+3}{\sqrt{x}} + 3)^2$
3) Soit $y \in [0;+\infty[$ tel que $f(x) = y$. Cette équation admet deux solutions *:* $-3 + \sqrt{y}$ et $-3 - \sqrt{y}$. Donc $f$ est surjective.
4) On a $f(-6) = 9$ *et* $f(0) = 9$. Donc 9 a deux antécédents. Il en résulte que $f$ n'est pas injective.
5) On considère maintenant $h$ l'application de $[-3;+\infty[$ dans $[0;+\infty[$ telle que $h(x) = (x+3)^2$.

   Soit $y \in [0;+\infty[$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution *:* $-3 + \sqrt{y}$

   Donc $h$ est bijective.

6) a) $h^{-1}(25) = x \Leftrightarrow h(x) = 25 \Leftrightarrow x = 2$, donc $h^{-1}(25) = 2.0$

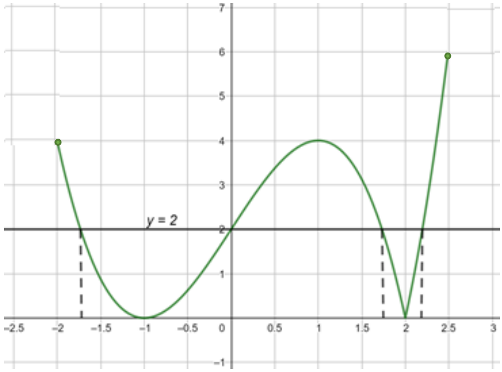
   on calcula de même $h^{-1}(1) = -2$ et $h^{-1}(9) = 0$.

   b) Voir courbes ci-dessous.

**SITUATION COMPLEXE**

**Exercice 39**

Pour répondre à la préoccupation de ces élèves, je vais tracer la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto |f(x)|$ à partir de celle de *f* puis résoudre graphiquement l'inéquation : $|f(x)| \geq 2$




D’après ce graphique, l’inéquation : $|f(x)| \geq 2$ a pour ensemble de solutions [–2 ; –1,7]U[0 ; 1,7]U[2,2 ; 2,5].

En conclusion, le composant s’endommage lorsque la température est entre :

- –2 et –1,7
- ou bien 0 et 1,7
- ou bien 2,2 et 2,5.

**Exercice 42**

Le bénéfice en fonction de $x$ est $B(x) = C(x) - R(x)$

$B(x) = x^2 - 70x + 1000$

$B(x) = (x - 35)^2 - 225$ pour $x \in [0; 60]$

la fonction est maximal pour $x = 60$

le bénéfice est donc maximum pour $x = 60$

# 4 LIMITE ET CONTINUITÉ

**SITUATION D'APPRENTISSAGE**

| Constituants de la situation | Exemples de questions possibles | Réponses possibles des élèves |
|---|---|---|
| Contexte | Où se déroule la scène ? | génies en herbe organisé par le club de mathématique d'un Lycée |
| Circonstances | Quel est le problème auquel un élève de 1ere D est confronté ? | La préparation en vue d'une participation à l'étude de la continuité de la fonction $f$ définie par : $f(x) = \frac{x^2+\lvert x\rvert}{x}$ en $0$. |
| Tâche | Qu'est-ce que des élèves en classe de première se proposent de faire ? | Les élèves se proposent d'étudier les limites et la continuité d'une fonction |

**Découverte des habiletés**

**Activité 1**

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2.

| $x$ | $-1$ | $-0{,}1$ | $-0{,}01$ | 0 | 0,001 | 1,01 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 0,91 | 0,99 | 0,999 | | 0,999 | 0,917 | 0,919 |

3. Lorsque $x$ tend vers 0 alors $g(x)$ tend vers 1.

**Exercice de fixation 1**

1.

| $x$ | $-0{,}1$ | $-0{,}01$ | $-0{,}001$ | $-0{,}0001$ | $-0{,}00001$ | 0 | 0,00001 | 0,001 | 0,01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | 0,99 | 0,99 | 0,99 | 0,99 | 0,999 | | 0,999 | 0,99 | 0,99 |

2. Lorsque $x$ tend vers 0 alors $h(x)$ tend vers 1

**Activité 2**

| $x$ | 1,9 | 1,99 | 1,999 | 1,9999 | 2,0001 | 2,001 | 2,01 | 2,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | 3,61 | 3,96 | 3,996 | 3,999 | 4,000 | 4,004 | 4,04 | 4,41 |

1. Lorsque $x$ tend vers 2 alors $h(x)$ tend vers 4
2. $h(2) = 4$
3. Lorsque $x$ tend vers 2 alors la limite de $h(x)$ vaut 4 qui est $h(2)$

**Exercice de fixation 2**
une fonction numérique $f$ est continue en un point $a$ si et seulement si $f$ est définie en $a$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

**Exercice de fixation 3**
1. F ; 2. V ; 3. F

**Exercice de fixation 4**
1. V ; 2. F ; 3. F

**Exercice de fixation 5**
1. B ; 2. D ; 3. A ; 4. D

**Activité 3**

1. a) $\lim\limits_{x \to 4} (16 - x^2) = 16 - 16 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 4} (x - 4) = 4 - 4 = 0$

b) On a la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ » donc on ne peut pas conclure directement quand à la limite.

2. a) $f(x) = \frac{16 - x^2}{x - 4}$ et $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}, f(x) = -x - 4$ or $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -x - 4$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ , $f(x) = g(x)$
ainsi $f$ est la restriction de $g$ à $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

b) $\lim\limits_{x \to 4} (-x - 4) = -4 - 4 = -8$

**Exercice de fixation 6**

| Colonne A |
|---|
| $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ |
| $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ |
| $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{x^2 - x}$ |
| $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x - 4}{x^2 - 16}$ |
| $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2+5x+6}{x + 2}$ |
| $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$ |

| Colonne B |
|---|
| $-3$ |
| $1$ |
| $2\sqrt{2}$ |
| $-2$ |
| $3$ |
| $\frac{1}{8}$ |

**Activité 4**

1. $\lim_{x \to -1} h(x) = 1$ et $\lim_{x \to -1} g(x) = 2$
2. $\lim_{x \to -1} h(x) \neq \lim_{x \to -1} g(x)$ donc $f$ ne possède pas de limite en $-1$.

**Exercice de fixation 7**

$\forall x \in ]-\infty; 0]$ $f(x) = -x$ et $\forall x \in [0; +\infty[$ $g(x) = x$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} (-x) = 0$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0$

**Exercice de fixation 8**

$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} 3x + 1 = -2$ et $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} x^2 + 1 = 2$

**DES QUESTIONS D'EVALUATIONS**

**Question 1 : Comment calculer la limite en $\boldsymbol{a}$ de certaines fonctions du type $\boldsymbol{\frac{f}{g}}$ telle que $\boldsymbol{f(a) = g(a) = 0}$ ?**

**Exercice non corrigé**

on a : $g(x) = \frac{2x^2-9x-5}{2x^2+7x+3} = \frac{2(x-5)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)}$

Pour $x \neq -\frac{1}{2}$, $g(x) = \frac{x-5}{x+3}$

donc $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} g(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{x-5}{x+3} = -\frac{11}{5}$

**Question 2 : Comment justifier qu'une fonction définie sur les intervalles $]-\infty; \boldsymbol{a}[$ et $]\boldsymbol{a}; +\infty[$ admet une limite en $\boldsymbol{a}$ ?**

**Exercice non corrigé**

$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{2x^2}{x-2} = -2$ ; $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} x - 3 = -2$ et $g(1) = -2$

On a : $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} g(x) = g(1)$ donc $g$ admet une limite en 1.

**Question 3 : Comment justifier qu'une fonction est continue en un point $\boldsymbol{a}$ ?**

**Exercice non corrigé**

$\lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} (x^3-4x^2 + 2x - 5) = 3$ ; $\lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} \sqrt{x} + 1 = 3$ et $g(4) = 3$

On a : $\lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} g(x) = g(4)$ donc $g$ est continue en 4.

## MES SEANCES D'EXERCICES

### Exercices de fixation

#### Exercice 1

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

| $x$ | 0,9 | 0,99 | 0,999 | 1 | 1,0001 | 1,001 | 1,01 | 1,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1,9 | 1,99 | 1,999 | | 2,0001 | 2,001 | 2,01 | 2,1 |

On constate que lorsque $x$ est proche de 1, $f(x)$ est proche de 2 ; donc on peut conjecturer que la limite de $f$ en 1 est 2.

#### Exercice 2

2.

#### Exercice 3

1.

#### Exercice 4

1. VRAI
2. FAUX
3. FAUX
4. FAUX

#### Exercice 5

| Colonne A |
|---|
| $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan x$ |
| $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos x$ |
| $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \sin x$ |

| Colonne B |
|---|
| $-1$ |
| $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $1$ |
| $\frac{1}{2}$ |

#### Exercice 6

1. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{2}$ ; $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \frac{3}{2}$ ; $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f}{g}(x) = \frac{1}{3}$ ; $\lim\limits_{x \to 2} (fg)(x) = \frac{3}{4}$

2. . $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$ ; $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \frac{1}{2}$ ; $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f}{g}(x) = 8$ ; $\lim\limits_{x \to 2} (fg)(x) = 2$

3. . $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{2}{3}$ ; $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = -2$ ; $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f}{g}(x) = -\frac{1}{3}$ ; $\lim\limits_{x \to 2} (fg)(x) = -\frac{4}{3}$

**Exercice 7**

$\lim\limits_{x \to 8} (2x-1)+(x+3) = 17+11 = 28$ ; $\lim\limits_{x \to 0} (2x-1)+(x+3) = -1+3 = 2$

$\lim\limits_{x \to -1} (x^3+3x^2-5x-3) = -1+3+5-3 = 0$ ; $\lim\limits_{x \to 1} (2x-1) = 1$

**Exercice 8**

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-\frac{3}{2}}{x^2-2} = \frac{3}{4}$ ; $\lim\limits_{x \to 2} 2x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 8 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \left(x^3 - \frac{3}{x^3} - \frac{1}{2x}\right) = -\frac{1}{8} + 24 + 1 = -\frac{1}{8} + 25$

**Exercice 9**

$\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim\limits_{x\to-3} (x-3) = -6$ ; $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}(x+3) = 4$ ;

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+2x}{x} = \lim\limits_{x\to0} x+2 = 2$ ; $\lim\limits_{x\to2} \frac{x-3}{x^2-3x} = \lim\limits_{x\to2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim\limits_{x\to0} \sqrt{x+1}+1 = 2$ ; $\lim\limits_{x \to 1} -3(2x-1) = -3$

**Exercice 10**

1. ; 2. ; 3

**Exercice 11**

$\forall x \in ]-\infty; 0]$ $f(x) = -x$ et $\forall x \in [0; +\infty[$ $g(x) = x$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (-x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0$

**Exercice 12**

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} (x^2+4x+3) = 0$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x^3) = -1$

**Exercice 13**

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \sqrt{x-1} = 0$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} 2x-1 = 1$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ donc $f$ n'admet pas de limite en 1.

**Exercice 14**

| N° | Affirmations | Réponses |
|---|---|---|
| 1 | Si une fonction ne possède pas de limite en un point, alors elle est continue en ce point | Faux |
| 2 | Toute fonction continue en point est définie en ce point | Vrai |
| 3 | Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$ et $f(a) \neq k$ alors $f$ est continue en $a$. | Faux |
| 4 | | Faux |

**Exercice 15**

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\sqrt{x}\,\right) = 0 = f(0)$ donc $f$ est continue en 0 .
2. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ donc $g$ n'est pas continue en 0

**Exercice 16**

$\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$ et $f(4) = 1$ donc $f$ n'est pas continue en 4

**Exercice 17**

Une fonction numérique $f$ est continue sur un intervalle si et seulement si elle est continue en tout point de cet intervalle.

**Exercice 18**

1. Faux ; 2. Faux ; 3. Vrai

**Exercice 19**

Cas 4 ; cas 6 ; cas 7 ; cas 8

**Exercice 20**

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x+\sqrt{x}} = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to 8} \frac{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{x-8} = \lim\limits_{x\to 8} \frac{1}{\sqrt{x}+2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$ ; $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-3x-10}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} x-5 = -7$

**Exercice 21**

$\forall x \in ]1;+\infty[$ , $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-)1(\sqrt{x}+1)}{x-1} = 1+\sqrt{x}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} 1+\sqrt{x} = 2$

**Exercice 22**

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}} \frac{x^2-5x+6}{3-x} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}} \frac{(x-3)(x-2)}{3-x} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}} 2-x = -1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\>}} \frac{x^2-5x+6}{3-x} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\>}} \frac{(x-3)(x-2)}{3-x} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\>}} 2-x = -1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}} \frac{x^3+1}{x^2-x+1} = \frac{28}{7} = 4$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\>}} \frac{\sqrt{3x-3}-3}{4-x} = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\>}} \frac{3(x-4)}{(4-x)(\sqrt{3x-3}+3)} = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\>}} \frac{-3}{(\sqrt{3x-3}+3)} = -\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\<}} \frac{\sqrt{3x-3}-3}{4-x} = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\<}} \frac{3(x-4)}{(4-x)(\sqrt{3x-3}+3)} = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\v}} \frac{-3}{(\sqrt{3x-3}+3)} = -\frac{1}{2}$

**Exercice 23**

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}} 2x^2 - x + 4 = 10$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\>}} 3x+2 = 8$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 2\\>}} f(x)$ donc $f$ n'admet pas de limite en 2.

**Exercice 24**

Démontrons que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Pour tout $x$ différent de 0, $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$. On a ensuite

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

**Exercice 25**

Pour tout $x$ différent de 0, $f(x) = 1 + \frac{|x|}{x}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 2 = 2$ car pour $x > 0$ , $f(x) = 2$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} 0 = 0$ car pour $x < 0$ , $f(x) = 0$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ donc $f$ n'est pas continue en 0.

**Exercice 26**

a. Vrai ; b. Faux ; c. Faux d. Faux ; e. Vrai

**Exercice 27**

On a $f(-1) = 7$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = 1 + a$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -3 - b$.

La fonction $f$ est continue en -1 si et seulement si $\begin{cases} 1 + a = 7 \\ -3 - b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases}$

**Exercice 28**

1. L'ensemble de définition de la fonction $h.g$ est $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
2. La formule explicite de la fonction $h.g$ est $(h.g)(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{x-3}$
3. Pour tout $x$ différent de 3, $(h.g)(x) = x + 1$. D'où $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$ alors que $f(3) = 5$.

   On a donc $\lim\limits_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$. La fonction $f$ n'admet pas de limite en 3 ; elle n'est donc pas continue en 3.

**Exercice 29**

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} x^3 = 1$

on a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = f(1)$ donc $f$ est continue en 1.

**Exercice 30**

On a $f(-5) = a$ et $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = \lim\limits_{x \to -5} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{7}$. Donc la fonction $f$ est continue en -5 si et seulement si $a = -\frac{1}{7}$

**Exercice 31**

1. $D_f = \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$ .
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ donc $f$ n'est pas continue en 0
4. $f$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$

**Exercice 32**

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$
2. $p(1) = 0$ et $q(1) = 0$
3. $p(x) = (x-1)(x^2+x-2)$ donc $a = 1$ ; $b = 1$ et $c = -2$
4. Pour $x \neq 1$, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x^2+x-2}{x-3}$
5. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-3} = 0$
6. $f$ n'est définie en 1 et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$ donc $f$ n'est pas continue en 1.
7. $f$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$

**Exercice 33**

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $D_m = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$

$\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2+3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 2x + 3 = 3$

$\lim\limits_{x \to 0} m(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{x^2+x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3}{x+1} = 3$

**Exercice 34**

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{3x-x^2}{x^2-9} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{-x}{x+3} = -\frac{1}{2}$

   $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{x}{x+3} = \frac{1}{2}$

**Exercice 35**

$\forall x \in [0; 1]$ , $f(x) = x^2$ et $\forall x \in [1; 2]$ , $f(x) = 1 + (x-1)^2$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} x^2 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} 1 + (x-1)^2 = 1$

comme $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = f(1)$ donc $f$ est continue en 1.

**Exercice 36**

$\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = h(0)$ donc $h$ est continue en 0 .

**Situations complexes**

**Exercice 37**

$f(x) = \frac{(x^{20}+100)^2-10000}{x^{20}}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0,5 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,01 |
| $f(x)$ | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 0 | 0 |

d'après le tableau la limite en 0 est 0

or $f(x)=\frac{(x^{20}+100)^2-10000}{x^{20}}=x^{20}+200$

donc $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^{20}+200=200$

**Exercice 38**

La fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est définie par :

$$\begin{cases} f(x)=150x \text{ pour } x\in[0;5] \\ f(x)=750 \text{ pour } x\in]5;10] \\ f(x)=100x \text{ pour } x\in]10;30] \\ f(x)=3000+50x \text{ pour } x\in]30,+\infty[ \end{cases}$$

La fonction $f$ a pour ensemble de définition : $\mathbb{R}$

La représentation graphique est la suivante :


Sur la représentation graphique, on constate qu'au point d'abscisse 5 de la courbe, il n'y a pas de « cassure » alors qu'au point d'abscisse 30, il y a « cassure ».

On peut démontrer que la fonction f est continue en 5 alors qu'elle est discontinue en 30.

Le premier élève a donc raison.

# 5 PROBABILITÉ

**Situation d'apprentissage**

Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves)), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de seconde. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.

Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

| **Constituants de la situation** | **Exemples de questions possibles** | **Réponses possibles des élèves** |
|---|---|---|
| Contexte | Où et quand se déroule la scène ? | Dans le salon de Monsieur Ozouoloua dans le cadre de la confection d'un bijou pour un mariage. |
| Circonstances | Indique les raisons qui ont motivé le fils de Monsieur Ozouoloua. | Le fils de Monsieur Ozouoloua souhaite trouver la fréquence que ce pixel se retrouve sur la partie principale de l'écran. |
| Tâche | Qu'a décidé de faire le fils de Monsieur Ozouoloua pour répondre à la préoccupation de son papa ? | De faire des recherches sur les probabilités afin de mieux s'outiller pour répondre à la préoccupation de son père. |

**Activités de découvertes**

**Activité 1** :

Un exemple de résultat possible est 3

**Exercice de fixation 1**

Les deux éventualités de cette expérience sont : (F ; P) ; (P;P).

**Activité 2** :

L'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ des résultats possibles est l'univers.

**Exercice de fixation 2**

L'univers Ω du jeu est : Ω= $\{(P;P); (F;F); (P;F); (F;P)\}$

**Activité 3** :

- L’ensemble $\Omega$ des résultats est connu
- On ne peut pas prévoir d’avance le résultat au cours de chaque lancer.

**Exercice de fixation 3**

L’expérience 2 est une expérience aléatoire.

**Activité 4** :

$A = \{3; 4; 5; 6\}$

**Exercice de fixation 4**

$C = \{1 ;5 ;6\}$ est un évènement de l’expérience.

**Activité 5** :

$B = \emptyset$

**Exercice de fixation 5**

$A = \{7 ;8\}$ et $B = \{0 ;1 ;2\}$ sont des évènements impossibles de l’expérience.

**Activité 6** :

$C = \{1; 2; 3; 4; 4; 5 ; 6\}$

**Exercice de fixation 6**

$B = \{1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6\}$ est l’évènement certain de l’expérience

**Activité 7** :

l’évènement D donne lieu à une seule éventualité.

**Exercice de fixation 7**

$A = \{6\}$ est un évènement élémentaire de l’expérience.

**Activité 8** :

1) a) $F = \{2; 4; 6\}$ ; b) $G = \{1; 3; 5\}$

2) Détermine l’ensemble $F \cap G = \emptyset$

**Exercice de fixation 8**

$A = \{1 ;5\}$ ; $C = \{2 ;4 ;6\}$. A et C sont deux évènements incompatibles de l’expérience.

**Activité 9** :

1) a) $H = \{1; 2\}$ ; b) $I = \{3; 4; 5; 6\}$

2) a) $H \cap I = \emptyset$ ; b) $H \cup I = \Omega$

**Exercice de fixation 9**

- A et C sont deux évènement contraires de l'expérience.
- B et D sont deux évènement contraires de l'expérience.

**Activité 10** :

1) a) $J = \{1; 2\}$ ; b) $K = \{2; 4; 6\}$ ; c) $L = \{2\}$

2) $J \cap K = L$

**Exercice de fixation 10**

1) A et B « le chiffre obtenu est paire et supérieur ou égal à 5 ».
2) $A \cap B = \{6\}$

**Activité 11** :

1) a) $M = \{3; 4; 5 ; 6\}$ ; b) $N = \{2; 3; 4\}$ ; c) $Q = \{2; 3; 4; 5; 6\}$

2) $M \cup N = Q$

**Exercice de fixation 11**

1) A ou B « le chiffre obtenu est paire ou supérieur ou égal à 5 »
2) $A \cup B = \{2; 4; 5; 6\}$

**Activité 12** :

1) a) La chance qu'à l'évènement R dans l'ensemble Ω de se réaliser est : $\frac{2}{6}$

La chance qu'à l'évènement S dans l'ensemble Ω de se réaliser est : $\frac{1}{6}$

La chance qu'à l'évènement Q dans l'ensemble Ω de se réaliser est : $\frac{1}{6}$

b) La chance de l'évènement R dans l'ensemble Ω est à la sommes des chances des évènements S et Q dans l'ensemble Ω.

2) La chance de l'évènement V l'ensemble dans Ω est 0 ; La chance de l'évènements Ω l'ensemble dans Ω est 1.

**Exercice de fixation 1**2

1) Faux ; 2) Vrai ; 3) Faux
**Activité 13** : **Calculer la probabilité d'un évènement**

1) $P(W) = \frac{1}{2}$

2) a) $card(W) = 3$ ; et $card(\Omega) = 6$

b) Compare $P(W) = \frac{card(W)}{card(\Omega)}$.

**Exercice de fixation 13**

Un jeu consiste à lancer un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et à lire la face supérieure du dé.

On définis l'évènement A tel que : A = {2 ;4 }.

1) card(A) = 2 ; et card(Ω) = 6 .
2) P(A) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

**Activité 14**

1) $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$ , $B = \{3; 6; 9; 12; 15\}$ , $A \cap B = \{6; 12\}$ et $A \cup B = \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15\}$
2) p(A) = $\frac{7}{15}$ ; p(B) = $\frac{5}{15}$ ; p(A∩ $B$) $= \frac{2}{15}$ ; p(A∪ $B$) $= \frac{10}{15}$
3) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

**Exercice de fixation 14**

$p(A) = p(A \cup B) + p(A \cap B) - p(B)$ ; $p(A) = \frac{2}{5}$

**Activité 15** :

En utilisant la propriété : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, justifie que p( $\overline{\text{A}}$ ) = 1 – p(A)

**Exercice de fixation 15**

La probabilité de $\overline{\text{A}}$ est $\frac{4}{5}$

**Questions d'évaluation**

**Question 1 : comment calculer la probabilité d'un évènement**

**Exercice non résolu**

On note Ω le nombre de tirages possibles.

1) CardΩ = $C_{10}^3$= 120

2-a) card(A) = $C_5^3 + C_3^3 = 10 + 1 = 11$ ; P(A) $= \frac{11}{120}$

b) Pour l'évènement B , nous avons les possibilités suivantes :

RRB ou BBR ou RRN ou NNR ou BBN ou NNB .

Card(B) = $C_5^2 C_3^1 + C_3^2 C_5^1 + C_5^2 C_2^1 + C_2^2 C_5^1 + C_3^2 C_2^1 + C_2^2 C_3^1 = 69$ . P(B) $= \frac{69}{120} = \frac{23}{40}$

**Question 2 : calculer la probabilité d'un évènement en utilisant son évènement contraire**

**Exercice non résolu**

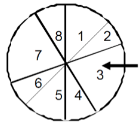
Dans une région, les grossesses vont toujours à leurs termes et la probabilité qu'une femme donne naissance à un garçon est de 0,46. On note E l'évènement : « Une femme donne naissance à un fille »

Calcule $p(E) = 1 - 0{,}46 = 0{,}54$

**Question 3 : calculer la probabilité de l'évènement en utilisant les évènements élémentaires qui le composent.**

**Exercice non résolu**

Une roue de loterie est composée de 8 secteurs d'aires différentes. Les secteurs sont numérotés de 1 à 8.
On fait tourner la roue. Quand la roue s'arrête, l'indicateur désigne alors un secteur. Le tableau ci-dessous récapitule les probabilités correspondantes aux secteurs.




| Secteur | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,12 | 0,06 | 0,23 | 0,09 | 0,12 | 0,06 | 0,23 | 0,09 |

1) La probabilité que le secteur 1 ou le secteur 7 soit désigné est 0,12 +0,23 = 0,35.
2) La probabilité qu'un secteur pair soit désigné 0,06+0,09+0,06+0,09 = 0,3.
3) La probabilité qu'un secteur impair soit désigné 0,12+0,23+0,12+0,23 = 0,7.

**Question 4 : calculer la probabilité de l'évènement en utilisant un tableau.**

**Exercice non résolu**

| 1. | Elèves ayant un sac à dos | Elèves ayant un sac en bandoulière | Total |
|---|---|---|---|
| Elèves ayant 14 ans | **2** | **10** | **12** |
| Elèves ayant 15 ans | **5** | **3** | **8** |
| Elèves ayant 16 ans | **3** | **2** | **5** |
| Total | 10 | **15** | 25 |

2. A : « l'élève a 14 ans et un sac à dos »
$P(A) = \frac{2}{25}$
B : « l'élève a 15 ans et n'a pas de sac à dos »
$P(B) = \frac{3}{25}$

C : « l'élève a 16 ans »
$P(C) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

D : « l'élève a un sac en bandoulière » $P(D) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

## EXERCICES DE FIXATION

### EXERCICE 1

| Tableau 1 |
| --- |
| Obtenir 5 est un : |
| Obtenir 10 est un : |
| Obtenir un chiffre est un : |

| Tableau 2 |
| --- |
| Evènement élémentaire |
| Evènement impossible |
| Evènement certain |

### EXERCICE 2

1) Tirer deux cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes.
3) Tirer au but lors d'un match de football.
6) Lancer une pièce de monnaie et lire la face supérieure.
7) Tirer 4 boules parmi 15 boules indiscernables au toucher

### EXERCICE 3

***Le résultat aléatoire d'une expérience est appelé éventualité***

### EXERCICE 4

d) $\{2;4;6\}$

### EXERCICE 5

Les issues de cette expérience sont C ;H ;O ;L ;A ;T.

### EXERCICE 6

Les issues de cette expérience sont : 2 ; 3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8 ;9 ;10 ;11 et 12

### EXERCICE 7

1- C ; 2- B ; 3- C ; 4-B

### EXERCICE 8

1) Card (Ω)= 36
2) On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32;
Card (Ω)= 36
3) Card (Ω)= 1024

### EXERCICE 9

| Tableau 1 |
| --- |
| Lorsque cet évènement est l'ensemble vide |
| Lorsque cet évènement est l'ensemble Ω |
| Lorsque cet évènement est un singleton |

| Tableau 2 |
| --- |
| on l'appelle évènement certain |
| on l'appelle évènement impossible |
| on l'appelle évènement élémentaire |

**EXERCICE 10**

1) FAUX ; 2) VRAI ; 3) FAUX ; 4) VRAI ; 5) VRAI

**EXERCICE 11**

On lance un dé non truqué à six faces. Complète le tableau ci-dessous suivant l'exemple de la première ligne.

| | Evènement Elémentaire | Evènement Impossible | Evènement Certain |
|---|---|---|---|
| « Obtenir un nombre Supérieur à six » | | x | |
| « Obtenir six » | x | | |
| « Obtenir un multiple de 11 » | | x | |
| « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 » | | | x |

**EXERCICE 12**

| Tableau 1 | Tableau 2 |
|---|---|
| Obtenir 5 est un : | Evènement élémentaire |
| Obtenir 10 est un : | Evènement impossible |
| Obtenir un chiffre est un : | Evènement certain |

**EXERCICE 13**

| Tableau 1 | Tableau 2 |
|---|---|
| Obtenir un nombre pair et multiple de 3 | $\{4;8;12\}$ |
| Obtenir un nombre impair et multiple de 3 | $\{8;9;10;11;12\}$ |
| Obtenir un nombre multiple de 4 | $\{6;12\}$ |
| Obtenir un nombre strictement supérieur à 7 | $\{8;9;10\}$ |
| Obtenir un nombre strictement supérieur à 7 et strictement inférieur à 11 | $\{3;9\}$ |

**EXERCICE 14**

| Tableau 1 | Tableau 2 |
|---|---|
| L'évènement (A ou B) | $\{2;4;6;8;9;10;11;12\}$ |
| L'évènement (A et B) | $\{8;10;12\}$ |
| L'évènement (A ou C) | $\{2;3;4;6;8;9;10;12\}$ |
| L'évènement (A et C) | $\{3;6;8;9;10;11;12\}$ |
| L'évènement (B ou C) | $\{9;12\}$ |
| L'évènement (B et C) | $\{6;12\}$ |

**EXERCICE 15**

1- B ; 2- C ; 3- B ; 4- B ;

**EXERCICE 16**

***On appelle évènement contraire de A la partie $\overline{A}$ de Ω, complémentaire de A dans Ω.***

**EXERCICE 17**

1) VRAI ; 2) FAUX ; 3) VRAI

**EXERCICE 18**

1) VRAI ; 2) FAUX ; 3) VRAI

**EXERCICE 19**

1) Dans une classe, on choisit deux élèves au hasard.
Soit l'évènement A : « Les deux élèves sont des filles ». L'évènement contraire de A est :
  a) « Les deux élèves sont des garçons ».
2) Dans un groupe de policiers et de gendarmes, on discute avec une personne.
Soit l'évènement B : « La personne est un homme policier ». L'évènement contraire de B est
  c) « La personne est une femme ou un homme gendarme ».
3) A une loterie, Elise achète 3 billets.
Soit l'évènement D : « L'un des billets au moins est gagnant ». L'évènement contraire de D est :
  c) « Un billet est gagnant ».
4) A une loterie, Elise achète 3 billets.
Soit l'évènement E : « Deux billets au plus sont gagnants. L'évènement contraire de E est
  b) « Deux billets sont gagnants».

**EXERCICE 20**

1) FAUX ; 2) VRAI ; 3) FAUX

**EXERCICE 21**

b) $\frac{4}{5}$

**EXERCICE 22**

Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules vertes, toutes indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard. Réponds par vrai (V) ou faux (F).
1) VRAI ; 2) VRAI ; 3) FAUX ; 4) VRAI

**EXERCICE 23**

La probabilité de perdre à ce jeu est de 0,75

**EXERCICE 24**

La probabilité de mettre au monde un garçon est de $\frac{2}{3}$

**EXERCICE 25**

| Données Mathématiques | Réponse |
|---|---|
| P(A) = 0,9 ; P(B) = 0,3 et $A \cap B = \emptyset$ | FAUX |
| P(A) = 0,9 ; P(B) = −0,5 | FAUX |
| P(A) = 0,8 ; P(B) = 0,4 et P(A ∩ B) = 0,2 | VRAI |
| P(A) = 0,9 ; P(B) = 0,3 et P(A ∩ B) = 0,1 | FAUX |
| P(A) = 0,9 ; P(B) = 0.,3 et P(A ∩ B) = 0,3 | VRAI |

**EXERCICE 26**

des situations d'équiprobabilité

1) On choisit au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes identiques.

4) On tire trois boules dans une urne contenant 10 boules indiscernables au toucher.

5) On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibré.

**EXERCICE 27**

1)VRAI ; 2) FAUX ; 3VRAI ; 4) VRAI

**EXERCICE 28**

1) $P(A) = \frac{7}{15}$ ; $P(B) = \frac{1}{3}$ et $P(A \cap B) = \frac{2}{15}$
2) $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$

**EXERCICE 29**

$P(A) = \frac{2}{5}$

## Exercices de renforcement / approfondissement

**Exercice 30**

$P(A \cup B) = 0{,}8$ ; $P(\bar{A}) = 0{,}7$ ; $P(\bar{B}) = 0{,}5$

**Exercice 31**

1) Déterminons la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « La carte choisie est une figure »

$P(A) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

B : « La carte choisie est un dix ou un neuf »

$P(B) = \frac{8}{52} = \frac{4}{13}$

2) a) Définissons par une phrase chacun des événements $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $A \cup B$

$\bar{A}$ : « La carte choisie n'est pas une figure »

$\bar{B}$ : « La carte choisie n'est ni un dix et ni un neuf »

b) Calcule les probabilités $P\left(\bar{A}\right)$, $P\left(\bar{B}\right)$ et $P\left(A \cup B\right)$.

On a : $P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{13}$

Donc $P(\bar{A}) = \frac{10}{13}$

On a : $P(\bar{B}) = 1 - \frac{4}{13}$

Donc $P(\bar{B}) = \frac{9}{13}$

On a : les événements A et B sont disjoints.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A \cup B) = \frac{3}{13} + \frac{4}{13}$

Donc $P(A \cup B) = \frac{7}{13}$

**Exercice 32**

1) FFF ; FFP ; FPF ; FPP ; PPP ; PPF ; PFP ; PFF

2) $P(A) = \frac{1}{8}$ ; $P(B) = \frac{7}{8}$

**Exercice 33**

1) $P_6 = 1 - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5)$

$P_6 = 1 - (0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}15)$

$P_6 = 0{,}15$

2) soit $P$ la probabilité d'obtenir un nombre pair

$P = P_2 + P_4 + P_6$

$P = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}15$

$P = 0{,}45$

**Exercice 34**

1) $\frac{4}{7}$ ; 2) $\frac{3}{7}$ ; 3) $\frac{2}{7}$ ; 4) $\frac{3}{7}$ ; 5) $\frac{4}{7}$

**Exercice 35**

Un collège compte 240 élèves en première, parmi lesquels 130 sont internes.
Ces élèves étudient chacun une langue.
66 élèves étudient l'anglais, 30 % des élèves l'allemand, dont 40 internes.
25 % des élèves sont des internes qui étudient l'espagnol.

1) Reproduire et compléter le tableau suivant :

| | Anglais | Allemand | Espagnol | Total |
|---|---|---|---|---|
| internes | **30** | **40** | **60** | 130 |
| Externes | **36** | **32** | **42** | 110 |
| Total | 66 | **72** | **102** | 240 |

2) Un élève est choisi au hasard parmi les 240 élèves de première.

A : « l'élève étudie l'anglais »
$P(A) = \frac{66}{240} = \frac{11}{40}$
B : « l'élève est externe »
$P(B) = \frac{110}{240} = \frac{11}{24}$
C : « l'élève est externe et étudie l'anglais »
$P(C) = \frac{36}{240} = \frac{3}{20}$
D : « l'élève n'étudie pas l'espagnol »
$P(D) = \frac{138}{240} = \frac{23}{40}$
E : « l'élève est internes et n'étudie pas l'espagnol »

$P(E) = \frac{70}{240} = \frac{7}{24}$

**Exercice 36**

1) a) $P_1 = \frac{3}{20}$ ; b) $P_2 = \frac{17}{40}$

2) a) $P_3 = \frac{3}{40}$ ; b) $P_4 = \frac{9}{40}$

**Exercice 37**

$P(A) = \frac{1}{5}$ ; $P(B) = \frac{3}{10}$ ; $P(C) = \frac{1}{2}$

**Exercice 38**

1) $P(A) = \frac{3}{5}$

2) a) A et B sont des évènements contraires

b) $P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ ou $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

**Exercice 39**

$P(A) = \frac{1}{5}$ ; $P(B) = \frac{3}{10}$ ; $P(C) = \frac{1}{2}$

**Exercice 40**

**A :** « La carte tirée est une dame. »

$$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

**B :** « La carte tirée est une figure rouge. »

$P(B) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

**C :** « La carte tirée n'est pas une figure rouge. »

$P(C) = 1 - P(B)$

$P(C) = \frac{1}{2}$

**Exercice 41**

1) Soient $P_1$ la probabilité qu'a le joueur A de tirer le 5 de Carreau et $P_2$ la probabilité qu'a le joueur B de tirer le 5 de Carreau

$P_1 = 0$ car le jeu de 32 cartes ne comporte pas le 5 de carreau.

$P_2 = \frac{1}{52}$

2) On a :

Le jeu de 32 cartes comporte 8 cœurs , $P_1 = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

Le jeu de 52 cartes comporte 13 cœurs , $P_2 = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

Comme $P_1 = P_2$, alors les joueurs ont la même probabilité de tirer un cœur.

3) On a :

Le jeu de 32 cartes comporte 4 cœurs , $P_1 = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

Le jeu de 52 cartes comporte 4 cœurs , $P_2 = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

Comme $P_1 > P_2$, alors les joueurs n'ont pas la même probabilité de tirer une dame.

**Exercice 42**

1) Recopie et complète le tableau ci-contre.

| | | **Dé rouge** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **Dé vert** | 1 | (1;1) | (1;2) | (1;3) | (1;4) | (1;5) | (1;6) |
| | 2 | (2;1) | (2;2) | (2;3) | (2;4) | (2;5) | (2;6) |
| | 3 | (3;1) | (3;2) | (3;3) | (3;4) | (3;5) | (3;6) |
| | 4 | (4;1) | (4;2) | (4;3) | (4;4) | (4;5) | (4;6) |
| | 5 | (5;1) | (5;2) | (5;3) | (5;4) | (5;5) | (5;6) |
| | 6 | (6;1) | (6;2) | (6;3) | (6;4) | (6;5) | (6;6) |

2) $P_1 = \frac{1}{36}$

3) $P_2 = \frac{1}{6}$

4) $P_3 = \frac{5}{12}$

**Exercice 43**

1) $P_1 = \frac{35}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{7}{100}$
2) $P_2 = \frac{35}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{7}{25}$

**Exercice 44**

1) (R, R); (R, V) ;(V, R); (R, B) ;(B, R) ;(B, B) ;(B, V); (V, B)
2) a)

$P\{(R,R)\} = \frac{A_5^2}{A_8^2} = \frac{5}{14}$

$P\{(R,V)\} = \frac{2\times5\times1}{A_8^2} = \frac{5}{28}$

$P\{(R,B)\} = \frac{2\times5\times2}{A_8^2} = \frac{5}{14}$

$P\{(R,R)\} = \frac{A_5^2}{A_8^2} = \frac{5}{14}$

$P\{(B,V)\} = \frac{2\times2\times1}{A_8^2} = \frac{1}{14}$

$P\{(B,B)\} = \frac{2}{56} = \frac{1}{28}$

b) $P\{(R,R)\} + P\{(B,B)\} = \frac{5}{14} + \frac{1}{28} = \frac{11}{28}$

**Exercice 45**

$B_r$ « boule rouge » ; $B_b$ « boule bleue » ; $J_r$ « jeton rouge » ; « $j_b$ jeton bleu »

1) $B_r j_b$; $B_r J_r$ ; $B_b j_b$; $B_b J_r$
2)

$P\{B_r j_b\} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

$P\{B_r j_r\} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

$P\{B_b j_r\} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

$P\{B_b j_b\} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

3) A : « la boule et le jeton extraits sont de la même couleur »

On a : $P(A) = P\{B_r j_r\} + P\{B_b j_b\}$

$P(A) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}$

Donc $P(A) = \frac{2}{5}$

**Exercice 46**

4) $P_1 = \frac{2}{25}$ ; $P_2 = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ ; $P_3 = \frac{41}{50}$

**Exercice 47**

1) $P_1 = \frac{1}{45}$ ; $P_2 = \frac{4}{15}$ ; $P_3 = \frac{2}{3}$

**Exercice 48**

$P(A) = \frac{1}{12}$ ; $P(B) = \frac{1}{2}$ ; $P(C) = \frac{5}{12}$ ; $P(D) = \frac{1}{3}$ ; $P(E) = \frac{1}{3}$

**Exercice 49**

On note $p$ la probabilité d'apparition de la face 1, les probabilités d'apparition des autres faces sont respectivement égales à $2p$ , $3p$ , $4p$, $5p$ et $6p$, puisque proportionnelles au numéro de chaque face. Puisque la somme des probabilités des évènements élémentaires vaut 1.

on a : $p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1$

$21p = 1$

Donc $p = \frac{1}{21}$

On obtient de tableau ci-dessous

| Face | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | $\frac{1}{21}$ | $\frac{2}{21}$ | $\frac{3}{21}$ | $\frac{4}{21}$ | $\frac{5}{21}$ | $\frac{6}{21}$ |

A « obtenir un nombre impaire »

$P(A) = \frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21}$

$P(A) = \frac{3}{7}$

**Exercice 50**

$\mathbf{J}_b$ « Jeton bleu » ; $\mathbf{J}_j$ « Jeton jaune » ; $\mathbf{J}_r$ « Jeton rouge »

1) a) Les issues possibles de cette expérience aléatoire sont : $\mathbf{J}_b\mathbf{J}_b$ , $\mathbf{J}_j\mathbf{J}_j$ , $\mathbf{J}_b\mathbf{J}_r$ , $\mathbf{J}_r\mathbf{J}_b$ , $\mathbf{J}_b\mathbf{J}_j$ , $\mathbf{J}_j\mathbf{J}_b$ , $\mathbf{J}_r\mathbf{J}_j$ , $\mathbf{J}_j\mathbf{J}_r$

b) Soit $P'$ la probabilité de tirer deux jetons d'une même couleur.

tirer deux jetons d'une même couleur revient à obtenir deux jetons bleus ou deux jetons jaune.

On a : $P\{(\mathbf{J}_b\mathbf{J}_b)\} = \frac{3^2}{6^2} = \frac{1}{4}$

$P\{(\mathbf{J}_b\mathbf{J}_b)\} = \frac{2^2}{6^2} = \frac{1}{9}$

$P' = P\{(\mathbf{J}_b\mathbf{J}_b)\} + P\{(\mathbf{J}_b\mathbf{J}_b)\}$

Donc $P' = \frac{13}{36}$

2) - On tire au hasard un jeton du sac et on observe sa couleur

$P' = \frac{1}{6}$

- On ne le remet pas dans le sac, puis on tire au hasard un autre jeton du sac et on

On a : $P\{(\mathbf{J}_b\mathbf{J}_b)\} = \frac{A_3^2}{A_6^2} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

$P\{(\mathbf{J}_b\mathbf{J}_b)\} = \frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

$P' = P\{(\mathbf{J}_b\mathbf{J}_b)\} + P\{(\mathbf{J}_b\mathbf{J}_b)\}$

Donc $P' = \frac{4}{15}$

**Exercice 51**

Un dé cubique a été truqué. En lançant un grand nombre de fois, on estime la probabilité d'obtenir chaque face. Voici les estimations

| Face | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,05 | 0,1 | | 0,2 | 0,25 | 0,3 |

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « obtenir 3 »
   On a : $P(A) = 1 - (0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}3)$
   Donc $P(A) = 0{,}1$

   B : « obtenir 4 ou plus »
   On a : $P(B) = 0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}3$
   Donc $P(B) = 0{,}75$

2) La probabilité d'obtenir un nombre pair est de 0,55 et celle d'obtenir un nombre impair est de 0,45. l'affirmation de l'élève est fausse.

**Exercice 52**

1) Calculer la probabilité d'apparition de chaque face.
   Soit $p$ la probabilité d'apparition des faces 1,2,3,4 et 5.
   On a : $p + p + p + p + p + \frac{1}{3} = 1$
   $5p = 1 - \frac{1}{3}$
   Donc $p = \frac{2}{15}$

2) Calculer la probabilité des événements suivants :
   E : « le dé tombe sur le 3 ou le 6 »
   $P(E) = \frac{2}{15} + \frac{1}{3}$
   $P(E) = \frac{7}{15}$
   F : « le dé tombe sur un numéro pair »
   $P(F) = \frac{4}{15} + \frac{1}{3}$
   $P(F) = \frac{3}{5}$

   G : « le dé tombe sur un numéro impair »
   $P(G) = \frac{6}{15}$
   $P(G) = \frac{2}{5}$

   E : « le dé tombe sur un numéro supérieur ou égal à 3 »

$P(E) = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{3}$
$P(E) = \frac{11}{15}$
F : « le dé tombe sur le numéro 7 »

$P(F) = 0$ ( F : « le dé tombe sur le numéro 7 » est irréalisable)

**3)** Calculer la probabilité des événements (E ou F) et (E et F)

- $P(E \cap F) = 0$
- La probabilité de E ou F est $P(E \cup F) = P(E) + P(F) = \frac{11}{15}$ car $P(E \cap F) = 0$ et $P(F) = 0$

**Exercice 53**

On croise un musicien de cet orchestre.
1) $P_1 = \frac{1}{102}$
2) $P_2 = \frac{2}{102} = \frac{1}{51}$
3) $P_3 = \frac{62}{102} = \frac{31}{51}$

**Exercice 54**

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

| | Hommes | Femmes | Enfants | Total |
|---|---|---|---|---|
| Touristes | **1300** | **1480** | **320** | 3100 |
| Membres de l'équipage | **440** | **460** | **0** | 900 |
| Total | 1740 | **1940** | **320** | 4000 |

2) On choisit une personne au hasard.
a) $P_1 = \frac{1300}{4000} = 0{,}325$ comme $P_1 < 0{,}5$ alors, on n'a pas plus d'une chance sur deux que ce soit un homme.
b) $P_2 = \frac{900}{4000} = \frac{9}{40}$
c) $P_3 = \frac{2520}{4000} = \frac{63}{100}$

**EXERCICE 55**

Une entreprise fabrique un article qui doit répondre à des normes précises.
On considère que 8 % des articles produits ne sont pas conformes aux normes. Un test de contrôle en fin de fabrication est censé repérer les articles non conformes. Cependant le test comporte une certaine marge d'erreur. Une étude a établi que :

- 5 % des articles conformes aux normes sont refusés par le test ;
- 10 % des articles non conformes aux normes sont acceptés par le test.

On considère un article pris au hasard au moment de passer le test. On note :
C l'évènement « l'article est conforme aux normes » ;
T l'évènement « l'article est accepté par le test ».
$\overline{C}$ et $\overline{T}$ désignent les évènements contraires respectifs de C et T.

1) Complète le tableau à double entrée ci-dessous :

| | $C$ | $\overline{C}$ | Total |
|---|---|---|---|
| $T$ | **874** | **8** | **882** |
| $\overline{T}$ | **46** | **72** | **118** |
| Total | **920** | **80** | 1000 |

2) a) Traduis par une phrase, l'évènement « *T* et *C* »

L'article est conforme aux normes et accepté par le test

b) Calcule $P(T \cap C)$

$$P(T \cap C) = \frac{874}{1000} = \frac{437}{500}$$

c) Calcule $P(T \cup C)$

$$P(T \cup C) = P(T) + P(C) - P(T \cap C)$$
$$P(T \cup C) = \frac{882}{1000} + \frac{920}{1000} - \frac{874}{1000}$$

$$P(T \cup C) = \frac{116}{125}$$

**Exercice 56**

1) 12x11x10 = 1320

2) $P_1 = \frac{1}{1320}$

3) Le nombre de tickets gagnant dans le désordre est : 3x2x1 – 1 = 5

Donc $P_2 = \frac{5}{1320}$

4) Calcule est la probabilité qu'il arrive dans le tiercé de tête.

$P_3 = \frac{3x(11x10)}{1320} = \frac{1}{4}$

5) $P_4 = \frac{1x11x10}{1320} = \frac{1}{12}$

## Situation complexe

**Exercice 57**

Calculons la probabilité $P$ de ne pas avoir au menu, ni du riz, ni du veau.

On a : $P = \frac{7}{9} \times \frac{4}{6}$

$P = \frac{14}{27}$

$P \approx 0{,}52$
Comme $P > \frac{1}{2}$ , alors le marin a eu raison dans son affirmation.

**Exercice 58**

Supposons que 400 ordinateurs portables ont été produits avant de constater la panne.

- 8% x 400 = 32 ordinateurs portables ayants la panne A.
- 2% x 400 = 8 ordinateurs portables ayants la panne A et la panne B.
- 5% x 400 = 20 ordinateurs portables ayants la panne B.
- Coût de réparation des ordinateurs portables:
  50.000 x 32 + 100.000 x 20 + 50.000 x 2 + 100.000 x 2 = 3.900.000
- Coût de production des 10.000.000 d'ordinateurs portables
  200.000 x 10.000.000 + 3.900.000 = 2.000.003.900.000
- Coût de vente des ordinateurs portables
  10.000.000 x 500.000 = 5.000.000.000.000
- Bénéfice du chef d'entreprise
  5.000.000.000.000 – 2.000.003.900.000 = 2.999.996.100.000
  chef d'entreprise a raison d'être optimiste.

# 6 DÉRIVATION

**Situation d'apprentissage**

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (lecture silencieuse des élèves, lecture par un élève et par le professeur), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte en leur demandant par exemple d'en faire un résumé.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

| Constituants de la situation | Exemples de questions possibles | Réponses possibles des élèves |
|---|---|---|
| Contexte | ✓ Où se déroule la scène ?<br>✓ De quoi s'agit-il ? | ✓ Dans un lycée<br>✓ Les élèves de la classe veulent confectionner des poubelles pour le lycée, à l'aide de plaque de métal de 50 cm de côté. |
| Circonstances | Pour quelles raisons on sollicite les élèves ? | Pour fabriquer ces poubelles sans couvercle, le ferronnier enlève à chaque coin de la plaque un carré de côté x (cm) et il relève les bords par pliage.La boîte obtenue est un pavé droit (sans toit).Un élève d'une classe de terminale leur dit qu'en utilisant les fonctions dérivées on peut choisir le x de façon adéquate pour que le volume de la poubelle soit maximal. |
| Tâche | Que doivent faire les élèves pour répondre à la sollicitation ? | Avec l'aide du professeur de mathématiques, ils décident de s'informer pour déterminer la valeur de x qui convient. |

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation, tout en faisant remarquer l'importance des dérivées pour traduire, traiter et trouver des solutions à des problèmes de vie courante, d'où son importance dans le programme scolaire. Il invitera les apprenants à être très attentifs car la dérivation intervient dans la suite du programme et dans plusieurs domaines notamment en physiques, en SVT. Il annoncera par la suite le titre et le plan de la leçon

Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

## Découverte des activités

**Activité 1**

1) $f$ est continue en 2 et en 5.
2) $t_2 = \frac{2(x+2)(x-2)}{x-2}$ et $t_5 = \frac{2(x+5)(x-5)}{x-5}$.
3) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 8$ et $\lim\limits_{x \to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = 20$

**Exercice de fixation 1**

(B, 3) (C, 1) (D, 2)

**Activité 2 :**

3) Soit M$(x, f(x))$ un point quelconque de (C) distinct de A

b) le coefficient directeur de la droite (AM) est donné par : $\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

c)

| $x$ | 1,5 | 1,7 | 1,9 | 2 | 2,2 | 2,3 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$ | 3 | 3,4 | 3,8 | | 4,2 | 4,6 | 5 | 6 |

**Exercice de fixation 2**

T1-B ; T2-C ; T3-B ; T4-B

**Activité 3** :

1)
   a) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 4a$
   b) $f'(a) = 4a$
   c) $f'(x) = 4x$
2)
   a) $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$
   b) $g'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$
   c) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3)
   a) $\lim\limits_{x \to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = -\frac{1}{a^2}$
   b) $h'(a) = -\frac{1}{a^2}$
   c) $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$

**Exercice de fixation 3**

Si $f$ est dérivable en tout point de l'intervalle I, on dit que $f$ est dérivable sur I et la fonction qui à tout élément $x$ de I associe **le nombre dérivé de $f$** en $x$ est appelée **la fonction dérivée de $f$** sur I et est notée $f$'.

**Activité 4** :

1) $f(a) + (\frac{f(x)-f(a)}{x-a})(x-a) = f(a) + f(x) - f(a) = f(x)$
2) $\lim\limits_{x \to a} (\frac{f(x)-f(a)}{x-a})(x-a) = 0$ car si $f$ dérivable en $a$ alors $\lim\limits_{x \to a} (\frac{f(x)-f(a)}{x-a})$ existe et est finie
3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (f(a) + (\frac{f(x)-f(a)}{x-a})(x-a)) = f(a) + 0 = f(a)$

**Exercice de fixation 4**

Si $f$ est **dérivable** en $a$ alors elle est **continue** en $a$.

**Activité 5** :

1)

$\lim\limits_{x \to a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

2)

$\lim\limits_{x \to a} \frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ x } g(x) + \lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \text{ x } f(x)$

3)

$\lim\limits_{x \to a} \frac{\frac{1}{g}(x)-\frac{1}{g}(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{-g(x)-g(a)}{x-a} \text{ x } \frac{1}{g(x) \text{ x } g(a)}$

4)

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f^n(x)-f^n(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ x } [f^{n-1}(x) + f(a)f^{n-2}(x) + \cdots + f(a)^{n-2} f(x) + f^{n-1}(a)]$

**Exercice de fixation 5**

(A, 2) ; (B, 6) ;(C, 5) ;(D, 1) ;(E, 3) et (F, 4)

**Activité 6**

Objectif : déterminer le sens de variation d'une fonction à partir du signe de la dérivée

1) $f'(x) = 2x$ , $f'(x)$ est positive sur $]0 ; +\infty[$ et négative sur $]-\infty ; 0[$
2) 

   b) $f$ est décroissante sur $]-\infty ; 0[$
3) 

   b) $f$ est croissante sur $]0 ; +\infty[$

**Exercice de fixation 6**

1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Vrai ; 4. Faux ; 5. Faux ; 6. Faux ; 7. Vrai ; 8. Vrai

**Questions d'évaluation**

Question 1 : comment étudier les variations d'une fonction

**Solution exercice non résolu** :

Étudie les variations de la fonction $f$ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2$.

$f$ est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]2, +\infty[$
$f$ est strictement décroissante sur $]0,2[$

Question 2 : comment déterminer graphiquement le nombre dérivé en un point $a$

Solution exercice non résolu :

$g'(-3) = 2$ et $g'(0) = 0$ et $g'(2) = \frac{-3}{2}$

**Exercices de fixation**

**Exercice 1**

1) $f'(a)$= 1
2) $f'(a)$= -5
3) $f'(a)$=0
4) $f'(a)$=8

**Exercice2**

2 ; 4

**Exercice 3**

1) $\lim_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ = -3 qui est finie donc $f$ est dérivable en -3
2) -3 est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction $f$ au point d'abscisse
-1

**Exercice 4**

1) (T) : $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$
2) (T) : $y = 10x-3$
3) (T) : $y =-\frac{1}{3}x-2$
4) (T) : y= $2\,x$ +10

**Exercice 5**

(A,4) ;(B ,9) ; (C ,7) ; (D,7) ; (E,10) ; (F,8) ; (G,3) ;(H,6) ; (I,5) ; (J,2)

**Exercice 6**

1) $y = 5x + 3$
2) $y = 24576x - 45056$
3) $y = (-sin2)x + 2\ sin2 + cos2$
4) $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$
5) $y = 6$

**Dérivabilité et continuité en un point**

**Exercice 7**

3 ;4 et 5 ( vrai)

**Exercice 8**

- $\lim_{x \to 2} f(x) = -6$
- $\lim_{x \to 2} g(x) = 1$
- $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$
- $\lim_{x \to 3} g(x) = 4$

**Exercice 9**

Si une fonction est **dérivable en $x_0$** alors elle est **continue en $x_0$**

**Exercice 10**

1) $f' : x \longmapsto cosx - sinx$
2) $f' : x \longmapsto cosx^2 - sinx^2$
3) $f' : x \longmapsto cosx + sinx$
4) $f' : x \longmapsto \frac{1}{cosx^2}$

**Exercice 11**

1) $f' : x \longmapsto \frac{-2}{x^2}$
2) $f' : x \longmapsto \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x\sqrt{x}}$
3) $f' : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}} + 4$
4) $f' : x \longmapsto \frac{13}{(5x+4)^2}$

**Exercice 12**

1) $f' : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^4}$
2) $f' : x \longmapsto 18x^5 - sinx$
3) $f' : x \longmapsto 10x + 1$

4) $f': x \longmapsto -51x^{16}sinx - 3x^{17}cosx$

**Exercice 13**

1) $g(x)= \sqrt{x}$ et $f$ '$(x)= \frac{1}{\sqrt{2x-9}}$
2) $g(x)=$ cos$x$ et $f$ '$(x)=$ 5 $sin(-5x+2)$
3) $g(x)= sin(x)$ et $f$ '$(x)= -\cos(-x+\frac{\pi}{6})$
4) $g(x)=x^3$ et $f$ '$(x)= -9(-3x+5)^2$

**Exercice 14**

1) $f': x \longmapsto$ 2cos (2 $x$ +3) cos (5 $x$ -6) - 5sin (2 $x$ +3) sin (5 $x$ -6)
2) $f': x \longmapsto -5$sin (5 $x$ -6) + 5cos (5 $x$ -6)
3) $f': x \longmapsto -\frac{3}{2(3x+2)\sqrt{3x+2}}$
4) $f': x \longmapsto \frac{7}{2\sqrt{7x+2}}$

**Exercice 15**

$f$ est décroissante sur l'intervalle $]-1;1[$ et sur l'intervalle $]2;3[$

$f$ est croissante sur l'intervalle $]1;2[$

**Exercice 16**

$f$ est croissante sur l'intervalle ] - ∞ ; -1[ et sur l'intervalle ] 3 ; +∞[

$f$ est décroissante sur l'intervalle ] -1 ;3[

**Exercice 17**

$f$ est décroissante sur l'intervalle] - ∞ ; $-\sqrt{5}$ [ et sur l'intervalle ] $\sqrt{5}$ ; +∞[

$f$ est croissante sur l'intervalle] $-\sqrt{5}$ ; $\sqrt{5}$ [

**Exercice 18**

$f$ est décroissante sur l'intervalle] - ∞ ; $\frac{1}{4}$ [ et croissante sur l'intervalle] $\frac{1}{4}$ ;+∞ [

**Exercice 19**

$f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

**Exercice 20**

1 ;2 ;5 ;6 ( Vrai)

**Exercice 21**

$f'(x)$ s'annule en 1,5 en changeant de signe.

$f$ admet -2 comme minimum relatif en 1,5

**Exercice 22**

$f'(x)$ s'annule en – 5 sans changer de signe.

<u>**Exercices de renforcement / approfondissement**</u>

**Exercice 23**

1) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 5 + 6(2x+3)^2$
2) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $f'(x) = \frac{-1}{(-x+1)^2}$
3) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{-7}{6}\}$ et $f'(x) = \frac{-6}{(6x+7)^2}$
4) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (x+5)(9x+23)$
5) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -20(-x+10)^{19}$

**Exercice 24**

1) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4cos(2x - \frac{\pi}{3})$
2) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2sin(x)$
3) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4x^3 - 6x + 7$
4) $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{\frac{x}{2}}}$

**Exercice 25**

1) $f'(-1) = \frac{5}{2}$
2) $f'(0) = \frac{\sqrt{7}}{7}$
3) $f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

**Exercice 26**

on vérifie que: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{9}{2}$ et comme $\frac{9}{2}$ est fini donc $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{9}{2}$

**Exercice 27**

- 5 est un maximum relatif de $f$ sur $\mathbb{R}$
- 1 est un minimum relatif de $f$ sur $\mathbb{R}$

**Exercice 28**

$f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

**Exercice 29**

1) $f$ n'admet aucun extremum sur $\mathbb{R}$
2) 17 est un maximum relatif de $f$ sur $\mathbb{R}$ et -15 est un minimum relatif de $f$ sur $\mathbb{R}$

**Exercice 30**

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x}$=$\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx - sin0}{x - 0}$ = $cos0 = 1$
2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tanx}{x}$=$\lim\limits_{x \to 0} \frac{tanx - tan0}{x - 0}$= 1+tan²(0)= 1
3) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos\left(h+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}}{h}$ =$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0}$ =$f'(0)$ avec $f(x)$= cos $\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos\left(h+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}}{h}$ = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**Exercice 31**

1) $f'(2) = 17$
2) $f(2)$ = 16

**Exercice 32**

les points en lesquels la tangente à la courbe (C) est parallèle à la droite (D) sont les points de coordonnées (2 ;3) et (-2 ;-1)

**Exercice 33**

$f(1) = 2$ $et$ $f'(1) = 0$ ainsi $a = 0$ et $b = 0$.

**Exercice 34**

1) $f'(-1) = 0$
2) $y = -2x - 3$
3) $f'(-2) = -2$

**Exercice 35**

On a A $(x; 0)$ et B $(x ;\sqrt{9-x})$, soit $A(x)$ l'aire du triangle OAB, on a : $A(x) = \frac{x\sqrt{9-x})}{2}$

$A(x)$ est maximale pour $x = 6$

__**Situations complexes**__

**Exercice 36**

Soit $v(x)$ le volume de la boite en cm³, on a : $v(x) = x(100-2x)^2$

Le volume est maximal lorsque $x$=$\frac{50}{3}$ cm, on obtient $v = \frac{2000000}{27}$

**Exercice 37**

- Soit T la durée du trajet en heure
  Exprimons T en fonction de $v$ : T = $\frac{100}{v}$
- Calculons le prix $P(v)$ du trajet en fonction de $v$
  $P(v)$ = 615 x $\frac{100}{v}$.x (6 + $\frac{v^2}{300}$) + 5000 = 61500 ($\frac{6}{v}$ + $\frac{v}{300}$ )+5000
- Etudions les variations du prix de la course en fonction de la vitesse
  $p'(v)$ = 61500 ($-\frac{6}{v^2}$ + $\frac{1}{300}$ ) = 61500 ($\frac{v^2-1800}{300v^2}$)

ainsi $\forall\ v \in ]0; 30\sqrt{2}[$ , $p'(v) < 0$ et $\forall\ v \in ]30\sqrt{2};\ +\infty[$ , $p'(v) > 0$
et $p'(v) = 0$ pour $v = 30\sqrt{2}$ car $v$ est positive

- donc le prix du trajet est minimal pour $v = 30\sqrt{2}$ km/h $\approx$ 42,42 km/h

**Exercice 38**

$p'(t) = -4t + 8$ où $t \in [0; 4]$

$p'(t) = 0 \Leftrightarrow \quad t = 2$

$t \in [0; 4]$ donc la vitesse de ce mobile sera nul à un instant donné précisément pour $t = 2$

# 7 BARYCENTRE

**Situation d'apprentissage**

| **Constituants de la situation** | **Exemples de questions possibles** | **Réponses possibles des élèves** |
|---|---|---|
| Contexte | ✓ Où se déroule la scène ?<br>✓ De quoi s'agit-il ? | ✓ Dans une localité<br>✓ délimiter « les eaux territoriales » de trois propriétaires. |
| Circonstances | Pour quelles raisons le propriétaire $P_1$ sollicite son fils ? | « leurs eaux territoriales » soient proportionnelles aux aires des parcelles adjacentes, avoir une équité dans le partage. |
| Tâche | Que doit faire l'élève pour répondre à la sollicitation ? | déterminer la position de la bouée dans le lac |

## ACTIVITES DE DECOUVERTE

**Activité 1**

**1-a)** $m_A GA = m_B GB$ de plus $GA+GB = AB$ donc $m_A GA= m_B(AB - GA)$

$(m_A + m_B)GA = m_B \times AB$ d'où $GA = \frac{m_B}{m_A+m_B} \times AB$

a) On obtient de même $GB = \frac{m_A}{m_A+m_B} \times AB$

2-a)

| $m_A$ | $m_B$ | GA | GB | $\overrightarrow{GA}$ | $\overrightarrow{GB}$ | $m_A\overrightarrow{GA}+m_B\overrightarrow{GB}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 10 | 0.5 | 0.5 | $-0.5\vec{i}$ | $0,5\vec{i}$ | $\vec{0}$ |
| | | | | | | |
| 5 | 10 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{2}{3}\vec{i}$ | $\frac{1}{3}\vec{i}$ | $\vec{0}$ |
| 15 | 5 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}\vec{i}$ | $-\frac{3}{4}\vec{i}$ | $\vec{0}$ |
| 10 | 30 | 0.75 | 0,25 | $0,75\vec{i}$ | $-0,25\vec{i}$ | $\vec{0}$ |

b) On constate que lorsque l'équilibre est réalisé au point G, on a : $m_A\overrightarrow{GA}+m_B\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

**Exercice de fixation 1**

1) Vrai ; 2) Faux ; 3) Faux ; 4) Vrai ; 5) Vrai.

**Activité 2**

1-a) $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ donc $2\overrightarrow{GA}+3\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}\Rightarrow 5\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ d'où $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ les points A et B étant bien défini, le point G existe et est entièrement défini par la relation $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

b)


c) Justifions que $2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}$ est constant

$2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MA}-2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)$

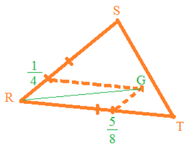
$2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MA}-2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)=-2\overrightarrow{AB}$ donc le vecteur $2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{AB}$ est constant.

2.a) Expression de $\overrightarrow{RG}$ en fonction de $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$

$\overrightarrow{GR}+2\overrightarrow{GS}+5\overrightarrow{GT}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{GR}+2\left(\overrightarrow{GR}+\overrightarrow{RS}\right)+5\left(\overrightarrow{GR}+\overrightarrow{RT}\right)=\vec{0}\Rightarrow 8\overrightarrow{GR}+2\overrightarrow{RS}+5\overrightarrow{RT}=\vec{0}$

D'où $\overrightarrow{RG}=\frac{1}{8}\left(2\overrightarrow{RS}+5\overrightarrow{RT}\right)$

b)




c) $2\overrightarrow{KS}+5\overrightarrow{KT}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{KS}+5\left(\overrightarrow{KS}+\overrightarrow{ST}\right)=\vec{0}\Rightarrow 7\overrightarrow{KS}+5\overrightarrow{ST}=\vec{0}$ d'où $7\overrightarrow{SK}=5\overrightarrow{ST}$ les points S et T étant donnés alors relation $\overrightarrow{SK}=\frac{5}{7}\overrightarrow{ST}$ exprime l'existence et l'unicité du point K.

a) Expression de $\overrightarrow{KG}$ en fonction de $\overrightarrow{KR}$

On sait que $\overrightarrow{RG}=\frac{1}{8}\left(2\overrightarrow{RS}+5\overrightarrow{RT}\right)$ donc

$\overrightarrow{RG}=\frac{1}{8}\left(2\left(\overrightarrow{RK}+\overrightarrow{KS}\right)+5\left(\overrightarrow{RK}+\overrightarrow{KT}\right)\right)=\frac{1}{8}\left(7\overrightarrow{RK}+2\overrightarrow{KS}+5\overrightarrow{KT}\right)$

$\overrightarrow{RK}+\overrightarrow{KG}=\frac{1}{8}\left(7\overrightarrow{RK}+2\overrightarrow{KS}+5\overrightarrow{KT}\right)$ or $2\overrightarrow{KS}+5\overrightarrow{KT}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{RK}+\overrightarrow{KG}=\frac{1}{8}\times 7\overrightarrow{RK}$ $\Rightarrow \overrightarrow{KG}=\frac{1}{8}\overrightarrow{KR}$

**Exercice de fixation 2**

a) On a : $\alpha+\beta\neq 0$, donc le point G existe. D'où : $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}$
b) On a : $\alpha+\beta\neq 0$, donc le point G existe. D'où : $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG}=\frac{-3}{8}\overrightarrow{AB}$

c) On a : $\alpha+\beta=0$, donc le point G n'existe pas.

d) On a : $\alpha+\beta\neq 0$, donc le point G existe. D'où : $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG}=0\overrightarrow{AB}$.

**Activité 3**

1- G barycentre de (A,□) et (B,□) avec □ + □ ≠ 0 donc $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ donc G appartient à la droite (AB).

2- a) Soit M un point de la droite (AB), il en résulte que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc il existe un réel *k* tel que $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$.

b) Soit M un point de la droite (AB). Il existe un réel *k* tel que $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ donc

$$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=k\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}(1-k)=k\overrightarrow{MB}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}(1-k)+k\overrightarrow{BM}=\vec{0}$$

donc M est le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 1-*k* et *k* .

**Exercice de fixation 3**

**1-** On a : $1-m+m=1\neq 0$, donc le point G existe pour tout nombre réel *m* et $\overrightarrow{AG}=m\overrightarrow{AB}$

.

Or le point G appartient à la droite (AB), s'il existe un nombre réel k tel que
Ici $k=m$, donc le point G appartient à la droite (AB) quand *m* décrit ℝ.

**2-** a) On a : $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$, donc on place le G sur la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$

a) On a : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$, donc on place le G sur la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AG}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$ en utilisant la propriété de Thalès dans le triangle.

**Activité 4**

a) G le barycentre de (A,□□) et (B,□□) signifie que

$$\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}\Rightarrow k\left(\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}\right)=k\times\vec{0}$$ donc $k\times\alpha\overrightarrow{AG}+k\times\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}$ on en déduit que G est le barycentre de (A, *k*×□) et (B, *k*×□).

b) Le barycentre des points pondérés ne changent pas si on multiplie les coefficients par un même nombre réel non nul.

**Exercice de fixation 4**

a) Faux ; b) Vrai ; c) Faux ; d) Vrai.

**Activité 5**

Soit G le barycentre de (A,*k*) et (B,*k*) avec *k* un réel non nul. $\dfrac{1}{k}$ est un réel non nul et d'après l'homogénéité du barycentre, G est aussi barycentre de $\left(A, \frac{1}{k} \times k\right)$ et $\left(B, \frac{1}{k} \times k\right)$ c'est-à-dire

G est barycentre de (A,1) et (B,1).

**Exercice de fixation 5**

a) Vrai ; b) Faux ; c) Vrai ; d) Faux

**Activité 6**

1- Par hypothèse $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Donc

$3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\Rightarrow 5\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ donc G est le barycentre de (A,5) et (B,-2)

2- a) I est milieu de [BC] donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

J est milieu de [AI] donc $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JI} = \vec{0}$

donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}\right)$

Or J est milieu de [AI] donc

$$\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JI} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{JA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}\right) = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad 2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$$

b) La relation $2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$ signifie que J est le barycentre de (A,2), (B,1) et (C,1).

**Exercice de fixation 6**

1- a) $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ ; b) $\alpha = -2$ et $\beta = 5$ ; c) $\alpha = \beta = 1$ ; d) $\alpha = 2$ et $\beta = -1$

e) On a : $3\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, donc $\alpha = 3$ et $\beta = -4$ ; f) On a : $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$, donc $\alpha = 1$ et $\beta = -1$

2. a) On a : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - 5\overrightarrow{GC} = \vec{0}$, donc $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\gamma = -5$

b) On a : $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, donc $\alpha = 2$, $\beta = 0$ et $\gamma = 1$

c) On a : $\alpha + \beta + \gamma = 0$, donc le point G n'existe pas

d) On a : $2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, donc $\alpha = 0$, $\beta = 1$ et $\gamma = -1$

**Activité 7**

La relation $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AC}$ signifie que les points A, B et C sont alignés.

a- $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\Rightarrow -4\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ donc C est le barycentre de (A,1) et (B,1/4)

**Exercice de fixation 7**

On a : $5\,\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AC}$ donc $-3\,\overrightarrow{CA} + 5\,\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

Ainsi C est le barycentre des points pondérés (A, -3), (B, 5)

**Activité 8**.

a- R est le barycentre de (P, 5) et (Q, -2) signifie que $5\overrightarrow{RP} - 2\overrightarrow{RQ} = \vec{0}$

b- Coordonnées de R.

$$5\overrightarrow{RP} - 2\overrightarrow{RQ} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OR} = \frac{5\overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{OQ}}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_R = \dfrac{5x_P - 2x_Q}{3} = -3 \\ y_R = \dfrac{5y_P - 2y_Q}{3} = \dfrac{25}{3} \end{cases}$$

**Exercice de fixation 8**

a) On a : $x_G = \dfrac{3x_A - x_B}{3-1} = \dfrac{1}{2}(-6-4) = -5$ et $y_G = \dfrac{3y_A - y_B}{3-1} = \dfrac{1}{2}(9-4) = \dfrac{5}{2}$

Donc : $G\left(-5; \dfrac{5}{2}\right)$

b) On a : $3\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0}$, donc : $\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{2}\left(-3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$

D'où : $C\left(5; -\dfrac{5}{2}\right)$

**Activité 9**

1- $5\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = 8\overrightarrow{GH} + 5\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB}$

Puisque H est le barycentre de (A,5) et (B,3) alors on a : $5\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} = \vec{0}$ donc $5\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = 8\overrightarrow{GH}$

2- G le barycentre des points pondérés (A, 5) , (B, 3), (C, 2) donc $5\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Or $5\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = 8\overrightarrow{GH}$ donc $8\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ on en déduit que G est le barycentre des points pondérés (H,8) et (C,2).

3- a)K le barycentre de B et C affectés respectivement des coefficients 3 et 2 donc $3\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$

de plus G barycentre des points pondérés (A,5), (B,3) et (C,2) signifie que $5\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ donc $5\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GK} + 3\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{GK} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ puisque $3\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ alors on a : $5\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GK} = \vec{0}$ et on déduit que G est barycentre des points pondérés (A,5) et (K,5).

b) G est barycentre de (A,5), (B,3), (C,2) donc G est aussi barycentre de (A,5), (K,5) avec K barycentre de (B,3) et (C,2).

G est barycentre de (A,5), (B,3), (C,2) donc G est aussi barycentre de (H,8), (C,2) avec H barycentre de (A,5) et (B,3).

**Exercice de fixation 9**

- G est le centre de gravité du triangle ABC, donc $G = bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$
- L est le milieu du segment $[AC]$, donc $L = bar\{(A,1);(C,1)\}$

  D'après l'associativité du barycentre, on a :

  $G = bar\{(B,1);(A,1);(C,1)\} = bar\{(B,1);(L,2)\}$

**Activité 10**

1-a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG_1}+\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}$ or $G_1$ est barycentre de (A,1), (B,1),(C,1) donc $\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG_1}$

$2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG_2}+2\overrightarrow{G_2C}+\overrightarrow{G_2D}$ or $G_2$ est barycentre de (C,2) et (D,1) donc $2\overrightarrow{G_2C}+\overrightarrow{G_2D} = \vec{0}$ d'où $2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG_2}$.

b) Ensemble des points M tel que $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|$

or on sait que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG_1}$ et $2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG_2}$ donc on a :

$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| \Rightarrow \|3\overrightarrow{MG_1}\| = \|3\overrightarrow{MG_2}\| \Rightarrow \|\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{MG_2}\|$ donc l'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[G_1G_2]$.

2- a) Je justifie que $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\\ &= -2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\end{aligned}$$

b) Ensemble des points M tel que $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$

Soit H barycentre de (A,1), (B,2), (C,1) alors on a : $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MH}$

Or on sait que $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$ donc

$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| \Leftrightarrow \|4\overrightarrow{MH}\| = \|-2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MH}\| = \frac{1}{4}\|-2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\|$

Donc l'ensemble cherché est le cercle de centre H et de rayon $\frac{1}{4}\|-2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\|$

**Exercice de fixation 10**

a) Soit (D) l'ensemble des points cherchés.

On a : $K = bar\{(A,2);(B,2);(C-1)\}$, donc : $2\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KC} = \vec{0}$

D'où : $2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=(2+2-1)\overrightarrow{MK}=3\overrightarrow{MK}$

Ainsi le vecteur $2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ s'il existe un nombre $k$ tel que : $2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=k\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire $3\overrightarrow{MK}=k\overrightarrow{AB}$.
Il résulte que (D) est la parallèle à la droite (AB) passant par le point K.

## DES QUESTIONS D'EVALUATION

**Question 1 : Comment construire le barycentre G de deux points pondérés (A,□) , (B,□) (avec □□□□□ ≠ 0) ?**

**<u>Exercice non résolu</u>**

- On a : $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ . On utilise la propriété de Thalès dans le triangle pour placer le point H sur la droite (AB).
- En appliquant l'homogénéité du barycentre, on a : $\mathrm{G}=bar\{(A,3);(B,-1)\}$

  Donc, on a : $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ . On place le point G sur la droite (AB).

**Question 2 :Comment construire le barycentre G de trois points pondérés (A,□) , (B,□), (C,□) (avec □□□□□□□□□□ ≠ 0) ?**

**<u>Exercice non résolu</u>**

a) Soit $\mathrm{G}_1=bar\{(\mathrm{B},3);(\mathrm{C},2)\}$, donc, on a : $\overrightarrow{BG_1}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

D'où d'après l'associativité du barycentre, on a : $\mathrm{M}=bar\{(\mathrm{A},5),(\mathrm{G}_1,2)\}$.

Ainsi le point M est le milieu du segment $[AG_1]$. On réalise une figure pour placer le point M.

b) Soit $\mathrm{G}_2=bar\{(A,-1);(\mathrm{B},4)\}$, donc, on a : $\overrightarrow{AG_2}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

D'où d'après l'associativité du barycentre, on a : $\mathrm{N}=bar\{(C,3),(\mathrm{G}_2,3)\}$.

Ainsi le point N est le milieu du segment $[AG_2]$.On réalise une figure pour placer le point N.

**Question 3 : Comment démontrer que trois points sont alignés ?**

**<u>Exercice non résolu</u>**

On a : $I=bar\{(A,1);(B,1)\}=bar\{(\mathrm{A},\alpha+\beta);(\mathrm{A},\alpha+\beta)\}$

$I=bar\{(A,\alpha);(A,\beta);(B,\alpha);(B,\beta)\}=bar\{(\mathrm{G}_1,\alpha+\beta);(\mathrm{G}_2,\alpha+\beta)\}$

Donc le point I est isobarycentre des points $G_1$ et $G_2$.

**Conclusion** : les points $G_1$ et $G_2$ sont symétriques par rapport au point I.

**Question 4 : Comment démontrer que des droites sont concourantes ?**

**Exercice non résolu**

1) On a :

- $I = bar\{(A,1);(B,1)\} = bar\{(A,2);(B,2)\}$
- $J = bar\{(A,2);(C,1)\}$
- $K = bar\{(B,2);(C,1)\}$

Posons : $G = bar\{(A,2);(B,2);(C,1)\}$

En appliquant l'associativité du barycentre partiel, on a successivement :

- $G = bar\{(I,4);(C,1)\}$, donc : $G \in (CI)$
- $G = bar\{(B,2);(J,3)\}$, donc : $G \in (BJ)$
- $G = bar\{(A,2);(K,3)\}$, donc : $G \in (AK)$

Ainsi : $G \in (CI) \cap (BJ)(AK)$.

**Conclusion** : les droites (CI), (BJ) et (AK) sont concourantes.

## MES SEANCES D'EXERCICES

**Exercices de fixation**

**Exercice 1**

1-C ; 2- C ; 3 – B ; 4 - C

**Exercice 2**

1- 3 + 2 = 5 ≠ 0 donc il existe un point G qui est barycentre des points (A,3) et (B,2).

2- G est barycentre des points (A ;3) et (B ;2) donc $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$


**Exercice 3**

**a)** -3 + 5 = 2 ≠ 0 donc il existe un et un seul point G tel que $-3\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ qui n'est autre que le barycentre de (A,-3) et (B,5).

**b)** $-3\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$


**Exercice 4**

1) Soit G le barycentre de (A,4) et (B,-1). Alors on a : $4\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AB}$


2) Soit G le barycentre de (A,2) et (B,1). Alors on a : $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$


**3)** Soit G le barycentre de (A,2) et (B,-2). Puisque $2-2=0$ alors le barycentre de (A,2) et (B,-2) n'existe pas.

**4)** Soit G le barycentre de $\left(A,\frac{1}{10}\right)$ et $\left(B,\frac{1}{5}\right)$, alors on a : $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=0\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$


**Exercice 5**

C est le barycentre des points (A,-2) et (B,4) donc $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

a) G est le barycentre des points (A,-2) et (C,-5) donc $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{10}{7}\overrightarrow{AB}$

b) G' est le barycentre des points (B, 4) et (C,-3) donc
$\overrightarrow{BG'}=-3\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{BG'}=-3\overrightarrow{AB}$ $\left(\text{car } \overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\right)$

**Exercice 6**

1) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{GB}\Rightarrow\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ donc □ = 1 ; □ = 1.

2) $2\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{BG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ donc □ = 3 et □ = -1.

3) $2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ donc □ = 1 et □ = 1

**Exercice 7**

1- D'après la figure, $\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

a) A est le barycentre de (B,□), (C,□)

$\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ donc □ = 3 et □ = -2

b) B est le barycentre de (A,□), (C,□)

$3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ donc □ = 1 et □ = 2

c) C est le barycentre de (A,□), (B,□)

$3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0} \Rightarrow -\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ donc □ = -1 et □ = 3

2- $\overrightarrow{BA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow 3\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

a) A est le barycentre de (B,□), (C,□)

$3\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}=\vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ donc □ = 2 et □ = -1

b) B est le barycentre de (A,□), (C,□)

$3\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ donc □ = 3 et □ = -1

c) C est le barycentre de (A,□), (B,□)

$3\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow 3\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ donc □ = 3 et □ = -2

**Exercice 8**

Selon la figure on a : $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $4\overrightarrow{AG}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

Donc □ = 1 et □ = 3

**Exercice 9**

G est le barycentre des points pondérés (A,-3) et (B, -2) donc
$-3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Rightarrow 5\overrightarrow{BG}-3\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ et par conséquent □ = 5.

**Exercice 10**

$3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow 5\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ donc □ = 5 et □ = -2

**Exercice 11**

On sait que 24 = 3×8 et 32 = 4×8 donc G est aussi barycentre de (A,24) et (B,32)
d'où G = G'

**Exercice 12**

1- Puisque 1+2 = 3≠0 il existe un nombre réel $k$ et un point G tel que pour tout point M, $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MG}$.
$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}$ soit G le barycentre de (A,1) et (B,2). Alors on a $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG}$ et on déduit que $k$ = 3

2- a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ : 1+1 = 2 donc il existe un nombre réel $k$ et un point G tel que pour tout point M, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MG}$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MG}$ car G est le barycentre de (A,1) et (B,1). Donc $k=2$.

a) $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ : 2+1=3 donc il existe un nombre réel $k$ et un point G tel que pour tout point M, $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MG}$

$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG}$ car G est le barycentre de (A,2) et (B,1) donc $k=3$.

b) $2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}$ : $2-2=0$ donc $2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}$ est constant, il n'existe aucun réel $k$ et aucun point G tel que $2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MG}$.

**Exercice 13**

a) $2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MG}$ où G est barycentre de (A,2) et (B,2). G est donc le milieu du segment [AB].


**b)** $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MG}$ où G est le barycentre de (A,3) et (B,1). $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$


**c)** $\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}=-4\overrightarrow{MG}$ où G est le barycentre de (A,1) et (B,-5). $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$

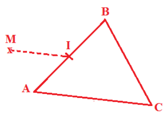

**Exercice 14**

1- I milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ donc

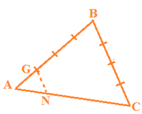
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ or par hypothèse $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CA}$ donc

$2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{CA}$ on en déduit que le point existe

et est unique et on a : $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.




2- a) et c)




b) G barycentre de (A,3) et (B,1) donc $3\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}=4\overrightarrow{NG}$ car $3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

Or par hypothèse $3\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{CB}$ donc on a par identification $4\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{CB}\Rightarrow\overrightarrow{NG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ par conséquent le point N existe et est unique. Il est défini par : $\overrightarrow{NG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.

**<u>Exercice</u> 15**

**<u>Solution</u>**

1-B ; 2- C

**<u>Exercice</u> 16**

1- Vrai ; 2 – Vrai ; 3 – Vrai ; 4 - Faux

**<u>Exercice</u> 17**

a) Pour $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{GC}$ on a : $-2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ainsi
$G = bar\{(A,-2);(B,1);(C,-1)\}$

b) Pour $2\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ on a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ainsi
$G = bar\{(A,1);(B,1);(C,3)\}$

c) Pour $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}$ on a : $-5\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ainsi $G = \{(A,-5);(B,3);(C,1)\}$

d) Pour $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ on a: $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ainsi
$G = bar\{(A,1);(B,-2);(C,4)\}$

**<u>Exercice</u> 18**

1- $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ donc $I = bar\{(B,3);(C,1)\}$

De plus G est milieu de [AI] donc $G = bar\{(I,1);(A,1)\} = bar\{(I,4);(A,4)\}$

On en déduit que $G = bar\{(A,4);(B,3);(C,1)\}$

2- $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$ donc $G = bar\{(A,2);(I,1)\}$

C milieu de [BI] donc $I = bar\{(C,2);(B,-1)\}$ on en déduit que
$G = bar\{(A,2);(B,-1);(C,2)\}$

3- $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $J = bar\{(A,1);(C,2)\}$

K milieu de [AB] donc $K = bar\{(A,1);(B,1)\}$
$G = bar\{(A,2);(B,1);(C,2)\}$

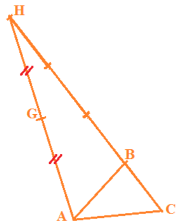
4- $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $J = bar\{(A,2);(C,1)\}$

C milieu de [IB] donc $I = bar\{(B,1);(C,-2)\}$ donc $G = bar\{(A,2);(B,1);(C,-1)\}$

## Exercice 19

**Solution**

### 1- Construction de H




H barycentre de (B,4), (C,-3) donc $\overrightarrow{BH} = -3\overrightarrow{BC}$

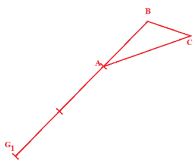
2- a) H est barycentre de (B,4) et (C,-3) donc le coefficient de H est 4 – 3 = 1.

$G = bar\{(A,1);(B,4);(C,-3)\} = bar\{(A,1);(H,1)\}$ Les points A et H ont les mêmes coefficients donc G est l'isobarycentre de A et H. On utilise la règle de l'associativité des barycentres.

b) Construction voir figure.

## Exercice 20

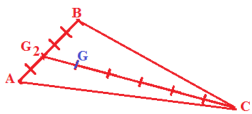
a) Posons $G_1 = bar\left\{\left(A,\frac{1}{2}\right);\left(B,\frac{-1}{3}\right)\right\}$




On constate que $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0$ donc il n'existe aucun point qui soit barycentre des points $\left(A,\frac{1}{2}\right)$, $\left(B,-\frac{1}{3}\right)$ et $\left(C,-\frac{1}{6}\right)$

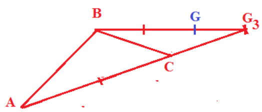
b) Posons $G_2 = bar\{(A,3);(B,2)\} \Rightarrow \overrightarrow{AG_2} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

$G = bar\{(A,3);(B,2);(C,1)\} = bar\{(G_2,5);(C,1)\} \Rightarrow \overrightarrow{G_2G} = \frac{1}{6}\overrightarrow{G_2C}$




c) Posons $G_3 = bar\{(A,1);(C,-3)\} \Rightarrow \overrightarrow{AG_3} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

$G = bar\{(A,1);(B,-1);(C,-3)\} = bar\{(G_3,-2);(B,-1)\} \Rightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BG_3}$



**Exercice 21**

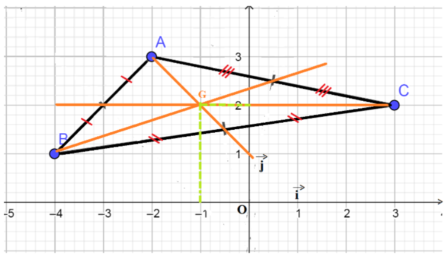
G=bar{(A,-2) , (B,3)} donc $\begin{cases} x_G = \dfrac{-2x_A + 3x_B}{3-2} \\ y_G = \dfrac{2y_A + 3y_B}{3-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = 13 \\ y_G = 2 \end{cases}$

**Exercice 22**

**1-** $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$

**2-** $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{-2-4+3}{3} = -1$ ; $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{3+1+2}{3} = 2$

**3- Vérification**



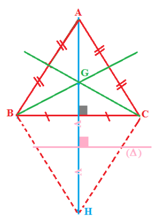

**Exercice 23**

**a)** G isobarycentre de A, B et C donc on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

**b)** H barycentre de (A,1), (B,-1), (C,-1) donc on a : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MH}$

**c)** Si pour tout point M du plan MG = MH alors (□) est la médiatrice du segment [GH].

**d)** Représentation graphique de (□).




**Exercice 24**

Soit G l'isobarycentre de (A,1), (B,1) , (C,1). Alors on a : $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 3\overrightarrow{MG} \right\|$

Puisque 1 – 2 + 1 = 0 alors on a : $\left\| \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right\|$

Ainsi $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| \Leftrightarrow MG=\frac{1}{3}\left\|-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|$ donc l'ensemble cherché est le cercle de centre G et de rayon $r=\frac{1}{3}\left\|-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|$

**Exercices de renforcement/ approfondissement**

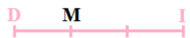
**Exercice 25**

1- Moyenne pondérée de Annah

$M=\dfrac{2\times 9+1\times 15}{3}=11$ donc la moyenne pondérée de Annah est 11/20

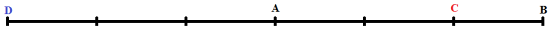
2- M étant la moyenne pondérée de Annah, alors on a : $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DI}$ donc

3-




**Exercice 26**

1- Représentation graphique




2- Expression de $\overrightarrow{CD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$ d'où

$\overrightarrow{CD}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{CD}=-\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$

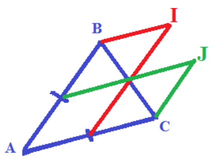
3- Position du point M tel que : $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$

$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$ soit G = bar{(A,2) , (B,1)} alors on a :

$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\Rightarrow\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right)$ donc la position du point M est entièrement déterminée par cette relation vectorielle avec G = bar{(A,2) , (B,1)}.

**Exercice 27**

1- Construction des points I et J



2- $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}-\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. On en déduit que I = {(A,1),(B,-2),(C,-1)}.

$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AJ}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AJ}-\frac{1}{2}\overrightarrow{JA}-\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{JC}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{JA}-\overrightarrow{JB}-2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. On en déduit que J = {(A,1),(B,-1),(C,-2)}

**Exercice 28**

**1- Je démontre que G est le milieu de [G'A].**

G = {(A,1),(B,1),(C,1)} = {(A,1),(I,2)} car I est le milieu de [BC].

Donc on a : $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GI}=\vec{0}$ or $2\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{GG'} \Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$ donc G est le milieu de [G'A].

**2- Je justifie que $\overrightarrow{G'G}=\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}$.**

On sait que G = {(A,1),(B,1),(C,1)} donc $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}=\vec{0}$ or G est le milieu de [AG'] donc $\overrightarrow{AG'}=2\overrightarrow{GG'}$ d'où $\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C'}=\vec{0}$ et on en déduit que $\overrightarrow{G'G}=\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}$.

**3- J'exprime $\overrightarrow{G'A}$ en fonction de $\overrightarrow{G'B}$ et $\overrightarrow{G'C}$**

On sait que G est le milieu de [AG'] donc $\overrightarrow{G'G}=\frac{1}{2}\overrightarrow{G'A}$ et on en déduit que

$\overrightarrow{G'A}=2\overrightarrow{G'B}+2\overrightarrow{G'C}$. On déduit de cette relation vectorielle que $\overrightarrow{G'A}-2\overrightarrow{G'B}-2\overrightarrow{G'C}=\vec{0}$ donc

G' = bar{(A,1),(B,-2),(C,-2)}.

**Exercice 29**

1- Je justifie que I est le barycentre de (A,-1), (A',4).

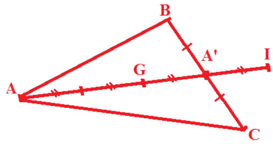
A' est le milieu de [BC] donc A' = bar{(B,1) ; (C,1)} = bar{(B,2) ; (C,2)}

I est le barycentre de (A,-1), (B,2), (C,2) donc par application de la propriété de l'associativité des barycentres on a : I =bar {(A,-1) ;(A'4)}.

2 - a) J'exprime $\overrightarrow{A'I}$ en fonction de $\overrightarrow{A'A}$

I = bar{(A,-1);(A',4)} donc $-\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IA'}=\vec{0}$ de cette relation on déduit que $3\overrightarrow{IA'}-\overrightarrow{A'A}=\vec{0}$ d'où $\overrightarrow{A'A}=3\overrightarrow{IA'}$

a) Construction de I




3- Je démontre que I est le symétrique du point G par rapport à A'

On sait que G = bar{(A,1);(B,1);(C,1)} = bar{(A,1);(A',2)} donc
$\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GA'}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'A}+2\overrightarrow{GA'}=\vec{0}$ or $\overrightarrow{A'A}=3\overrightarrow{IA'}$

$3\overrightarrow{GA'}+3\overrightarrow{IA'}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{A'G}+\overrightarrow{A'I}=\vec{0}$ on déduit de cette relation vectorielle que A' est le milieu du segment [GI] et par conséquent I est le symétrique de G par rapport à A'.

**Exercice 30**

1- Je détermine $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$

G = bar{(A,2) ; (B,3)} donc $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$


2-b) G = bar{(A,3) ;(B,1)}


**Exercice 31**

**1-** Je détermine le réel □ tel que C soit le barycentre des points pondérés (A,□) et (B,1).

$\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}-4\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ donc $3\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ on en déduit que C = bar{(A,3) ;(B,1)}

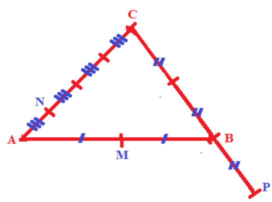
2- D'après la question 1) C = bar{(A,3) ;(B,1)} donc en multipliant tous les coefficients

$\frac{1}{3}$ on applique la propriété de l'homogénéité du barycentre et on a : $C=bar\left\{(A,1),\left(B,\frac{1}{3}\right)\right\}$

**Exercice 32**

1- Figure .

- M isobarycentre de A et B donc $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$
- N=bar{(A,3) ;(C,1)} donc $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$
- P = {(B,-3) ;(C,1)} donc $\overrightarrow{BP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$




2- a) J'exprime C comme barycentre des points N et A

par hypothèse N = bar{(A,3),(C,1)} donc on a : $3NA + NC = 0 \Rightarrow 3\overrightarrow{CA} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$ d'où
C = {(A,3) ;(N,-4)}= {(A,-3) ;(N,4)}

b) Je justifie que P est le barycentre des points (B,-3), (N,4) , (A,-3)

On sait que P = bar{(B,-3) ;(C,1)} or C = bar{(A,-3) ;(N,4)} donc
P = bar{(B,-3);(A,-3) ;(N,4)}.

3- Je justifie que P,M et N sont alignés

On sait que P = bar{(A,-3) ;(B,-3) ;(N,4)} or M = bar{(A,1) ;(B,1)} = bar{(A,-3) ;(B,-3)} donc

P = bar{(M,-6) ; (N,4)} et on en déduit que P, N et M sont alignés.

**Exercice 33**

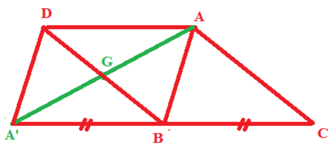
Soit G l'isobarycentre de A, B, C et D on a : G = bar{(A,1) ;(B,1) ;(C,1) ;(D,1)}

- I = bar{(A,I) ;(B,1)} et J = bar{(C,1);(D,1)} donc G = bar{(I,2);(J,2)} et par conséquent G∈(IJ)
- De même L = bar{(B,1) ;(D,1)} et K =bar{(A,1) ;(C,1)} donc G=bar{(L,2) ;(K,2)} et par conséquent G ∈ (KL).
- M = bar{(A,1) ;(D,1)} et L = bar{(B,1) ;(C,1)} donc G={(M,2),(N,2)} et par conséquent G∈(MN).
- $G_1$ =bar{(A,1) ;(B,1) ;(C,1)} donc G=bar{($G_1$,3) ;(D,1)} donc G∈($G_1$D)
- $G_2$= bar{(B,1) ;(C,1) ;(D,1)} donc G =bar{($G_2$,3) ;(A,1)} donc G∈($G_2$A)
- $G_3$=bar{(C,1) ;(D,1) ;(A,1)} donc G =bar{($G_3$,3) ;(B,1)} donc G∈($G_3$B)
- $G_4$=bar{(A,1) ;(B,1) ;(D,1)} donc G =bar{($G_4$,3) ;(C,1)} donc G∈($G_4$C)

On déduit des résultats précédents que les droites (IJ), (KL) , (MN), ($G_1$D), ($G_2$A), ($G_3$B) et ($G_4$C) sont concourantes au point G avec G = bar{(A,1) ;(B,1) ;(C,1) ;(D,1)} .

**Exercice 34**

1- Construction : voir figure




2- a) Je démontre que G est le milieu de [A'A].

G=bar{(A,1) ;(B,2) ;(C,-1)} et par hypothèse A'=bar{(B,2) ;(C,-1)} donc par associativité du barycentre on a : G=bar{(A,1) ;(A',1)} donc G est le milieu de [AA'].

b) Je justifie que B est le milieu de [A'C]

A'=bar{(B,2) ;(C,-1)} donc $2\overrightarrow{A'B} - \overrightarrow{A'C} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ donc B est le milieu de [A'C]

a) Je justifie que DABA' est un parallélogramme

Par hypothèse ACBD est un parallélogramme, donc

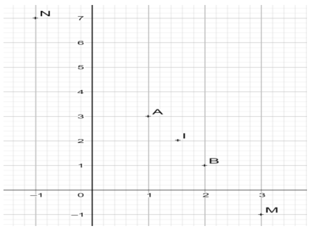
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$ et B est le milieu de $[A'C]$ donc $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{BC}$ ainsi on a $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$ et on en déduit que le quadrilatère DABA' est un parallélogramme.

b) Je justifie que G est le milieu de [BD]

On sait que le quadrilatère DABA' est un parallélogramme dont G est le centre puisqu'il est le milieu d'une des diagonales (diagonale (AA')). G est donc le milieu de [BD], deuxième diagonale du parallélogramme DABA'.

**Exercice 35**

1-




2- Coordonnées du point M

M = bar{(A,-2) ; (B,4)} donc on a : $x_M = \dfrac{-2x_A + 4x_B}{-2+4} = \dfrac{-2\times1+4\times2}{2} = 3$

$$y_M = \frac{-2y_A + 4y_B}{-2+4} = \frac{-2\times3+4\times1}{2} = -1$$

N = bar{(A,3) ; (B,-2)} donc on a : $x_N = \dfrac{3x_A - 2x_B}{3-2} = \dfrac{3\times1-2\times2}{1} = -1$

$$y_N = \frac{3y_A - 2y_B}{3-2} = 3\times3-2\times1 = 7$$

3 - a) Coordonnées de I

I, milieu de [AB] donc on a : $x_N = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}$ et $y_N = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{3+1}{2} = 2$.

b) Je détermine l'existence d'un réel *k* tel que

M = bar{(A,-2) ; (B,4)} donc $M \in (AB)$

N = bar{(A,3) ; (B,-2)} donc $N \in (AB)$

I = bar{(A,1) ; (B,1)} donc $I \in (AB)$

Les trois points M, N et I appartiennent à une même droite (AB), ils sont donc alignés, il existe par conséquent un réel *k* tel que $\overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{MN}$.

b) Déterminons deux réels □ et □ tels que I soit barycentre de (M,□), (N,□)

M = bar{(A,-2),(B,4)} donc $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ on en déduit que $\overrightarrow{IM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

N = bar{(A,3) ;(B,-2)} donc $\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB}$ on en déduit que $\overrightarrow{IN} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{IM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IN} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow 3\overrightarrow{IN} + 5\overrightarrow{IM} = \vec{0}$ donc I = bar{(M,5) ;(N,3)}

**Exercice 36**

1- Je justifie que le point G est le barycentre de (A; 4), (B; -1), (C; -1).
I est le milieu de [BC] donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ or G est diamétralement opposé à I donc
A est le milieu de [GI] donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{GA}$ on en déduit que
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{GA} \Rightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{AG} \Rightarrow 4\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
donc G ={(A,4) ;(B,-1) ;(C,-1)}

2- Je trouve deux réels b et c tels que A est le barycentre de (G; 2), (B; b), (C; c).

On sait que G ={(A,4) ;(B,-1) ;(C,-1)} donc $4\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
donc A = bar{(G,2) ; (B,1) ; (C,1)}.

3- Je détermine l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

On sait que A = bar{(G,2) ; (B,1) ; (C,1)} donc $2\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MA}$

$\left\|2\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{BC}\right\| \Leftrightarrow \left\|4\overrightarrow{MA}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{BC}\right\| \Leftrightarrow MA = \frac{1}{2}BC$

donc l'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}BC$.

**Exercice 37**

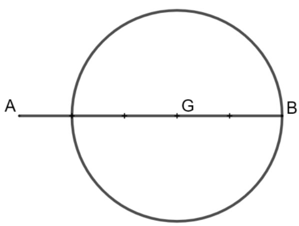
[Je réduis la somme $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$

$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$ car $G = bar\{(A,2);(B,3)\}$

1- Nature de (Γ)

$\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = 10 \Leftrightarrow 5MG = 10 \Leftrightarrow MG = 2$ donc (□) est le cercle de centre G et de 2

2- Construction de (□)



**Exercice 38**

1- Je justifie que G est le milieu de [G'A]
G est le centre de gravité de ABC et I est le milieu de [BC] de plus G' est le symétrique de G par rapport à I alors on a: $\overrightarrow{GG'}=2\overrightarrow{GI}$
G=bar{(A,1) ;(B,1) ;(C,1)} = bar{(A,1) ;(I,2)} donc
$\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GI}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$ on déduit de cette relation vectorielle que G est le milieu de [AG'].
2- Je justifie que $\overrightarrow{G'G}=\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}$.
On sait que $\overrightarrow{G'B}=\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{G'C}=\overrightarrow{BG}$ donc $\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{G'G}$
3- On sait que $\overrightarrow{G'G}=\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}$ or G est milieu de [G'A] donc $\overrightarrow{G'G}=\frac{1}{2}\overrightarrow{G'A}$ d'où

$-\overrightarrow{G'B}-\overrightarrow{G'C}+\frac{1}{2}\overrightarrow{G'A}=0\Rightarrow-\overrightarrow{G'A}+2\overrightarrow{G'B}+2\overrightarrow{G'C}=\vec{0}$ donc G' ={(A,-1) ;(B,2) ;(C,2)}

**Exercice 39**

**1-** On utilise l'associativité des barycentres pour montrer l'alignement des points.
I = bar{(A,2) ;(B,1)}
J=bar{(B,1) ;(C,-2)}
G=bar{(A,2);(B,1);(C,-2)} donc on déduit que
- G=bar{(A,2);(J,-1)} donc les points G, A , J sont alignés
- G=bar{(C,-2);(I,3)} donc les points G, C, I sont alignés.

2- D'une part les points G, A , J sont alignés et d'autre part les points G, C, I sont alignés donc G∈(AJ) et G∈(CI) donc (AJ)∩(CI)={G}
3- G=bar{(A,2);(B,1);(C,-2)} donc on a :
$\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{BG}=2\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)\Rightarrow\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{CA}$ donc (BG)//(CA).

**Exercice 40**

$\overrightarrow{PA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}\Rightarrow3\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PQ}=\vec{0}$ donc P = bar{(A,3) ;(Q,-1)}

$\overrightarrow{PB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{PR}\Rightarrow\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{PR}\Rightarrow4\overrightarrow{RB}-\overrightarrow{RP}=\vec{0}$ donc R=bar{(B,4) ;(P,-1)} = bar{(B,8) ;(P,-2)}

$\overrightarrow{QC}=\frac{6}{7}\overrightarrow{QR}\Rightarrow7\overrightarrow{QC}-6\overrightarrow{QR}=\vec{0}$ donc Q = bar{(C,7) ;(R,-6)}

Or par hypothèse K = bar{(P,2) ;(Q,1) ;(R,6)}

- K = bar{(P,2) ;(Q,1) ;(R,6)}= bar{(A,3) ;(Q,-1) ;(Q,1) ;(R,6)}
Donc K = bar{(A,3) ;(R,6)} d'où K∈(AR).
- K = bar{(P,2) ;(Q,1) ;(R,6)} = bar{(P,2) ;(R,6) ;(C,7) ;(R,-6)}
Donc K = bar{(P,2) ;(C,7)} d'où K∈(PC).

- K = bar{(P,2) ;(Q,1) ;(R,6)} = bar{(P,2) ;(Q,1) ;(B,8) ;(P,-2)}
  Donc K = bar{(Q,1) ;(B,8)} d'où K$\in$(QB)
  Le point K appartient à la fois aux droites (AR), (PC) et (QB) donc elles sont concourantes en K.

**Exercice 41**

1- E est le milieu de [AB] donc E = bar{(A,1) ;(B,1)} ,
   F est le symétrique de A par rapport à C donc C est le milieu de [BF], donc
   $CF + CA = 0 \Rightarrow -2\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$ d'où F = bar{(C,-2) ;(A,1)}.
2- Puisque C est le milieu de [AF] et le point G est tel que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ alors le point G est le centre de gravité du triangle ABF. Ainsi on a :
   $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GF} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$ or $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CG} - \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA}$
   Donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ donc G = bar{(B,1) ;(C,2)}
3- J'en déduis que E,F,G sont alignés.

E est le milieu de [AB] donc B = bar{(E,2) ;(A,-1)}

G est centre de gravité du triangle ABF donc

G = bar{(A,1) ;(B,1) ;(F,1)} = bar{(A,1) ;(F,1) ;(E,2) ;(A,-1)} ainsi G = bar{(F,1);(E,2)} on en déduit que les points G, F, E sont alignés.

**<u>Situations complexes</u>**

**Exercice 42**

Le problème consiste à calculer le barycentre de trois points pondérés.

Soit G le barycentre des points pondérés (L,1), (M,3) et (F,2). G est donc la moyenne des notes obtenues par Mathieu. Selon Flavien, cette moyenne peut être représentée sur une droite et on a : $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OL} + 3\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OF}}{6} = \frac{9\vec{i} + 3\times 11\vec{i} + 2\times 15\vec{i}}{6} = 12\vec{i}$ donc la moyenne de Mathieu est 12.

**Exercice 43**

Soit $G = bar\{(A;1),(B;1),(C;1),(D;1)\}$
soit $I = bar\{(A;1),(B;1)\}$ et $J = bar\{(C;1),(D;1)\}$
alors $G = bar\{(I;2),(J;2)\}$
ainsi $G$ est la milieu de$[IJ]$

# 8 EXTENSION DE LA NOTION DE LIMITE

**Situation d'apprentissage**

| **Constituants de la situation** | **Exemples de questions possibles** | **Réponses possibles des élèves** |
|---|---|---|
| Contexte | Où et quand se déroule la scène ? | La scène se déroule en classe pendant le cours de mathématiques |
| Circonstances | Indique les raisons qui ont motivé les élèves. | Les élèves constatent une différence entre ces deux représentations graphiques |
| Tâche | Qu'a décidé de faire le professeur de mathématiques | Il demande à ses élèves de se mettre par groupe de trois pour effectuer des recherches sur ces droites : noms, équations, définition, exemples, etc |

**DECOUVERTE DES HABILETES**

**Activité 1 :**

1) On obtient les tableaux suivants:

| $x$ | 0,9999 | 0,99999 | 1,0001 | 1,00001 |
|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 10 000 | 100 000 | 10 000 | 100 000 |

| $x$ | $-0{,}0001$ | $-0{,}00001$ | $0{,}0001$ | $0{,}00001$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-10^8$ | $-10^{10}$ | $-10^8$ | $-10^{10}$ |

2) On peut dire que : $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = +\infty$.

3) On peut dire que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

**Exercice de fixation 1**

1) On obtient le tableau suivant :

| $x$ | $-1{,}99999$ | $-1{,}999999$ | $-1{,}99999999$ | $-1{,}999999999$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $10^2\sqrt{10}$ | $10^3$ | $\cong 10^4$ | $\cong 3\text{x}10^4$ |

2) On peut dire que : la limite de $\boldsymbol{f(x)}$ lorsque $\boldsymbol{x}$ tend vers $\mathbf{-2}$ est $+\infty$ .

**Activité 2 :**

1) a) On obtient le tableau suivant :

| $x$ | 2,9 | 2,99 | 2,999 | 2,9999 | 2,99999 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-10$ | $-100$ | $-1000$ | $-10^4$ | $-10^5$ |

b) On peut dire que la limite de $f(x)$ est égale à $-\infty$ lorsque $x$ tend vers 3 par valeurs inférieures à 3. On écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}} \frac{1}{x-3} = -\infty$

2) a) On obtient le tableau suivant :

| $x$ | 3,1 | 3,01 | 3,001 | 3,0001 | 3,00001 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 10 | 100 | 1000 | $10^4$ | $10^5$ |

b) On peut dire que la limite de $f(x)$ est égale à $+\infty$ lorsque $x$ tend vers 3 par valeurs supérieures à 3. On écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\>}} \frac{1}{x-3} = +\infty$.

**Exercice de fixation 2**

Détermine les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\<}} \frac{1}{x-5} = -\infty$

2) $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to -1\\>}} \frac{1}{x+1}} = +\infty$ et $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to -1\\>}} \frac{1}{x-(-1)}} = +\infty$.

**Activité 3 :**

1^er^ cas : $n$ est pair

A l'aide du graphique, on peut conjecturer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

Ces deux limites sont égales. On écrit donc : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$.

2^nd^ cas : $n$ est impair

On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

A l'aide de cette représentation graphique, donne sans justification (notion intuitive)

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$. Indique si les deux limites sont égales ou pas.

A l'aide du graphique, on peut conjecturer que : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{(x-1)^3} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{(x-1)^3} = +\infty$.

Ces deux limites ne sont pas égales.

**Exercice de fixation 3**

1) L'exposant de $(x-4)$ est impair. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} \frac{1}{(x-4)^7} = -\infty$.

2) On remarque que $(x+6) = (x-(-6))$. Ensuite l'exposant de $(x+6)$ est pair.

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to -6 \\ <}} \frac{1}{(x+6)^{12}} = +\infty$.

**Exercice de fixation 4**

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^9} = +\infty$ ; b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x^{10}} = +\infty$.

**Activité 4 :**

**2er cas : $\boldsymbol{n}$ est pair**

A l'aide du graphique, on obtient : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

**2ème cas : $\boldsymbol{n}$ est impair**

A l'aide du graphique, on obtient : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

**Exercice de fixation 5**

1) La puissance de la fonction $\boldsymbol{x \mapsto x^4}$ est paire. Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4)} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^6) = +\infty$ .

2) La puissance de la fonction $\boldsymbol{x \mapsto x^{11}}$ est impaire. Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} (x^{11})} = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^{25}) = +\infty$

**Exercice de fixation 6**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^9} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^{20}} = 0$

**Activité 5**

On conjecturer que : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2}$ et $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2}$.

**Exercice de fixation 7**

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x-1}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x-1}{x} = -1$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$

**Activité 6 :**

1) On obtient le tableau suivant :

| $x$ | 10 | $10^2$ | $10^3$ | $10^{12}$ | $10^{20}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t(x)$ | $\sqrt{10}$ | *10* | $10\sqrt{10}$ | $10^6$ | $10^{10}$ |

2) Le tableau suggère que la fonction racine carrée tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**Exercice de fixation 8**

On a d'après l'indication : $\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2} = \frac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x}$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

**Activité 7 :**

On considère la fonction polynôme suivante :$P(x) = -3x^4 + x^3 + 5x^2 + 12x - 7$.

1) Le monôme de plus haut degré de P est : $-3x^4$ .

2) On met $-3x^4$ en fonction ; on obtient $P(x) = -3x^4(1 + \frac{x^3}{-3x^4} + \frac{5x^2}{-3x^4} + \frac{12x}{-3x^4} - \frac{7}{3x^4})$.

   Après simplification, on obtient : $P(x) = -3x^4(1 - \frac{1}{3x} - \frac{5}{3x^2} - \frac{12}{3x^3} + \frac{7}{3x^4})$.

3) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{3x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{12}{3x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7}{3x^4} = 0$.

   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{3x} - \frac{5}{3x^2} - \frac{12}{3x^3} + \frac{7}{3x^4}\right) = 1$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -3x^4$.

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^4 = -\infty$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$

4) On démontre de même que : $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ .

**Exercice de fixation 9**

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} (12x^4 - x^3 + 2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 12x^4$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} 12x^4 = +\infty$.
   Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (12x^4 - x^3 + 2x) = +\infty$.

2) On démontre de même que $\lim_{x \to +\infty} (-5x^7 - x^2 - 3) = -\infty$

3) $\lim_{x \to -\infty} (-4x^3 + 2x^2 - 5) = +\infty$

4) $\lim_{x \to -\infty} ( x^6 + x^5 - x^2) = +\infty$

**Activité 8:**.

1) On a : $\lim_{x \to +\infty} \frac{-12x^4}{-2x^6} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{-12x^4}{-2x^6} = \lim_{x \to -\infty} \frac{6}{x^2} = 0$.

2) Dans l'expression de $f(x)$, on met, $-12x^4$ en facteur au numérateur et $-2x^6$ en facteur au dénominateur. On obtient après simplifications : $f(x) = \frac{-12x^4(1-\frac{1}{12x^2}+\frac{7}{12x^4})}{-2x^6(1-\frac{1}{2x^3}-\frac{5}{2x^4})}$.

3) On sait que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{12x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{12}}{x^2} = 0$ ; de même $\lim_{x \to +\infty} \frac{7}{12x^4} = 0$.

Donc $\lim_{x \to +\infty} (1 - \frac{1}{12x^2} + \frac{7}{12x^4}) = 1$

On démontre de même que $\lim_{x \to +\infty} (1 - \frac{1}{2x^3} - \frac{5}{2x^4}) = 1$.

Il en résulte que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-12x^4}{-2x^6}$. Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{-12x^4}{-2x^6} = 0$.

Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

4) On démontre de la même manière que : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

**Exercice de fixation 10**

1) La fonction $x \longmapsto \frac{5x^2-14}{-x^{26}+4x^2-3}$ est rationnelle.

Donc : $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2-14}{-x^{26}+4x^2-3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2}{-2x^{26}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{-2x^{24}} = 0$

2) La fonction $x \longmapsto \frac{3x-8x^6}{2x}$ est rationnelle.

Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-8x^6}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{8x^6}{2x} = \lim_{x \to +\infty} 4x^4 = +\infty$

**Activité 9 :**

1) Les coordonnées du point $H$ sont $(1 ; \frac{1}{|x-1|})$

2) La distance du point $M$ à la droite (D) est la même que celle de $M$ à $H$. Notons $A$ le projeté orthogonal de $M$ sur (OI) et B celui de $H$ sur (OI).

Le quadrilatère $AMHB$ est un rectangle d'où $MH = AB$. Ensuite $A(x ; 0)$ et $B(1 ; \frac{1}{|x-1|})$. Donc $AB = |x-1|$. Donc $MH = |x-1|$

La distance du point M à la droite (D) est donc $|x-1|$.

3) On obtient le tableau suivant :

| $x$ | 0,9 | 0,99 | 0,999 | 0,9999 | 1,1 | 1,01 | 1,001 | 1,0001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert x-1\rvert$ | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |

4) Lorsque $x$ tend vers 1, la distance $MH$ tend vers zéro.

**Exercice de fixation 11**

La droite (D) est une asymptote verticale à la courbe (C) dans le cas de P3.

**Activité 10 :**

1) On a : $M(x;\frac{2x-1}{x})$ et $H(x;2)$. Donc la distance $MH$ est égale à $\left|\frac{2x-1}{x}-2\right|$.

2) On sait $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x}=2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} MH=0$.

3) $MH=|f(x)-2|$. Il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)-2|=0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2)=0$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

**Exercice de fixation 12**

La droite (D) est une asymptote horizontale à (C) dans le cas de P1.

- **DES QUESTIONS D'EVALUATION**
  - **Question 1** : comment déterminer la limite à gauche ou à droite en $a$ d'une fonction du type : $x\longmapsto\frac{b}{(x-a)^n}$ où $b\neq 0$.

**Exercice non corrigé**

- D'une part : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\frac{4}{(x-1)^6}=+\infty$ comme $4>0$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\frac{1}{(x-1)^6}=+\infty$.
- D'une part : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\frac{-12}{(x-1)^6}=-\infty$ comme $-12<0$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\<}}\frac{1}{(x-1)^6}=-\infty$.
- **Question 2** : comment déterminer la limite à gauche ou à droite en $a$ d'une fonction du type :$x\longmapsto\frac{P(x)}{(x-a)^n}$ où $P$ est un polynôme tel que $P(a)\neq 0$.

**Exercice non corrigé**

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\frac{-2x^2+3}{(x-1)^3}=+\infty$.

**Question 3** : comment déterminer la limite à l'infini d'une fonction du type : $x \longmapsto \frac{P(x)}{(x-a)^n}$ où $P$ est une fonction polynôme.

**Exercice non corrigé**

Pour tout $x$ non nul, $\frac{12x^{33}+x^2-10}{(x-2)^{20}} = \frac{12x^{33}+x^2-10}{(x-2)^{20}}$.

Ensuite on a : $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{12\,x^{31}}+\frac{10}{12\,x^{33}}\right)=1$ et $\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{2}{x})^{20}=1$.

D'où $\lim_{x\to-\infty}\frac{12x^{33}+x^2-10}{(x-2)^{20}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{12x^{33}}{x^{20}} = \lim_{x\to-\infty} x^{13} = -\infty$.

**Question 4** : comment étudier la position d'une courbe par rapport à son asymptote horizontale

**Exercice non corrigé**

1) On a $\lim_{x\to-\infty}(\,f(x)-(x-3)\,) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x-1}\right)=0$.
   De même $\lim_{x\to+\infty}(\,f(x)-(x-3)\,) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x-1}\right)=0$. D'où le résultat.
2) On a : $f(x)-(x-3)=\frac{2}{x-1}$.
   Etudions le signe cette fonction sur les intervalles $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$
   Pour tout $x$ de $]-\infty;1[$, $\frac{2}{x-1}<0$ donc (C) est au-dessous de (D).
   pour tout $x$ de $]1;+\infty[$, $\frac{2}{x^2-1}>0$ .Donc (C) est au-dessus de (D).

**MES SEANCES D'EXERCICES**

**EXERCICES DE FIXATION**

**Exercice 1**

La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite à l'infini de son monôme de plus haut degré.

**Exercice 2**

1) $\lim_{\substack{x\to3\\<}}\frac{1}{(x-3)}=-\infty$ ;
2) $\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{1}{(x-1)}=+\infty$
3) $\lim_{\substack{x\to-6\\>}}\frac{1}{(x+6)}=+\infty$
4) $\lim_{\substack{x\to-8\\<}}\frac{1}{(x+8)}=-\infty$

**Exercice 3**

1) $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ <}} \frac{1}{(x+5)^7} = -\infty$ ;
2) $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} \frac{1}{(x-4)^{\varsigma}} = +\infty$
3) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{1}{(x+1)^4} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{1}{(x+2)^6} = +\infty$

**Exercice 4**

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{(x+1)^5} = 0$
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{(x+12)^{63}} = 0$
3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{(x+1)^5} = 0$
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{(x-7)^2} = 0$
5) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{(x-6)^9} = 0$

**Exercice 5**

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-10) = -10$
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^{20}} = 0$
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{11}} = 0$
4) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{101} = -\infty$
5) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{121} = +\infty$

**Exercice 6**

1) Faux car $f$ n'est pas une fonction polynôme.
2) Faux car $f$ n'est pas une fonction rationnelle.
3) Faux car voici un contre-exemple : $f(x) = \frac{-3(x-2)}{x-2}$. On a bien $Df = \mathbb{R} - \{2\}$ pourtant $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -3$. On ne trouve pas l'infini. Donc la droite d'équation $x = 2$ n'est pas une asymptote.
4) Faux car quel que soit la parité de $n$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.
5) Vrai d'après une propriété du cours.
6) Faux car quel que soit la parité de $n$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
7) Vrai ; voici un exemple : $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ si $x < 1$ et $f(x) = \frac{x}{x+1}$ si $\geq 1$.
   Il y a deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses. En $-\infty$, $y = 2$ et en $+\infty$, $y = 1$.

**Exercice 7**

Asymptote horizontale : $y = 4$ ; asymptote verticale : $x = 1$.

**Exercice 8**

1) La courbe de $f$ admet une asymptote d'équation $x = 0$.
2) La courbe de $g$ admet une asymptote d'équation $x = -2$.
3) La courbe de $h$ admet une asymptote d'équation $y = 0$.
4) La courbe de $f$ admet une asymptote d'équation $y = -2$.

**Exercice 9**

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+1}{-2x+3} = -\frac{1}{2}$. Il en résulte que la représentation graphique de la fonction : $x \longmapsto \frac{x+1}{-2x+3}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{1}{2}$.

**Exercice 10**

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ . Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (x\sqrt{x}) = +\infty$.
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{4x^2+5}{3x-1}) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right) = 1$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[(\frac{4x^2+5}{3x-1})\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)\right] = -\infty$.
3) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} (\frac{x-3}{x-2}) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} (1 - 3x) = -5$. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \left[(\frac{x-3}{x-2})(1 - 3x)\right] = -\infty$.
4) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{-5x^2+3x-1}{x^2-1}) = -5$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\left(\frac{x^3+41}{x^4-x^3-1}\right)\right] = 0$.
   Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[(\frac{-5x^2+3x-1}{x^2-1})\left(\frac{x^3+41}{x^4-x^3-1}\right)\right] = 0$.

**Exercice 11**

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^7} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 9) = -\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\frac{1}{x^7} + x + 9\right] = -\infty$.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{-10x^2+7}{x-1}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-2 + \frac{1}{x^2}\right) = -2$.
   Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\left(\frac{-10x^2+7}{x-1}\right) + \left(-2 + \frac{1}{x^2}\right)\right] = +\infty$.
2) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left(\frac{x+4}{x+1}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} (1 - x^2) = 0$. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left[\frac{x+4}{x+1} + 1 - x^2\right] = -\infty$.
3) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \left(\frac{-3x+2}{x-2}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \left(\frac{4}{2-x}\right) = -\infty$. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \left[\frac{-3x+2}{x-2} + \frac{4}{2-x}\right] = -\infty$.

**Exercice 12**

1) Pour tout $x > 0$, $\frac{1}{2x+5} = \frac{1}{x}(\frac{1}{2+\frac{5}{x}})$. On sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2+\frac{5}{x}} = \frac{1}{2}$.

   Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2x+5} = 0$

2) a) On sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^5} = 0$ ; donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[4 + \frac{1}{x^5}\right] = 4$.

b) $\frac{4+\frac{1}{x^5}}{2x+5} = (4+\frac{1}{x^5})\frac{1}{2x+5}$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{4+\frac{1}{x^5}}{2x+5}\right] = 0$ d'après les calculs effectués ci-dessus.

**Exercice 13**

Toutes ces fonctions sont des fonctions rationnelles. Donc

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-2}{\sqrt{2}}$.
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x^3}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2 = +\infty$. De même : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

**Exercice 14**

1) On applique la propriété sur la limite d'une somme de fonctions : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2) Impossible d'appliquer la limite d'une somme. Donc :

   Pour tout $x > 0$, $\sqrt{x^2-1} - 5x = x(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 5)$. D'une part

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 5\right) = -4$

   D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 5\right) = -\infty$.

   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6x+5}{24x+1} = \frac{1}{4}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

**Exercice 15**

1) $\lim\limits_{\substack{x\to-6\\<}} \frac{x-2}{36-x^2} = +\infty$ car $\frac{x-2}{36-x^2} = \frac{x-2}{6-x}\frac{1}{x+6}$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to-6\\<}} \frac{x-2}{6-x} = -\frac{4}{7}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-6\\<}} \frac{1}{6+x} = -\infty$.
2) $\lim\limits_{\substack{x\to-6\\>}} \frac{x-2}{36-x^2} = -\infty$ la justification se fait comme au 1).
3) $\lim\limits_{\substack{x\to6\\<}} \frac{x-2}{36-x^2} = +\infty$ la justification se fait comme au 1).
4) $\lim\limits_{\substack{x\to6\\>}} \frac{x-2}{36-x^2} = -\infty$ la justification se fait comme au 1)

**Exercice 16**

1) $\lim\limits_{\substack{x\to5\\<}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to5\\>}} f(x) = -\infty$.
2) La droite d'équation est une asymptote à la courbe de $f$.
3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{3}{x} = 0$ ; de même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
4) Il en résulte que la droite d'équation y=0 (l'axe des abscisses) est une asymptote à la courbe de $f$ parallèle à l'axe des abscisses.

## EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

### Exercice 17

1) D'après ce graphique :
    a) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = +\infty$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$.
    b) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$
    c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
2) Les limites $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ par exemple prouvent que les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ sont des asymptotes.
   La limite $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ par exemple prouve que la droite d'équation $y = 2$.

### Exercice 18

Si on applique un résultat sur la limite d'une somme, on obtient une forme indéterminée. En effet

$\sqrt{x} - 2x^2 = \sqrt{x} + (-2x^2)$ ensuite $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x^2 = -\infty$.

Pour lever l'indétermination, on écrit : pour tout $x > 0$, $\sqrt{x} - 2x^2 = \sqrt{x}(1 - 2x\sqrt{x})$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 2x\sqrt{x}) = -\infty$. D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}(1 - 2x\sqrt{x}) = -\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - 2x^2) = -\infty$.

### Exercice 19

1) On écrit : $\frac{x-3}{x^2-25} = \frac{x-3}{x+5}\frac{1}{x-5}$ puis $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} \frac{x-3}{x+5} = \frac{1}{5}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} \frac{1}{x-5} = -\infty$.
   Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} \frac{x-3}{x^2-25} = -\infty$.

On écrit : $\frac{x-3}{x^2-25} = \frac{x-3}{x+5}\frac{1}{x-5}$ puis $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} \frac{x-3}{x+5} = \frac{1}{5}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} \frac{1}{x-5} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} \frac{x-3}{x^2-25} = +\infty$.

2) On écrit : $\frac{3-x}{4-x^2} = \frac{x-3}{2-x}\frac{1}{2+x}$ puis $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{3-x}{2-x} = \frac{5}{4}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{1}{2+x} = -\infty$.
   Donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{x-3}{x^2-25} = -\infty$.

On écrit : $\frac{3-x}{4-x^2} = \frac{x-3}{2-x}\frac{1}{2+x}$ puis $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{3-x}{2-x} = \frac{5}{4}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{1}{2+x} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{x-3}{x^2-25} = +\infty$.

### Exercice 20

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1 - \frac{12}{x^2}} = 1$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{12}{x^2}\right) = 1$
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 + \frac{1}{x})^3 = 27$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

On écrit $\frac{2-x}{x} = (2-x)\frac{1}{x}$. Ensuite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(2-x) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x} = +\infty$.

3) Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{2-x}{x} = +\infty$ ; par suite : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\sqrt{\frac{2-x}{x}} = +\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{25x^2+2}{x^2-1}\right) = 25$ ; d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{25x^2+2}{x^2-1}} = \sqrt{25} = 5$.

5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{25x^2+2}{(x-1)^2}\right) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\frac{25x^2+2}{(x-1)^2}} = +\infty$

**Exercice 21**

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}}\sqrt{x-2} = 0$ et $\sqrt{x-2} \geq 0$ ; d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}}\left[\frac{-1}{\sqrt{x-2}}\right] = -\infty$.
2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-2} = +\infty$ ; d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right] = +\infty$.

**Exercice 22**

1) Il suffit de calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{x-2}{\sqrt{x}}$. On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{x-2}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$. D'où le résultat.
2) Il suffit de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x^2+x}{x^2+1}\right) = -2$ ; ce qui est le cas.

**Exercice 23**

1) On mettre $x^2$ en facteur dans $\sqrt{x^2+1}$
2) Evident.
3) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty}(2+\frac{3}{x}) = 2$ et enfin $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x} = -1$.

   Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$

**Exercice 24**

On sait que pour tous $a \geq 0$ et $b > 0$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Pour tout $x > 0$, $\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{5x-1}} = \sqrt{\frac{x^2+4}{5x-1}}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4}{5x-1} = +\infty$ ; donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+4}{5x-1}} = +\infty$.

Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

**Exercice 25**

1) Pour tout $x > 0$, $\frac{-2x+3}{\sqrt{x^2}+2} = \frac{-2x+3}{x+2}$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$.
2) Pour tout $x < 0$, $\frac{-2x+3}{\sqrt{x^2}+2} = \frac{-2x+3}{-x+2}$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$.
3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{1-10x^7} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{1-10x^7} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4) On écrit : $\frac{x^3-\sqrt{x}}{2x^3+1} = \frac{1-\frac{1}{x^2\sqrt{x}}}{2+\frac{1}{x^3}}$. Ensuite $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x}} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$.

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

**Exercice 26**

On n'a pas d'équation de droite ; cependant d'après la définition d'une asymptote horizontale, on va calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

On a : $\lim_{x\to-\infty} (\frac{-3x^2-1}{2x^2+1}) = -\frac{3}{2}$. Donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{3}{2}$. Il en résulte que la représentation graphique de $f$ admet en $-\infty$ une asymptote parallèle à la droite des abscisses.

Son équation est $y = -\frac{3}{2}$

**Exercice 27**

On a : $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$. Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

**Exercice 28**

Détermine la limite suivante : $\lim_{x\to4} \left|\frac{x+5}{x^2-16}\right|$

$\lim_{\substack{x\to4\\<}} \left(\frac{x+5}{x^2-16}\right) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x\to4\\>}} \left(\frac{x+5}{x^2-16}\right) = +\infty$ ; d'où $\lim_{x\to4} \left|\frac{x+5}{x^2-16}\right| = +\infty$.

**Exercice 29**

1) Par division euclidienne de $2x^2+x-5$ par $x+4$, on obtient $f(x) = 2x-7+\frac{23}{x+4}$
2) $\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(2x-7)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{23}{x+4} = 0$.

**Exercice 30**

1) L'ensemble de définition de la fonction $f$ est l'intervalle : $]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$.
2) a) Démontre que pour tout $x < 0$, $f(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-2x})(x-\sqrt{x^2-2x})}{x-\sqrt{x^2-2x}} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}-x}$ ; ensuite en mettant $x$ en facteur, on obtient : $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}$

   b) De ce qui précède, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

   c) Il en résulte que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe de $f$ en $-\infty$.
3) Soit (D) la droite d'équation : $y = 2x-1$.
   a) Pour tout $x > 0$, $[f(x)-(2x-1)] = 1-x+\sqrt{x^2-2x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-2x}+x-1}$.
   b) On a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-2x}+x-1} = 0$. Donc $\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(2x-1)] = 0$.
   c) Il résulte de la question b) que la droite d'équation (D) est une asymptote oblique à la courbe de la fonction $f$.

**Exercice 31**

1) L'ensemble de définition de la fonction $f$ est : $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$.
   C'est-à-dire $]-\infty; -1[\, \cup \,]-1; 1[\, \cup \,]1; +\infty[$.
2) Il y a six limites à calculer :
   $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$
   Ensuite $\lim_{x \to -1} (2x^3 - 5x^2 - 2x + 4) = -1$ et $\frac{-1}{x^2-1} = \frac{-1}{x-1}\frac{1}{x+1}$ $\lim_{x \to -1} \left(\frac{-1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}$
   lim

$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} (\frac{1}{x+1}) = -\infty$. Donc $\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$.

Puis $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} (\frac{1}{x+1}) = +\infty$. Donc $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$.

$\frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}\frac{-1}{x+1}$ ; $\lim_{x \to 1} \left(\frac{-1}{x+1}\right) = \frac{-1}{2}$ ; $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} (\frac{1}{x-1}) = -\infty$. Donc $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$.

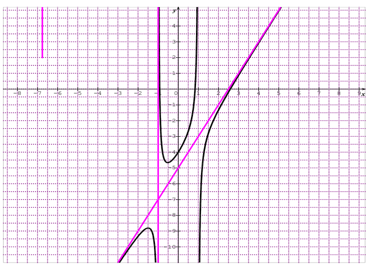
On démontre de même que $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$.

En conclusion : $\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ ; $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$ ; $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ ;
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et enfin $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

3) Les limites obtenues à la question précédente, permettent d'obtenir les asymptotes suivantes :
   Les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$ sont des asymptotes verticales ;
   La droite d'équation $y = 2$ sont des asymptotes de (C).
4) La division euclidienne de $2x^3 - 5x^2 - 2x + 4$ par $x^2 - 1$ donne le résultat.
5) Pour tout $x$ de D$f$, $f(x) - (2x - 5) = \frac{1}{x^2-1}$. Les limites $\lim_{x \to -\infty} (\frac{1}{x^2-1}) = 0$ et

$\lim_{x \to +\infty} (\frac{1}{x^2-1}) = 0$ permettent de conclure.

6) Pour tout $x$ de D$f$, $f(x) - (2x - 5) = \frac{1}{x^2-1}$.
   Ensuite : sur $]-\infty; -1[\, \cup \,]; 1 + \infty[$, $\frac{1}{x^2-1} > 0$. Il en résulte que (C) est au-dessus de (D).
   Sur $]-1; 1[$, $\frac{1}{x^2-1} < 0$. Il en résulte que (C) est en dessous de (D).
7)



**Exercice 32**

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)=+\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$.

   $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)=+\infty$.

**Exercice 33**

1) Pour tout $a$, $g(x)=ax+3+a+\frac{4+a}{x-1}$. Soit $g(x)-(ax+3+a)=\frac{4+a}{x-1}$

   Si $a=0$ alors : $g(x)-3=\frac{4}{x-1}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-3)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)-3)=0$.
   La courbe (C) n'admet donc pas d'asymptote oblique mais plutôt une asymptote horizontale d'équation $y=3$.
   Si $a\neq 0$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-(ax+3+a))=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)-(ax+3+a))=0$

   La courbe (C) admet alors une asymptote oblique d'équation $y=ax+3+a$.

   Conclusion : La courbe (C) admet alors une asymptote oblique d'équation $y=ax+3+a$ si et seulement si $a\neq 0$.

2) Déterminons: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}g(x)$. On a pour tout $x\neq 1$, $g(x)=(ax^2+3x+1)\frac{1}{x-1}$ ;

   D'abord : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}(ax^2+3x+1)=a+4$. Ce résultat conduit à examiner deux cas.

   1[er] cas : Si $a=-4$ alors pour tout $x\neq 1$, $g(x)=\frac{-4x^2+3x+1}{x-1}=\frac{(x-1)(-4x-1)}{x-1}$ ;
   $g(x)=-4x-1$ par conséquent $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}g(x)=-5$. La courbe (C) n'admet pas d'asymptote parallèle à (OJ).
   2[nd] cas : Si $a\neq -4$ alors $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}(ax^2+3x+1)=a+4$ avec $a+4\neq 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\frac{1}{x-1}=-\infty$

   Donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}g(x)=\pm\infty$ suivant le signe de $a+4$. Dans ce cas, la courbe (C) admet la droite d'équation $x=1$ comme asymptote parallèle à (OJ).
   Le calcul de $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}g(x)$ donne les mêmes résultats.
   Conclusion : la courbe (C) admet une asymptote parallèle à (OJ) d'équation $x=1$ si et seulement si $a\neq -4$.

3) D'après l'étude faite dans la question précédente, si $a=-4$, la courbe (C) n'admet pas d'asymptote d'équation $x=1$ car $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}g(x)=-5$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}g(x)=-5$.

**Exercice 34**

1) Pour tout $x > 0$, $f(x) - (x-2) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}+(x-2)}$ ;
   puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2-4x+5} + (x-2)\right] = +\infty$ ; d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}+(x-2)}\right] = 0$.
   C'est-à-dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-2)] = 0$ d'où le résultat.
2) Pour tout $x > 2$, $x^2 - 4x + 5 > (x-2)^2$ d'où $\sqrt{x^2-4x+5} > x - 2$. Il en résulte que (C) est au-dessus de (D).

**SITUATION COMPLEXE**

On a : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{100\,t^2+99}{t^2+1} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{100 + \frac{99}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}} = 100$

c'est Monsieur Coulibaly qui a raison

# 9 ÉTUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

## SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de troisième. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

| Constituants de la situation | Exemples de questions possibles | Réponses possibles des élèves |
|---|---|---|
| Contexte | Où se déroule la scène ? | Dans une boulangerie située près d'un lycée |
| Circonstances | Quel est le problème auquel le gérant est confronté ? | Le gérant de cette boulangerie voudrait connaitre le nombre de baguettes à vendre par semaine pour réaliser un bénéficie maximal |
| Tâche | Qu'est-ce que des élèves en classe de première se proposent de faire ? | Ils se proposent d'étudier la fonction bénéfice afin de répondre à la préoccupation du gérant. |

## DÉCOUVERTE DES HABILETÉS

**Activité 1**

1) $D_f = \mathbb{R}^*$.
2) a) $\forall x \in D_f$ , on a $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow -x \neq 0 \Leftrightarrow -x \in D_f$ .
   b) $\forall x \in D_f$ , on a $-x \in D_f$ et $f(-x) = \frac{|-x|+3}{(-x)^2} = \frac{|x|+3}{x^2} = f(x)$.

**Exercice de fixation 1**

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\ ;2\}$
$\forall x \in D_f$, on a :
• $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq -2$ et $x \neq 2 \Leftrightarrow -x \neq 2$ et $-x \neq -2 \Leftrightarrow -x \in D_f$
• $f(-x) = \frac{5}{(-x)^2-4} = \frac{5}{x^2-4} = f(x)$
Conclusion :
$\forall x \in D_f$ , on a $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$, donc $f$ est une fonction paire.

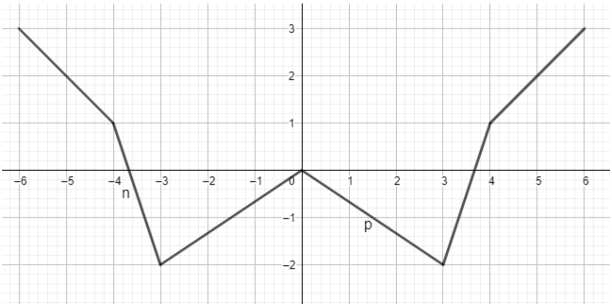
**Activité 2**

1) On a M($x$ ; $f(x)$) et N($-x$ ; $f(x)$).
2) On a M($x$ ; $y$)$\in$(C) $\Leftrightarrow y = f(x)$
$\Leftrightarrow y = f(-x)$ car $f$ est paire donc $f(x) = f(-x)$
$\Leftrightarrow$ N($-x$ ; $f(-x)$)$\in$(C)
$\Leftrightarrow$ N($-x$ ; $f(x)$)$\in$(C).

**Exercice de fixation 2**

La fonction semble paire dans les cas a) ; c) et d).

**Exercice de fixation 3**




**Activité 3**

$D_f = \mathbb{R}$.

1) a) $\forall x \in D_f$ , on a $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -x \in D_f$ .
b) $\forall x \in D_f$ , on a $-x \in D_f$ et $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x)$.

**Exercice de fixation 4**

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$

$\forall x \in D_f$, on a :

• $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 1 \Leftrightarrow -x \neq 1$ et $-x \neq -1 \Leftrightarrow -x \in D_f$

• $f(-x) = \frac{3(-x)}{(-x)^2-1} = \frac{-3x}{x^2-1} = -\frac{3x}{x^2-1} = -f(x)$

Conclusion :

$\forall x \in D_f$ , on a $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$, donc $f$ est une fonction impaire.

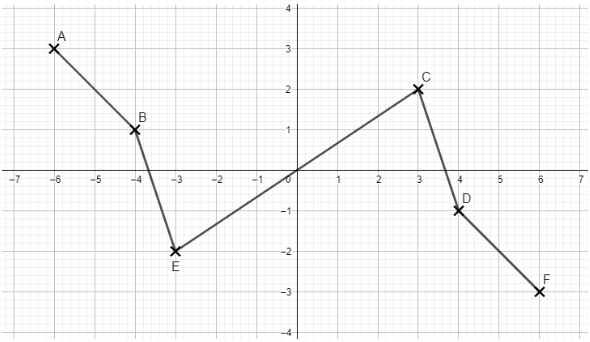
**Activité 4**

1) On a M($x$ ; $f(x)$) et N($-x$ ; $-f(x)$).
2) On a M($x$ ; $y$)$\in$(C) $\Leftrightarrow y = f(x)$
$\Leftrightarrow -y = -f(x)$
$\Leftrightarrow -y = f(-x)$ car $f$ est impaire donc $-f(x) = f(-x)$
$\Leftrightarrow$ N($-x$ ; $f(-x)$)$\in$(C)
$\Leftrightarrow$ N($-x$ ; $-f(x)$)$\in$(C).

**Exercice de fixation 5**

La fonction semble impaire dans les cas b) et e).

**Exercice de fixation 6**




__Activité 5__

1) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$ .
2) Pour tout $x$ tel que $x + 3 \in D_f$, on a :
   $g(x) = f(x + 3) - 5 = \frac{5(x+3)+1}{(x+3)-3} - 5 = \frac{5x+16}{x} - 5 = \frac{16}{x}$.
   $D_g = \mathbb{R}^*$.
   $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a $-x \in \mathbb{R}^*$ et $g(-x) = \frac{16}{-x} = -\frac{16}{x} = -g(x)$, donc g est une fonction impaire.
3) Pour tout $x \in D_f$ tel que $6 - x \in D_f$ , on a :
   $f(6 - x) + f(x) = \frac{5(6-x)+1}{(6-x)-3} + \frac{5x+1}{x-3} = \frac{-5x+31}{3-x} + \frac{5x+1}{x-3} = \frac{5x-31}{x-3} + \frac{5x+1}{x-3} = \frac{10x-30}{x-3} = 10$.
4) Soit $x \in D_f$ tel que $3 + x \in D_f$ .
   • $3 + x \in D_f \Leftrightarrow 3 + x \neq 3 \Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow -x \neq 0 \Leftrightarrow 3 - x \neq 3 \Leftrightarrow 3 - x \in D_f$
   • $f(3 - x) + f(3 + x) = \frac{5(3-x)+1}{(3-x)-3} + \frac{5(3+x)+1}{(3+x)-3} = \frac{-5x+16}{-x} + \frac{5x+16}{x} = \frac{5x-16+5x+16}{x} = 10$

**Exercice de fixation 7**

$D_f = \mathbb{R}$

Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ on a $2 \times 1 - x \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f(2 \times 1 - x) + f(x) &= f(2 - x) + f(x) \\ &= (2 - x)^3 - 3(2 - x)^2 + 1 + x^3 - 3x^2 + 1 \\ &= 8 - 12x + 6x^2 - x^3 - 12 + 12x - 3x^2 + 1 + x^3 - 3x^2 + 1 \\ &= -2 = 2\times(-1) \end{aligned}$$

D'où le point A(1 ; –1) est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction $f$

**Activité 6**

1) $D_f = \mathbb{R}$.
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + 7 \in \mathbb{R}$ et :
   $g(x) = f(x+7) = (x+7)^2 - 14(x+7) + 3 = x^2 - 46$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = (-x)^2 - 46 = x^2 - 46 = g(x)$, donc g est une fonction paire.
3) Soit $x \in D_f$ tel que $14 - x \in D_f$ , on a :
   $f(14-x) = (14-x)^2 - 14(14-x) + 3 = 196 - 28x + x^2 - 196 + 14x + 3 = x^2 - 14x + 3 = f(x)$.
4) Soit $x \in D_f$ tel que $7 + x \in D_f$ . Démontre que : $7 - x \in D_f$ et $f(7-x) = f(7+x)$.
   • $7 + x \in D_f \Leftrightarrow 7 + x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -7 - x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 14 - 7 - x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 7 - x \in \mathbb{R}$
   • $f(7-x) = (7-x)^2 - 14(7-x) + 3 = 49 - 14x + x^2 - 98 + 14x + 3 = x^2 - 46$
   $f(7+x) = (7+x)^2 - 14(7+x) + 3 = 49 + 14x + x^2 - 98 - 14x + 3 = x^2 - 46$
   D'où $f(7-x) = f(7+x)$

**Exercice de fixation 8**

$f$ est définie ssi $x^2 + 2x - 3 \neq 0$
Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ on a $2 \times 1 - x \in \mathbb{R}$ et

$$f(2\times(-1)-x) = f(-2-x) = \frac{3}{(-2-x)^2 + 2(-2-x) - 3}$$
$$= = \frac{3}{4+4x+x^2-4-2x-3} = \frac{3}{x^2+2x-3}$$

D'où la droite (D) d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction $f$

**Activité 7**

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 3$.
2) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, donc les zéros de $f'(x)$ sont 0 ; –1 et 1.
   b)

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | – | 0 | + | |

   $\forall x \in [-2 ; -1]$, $f'(x) > 0$
   $\forall x \in [-1 ; 0]$, $f'(x) < 0$
   $\forall x \in [0 ; 1]$, $f'(x) < 0$
   $\forall x \in [1 ; 2]$, $f'(x) > 0$

**Exercice de fixation 9**

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$
   1 et –1 sont de zéros évidents de $f'(x)$, donc $f'(x) = (x^2 - 1)(ax + b)$
   En utilisant la division euclidienne ou la méthode des coefficients indéterminés, on a :
   $f'(x) = (x + 3)(x^2 - 1)$

2)

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x^2-1$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

• $f'(-3) = 0$ ; $f'(x) < 0$ sur $]-\infty\,;-3[$ et $f'(x) > 0$ sur $]-3\,;-1[$, donc $f(-3)$ c'est-à-dire 1 est un minimum local de $f$.
• $f'(-1) = 0$ ; $f'(x) > 0$ sur $]-3\,;-1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]-1\,;1[$, donc $f(-1)$ c'est-à-dire 5 est un maximum local de $f$.
• $f'(1) = 0$ ; $f'(x) < 0$ sur $]-1\,;1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1\,;+\infty[$, donc $f(1)$ c'est-à-dire 1 est un minimum local de $f$.

**Activité 8**

1) a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\<}}(x^2+x+1)\times\frac{1}{x-2} = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}}(x^2+x+1) = 6$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}}\frac{1}{x-2} = -\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\>}}(x^2+x+1)\times\frac{1}{x-2} = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}}(x^2+x+1) = 6$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}}\frac{1}{x-2} = +\infty$.

2) a) $D_g = \mathbb{R}\backslash\{3\}$ .

b) $\lim\limits_{x\to3} g(x) = \lim\limits_{x\to3}\frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$

**Exercice de fixation 10**

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{5\}$.

1) $\lim\limits_{\substack{x\to5\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to5\\<}}(2x+3)\times\frac{1}{x-5} = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to5\\<}}(2x+3) = 13$ et $\lim\limits_{\substack{x\to5\\<}}\frac{1}{x-5} = -\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to5\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to5\\>}}(2x+3)\times\frac{1}{x-5} = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to5\\>}}(2x+3) = 13$ et $\lim\limits_{\substack{x\to5\\>}}\frac{1}{x-5} = +\infty$.

On conclut alors que la droite d'équation $x = 5$ est asymptote verticale à (C).

**Activité 9**

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-5x+11}{2x-7} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-5x}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-5}{2} = \frac{-5}{2}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5x+11}{2x-7} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5}{2} = \frac{-5}{2}$

**Exercice de fixation 11**

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x-1}{3x+3} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x}{3x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2 = 2$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x-1}{3x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2$

On déduit de ces deux résultats que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$ et en en $+\infty$.

**Activité 10**

- $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (2x-1)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(2x-1+\frac{1}{x+4}-(2x-1)\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x+4} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (2x-1)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x-1+\frac{1}{x+4}-(2x-1)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+4} = 0$

**Exercice de fixation 12**

- $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x-3)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-x-5}{x+2} - (x-3)\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-x-5-(x^2-x-6)}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x+2} =$
0
- $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x-3)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-x-5}{x+2} - (x-3)\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-x-5-(x^2-x-6)}{x+2} =$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2} = 0$

On déduit de ces deux résultats que la droite d'équation $y = x - 3$ est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$ et en en $+\infty$.

## DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

Question 1 : Comment étudier la parité d'une fonction ?

Exercice non résolu

1. $D_f = \mathbb{R}$ et $f(-x) = x^2 + 3x + 5$ or $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$
   $f$ est ni paire ni impaire.
2. $D_g = \mathbb{R}$ et $g(-x) = -g(x)$ donc $g$ est impaire.
3. $D_h = \mathbb{R}$ et $h(-x) = -h(x)$ donc $h$ est impaire

Question 2 : Comment déterminer une asymptote à la courbe représentative d'une fonction ?

Exercices non résolus

1) - Déterminons l'ensemble de définition de $f$ :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 \neq 0$ .
   $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\ ;\ 5\}$
   - Calculons les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-4x^2+3x}{x^2-3x-10} = -4$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-4x^2+3x}{x^2-3x-10} = -4$
   - $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-2\\ <}} \frac{-4x^2+3x}{x^2-3x-10} = -\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{-4x^2+3x}{x^2-3x-10} = +\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} \frac{-4x^2+3x}{x^2-3x-10} = +\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} f(x) = -\infty$

- Déduisons les asymptotes à ($C_f$).

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$ donc la droite d'équation $y = -4$ est asymptote horizontale à ($C_f$) en $-\infty$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -4$ donc la droite d'équation $y = -4$ est asymptote horizontale à ($C_f$) en $+\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à ($C_f$)

• $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = 5$ est asymptote verticale à ($C_f$)

2) - Déterminons l'ensemble de définition de g :

$\forall x \in \mathbb{R},\ x \in D_g \Leftrightarrow x + 1 \neq 0$ .

$D_g = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$

- Calculons la limite de $g(x) - (-2x + 5)$ en $+\infty$.et en $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} (g(x) - (-2x + 5)) = \lim_{x \to +\infty} (\frac{-2x^2 + 3x + 6}{x + 1} - (-2x + 5))$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1}$$
$$= 0$$

- Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - (-2x + 5)) = 0$ donc la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à ($C_g$) en $+\infty$.

De même $\lim\limits_{x \to -\infty} (g(x) - (-2x + 5)) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{-2x^2+3x+6}{x+1} - (-2x + 5))$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x+1}$$
$$= 0$$

- Conclusion : $\lim\limits_{x \to -\infty} (g(x) - (-2x + 5)) = 0$ donc la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à ($C_g$) en $-\infty$.

## EXERCICES DE FIXATION

### Fonction paire

**Exercice 40**

L'ensemble de définition de $f$ est $Df = \text{IR} - \{-1; 1\}$.
$\forall x \neq 1$ *et* $x \neq -1$, on a $-x \neq -1$ *et* $-x \neq 1$. Donc Df est symétrique par rapport à 0.
Ensuite $f(-x) = \frac{3}{(-x)^2-1} = \frac{3}{x^2-1}$. Donc $f(-x) = f(x)$.
Conclusion : f est une fonction paire.

**Exercice 41**

L'ensemble de définition de $f$ est $Df = ]1, +\infty[$. Cet ensemble n'est pas symétrique par rapport à 0 car $2 \in Df$ mais $-2 \notin Df$. Donc $f$ n'est pas paire.

**Exercice 42**

Parmi les courbes, celle d'une fonction paire est la courbe 3.

### Fonction impaire

**Exercice 43**

L'ensemble de définition de $f$ est $Df = \text{IR} - \{-1; 1\}$.
$\forall x \neq 1$ *et* $x \neq -1$, on a $-x \neq -1$ *et* $-x \neq 1$. Donc Df est symétrique par rapport à 0.
Ensuite $f(-x) = \frac{-(-x)}{(-x)^2-1} = \frac{x}{x^2-1}$. Donc $f(-x) = -f(x)$.
Conclusion : f est une fonction impaire.

**Exercice 44**

L''ensemble de définition de $f$ est $Df = IR$.
Donc D$f$ est symétrique par rapport à 0.
Mais $f(-3) = \frac{8}{10}$ alors que $f(3) = \frac{2}{10}$ ; $f(-3) \neq -f(3)$. Donc $f$ n'est pas impaire.

**Exercice 45**

Parmi les courbes, celle d'une fonction impaire est la courbe 2.

### Centre de symétrie

**Exercice 46**

Soit la fonction $g : IR \to IR, x \mapsto f(x + (-1)) - (-2)$ ; $g(x) = x^3 - 3x$
Démontrons que $g$ est impaire.
L'ensemble de définition de g est IR ; il est donc symétrique par rapport à 0.
D'autre part $g(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -g(x)$. Donc g est impaire.
Conclusion : le point $A(-1\,; -2)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de $f$.

**Exercice 47**
L'ensemble de définition de $f$ est $Df = IR - \{1\}$. Pour tout $x \neq 1$,
on a $2 - x \neq 1$. Donc si $x \in Df, 2 - x \in Df$.
De plus $f(2-x) + f(x) = \frac{2x-7}{x-1} + \frac{2x+3}{x-1} = \frac{4x-4}{x-1} = 4$
$f(2-x) + f(x) = 4$.
Donc le point A est centre de symétrie de la courbe représentative de *f*.

**Exercice 48**
$D_f = \mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $f(2\times 0 - x) + f(x) = f(-x) + f(x) = (-x)^3 + x^3 = -x^3 + x^3 = 0$
Donc le point $A(0\,;0)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de *f*.

**Axe de symétrie**
**Exercice 49**
Considérons la fonction $g : IR \to IR, x \mapsto f\left(x + \frac{1}{2}\right)$. on a : $g(x) = 1 - \frac{2}{x^2+\frac{3}{4}}$.
Démontrons que g est paire.
L'ensemble de définition de g est IR, il est donc symétrique par rapport à 0.
Ensuite $g(-x) = g(x)$. Donc g est paire.
Il en résulte que la droite (D) est un axe de symétrie de la courbe g.
**Exercice 50**
L'ensemble de définition de f est IR. Donc pour tout $x$ de $Df$, $6 - x$ appartient à $Df$.
Ensuite $f(6-x) = (6-x-3)^2 + 1 = (x-3)^2 + 1)$.
C'est-à-dire que $f(6-x) = f(x)$.
Donc la droite (D) est un axe de symétrie.

**Exercice 51**
$D_f = \mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ 2\times\frac{\pi}{2} - x \in \mathbb{R}$ et $f\left(2\times\frac{\pi}{2} - x\right) = f(\pi - x) = \cos(\pi - x) = \cos(x) = f(x)$
Donc la droite (D) d'équation : $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction $f$.

**Extrémum relatif**
**Exercice 52**

2 est un maximum relatif de *f* et il est atteint en –3
–4 est un minimum relatif de *f* et il est atteint en 0
0 est un maximum relatif de *f* et il est atteint en 2
–2 est un minimum relatif de *f* et il est atteint en 5

**Exercice 53**

2,5 est un maximum relatif de *f* et il est atteint en –2
–2 est un minimum relatif de *f* et il est atteint en 1

**Asymptote verticale**

**Exercice 54**

On a $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{7}{(x-1)^2} = +\infty$, car $\lim\limits_{x \to 1}(x-1)^2 = 0$ et $(x-1)^2 > 0$ pour $x \neq 1$

Donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe (C) de la fonction $f$.

**Exercice 55**

Il suffit de démontrer que $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} \frac{1}{x+3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -3} x^2 + 2x = +3$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} f(x) = +\infty$. D'où le résultat.

**Asymptote horizontale**

**Exercice 56**

Il suffit de démontrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2-4x+2}{2x^2+3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{2x^2} = 1$. D'où le résultat.

**Exercice 57**

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-x}{x+8} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x}{x} = -1$. D'où le résultat.

**Asymptote oblique**

**Exercice 58**

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{8}{x^3+3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{8}{x^3} = 0$. D'où le résultat.

**Exercice 59**

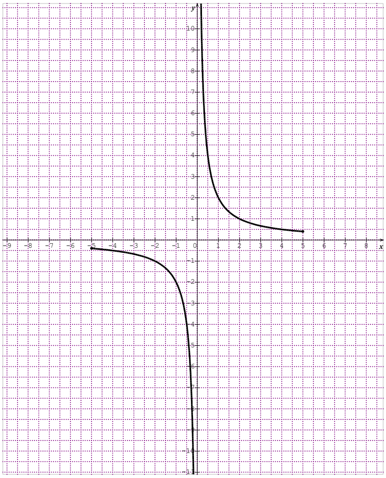
Dans l'énoncé, changer « $y = x - 1$ » par « $y = 2x + 1$ »

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (2x+1)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\frac{2x^2+5x+1}{x+2} - (2x+1)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-1}{x+2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-1}{x} = 0$. Donc la droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote en $-\infty$ à la courbe représentative de la fonction $f$

**EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT**

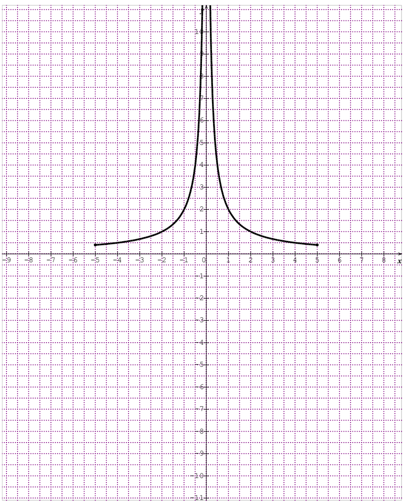
**Exercice 60**

On obtient le tracé suivant :



**Exercice 61**

On obtient le tracé suivant :



**Exercice 62**

| | La fonction *f* définie sur | paire | impaire | ni paire ni impaire |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 5x$ est | | × | |
| 2 | $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 5x^2$ est | | | × |
| 3 | $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^4 - 5x^2$ est | × | | |
| 4 | $\mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$ est | × | | |
| 5 | $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{7x}{x^2+1}$ est | | × | |
| 6 | $[-4; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+4}$ est | | | × |
| 7 | $[-3; 3]$ par $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ est | × | | |

**Exercice 63**

1) Le minimum relatif de *f* est 1. Il est atteint en 2.
   Le maximum relatif de *f* est 5. Il est atteint en 0.
2) Établis le tableau de variation de f

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $5$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

**Exercice 64**

$D_f = \mathbb{R}^*$

$f(-1) = -1 - 1 + 1 = -2$ ; $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1$

On a $f(-1) \neq f(1)$. Donc $f$ n'est pas paire.

On a $f(-1) \neq -f(1)$. Donc $f$ n'est pas impaire.

**Exercice 65**

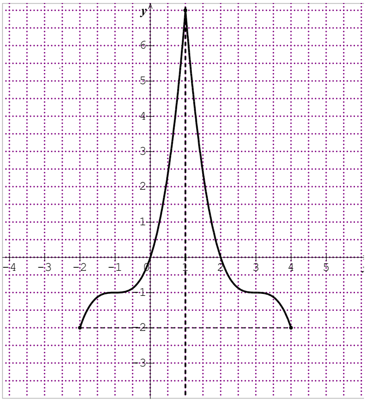
1) L'ensemble définition de *f* est $Df = IR - \{-3; 3\}$
2) L'ensemble de définition de f est symétrique par rapport à 0.
   De plus $\frac{1}{3+x} - \frac{1}{3-x} = -(\frac{1}{3-x} - \frac{1}{3+x})$. C'est-à-dire que $f(-x) = -f(x)$.
   La fonction $f$ est donc impaire.

**Exercice 66**

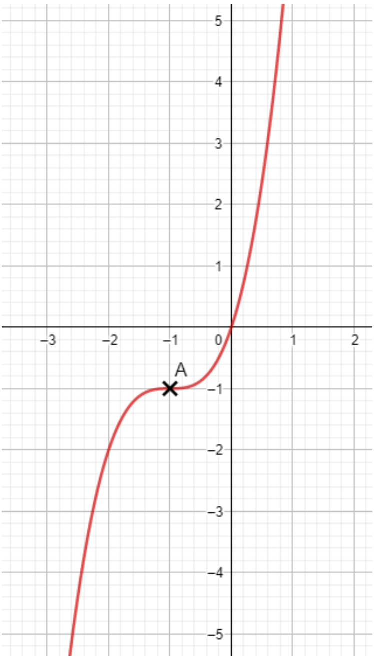
1) L'ensemble définition de *f* est $Df = IR - \{-1; 1\}$
2) L'ensemble de définition de $f$ est symétrique par rapport à 0. De plus $\frac{1}{|-x|-1} - (-x)^2 = \frac{1}{|x|-1} - x^2$. C'est-à-dire que $f(-x) = f(x)$. La fonction $f$ est donc paire.

**Exercice 67**

On obtient le tracé suivant.



**Exercice 68**



**Exercice 69**

1) Pour tout $x$ de $[-3;1]$, $f'(x) = 3x^2 + 5x - 2 = (3x-1)(x+2)$
2) Pour tout $x$ de $]-3;-2[ \cup \left]\frac{1}{3};1\right[$, $f'(x) > 0$ et pour tout x de $\left]-2;\frac{1}{3}\right[$, $f'(x) < 0$.

   Donc $f$ est croissante sur $]-3;-2[$ et sur $\left]\frac{1}{3};1\right[$ et $f$ est décroissante sur $\left]-2;\frac{1}{3}\right[$.
3) Tableau de variation de $f$.

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $\frac{1}{3}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $\frac{5}{2}$ | $\nearrow$ | $7$ | $\searrow$ | $\frac{35}{54}$ | $\nearrow$ | $\frac{5}{2}$ |

4) Le maximum relatif de $f$ est 7 et il est atteint en -2.

   Le minimum relatif de $f$ est $\frac{35}{54}$ et il est atteint en $\frac{1}{3}$

**Exercice 70**

1) Posons $f(x) = 3 + \frac{-5}{x-2}$. On a $f(4-x) + f(x) = 3 + \frac{-5}{2-x} + 3 + \frac{-5}{x-2} = 6 = 2 \times 3$.

   D'où le résultat.
2) Posons $g(x) = (x-2)^3 + 3$.

   On a g(4 - $x$) + g($x$) = $(4-x-2)^3 + 3 + (x-2)^3 + 3 = 6 = 2 \times 3$.

   D'où le résultat.

**Exercice 71**

1) Posons $f(x) = (4+x)^2 - 15$. On a $f(-8-x) = (-4-x)^2 - 15 = f(x)$. D'où le résultat.
2) Posons $g(x) = |x+4| + 1$. On a $g(-8-x) = |-x-4| + 1 = g(x)$.

   D'où le résultat.

**Exercice 72**

1) $f'(x) = \frac{a-b}{(x+1)^2}$ ; donc $f'(0) = a - b$ c'est-à-dire que $a - b = -3$. Ensuite

   $f(-2-x) + f(x) = -4$ *or* $f(-2-x) + f(x) = \frac{-ax-2a+b}{-x-1} + \frac{ax+b}{x+1} = \frac{ax+2a-b}{x+1} + \frac{ax+b}{x+1} = 2a$

   Donc $2a = -4$. Soit $a = -2$. Par suite $b = 1$.

   On trouve donc $f(x) = \frac{-2x+1}{x+1}$.

   2) $\forall \in x ]-1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{-2(x+1)-2(-x+1)}{(x+1)^2} = -\frac{3}{(x+1)^2}$

   3) $\forall \in x ]-1;+\infty[$, $-\frac{3}{(x+1)^2} < 0$. Donc la fonction $f$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-1;+\infty[$

4) a) $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} \frac{-2x+1}{x+1} = +\infty$

b) Il en résulte que la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote à la courbe de $f$.

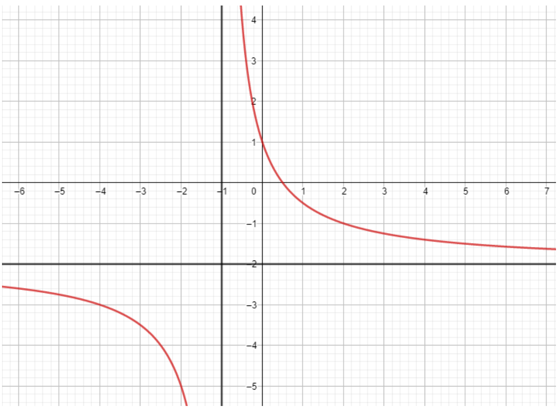
5) a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-2x+1}{x+1} = -2$

b) Il en résulte que la droite d'équation $y = -2$ est une asymptote à la courbe de $f$

6) Le tableau de variation de $f$ est :

| $x$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ |
| $f(x)$ | | $+\infty \searrow -2$ |

7)




**Exercice 73**

1) $Df = IR - \{1\}$

2) Pour tout $x$ de $Df$, $f(x) = \frac{(1-x)^2+4}{1-x} = 1 - x + \frac{4}{1-x}$

3) a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$

b) La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe (C).

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

On admet que $f$ est dérivable sur $Df$.

5) a) $f'(x) = -1 + \frac{4}{(1-x)^2} = \frac{(1+x)(3-x)}{(1-x)^2}$

b) Pour tout $x$ de $]-1;1[ \cup ]1;3[$, $f'(x) > 0$ *et*
pour tout $x$ de $]-\infty;-1[ \cup ]3;+\infty[$, $f'(x) < 0$

Donc $f$ est croissante sur $]-1;1[$ *et sur* $]1;3[$ *et* $f$ est décroissante sur $]-\infty;-1[$ *et sur* $]3;+\infty[$.

c) Tableau de variation de f

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $0$ | | ‖ | | $0$ | | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $4$ | ↗ $+\infty$ | ‖ | $-\infty$ ↗ | $-4$ | ↘ | $-\infty$ |

6) $f(0)=5$ *et* $f'(0)=3$, donc (T) a pour équation $y=3x+5$

7) Soit (D) la droite d'équation $y=-x+1$

a) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(-x+1))=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-x+1))=0$. Donc (D) est une asymptote à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.

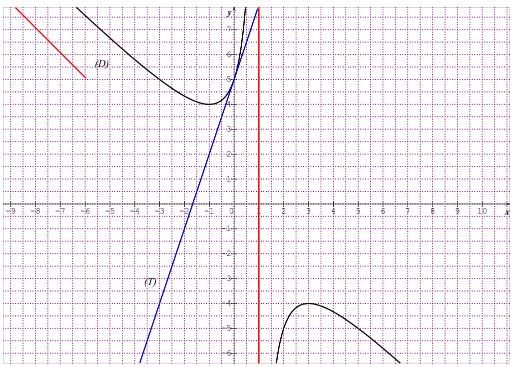
*b)* On a $f(x)-(-x+1)=\frac{4}{1-x}$ *;* pour $x\in]-\infty;1[, \frac{4}{1-x}>0$ et pour $x\in]1;+\infty[, \frac{4}{1-x}<0$ . Donc sur $]-\infty;1[$, *(C)* est au-dessus de (D) et sur $]1;+\infty[$ (C) est au-dessous de (D).

8) Soit g la fonction de IR vers IR définie par $g(x)=f(x+1)$

*a)* $g(x)=-x-\frac{4}{x}$ ; l'ensemble de définition de $g$ est $IR-\{0\}$ *;* il est symétrique par rapport à 0. De plus $g(-x)=-g(x)$. Donc g est impaire

b) Le point de coordonnées (1 ;0) est centre de symétrie de (C).

9)




**Exercice 74**

1) On a *B(x) = -0,004x² + 10x -1000.* Il suffit de résoudre l'équation *B(x) = 0.* On trouve 2396 et 104. Donc le bénéfice est nul si elle produit 2396 galettes ou 104 galettes.

2) a) Pour tout *x ; B'(x)=-0,008x + 10.*

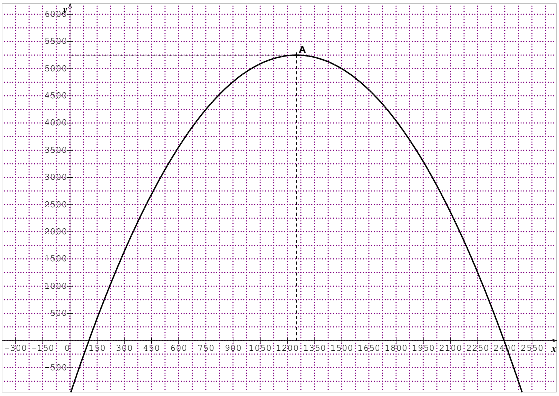
b) $B'(x)\geq 0$ pour $x\leq 1250$ *et* $B'(x)<0$ et pour $x<1250$. Donc B est croissante sur $]0;1250[$ et décroissante sur $]1250;+\infty[$.

c) Déduis-en les valeurs de x pour lesquelles le bénéfice est positif.
D’après ce qui précède, le bénéfice est positif pour un nombre de galettes compris entre 104 et 2396.

3) Etablissons le tableau de variation de $f$

| $x$ | $0$ | | $1250$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $B'(x)$ | | $+$ | | $-$ | |
| $B(x)$ | $-1000$ | $\nearrow$ | $5250$ | $\searrow$ | $+\infty$ |

4) D’après le tableau de variation, le bénéfice maximal est 5250F, il correspond à 1250 galettes.




**Exercice 75**

1) $D_f = \mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 + 1 = -x^4 + 2x^2 + 1 = f(x)$, donc la fonction $f$ est paire.
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^4 = -\infty$.
3) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -4x^3 + 4x = 4x(1 - x^2)$

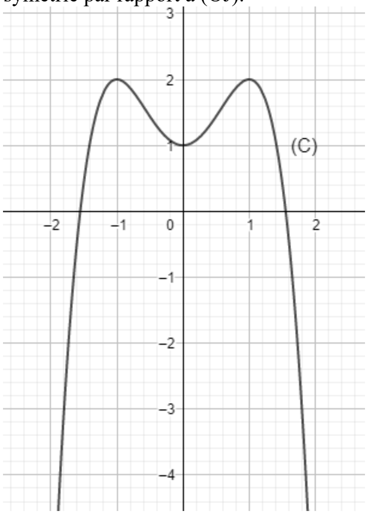
| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $1-x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$f$ est croissante sur [0 ; 1] et décroissante sur [1 ; +∞[.

4) Tableau de variation de $f$ sur [0 ; +∞[.

| $x$ | 0 | | 1 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | 1 | ↗ | 2 | ↘ | −∞ |

5) Comme $f$ est une fonction paire, la droite (OJ) est un axe de symétrie de (C).
Il suffit donc de tracer la courbe de la restriction de $f$ à [0 ; +∞[ puis de compléter par symétrie par rapport à (OJ).

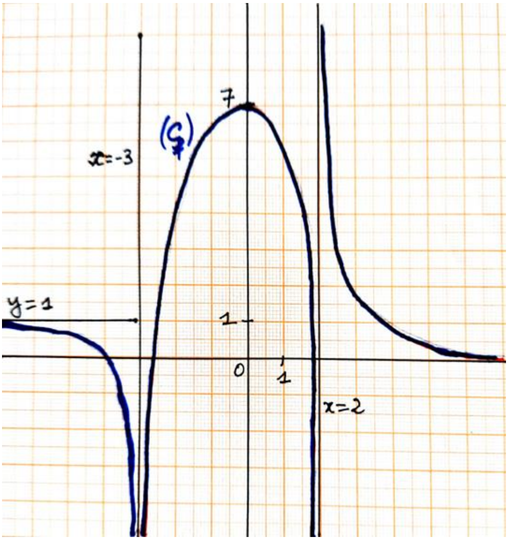



**Exercice 76**

| $x$ | −∞ | | −3 | | 0 | | 2 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | ↘ | −∞ ‖ −∞ | ↗ | 7 | ↘ | −∞ ‖ +∞ | ↘ | 0 |

1) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3 ; 2\}$.
2) $f$ est croissante sur ]–3 ; 0[, donc $f'(x) > 0$ sur ]–3 ; 0[.
$f$ est décroissante sur ]–∞ ; –3 [, sur ]0 ; 2[ et sur ] 2 ; +∞[, donc $f'(x) < 0$ sur ]–∞ ; –3 [U]0 ; 2[U] 2 ; +∞[,.
3) $\lim\limits_{-\infty} f = 1$ ; la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $(C_f)$ en –∞
$\lim\limits_{+\infty} f = 0$ ; la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $(C_f)$ en +∞
4) $\lim\limits_{-3} f = -\infty$ ; la droite d'équation $x = -3$ est asymptote verticale à $(C_f)$.
5) ) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$
La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $(C_f)$.

6) Courbe susceptible de représenter la fonction *f*.




**Exercice 77**

Dans l'énoncé, ajouter ceci à la fin de la question 2) a) : (on pourra calculer la tangente de l'angle $\widehat{HAJ}$ dans deux triangles rectangles)

1)

a) $f$ est dérivable sur I et $\forall x \in$I, $f'(x) = \frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

$f'(4) = 0$ ; $\forall x \in \left[\frac{5}{2}; 4\right[, f'(x) < 0$ et $\forall x \in ]4; 10], f'(x) > 0$

Donc $f$ est strictement décroissante sur $\left[\frac{5}{2}; 4\right[$ et strictement croissante sur $]4; 10]$

| $x$ | $\frac{5}{2}$ | | $4$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | 12,5 | $\searrow$ | 8 | $\nearrow$ | 12,5 |

b) $f$ est strictement décroissante sur $\left[\frac{5}{2}; 4\right[$ et strictement croissante sur $]4; 10]$, donc $f$ possède sur I un minimum qui est 8.

2) a) Dans le triangle JAH, rectangle en H, on a : $\tan\widehat{HAJ} = \frac{\text{HJ}}{\text{HA}} = \frac{r}{h}$

Dans le triangle AIO, rectangle en I, on a : $\tan\widehat{HAJ} = \frac{\text{IO}}{\text{AI}} = \frac{1}{\text{AI}}$

D'où $\frac{r}{h} = \frac{1}{\text{AI}}$, soit $r = \frac{h}{\text{AI}}$ ou encore $r^2 = \frac{h^2}{\text{AI}^2}$

Dans le triangle AIO, rectangle en I, on a $\text{AO}^2 = \text{IA}^2 + \text{IO}^2$, soit $(h-1)^2 = \text{AI}^2 + 1$ ou encore $\text{AI}^2 = h^2 - 2h = h(h-2)$

En définitive, l'égalité $r^2 = \frac{h^2}{\mathrm{AI}^2}$ permet d'écrire $r^2 = \frac{h}{h-2}$

b) V($h$) = $\frac{1}{3}B \times h = \frac{1}{3}\pi \times r^2 \times h = \frac{\pi}{3} \times \frac{h^2}{h-2}$

c) On a : V($h$) $= \frac{\pi}{3} \times \frac{h^2}{h-2} = \frac{\pi}{3} f(h)$. Or $f$ possède sur I un minimum, donc le volume du cône est minimal pour $h$ = 4 et ce volume est $\frac{8\pi}{3}$

**SITUATIONS COMPLEXES**

**Exercice 78**

Soit V le volume de ce conteneur.
V = L×$l$×$h$ = (11 – $l$)×$l$×(5,4 – $l$) = $l^3 - 16{,}4l^2 + 59{,}4l$.
Soit $f$ la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = x^3 - 16{,}4x^2 + 59{,}4x$.
Le volume maximal correspond au maximum de $f$ sur l'intervalle [1 ; 4].
$f$ est dérivable sur ℝ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 32{,}8x + 59{,}4$
$\Delta = 363{,}04$ ; $x_1 = \frac{32{,}8-\sqrt{363{,}04}}{6} \simeq 2{,}29$ et $x_2 = \frac{32{,}8+\sqrt{363{,}04}}{6} \simeq 8{,}64$

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |

$f$ admet un maximum relatif en $x_1$ et comme $1 \leq 2{,}29 \leq 4$, on conclut que le conteneur a un volume maximum lorsque la largeur est 2,3 m, la longueur 8,7 m et la hauteur 3,1 m.
Ce volume maximum est $f$(2,3), soit environ 62 m$^3$.

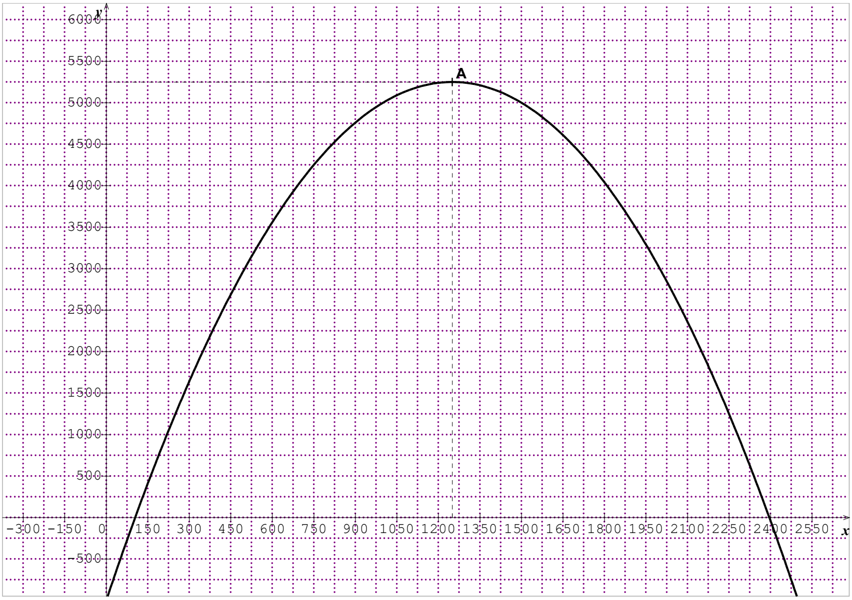
**Exercice 40**

5) On a B($x$) = -0,004x² + 10$x$ -1000. Il suffit de résoudre l'équation B(x) = 0. On trouve 2396 et 104. Donc le bénéfice est nul si elle produit 2396 galettes ou 104 galettes.
6) a) Pour tout $x$ ; B'($x$) =-0,008$x$ + 10.
   b) $\mathrm{B}'(\mathrm{x}) \geq 0$ pour $x \leq 1250$ et $\mathrm{B}'(\mathrm{x}) > 0$ et pour $\mathrm{x} < 1250$. Donc B est croissante sur $]0; 1250[$ et décroissante sur $]1250; +\infty[$.
   c) Déduis-en les valeurs de x pour lesquelles le bénéfice est positif.
   D'après ce qui précède, le bénéfice est positif pour un nombre de galettes compris entre 104 et 2396.

7) Etablissons le tableau de variation de $f$

| $x$ | *0* | | *1250* | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $B'(x)$ | | + | | - | |
| $B(x)$ | -1000 | ↗ | 5250 | ↘ | $+\infty$ |

D'après le tableau de variation, le bénéfice maximal est 5250F, il correspond à 1250 galettes (voir la courbe ci-dessous)




**Exercice 41**
Soit un rectangle d'aire de mesure S donnée et de côtés x et y. Son périmètre est :

$P = 2(x + y)$. Le périmètre est donc : $P = 2(x + \frac{S}{x})$.

On considère la fonction f dérivable et définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2x + \frac{2S}{x}$

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2(1 - \frac{S}{x^2})$, donc $f'(x) < 0$ pour $x \in \left]0; \sqrt{S}\right[$ et $f'(x) > 0$ ,pour tout $x \in \left]\sqrt{S}; +\infty\right[$ . Il en résulte que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]0; \sqrt{S}\right[$et croissante sur l'intervalle $\left]\sqrt{S}; +\infty\right[$. Enfin $f(\sqrt{S}) = 4\sqrt{S}$.

D'après ce qui précède, la fonction f admet un minimum en $\sqrt{S}$ ; ce minimum est égal à $4\sqrt{S}$.

Tous les rectangles d'aire donnée S qui ont un périmètre minimum sont des carrés de côté $\sqrt{S}$ unités. Ce périmètre minimum est : $4\sqrt{S}$ unité d'aire.

Conclusion : pour S = 400, $x = 20$, le périmètre minimum P est de 80 mètres.
La proposition du chef du village n'est donc pas la bonne, Kouadio doit choisir un terrain carré de 20 mètres de côté.

# 10 ANGLES ORIENTÉS ET TRIGONOMÉTRIE

## SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer de la compréhension du texte par tout le monde.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

| Constituants de la situation | Exemples des questions possibles | Réponses possibles des élèves |
|---|---|---|
| Contexte | Où et quand se déroule la situation ? | La situation se déroule dans un lycée au début d'une année |
| Circonstances | -Que fait le club mathématique en vue de sélectionner les meilleurs élèves des classes de première D ?<br>-Que font les élèves après leur échec sur ces deux consignes | -Le club mathématique donne deux consignes<br><br>-Ils sollicitent leurs professeurs de mathématiques |
| Tache | Que font les professeurs de mathématiques ? | Ils invitent les élèves à approfondir les notions d'angles orientés, les formules de trigonométrie, les équations et inéquations trigonométriques |

Le professeur utilisera la tache énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation et présentera le plan de la leçon.

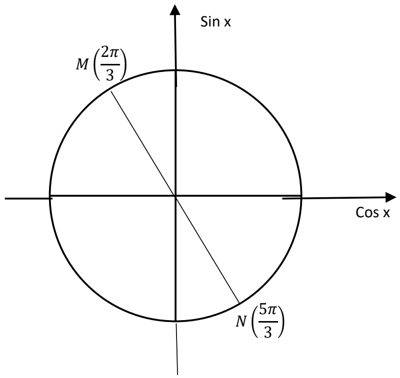
## DECOUVERTE DES HABILETES

**Activité 1**

1- Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{\pi}{4}$ ; Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}}\right)=\frac{\pi}{2}$ ; Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OD}}\right)=\pi$ ;
Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OF}}\right)=-\frac{\pi}{2}$
Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OF}}\right)=-\frac{\pi}{4}$

2- On a : $\frac{\pi}{4}$ ; $\frac{\pi}{2}$ ; $-\frac{\pi}{2}$ $et$ $-\frac{\pi}{4}$

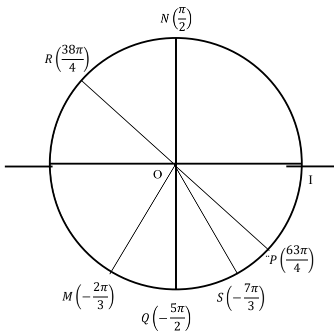
3-4)




**Exercice de fixation 1**

Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{4}$ ; Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ; Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE}}\right) = \frac{7\pi}{12}$ ;
Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CB}}\right) = \frac{\pi}{3}$

**Exercice de fixation 2**




**Activité 2**

1- Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OK}}\right) = 0$ ; Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OD}}\right) = \pi$ ; Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}}\right) = \frac{\pi}{2}$ ; Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OP}}\right) = -\frac{\pi}{2}$

2-

- L'angle orienté nul a pour mesure 0.
- L'angle orienté droit a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ $ou$ $-\frac{\pi}{2}$.
- L'angle orienté plat a pour mesure $\pi$.

**Exercice de fixation 3**

L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{KL};\overrightarrow{KP}})$ est un angle orienté nul.

L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{LM};\overrightarrow{LP}})$ est un angle orienté droit.

L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{LP};\overrightarrow{LK}})$ est un angle orienté plat.

**Activité 3**

1-a) $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}}) = -\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OF}})$

b) Les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}})$ $et$ $(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OF}})$ sont opposés

2- $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}}) = \frac{3\pi}{4}$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}}) + \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

On a : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}}) + \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}})$

3- $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OD}})$ - $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}}) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

**Exercice de fixation 4**

1- $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KS};\overrightarrow{KD}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KS};\overrightarrow{KP}}) + \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KP};\overrightarrow{KD}})$

$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{KS};\overrightarrow{KD}}) = -\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$

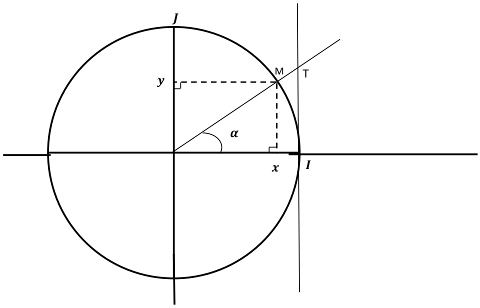
2- L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{KS};\overrightarrow{KD}})$ est un angle droit donc les droites (KS) et (KD) sont perpendiculaires.

**Exercice de fixation 5**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\text{Mes}(\hat{\alpha})$ | $\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{11\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{8}$ |
| $\text{Mes}(\hat{\beta})$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $-\frac{7\pi}{12}$ | $\frac{5\pi}{24}$ |
| $\text{Mes}(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{5\pi}{6}$ |
| $\text{Mes}(\hat{\alpha} - \hat{\beta})$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{12}$ |

**Activité 4**

1-a)



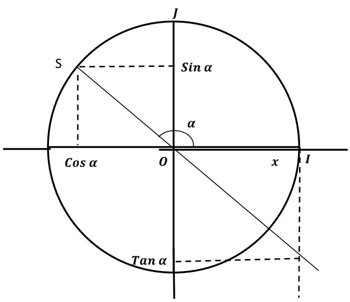

b) L'ordonnée de M correspond au sinus de $\alpha$
L'abscisse de M correspond au moins de $\alpha$

2-a) L'abscisse de T est OI et l'ordonnée est TI
c) Tan x existe si et seulement si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ avec \ k \in \mathbb{Z}$.

**Exercice de fixation 6**

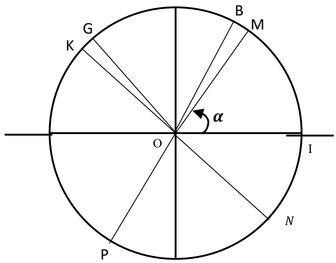
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Mes($\hat{\alpha}$) | $\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{6}$ |
| Cos($\hat{\alpha}$) | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| Sin($\hat{\alpha}$) | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| Tan($\hat{\alpha}$) | $\sqrt{3}$ | -1 | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

**Exercice de fixation 7**



**Activité 5**

1-a)
2-a)
3-a)
4-a)
5-a)




1-b) $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ 1-c) $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$ 1-d) $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

2-b) $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$ 2-c) $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$ 2-d) $\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$

3-b) $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ 3-c) $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$ 3-d) $\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$

4-b) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$ 4-c) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$ 4-d) $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$

5-b) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$ 5-c) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ 5-d) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$

**Exercice de fixation 8**

1-C 2-B 3-C 4-B 5-A 6-A 7-A 8-A 9-C 10-B 11-B
12-A 13-A 14-C 15-A

**Exercice de fixation 9**

$\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ ; $\sin(-\frac{\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ; $\tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$

$\cos(\frac{4\pi}{3}) = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ ; $\sin(\frac{4\pi}{3}) = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;
$\tan(\frac{4\pi}{3}) = \tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

$\cos(\frac{2\pi}{3}) = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ ; $\sin(\frac{2\pi}{3}) = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;
$\tan(\frac{2\pi}{3}) = \tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

$\cos(\frac{5\pi}{6}) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; $\sin(\frac{5\pi}{6}) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ;
$\tan(\frac{5\pi}{6}) = \tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

**Activité 6**

1- $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}}\right) + \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right)$

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON}}\right) - \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}}\right)$

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right) = \alpha - \beta$

2- $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \|\overrightarrow{OM}\| . \|\overrightarrow{ON}\| . \text{Cos}\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right)$

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = 1 \text{ x } 1 \text{ x } \cos(\alpha - \beta)$

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos(\alpha - \beta)$

3- a) $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos\beta.\cos\alpha + \sin\beta.\cos\alpha$

4- Comme $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos(\alpha - \beta)$ et $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = cos\,\beta.cos\,\alpha + sin\,\beta.cos\,\alpha$ , on a :

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\beta.\cos\alpha + \sin\beta.\cos\alpha$

5- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + c)$

$= \cos\alpha\cos(-c) + \sin\alpha.\sin(-c)$

$\cos(\alpha + c) = \cos\alpha.\cos c - \sin\alpha.\sin c$

6- a) $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right]$

$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right]$

$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

b) $\sin(\alpha - c) = \sin\alpha\cos(-c) + \cos\alpha\sin(-c)$

$\sin(\alpha - c) = \sin\alpha\cos \text{c} - \cos\alpha\sin c$

**Exercice de fixation 10**

| Colonne A |
|---|
| Cos (a-b) = |
| Cos (a+b) = |
| Sin (a-b) = |
| Sin (a+b) = |

| Colonne B |
|---|
| $\cos a\cos b - \sin a\sin b$ |
| $\sin a\cos b - \sin b\cos a$ |
| $\sin a\cos b + \sin b\cos a$ |
| $\cos a\cos b + \sin a\sin b$ |

**Exercice de fixation 11**

- $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$

  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ x } \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{3} \text{ x } \sin\frac{\pi}{4}$

  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

- $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$

  $= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$

  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$

  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

- $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

  $= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

  $= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

- $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

  $= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$

  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

**Activité 7**

1. $\alpha + \beta = 2\alpha$
2. $\cos(2\alpha) = \cos\alpha.\cos\alpha - \sin\alpha.\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
3. $\sin(2\alpha) = \sin\alpha.\cos\alpha + \sin\alpha.\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

**Exercice de fixation 12**

$\cos(\frac{5\pi}{6}) = \cos\left(2 \times \frac{5\pi}{12}\right) = \cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(\frac{5\pi}{6}) = \sin\left(2 \times \frac{5\pi}{12}\right) = 2.\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right).\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{2}$

**Activité 8**

1. $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos(2\alpha)$ et $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1$
   On a : $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$
   Donc : $\cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = \cos 2\alpha$
   $$2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$$
   $$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

2. $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$
   $1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$
   $$1 - 2\sin^2\alpha = \cos 2\alpha$$
   $$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$$
   $$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

**Exercice de fixation 13**

$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$; $\quad \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

**Activité 9**

*2.a)* $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$ *et* $\cos(a+B) = \cos a\cos B - \sin a\sin B$

*b) on a:* $\alpha = \frac{p+q}{2}$ *et* $\beta = \frac{p-q}{2}$

*c)* $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

*3.a)* $\cos(\alpha+\beta) - \cos(a+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\quad Cos(\alpha+\beta) - \sin(\alpha+\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

*b)* $a = \frac{p+q}{2}$ *et* $B = \frac{p-q}{2}$

*c)* $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

*4.a)* $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta + \sin\alpha\cos\beta$

$\quad \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\beta\cos\alpha$

*b)* $\alpha = \frac{p+q}{2}$ *et* $\beta = \frac{p-q}{2}$

*c)* $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

**Exercice 14**

a) $cos\ (7x) + cos\ (3x) = 2\,cos\left(\frac{7x+3x}{2}\right) cos\left(\frac{7x-3x}{2}\right)$

$cos\ (7x) + cos\ (3x) = 2\,cos\ (5x)\,cos(2x)$

*b)* $cos\ (10x) - cos(5x) = -2\,sin\left(\frac{10x+5x}{2}\right) sin\left(\frac{10x-5x}{2}\right)$

$cos(10x) - cos\ (5x) = -\ 2\,sin\left(\frac{15x}{2}\right) sin\left(\frac{5x}{2}\right)$

*c)* $sin(x) + sin\ (13x) = 2\,sin\left(\frac{x+13x}{2}\right) cos\left(\frac{x-13x}{2}\right)$

$sin(x) + sin(13x) = 2\,sin(7x)\,cos(6x)$

*d)* $sin(9x) - sin(6x) = 2\,sin\left(\frac{9x-6x}{2}\right) cos\left(\frac{9x+6x}{2}\right)$

$sin(9x) - sin(6x) = 2\,sin\left(\frac{3x}{2}\right) cos\left(\frac{15x}{2}\right)$

**Activité 10**

*1.a)* $cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta) = 2\,cos\,\alpha\,cos\,\beta$

*b)* $cos\,\alpha\,cos\,\beta = \frac{cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)}{2}$

*2.a)* $cos(\alpha+\beta) - cos(\alpha+\beta) = -2\,sin\,\alpha\,sin\,\beta$

*b)* $sin\,\alpha\,sin\,\beta = \frac{cos(\alpha-\beta)\,cos(\alpha+\beta)}{2}$

*3.a)* $sin(\alpha+\beta) - sin(\alpha+\beta) = 2\,sin\,\alpha\,cos\,\beta$

*b)* $sin\,\alpha\,cos\,\beta = \frac{sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta)}{2}$

*4.a)* $sin(\alpha+\beta) - sin(\alpha-\beta) = 2\,sin\,\beta\,cos\,\alpha$

*b)* $sin\,\beta\,cos\,\alpha = \frac{sin(\alpha+\beta)-sin(\alpha-\beta)}{2}$

**Exercice 15**

a) $sin(x)\,cos(3x) = \frac{sin(x+3x)+sin(x-3x)}{2}$

$sin(x)\,cos(3x) = \frac{sin(4x)+sin(-2x)}{2}$

*b)* $sin(2x)\,cos(5x) = \frac{cos(2x-5x)\,cos(2x+5x)}{2}$

$sin(2x)\,cos(5x) = \frac{cos(-3)-cos(7x)}{2} = \frac{cos(3x)-cos(7x)}{2}$

*c)* $cos(7x)\,cos(3x) = \frac{cos(7x+3x)+cos(7x-3x)}{2}$

$cos(7x)\,cos(3x) = \frac{cos(10x)+cos(4x)}{2}$

**Activité 11**

Partie A

1) $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$

2.a) on a:

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right) = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right) = a\cos x + b\cos x$$

D'où $A = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$

b) $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x$

3) $A = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$

Partie B

1) $AC = \sqrt{a^2+b^2}$ ; $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2) $A = a\cos x + b\sin x$

$A = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)\sqrt{a^2+b^2}$

$A = \sqrt{a^2+b^2}\ (\sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x\ )$

$A = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$

**Exercice de fixation 16**

| Colonne A | Colonne B |
|---|---|
| $\sqrt{3}\cos x + \sin x$ | $2\sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ |
| $3\cos x + \sqrt{3}\sin x$ | $\cos\left(-\frac{\pi}{3} - x\right)$ |
| $\cos x - \sqrt{3}\sin x$ | $2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ |
| $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$ | $2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ |

**Activité 12**

1) $f$ est définie sur $R$

2.a) $\forall\, x \in R$, $x + 2\pi \in R$

On a : $\cos(x+2\pi) = \cos x$ donc $f$ est periodique de periode 2π

b) $\forall\, x \in R$, $-x \in R$

$\cos(-x) = \cos x$ donc la fonction $f$ est paire .

3.a) $\forall\, x \in [0;\pi],\ f'(x) = -\sin x$

$\forall\, x\ \in [0,\pi],\ f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0,\pi]$

b)

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | $0$ | - | |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ |

4.a)

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |

b) construction : prendre la figure du récapitulatif (Activité 12)

**Exercice de fixation 17**

1-F, 2-F, 3-F, 4-V

**Activité 13**

1) $f$ est définie sur $R$

2.a) $\forall x\ \in\ R\ ,\ \ x + 2\pi\ \in\ R$ et $sin\,(x\ +\ 2\pi)\ =\ sin\ x$ donc f est périodique de période $2\pi$

b) $\forall x \in R,\ \ -x \in R$ et $sin(-x) = -sin(x)$ donc $f$ est impaire.

3.a) $\forall x\ \in [0;\pi],\ f'(x) =\ cos\ x$

$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}[, f'(x) > 0\ \ et\ \ \forall x\ \in [\frac{\pi}{2},\pi],\ \ f'(x) < 0.$

$f$ est strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et strictement décroissant sur $]\frac{\pi}{2},\pi]$.

b)

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

4.a)

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |

b) construction : prendre la figure du récapitulatif (activité 13)

**Exercice de fixation 18**

$\forall\, x \in [0;\pi], f'(x) = -\cos x$

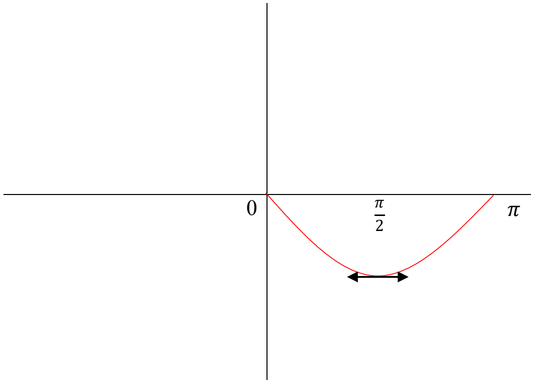
$\forall\, x \in [0;\frac{\pi}{2}[,\ f'(x) < 0$ et $\forall\, x \in ]\frac{\pi}{2};\pi], f'(x) > 0$

$f$ est strictement décroissante sur $[0;\frac{\pi}{2}[$ et strictement croissante sur $]\frac{\pi}{2};\pi]$.

Tableau de variation

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ |

Représentation graphique




**Activité 14**

1) La fonction $f$ est définie pour tout nombre réel $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \ k \in Z$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , $k \in Z$

2.a) $\forall x \in \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $\forall x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$ on a $x + \pi \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $x + \pi \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$ de plus $\tan\ (x + \pi) = \tan x$ donc la fonction $f$ est périodique de période $\pi$

b) $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ on\ a - x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ et - x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

On a $\tan(-x) = -\tan x$ donc $f$ est une fonction impaire.

3.a) $\forall\ x \in\ [0;\frac{\pi}{2}[, f'(x) = 1 + \tan^2 x$

$\forall\ x \in\ [0;\frac{\pi}{2}[, f'(x) > 0$ donc $f$ est strictement croissante sur $[0;\frac{\pi}{2}[$

b) tableau de variation

| $x$ | $0$ $\quad\quad\quad\quad$ $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0 \nearrow -\infty$ |

4.a)

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tan x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ |

b) construction : prendre la figure du récapitulatif (activité 14)

**Exercice de fixation 19**

1-F, 2-F, 3-V, 4-F

**Activité 15**

1) $\forall\, x \in R, -1 \leq cos\ x \leq 1$ donc si $b > 1$ ou $b < -1$ l'équation $cos\ x = b$ n'admet pas de solution
2) En utilisant le cercle trigonométrique, on constate que :
$B = cos\ \alpha$ et $b = cos(-\alpha)$
Etant donné que pour tout nombre réel $x$, $cos(x + 2k\pi) = \cos x$,
On a : $cos\ x = b \iff cos\ x = cos(a + 2k\pi)$ ou $cos\ x = cos(-\alpha + 2k\pi)$ avec $k \in Z$
$cos\ x = b \iff x = \alpha + 2k\pi$ avec $k \in Z$

**Exercice de fixation20**

(E1) : $cos\ x = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} \in [-1\,;1]$ donc l'équation admet les solutions $cos\ x = cos\ \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in Z$

$S_R = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,;\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z\right\}$

(E2) : $cos\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; $\frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1\,;1]$ donc l'équation admet les solutions $\cos x = cos\ \frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in Z$

$S_R = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\,;\ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z\right\}$

(E3) : $cos\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1\,;1]$ donc l'équation admet les solutions $cos\ x = cos\frac{\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in Z$

$S_R = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi\,;\ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z\right\}$

(E4) : $cos\ x = \frac{4}{3}$; $\frac{4}{3} \notin [-1\,;1]$ donc l'équation n'admet pas de solutions

$S_R = \emptyset$

**Activité 16**

1) $\forall\, x\ \in R, -1 \leq \sin x \leq 1$ donc si $b > 1$ ou $b < -1$, l'équation $sin\ x = b$ n'admet pas de solutions.
2) En utilisant le cercle trigonométrique, on constate que :
   $b = \sin\alpha$ et $b = sin(\pi - \alpha)$

Etant donné que pour tout nombre réel $x, \sin(x + 2k\pi) = \sin x$,

On a : $\sin x = \ b\ <=> \sin x = \sin(\alpha + 2k\pi)$ ou $\sin x = (\pi - \alpha + 2k\pi), k \in Z$

**Exercice de fixation 21**

(E1) : $\sin x = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\ \in \left[-1\,;1\right]$ donc l'équation admet des solutions $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ou\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ou\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z$

$S_R = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z\right\}$

(E2) : $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1; 1]$ donc l'équation admet de solutions $\sin x = \sin\frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ou\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ou\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$

$S_R = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z\right\}$

(E3) : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1; 1]$ donc l'équation admet de solutions $\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ou\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ou\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$

$S_R = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z\right\}$

**Activité 17**

En utilisant le cercle trigonométrique, on constate que $c = \tan\alpha$

Etant donné que pour tout nombre réel $x$, $\tan(x + k\pi) = \tan x$, on a

$\tan x = b <=> \tan x = \tan(\alpha + k\pi)\,, k \in Z$

$\tan x = b\ \ <=>\ \ x = \alpha + k\pi, k\ \in\ Z$

- **Corrigés des exercices de fixation**

**Exercice de fixation 22**

(E1) : $\tan x = \sqrt{3} <=> \tan x = \tan\frac{\pi}{3}$

SR= $\left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z\right\}$

(E2) : $\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 <=> \tan(x - \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{4}$

SR= $\left\{\frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in Z\right\}$

**Activité 18**

1) $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x)$ $avec$ $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et

$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$

2.a) $a\cos x + b\sin x + c = 0 <=> \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha) + c = 0$

$\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha) = -c$

$a\cos x + b\sin x + c = 0 <=> \cos(x-\alpha) = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

b) pour que (E) ait au moins une solution il faudrait et il suffirait que $\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1\,;1]$

3) $(E) <=> \cos(x-\alpha) = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

- Il faut trouver le réel β tel que $\frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta$
- Ensuite résoudre l'équation $\cos(x-\alpha) = \cos\beta$
- On obtient donc $x = \beta + \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\beta + \alpha + 2k\pi, k \in Z$

**Exercice de fixation 23**

(E1) : $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1 <=> 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

$<=> \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$<=> \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$<=> x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ou \; x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,, k \in Z$

$<=> x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ou \; x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\,, k \in Z$

SR= $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z\}$

(E2) : $3\cos x + \sqrt{3}\sin x = 3 \iff 2\sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 3$

$$\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

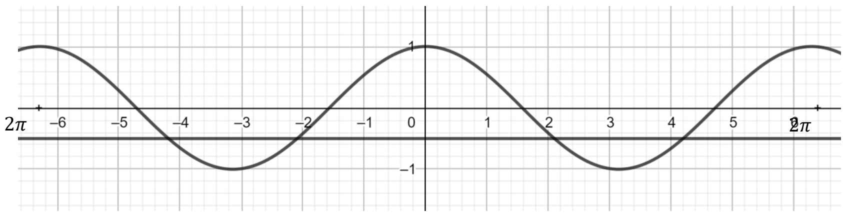
$$\iff x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ , k \in Z$$

$$\iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi\ , k \in Z$$

$S_R = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ; 2k\pi, k \in Z\}$

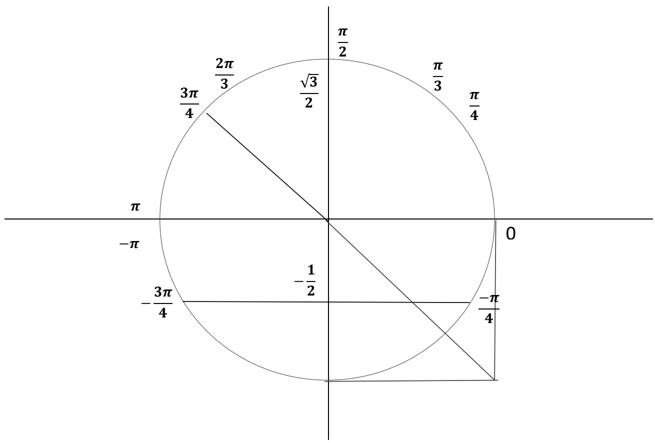
**Activité 19**

1.




2. a)

b)




c) ($I_1$) : $S = \left[-\frac{5\pi}{6}\ ; -\frac{\pi}{6}\right]$

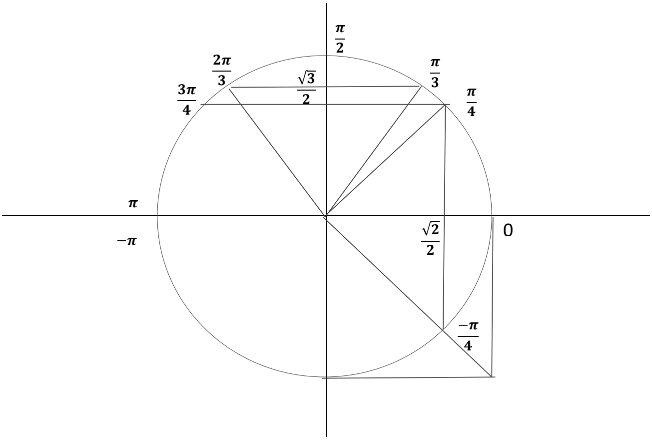
($I_2$) : $S = \left[\frac{7\pi}{6}\ ; \frac{11\pi}{6}\right]$

$(I_3) : S = \left[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \, ; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right] , k \in \mathbb{Z}$

3 .b) S= $\{-\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\}$

e) $S = \left]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left]-\frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{4}\right]$

**Exercice 24**




$(I_1)$ : $S = ]-\pi \, ; \frac{\pi}{3}] \, U \, [\frac{2\pi}{3} ; \pi]$

$(I_2)$ : $S = ]-\pi \, ; -\frac{\pi}{4}[ \, U \, ]\frac{\pi}{4} \, ; \pi]$

$(I_3)$ : $S = ]-\frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{4}] \, U \, ]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{4}]$

**DES QUESTIONS D'EVALUATIONS**

**Question 1 : Comment déterminer la mesure principale d'un angle orienté à partir d'une de ses mesures ?**

**Exercice non corrigé**

$\frac{75\,\pi}{4} - 18\,\pi = \frac{3\,\pi}{4}$

la mesure principale de $\frac{75\,\pi}{4}$ est $\frac{3\,\pi}{4}$

**Exercice non corrigé**

$-\frac{125\,\pi}{7} + 17\,\pi = \frac{-6\,\pi}{7}$

la mesure principale de $-\frac{125\,\pi}{7}$ est $\frac{-6\,\pi}{7}$

**Question 2 : comment résoudre des équations du types $\cos x = a$ et $\sin x = a, a \in R$ ?**

**Exercice non corrigé**

($E_1$) : $\sin x = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2} \notin [-1; 1]$ donc l'équation ($E_1$) n'admet pas des solutions

($E_2$) :$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1; 1]$ donc l'équation ($E_2$) admet des solutions. De plus $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ *équivaut* à $\cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ *équivaut* à $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z$

d'où $S_R = \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z\}$

**Question 3 : comment résoudre une équation de type $a\cos x + b\sin x = c$ ?**

**Exercice non corrigé**

On a $\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2$ donc $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right]$

On a $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *et* $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right]$

$\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

D'où $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = 1$ *équivaut* à $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ *équivaut* à $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ *équivaut* à $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ *équivaut* à $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ *ou* $x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ *équivaut* à $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ *ou* $x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in Z$

Ainsi $S_R = \{\frac{\pi}{12} + 2k\pi\ ,\ -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in Z\ \}$

**Question 4 : comment résoudre les équations du type $\tan x = b$ ?**

**Exercices non corrigé**

$\sqrt{3}\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ *équivaut* à $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sqrt{3}\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ *équivaut* à $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan(\frac{\pi}{6})$

$\sqrt{3}\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ *équivaut* à $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$

$\sqrt{3}\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ *équivaut* à $x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z$

$\sqrt{3}\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ *équivaut* à $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$

$S_R = \{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z\}$

## MES SEANCES D'EXERCICES

## EXERCICES DE FIXATION

### Exercice 1

Les mesures principales son :$\frac{3\pi}{5}$ ; $\frac{2\pi}{7}$ ; 0

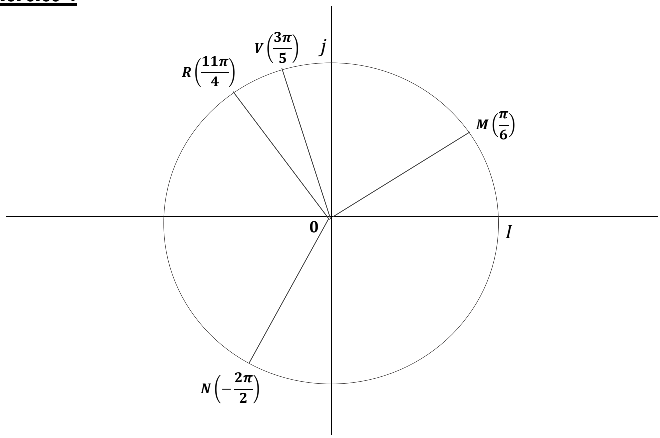
### Exercice 2

1-F 2-F 3-V

### Exercice 3

Cinq autres mesures de l'angles $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ sont : $-\frac{7\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{19}{6}$; $\frac{29\pi}{6}$ $et$ $\frac{41\pi}{6}$

### Exercice 4

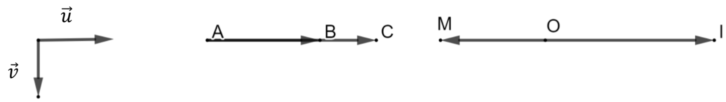



### Exercice 5

| Angle orienté |
|---|
| Angle orienté nul |
| Angle orienté droit direct |
| Angle orienté droit indirect |
| Angle orienté plat direct |

| Mesure principale |
|---|
| $-\pi$ |
| $-\frac{\pi}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ |
| 0 |
| $\pi$ |

**Exercice 6**




**Exercice 7**

1-V 2-F 3-V 4-F

**Exercice 8**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Une mesure de $(\hat{\alpha})$ | $-\frac{2\pi}{3}$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\pi$ |
| Une mesure de $(\hat{\beta})$ | $-\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{12}$ | $-\frac{5\pi}{6}$ |
| Une mesure de $(\hat{\alpha}+\hat{\beta})$ | $-\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{6}$ |
| Une mesure de $(\hat{\alpha}-\hat{\beta})$ | $\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ |

**Exercice 9**

| Angles | Mesures d'angles | | | |
|---|---|---|---|---|
| $Mes(\hat{\alpha})$ | 0 | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{\pi}{5}$ |
| mes $(\hat{\beta})$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{6}$ |
| Mes $(\hat{\alpha}+\hat{\beta})$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{17\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{31\pi}{30}$ |
| Mes $(\hat{\alpha}-\hat{\beta})$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{11\pi}{4}$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $-\frac{19\pi}{30}$ |
| Mes $(-\hat{\alpha})$ | 0 | $-\frac{3\pi}{4}$ | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{5}$ |
| Mes$(-\hat{\beta})$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{7\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $-\frac{5\pi}{6}$ |

**Exercice 10**

$* \ mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}) + mes(\widehat{OB,\overrightarrow{OD}})$

$mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

$* \ mes(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}) = mes(\widehat{OC,\overrightarrow{OB}}) + mes(\widehat{OB,\overrightarrow{OD}})$

$mes(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

**Exercice 11**

1-B   2-C   3-A   4-C

**Exercice 12**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ | 0 | $-\frac{2\pi}{5}$ | $\frac{3\pi}{8}$ | $-\pi$ |
| $2mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ | 0 | $-\frac{4\pi}{5}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $-2\pi$ |
| $mes(\widehat{-3\vec{u},\vec{v}})$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{5}$ | $\frac{11\pi}{8}$ | 0 |
| $mes(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$ | 0 | $\frac{2\pi}{5}$ | $-\frac{3\pi}{8}$ | $\pi$ |
| $mes\left(\widehat{-\frac{1}{2}\vec{u},-\frac{1}{2}\vec{v}}\right)$ | 0 | $\frac{2\pi}{5}$ | $\frac{3\pi}{8}$ | $-\pi$ |

**Exercice 13**

$mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}) + mes(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) + mes(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) + mes(\widehat{BC,\overrightarrow{BA}}) + mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}})$

$$= mes(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + \widehat{mes}(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}}) + mes(\widehat{BC,\overrightarrow{BA}})$$

$$= mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}) + mes(BC,\overrightarrow{BA})$$

$$= mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}})$$

$mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}) + mes(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) + mes(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = \pi$

**Exercice 14**

1-F   2-V   3-F   4-F   5-V   6-F   7-F   8-V   9-V   10-F

**Exercice 15**

| Angle de mesure $\alpha$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $-\frac{2\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 0 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ |
| $\tan\alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | | 0 | $\sqrt{3}$ |

**Exercice 16**

1) On sait que $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \quad donc \;\; cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha$

$cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2$

$cos^2\alpha = \frac{24}{25}$

$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad ou \quad \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

Ainsi $\tan\alpha = \frac{\sqrt{6}}{12} \quad ou \quad \tan\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{12}$

2) On sait que $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \quad donc \;\; sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$

$sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{16}$

$sin^2\alpha = \frac{15}{16}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \;\; ou \;\; \sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

$Ainsi\,\tan\alpha = -\sqrt{15} \quad ou \quad \tan\alpha = \sqrt{15}$

**Exercice 17**

a) $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ ; b) $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ ; c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$

d) $\sin(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$ ; e) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$

**Exercice 18**

a) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ ; b) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$ ; d) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$ ; e) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$

**Exercice 19**

a) $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ ; b) $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$

c) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$ ; d) $\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$ ; e) $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$

**Exercice 20**

$A = 5\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\alpha + 3\cos(\pi + \alpha) + 3\cos(\pi - \alpha)$

$A = 5\cos\alpha + \cos\alpha - 3\cos\alpha - 3\cos\alpha$

$A = 6\cos\alpha - 6\cos\alpha$

$A = 0$

**Exercice 21**

$$B = \cos x - \sin\left(-x - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos x - \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x - \cos(-x) = 0$$

**Exercice 22**

3. V ; 4. F ; 5. F

**Exercice 23**

1) $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12} \quad et \quad \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$

2) $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

**Exercice 24**

$A=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$A=\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x$

$A=\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

$B=\cos\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{7\pi}{2}\right)$

$B=\cos x\cos\frac{5\pi}{6}-\sin x\sin\frac{5\pi}{6}+\cos x\cos\frac{7\pi}{2}-\sin x\sin\frac{7\pi}{2}$

$B=\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x+\sin x$

$B=\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

Ainsi $A=B$

**Exercice 25**

1.F ; 2.F ; 3. V ; 4. V ; 5. V

**Exercice 26**

1) On a : $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
$cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha$
$cos^2\alpha = 1 - \frac{3}{4}$
$cos^2\alpha = \frac{1}{4}$
$donc \cos\alpha = \frac{1}{2} \quad ou \quad \cos\alpha = -\frac{1}{2}$

$* \cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sin^2\alpha$
$\cos(2\alpha) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$
$\cos(2\alpha) = -\frac{1}{2}$
$* \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\sin(2\alpha) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \quad ou \quad \sin(2\alpha) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$
$\sin(2\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ou \quad \sin(2\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\tan(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}$
$\tan(2\alpha) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} \quad ou \quad \tan(2\alpha) = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}$
$\tan(2\alpha) = -\sqrt{3} \quad ou \quad \tan(2\alpha) = \sqrt{3}$

**Exercice 27**

1. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 1 = \frac{1}{9}$
On a $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{1}{4}$ donc $sin\,\alpha = \frac{2}{3}$ ou $cos\,\alpha = -\frac{2}{3}$
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$ ou $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = -2 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{3} = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$
2. $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

1) $\tan 2\alpha = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{9}}{\frac{1}{9}} = 4\sqrt{5}$ ou $\tan 2\alpha = -\frac{\frac{4\sqrt{5}}{9}}{\frac{1}{9}} = -4\sqrt{5}$ On a : $sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$
$sin^2\alpha = 1 - \frac{5}{9}$
$sin^2\alpha = \frac{4}{9}$
$* \cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sin^2\alpha$
$\cos(2\alpha) = \frac{5}{9} - \frac{4}{9}$
$\cos(2\alpha) = \frac{1}{9}$
$* \sin(2\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha$

$\sin(2\alpha) = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{3}$ ou $\sin(2\alpha) = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right)$

$\sin(2\alpha) = \frac{4\sqrt{5}}{9}$ ou $\sin(2\alpha) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$

2) $\tan(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}$

$\tan(2\alpha) = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{9}}{\frac{1}{9}}$ *ou* $\tan(2\alpha) = \frac{-\frac{4\sqrt{5}}{9}}{\frac{1}{9}}$

$\tan(2\alpha) = 4\sqrt{5}$ *ou* $\tan(2\alpha) = -4\sqrt{5}$

**Exercice 28**

$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ et $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

**Exercice 29**

1. $\cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{2} = \frac{-\sqrt{3}+2}{4}$
2. $\cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{3}+2}{4}$ donc $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

**Exercice 30**

$*\ on\ a\ \sin(3x) = \sin(2x + x)$

$= \sin(2x)\cos x + \sin x \cos(2x)$

$= 2\sin x\, cos^2 x + \sin x\,(cos^2 x - sin^2 x)$

$= 2\sin x\,(1 - sin^2 x) + \sin x - 2\, sin^3 x$

$\sin(3x) = 3\sin x + 4\, sin^3 x \quad donc \quad sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x)$

$*\ on\ a\ \cos(3x) = \cos(2x + x)$

$= \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x$

$= (cos^2 x - sin^2 x)\cos x - 2\, sin^2 x \cos x$

$= (2cos^2 x - 1)\cos x - 2(1 - cos^2 x)\cos x$

$= 2coc^3 x - \cos x - 2\cos x + 2cos^3 x$

$\cos(3x) = 4cos^3 x - 3\cos x \quad donc \quad cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos(3x)$

**Exercice 31**

1-V 2-F 3-F 4-F

**Exercice 32**

$A = \sin(2x) - \sin(5x)$

$A = 2\sin\left(\frac{2x-5x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+5x}{2}\right)$

$A = 2\sin\left(\frac{-3}{5}\right)\cos\left(\frac{7x}{2}\right)$

$A = -2\sin\left(\frac{3}{5}\right)\cos\left(\frac{7x}{2}\right)$

$B = \cos x + \cos(3x)$

$B = 2\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)$

$B = 2\cos(2x)\cos(-x)$

$B = 2\cos(2x)\cos x$

$C = \sin(4x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$C = 2\sin\left(\frac{4x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{4x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)$

$C = 2\sin\left(\frac{8x+\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{8x-\pi}{4}\right)$

$C = 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

$D = \cos(2x) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$D = -2\cos\left(\frac{2x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-\frac{\pi}{3}}{2}\right)$

$D = -2\cos\left(\frac{6x+\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{6x-\pi}{6}\right)$

$D = -2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

**Exercice 33**

1-V 2-F 3-V

**Exercice 34**

$A = \cos(2x)\cos(3x)$

$A = \frac{1}{2}[\cos(2x+3x) + \cos(2x-3x)]$

$A = \frac{1}{2}[\cos(5x) + \cos(-x)]$

$A = \frac{1}{2}[\cos(5x) + \cos x]$

$B = \sin x\cos(2x)$

$B = \frac{1}{2}[\sin(x+2x) - \sin(x-2x)]$

$B = \frac{1}{2}[\sin(3x) - \sin(-x)]$

$B = \frac{1}{2}[\sin(3x) + \sin(x)]$

$C = \sin(4x)\sin(5x)$

$C = \frac{1}{2}[\cos(4x-5x) - \cos(4x+5x)]$

$C = \frac{1}{2}[\cos(-x) - \cos(9x)]$

$C = \frac{1}{2}[\cos x - \cos(9x)]$

**Exercice 35**

1) $D = \sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x$

$D = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$

$D = 2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4} + \sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$D = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

2) $E = \sqrt{3}\cos x + 3\sin x$

$E = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$

$E = 2\sqrt{3}\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)$

$E = 2\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

3) $F = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

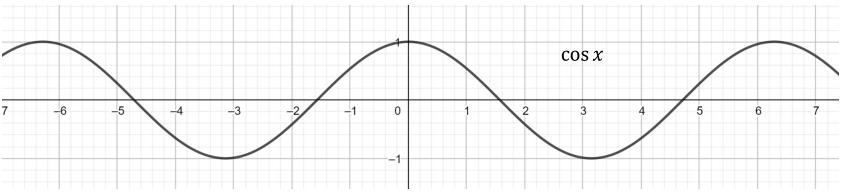
$F = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos x + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin x$

$F = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

**Exercice 36**

1. Vrai 2. Vrai 3. Faux 4. Vrai

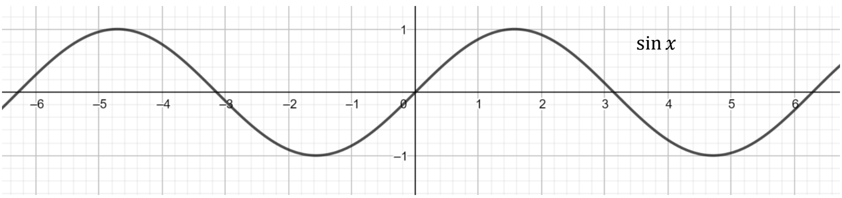
**Exercice 37**




**Exercice 38**

1. Vrai 2. Faux 3. Faux 4. Vrai

**Exercice 39**

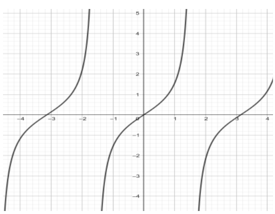



**Exercice 40**

1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Faux ; 5. Faux

**Exercice 41**

Reprendre la courbe page 11



**Exercice 42**

(E1) : $\cos x = \cos\frac{\pi}{3} <=> x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad ou \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in Z$

$S_R = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z\right\}$

(E2) : $\cos x = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) <=> x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ ou \ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in Z$

$S_R = \left\{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z\right\}$

(E3) : $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} <=> \cos x = \cos\frac{\pi}{4}$

$<=> x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ ou \ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in Z$

$S_R = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in Z\right\}$

(E4) : $-\cos x = -\frac{1}{2} <=> \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$<=> x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ ou \ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in Z$

$S_R = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in Z\right\}$

(E5) : $\cos x = -3 ; \quad S_R = \emptyset \ car - 3 \ n'appartient \ pas$ à $[-1; 1]$

**Exercice 43**

(E1) : $S_R = \{2k\pi, k \in Z\}$

(E2) : $S_R = \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in Z\right\}$

(E3) : $S_R = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in Z\right\}$

(E4) : $S_R = \emptyset$

**Exercice 44**

(E1) : $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) <=> x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ou \ \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in Z$

$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) <=> x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ou \ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in Z$

$S_R = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in Z\right\}$

(E2) : $\sin x = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) <=> x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ ou \ x = \pi + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in Z$

$<=> x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ ou \ x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in Z$

$S_R = \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in Z\right\}$

(E3) : $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} <=> \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$<=> x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ou \quad x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in Z$

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} <=> x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ou \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in Z$

$S_R = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ;\ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ \ k \in Z\ \right\}$

(E4) : $\sin x = 6$

$S_R = \emptyset\ \ car\ 6\ \ n'appartient\ pas$ à $[-1; 1]$

(E5) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ <=>\ \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$<=>\ \ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ \ ou\ x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in Z$

$<=>\ \ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ \ ou\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in Z$

$S_R = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in Z\right\}$

**Exercice 45**

(E1) : $S_R = \emptyset$

(E2) : $S_R = \{2k\pi; \pi + 2k\pi,\ \ k \in Z\ \}$

(E3) : $S_R = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ \frac{3\pi}{6} + 2k\pi,\ \ k \in Z\right\}$

(E4) : $S_R = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ;\ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ \ k \in Z\right\}$

(E5) : $S_R = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ \ k \in Z\right\}$

**Exercice 46**

(E1) : $\tan x = 0 <=> \tan x = \tan 0$

$<=> x = 0 + k\pi,\ \ k \in Z$

$S_R = \{k\pi,\ \ k \in Z\}$

(E2) : $\tan x = -1\ \ <=>\ \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$<=>\ \ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

$S_R = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \ k \in Z\right\}$

(E3) : $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \ <=>\ \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$<=>\ \ x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$

$S_R = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi,\ \ k \in Z\right\}$

(E4) : $\tan x = \sqrt{3}\ \ <=>\ \tan x = \tan\frac{\pi}{3}$

$<=>\ \ x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z$

$S_R = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi,\ \ k \in Z\right\}$

**Exercice 47**

(E1) : $S_R = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, \ \ k \in Z\right\}$

(E2) : $S_R = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, \ \ k \in Z\right\}$

(E3) : $S_R = \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi, \ \ k \in Z\right\}$

(E4) : $S_R = \{k\pi, \ \ k \in Z\}$

**Exercice 48**

(E1) : $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$

$$2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin x = 0$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2}$$

$on\ a :\ x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ \ ou\ \ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ \ \ ou \ \ \ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z$$

$$S_R = \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ , -\frac{\pi}{6} + k\pi, \ \ k \in Z\right\}$$

(E2) : $3\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$

$$2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = \sqrt{3}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos x + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ \ ou\ \ \ x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ \ ou\ \ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$$

$$S_R = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ , -\frac{\pi}{2} + k\pi, \ \ k \in Z\right\}$$

(E3) : $-\cos x + \sin x - \sqrt{2} = 0$

$$-\cos x + \sin x = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = \sqrt{2}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 1$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos x + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin x = 1$$

$$\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos 0$$

$x - \frac{3\pi}{4} = 0 + 2k\pi, k \in Z$

$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$

$S_R = \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\,,\quad k \in Z\right\}$

(E4) : $-\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + 1 = 1$

$-\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 0$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = 0$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 0$

$\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos x + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin x = 0$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{2}$

$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; ou \;\; x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$

$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \;\; ou \;\; x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$

$S_R = \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\,, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\quad k \in Z\right\}$

(E5) : $\sqrt{3}\cos x - \sin x + \sqrt{3} = 0$

$\sqrt{3}\cos x - \sin x = -\sqrt{3}$

$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = -\sqrt{3}$

$\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

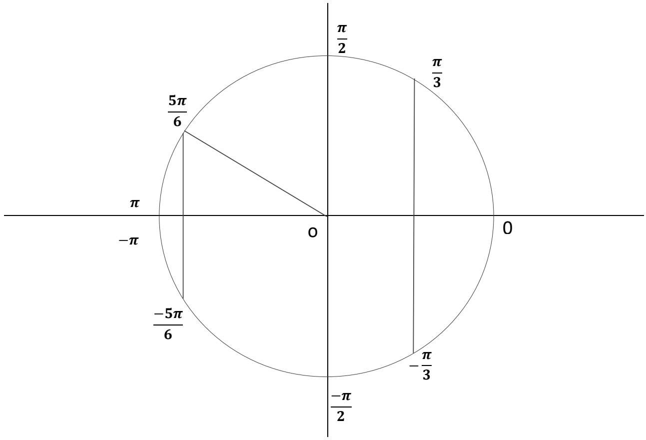
$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \;\; ou \;\; x + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z$

$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;\; ou \;\; x = -\pi + 2k\pi, k \in Z$

$S_R = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,, -\pi + 2k\pi,\quad k \in Z\right\}$

**Exercice 49**




(I1) : $\cos x \leq 2$

$S_R = R$

(I2): $\cos x \leq \frac{1}{2}$

$S_R = \left[-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] U \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right]$, $k \in Z$

(I3) : $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_R = \left[-\pi + 2k\pi; -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right] U \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right]$, $k \in Z$

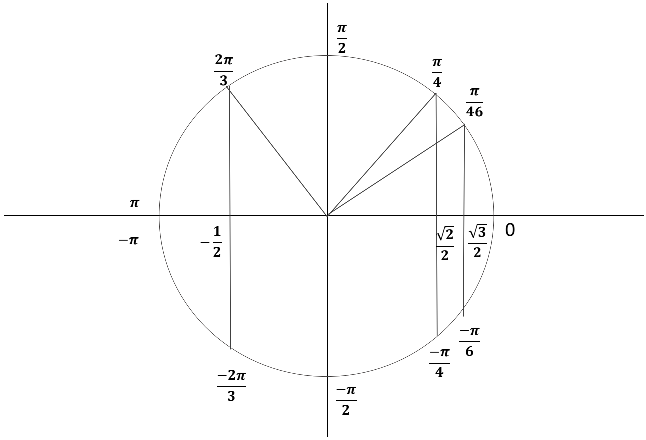
(I4) : $\cos x \leq 0$

$S_R = \left[-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] U \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right]$, $k \in Z$

(I5) : $\cos x \leq -1$

$S_R = \{-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi\}, k \in Z$

**Exercice 50**




(I1) : $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_R = \left[-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right] U \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right]$ , $k \in Z$

(I2) : $\cos x \geq -\frac{1}{2}$

$S_R = \left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$ , $k \in Z$

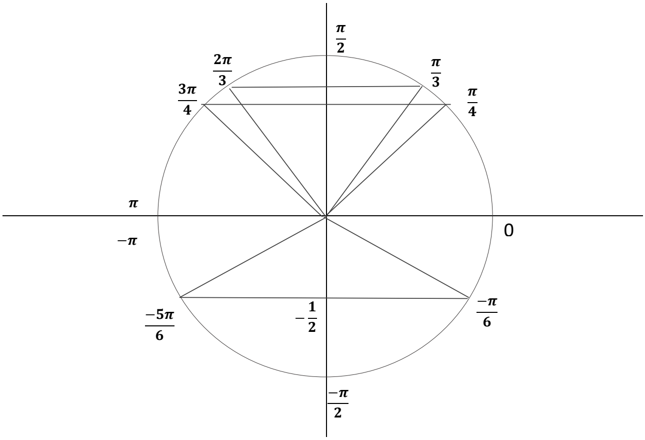
(I3) : $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_R = \left[-\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right] U \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right]$ , $k \in Z$

(I4) : $\cos x > 1$

$S_R = \emptyset$

## Exercice 51




(I1) : $\sin x \leq -\frac{1}{2}$

$S_R = \left[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right],\ k \in Z$

(I2) : $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_R = \left[-\pi + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right] U \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right],\ k \in Z$

(I3) : $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_R = \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right],\ k \in Z$

(I4) : $\sin x \leq 3$

$S_R = R$

(I5) : $\sin x \geq -\frac{3}{2}$

$S_R = R$

## Exercice 52

(I1) : $\sin x \leq -\frac{1}{2}$

$S_R = \left[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right],\ k \in Z$

(I2) : $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_R = \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right],\ k \in Z$

(I3) : $\sin x > 2$

$S_R = \emptyset$

(I4) : $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_R = \left]-\pi + 2k\pi ; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right[ \ U\ \left]\frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; \pi + 2k\pi\right[\ ,\ k \in Z$

**Exercice 53**

(I1) : $\tan x < \sqrt{3}$

$S_R = \left]-\pi + k\pi ; -\frac{2\pi}{3} + k\pi\right[ \ U\ \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{3} + k\pi\right[ \ U\ \left]\frac{\pi}{2} + k\pi ; \pi + 2k\pi\right[ \quad k \in Z$

(I2) : $\tan x \leq 0$

$S_R = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; k\pi\right[ \ U\ \left]\frac{\pi}{2} + k\pi ; \pi + k\pi\right[,\ k \in Z$

(I3) : $\tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$

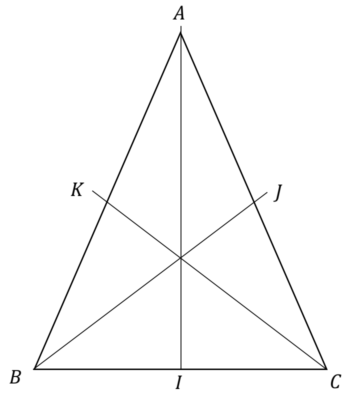
$S_R = \left[-\frac{5\pi}{6} + k\pi ; -\frac{\pi}{2} + k\pi\right[ \ U\ \left[\frac{\pi}{6} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\ ,\ k \in Z$

(I4) : $\tan x \geq -1$

$S_R = \left]-\frac{\pi}{4} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[ \ U\ \left]\frac{3\pi}{4} + k\pi ; \pi + k\pi\right[$

**EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT**

**Exercice 54**




$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}}\right) = -\frac{2\pi}{3}$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CO}}\right) = -\frac{\pi}{2}$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{IJ}}\right) = \pi$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{IJ}}\right) = \frac{5\pi}{6}$

**Exercice 55**

1) $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AJ}}\right) = \frac{\pi}{3}$ , $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AJ}}\right) = -\frac{\pi}{6}$

2) $mes\left(\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JD}}\right) = -\frac{\pi}{3}$ ; $mes\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DJ}}\right) = \frac{\pi}{2}$ ; $mes\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DJ}}\right) = 0$

3) $mes\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CK}}\right) = \frac{\pi}{3}$ ; $mes\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CK}}\right) = \frac{2\pi}{3}$

4) $mes\left(\widehat{\overrightarrow{KC},\overrightarrow{KD}}\right)=\frac{\pi}{9},\ mes\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DK}}\right)=-\frac{\pi}{18}$

5) $mes\left(\widehat{\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BJ}}\right)=\frac{\pi}{2}$ ; $mes\left(\widehat{\overrightarrow{JB},\overrightarrow{JK}}\right)=\frac{2\pi}{9}$ ; $mes\left(\widehat{\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{JA}}\right)=\frac{\pi}{3}$

## Exercice 56

1) $mes\left(\widehat{\overrightarrow{DG},\overrightarrow{DF}}\right)=\frac{\pi}{6}$ ; $mes\left(\widehat{\overrightarrow{GF},\overrightarrow{GD}}\right)=\frac{\pi}{6}$

2) $mes\left(\widehat{\overrightarrow{GE},\overrightarrow{GD}}\right)=mes\left(\widehat{\overrightarrow{GE},\overrightarrow{GF}}\right)+mes\left(\widehat{\overrightarrow{GF},\overrightarrow{GD}}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{GE},\overrightarrow{GD}}\right)=\frac{\pi}{2}$

*Donc le triangle EGD est rectangle en G*

## Exercice 57

1) $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\alpha}{2}+2k\pi, k\in Z$

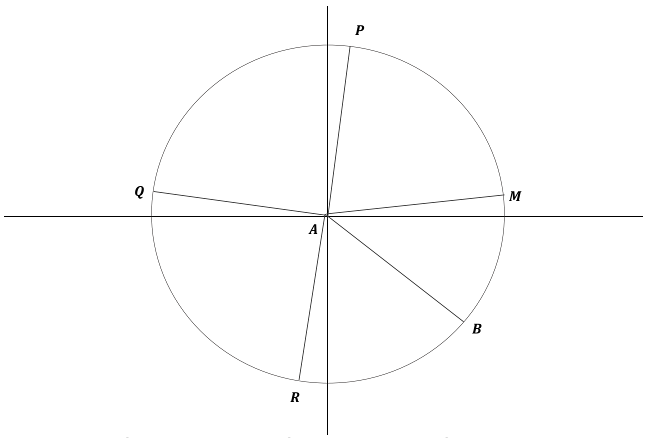
$$mes\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)=\alpha-\pi+2k\pi, k\in Z$$

$$mes\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}}\right)=\frac{\alpha-\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$$

2) $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}}\right)=mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DB}}\right)=-\frac{\pi}{2}$

## Exercice 58

1)




2) A) $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AP}}\right)=mes\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}}\right)+mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}}\right)$

$=-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AP}}\right)=\frac{5\pi}{12}$

B) $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AQ},\overrightarrow{AM}}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{AQ},\overrightarrow{AB}}\right) + mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}}\right)$

$= \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AQ},\overrightarrow{AM}}\right) = \frac{13\pi}{12}$

C) $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AR},\overrightarrow{AP}}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{AR},\overrightarrow{AB}}\right) + mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}}\right)$

$= \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AR},\overrightarrow{AP}}\right) = \pi$

D) $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}}\right) + mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AQ}}\right)$

$= -\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}}\right) = -\frac{9\pi}{6}$

**Exercice 59**

1) $A = \sin(x-\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(x+\pi) - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$$A = -\sin(\pi - x) + \cos x - \cos x - 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$A = -\sin x - 2\sin x$$

$$A = -3\sin x$$

2) $B = \sin x \sin 3x + \cos x \cos 3x$

$$B = \cos x \cos 3x + \sin x \sin 3x$$

$$B = \cos(x - 3x)$$

$$B = \cos(-2x)$$

$$B = \cos(2x)$$

**Exercice 60**

* $E = \cos(x+\pi) + \cos(x-5\pi) + \sin(x-\pi) - \sin(x+2\pi)$

$E = \cos(x+\pi) + \cos(x-\pi) + \sin(x-\pi) - \sin(x+2\pi)$

$E = -\cos x + \cos(\pi - x) - \sin(\pi - x) - \sin(x+2\pi)$

$E = -\cos x - \cos x - \sin x - \sin x$

$E = -2\cos x - 2\sin x$

* $F = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)$

$F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$F = \sin x - \sin x - \cos x + \cos x$

$F = 0$

## Exercice 61

$*\ \ I = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos x + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

$I = \cos x \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin x \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos x + \cos x \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \sin x \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

$I = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \cos x + \cos x \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \sin x \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

$I = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \cos x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$I = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$I = 0$

$*\ \ J = \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) + \sin x$

$J = \sin x \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos x \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin x \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \cos x \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sin x$

$J = -\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \sin x \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \cos x \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \sin x$

$J = -\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \sin x$

$J = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x + \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

$J = 0$

## Exercice 62

$\forall\, x \in R,\ P = cos^4 x - sin^4 x$

$p = (cos^2 x - sin^2 x)(cos^2 x + sin^2 x)$

$P = cos^2 x - sin^2 x$

$P = \cos(2x)$

$\forall\, x \in R,\ Q = cos^4 x + sin^4 x$

$Q = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$

$Q = \frac{1+cos^2 2x}{2}$

$Q = \frac{1+\frac{1+\cos 4x}{2}}{2}$

$Q = \frac{3+\cos 4x}{4}$

$Q = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$

## Exercice 63

1 $cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x$

2. $sin^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x$

**Exercice 64**

1) $\cos(3x) = \cos(2x + x)$
$\cos(3x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x$
$\cos(3x) = (cos^2x - sin^2x)\cos x - 2\sin x\cos x \cdot \sin x$
$\cos(3x) = cos^3x - sin^2x\cos x - 2sin^2x\cos x$
$\cos(3x) = cos^3x - (1 - cos^2x)\cos x - 2(1 - cos^2x)\cos x$
$\cos(3x) = cos^3x - \cos x + cos^3x - 2\cos x + 2cos^3x$
$\cos(3x) = 4cos^3x - 3\cos x$

2) a) B existe si et seulement si $\cos x \neq 0$ et $\sin x \neq 0$
B existe si et seulement si $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; et \;\; x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; et \;\; x \neq 2k\pi$ avec $k \in Z$

b) $B = \frac{\cos 3x}{\cos x} - \frac{\sin 3x}{\sin x}$
$B = \frac{4\,cos^3x - 3\cos x}{\cos x} - \frac{3\sin x - 4\,sin^3x}{\sin x}$
$B = \frac{\cos x(4\,cos^2x - 3)}{\cos x} - \frac{\sin x(3 - 4\,sin^2x)}{\sin x}$

Pour $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; et \;\; x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; et \;\; x \neq 2k\pi, k \in Z,$ on a

$B = 4\,cos^2x - 3 - (3 - 4\,sin^2x)$
$B = 4\,cos^2x - 3 - 3 + 4\,sin^2x$
$B = 4(cos^2x + sin^2x) - 6$
$B = 4 - 6$
$B = -2$

**Exercice 65**

1) $\forall\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z, \;\; 1 + \; tan^2x = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2$
$1 + tan^2x = 1 + \frac{sin^2x}{cos^2x}$
$1 + tan^2x = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x}$
$\forall\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z, \;\; 1 + tan^2x = \frac{1}{cos^2x}$

2) a) on a $cos^2x = \frac{1}{1 + tan^2x}$
$cos^2x = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}$
$cos^2x = \frac{4}{5}$
$comme\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad \cos x > 0 \;\; donc \cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
$on\ a: \; sin^2x + cos^2x = 1 \;\; donc \;\; sin^2x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$comme\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad \sin x > 0\ \ donc\ \ \sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) on a $cos^2 x = \frac{1}{1+tan^2 x}$

$cos^2 x = \frac{1}{1+\frac{3}{4}}$

$cos^2 x = \frac{4}{7}$

$comme\ \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right], \ \ \cos x > 0\ \ \ donc\ \ \ \cos x = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

$on\ a: \ \ sin^2 x + cos^2 x = 1\ \ donc\ \ sin^2 x = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$

$comme\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right], \ \ \sin x = \sqrt{\frac{3}{7}}$

**Exercice 66**

1-

$A = \cos x - \sqrt{3}\sin x$

$A = 2\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$

$A = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)$

$A = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$B = -\sqrt{3}\cos x + \sin x$

$B = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)$

$B = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}\cos x + \sin\frac{5\pi}{6}\sin x\right)$

$B = 2\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$

2- a) $A = -1 \ <=> \ 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

$<=> \ \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$<=> \ \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$A = -1 \ <=> \ \ x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ \ ou\ \ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$

$<=> x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ \ ou\ \ x = -\pi + 2k\pi, k \in Z$

$S_R = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ -\pi + 2k\pi, k \in Z\right\}$

b) $B = \sqrt{3} \ <=> \ 2\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

$<=> \ \cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$<=> \ \cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$<=> \ \ x - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ \ ou\ \ x - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in Z$

$<=> \ \ x = \pi + 2k\pi\ \ \ ou\ \ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$

$S_R = \left\{\pi + 2k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z\right\}$

**Exercice 67**

1) $cos^2x + sin^2x = 1$

$cos^2x = 1 - sin^2x$

$cos^2x = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{5}\right)^2$

$cos^2x = 1 - \left(\frac{2-2\sqrt{12}+6}{16}\right)$

$cos^2x = 1 - \left(\frac{8-4\sqrt{3}}{16}\right)$

$cos^2x = \frac{16-8+4\sqrt{3}}{16}$

$cos^2x = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$ -

$donc\ \cos x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\ \ ou\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

2) On a $\sin x < 0\ \ donc\ \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$

d'où $x = -\frac{\pi}{12}$

**Exercice 68**

1. $cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

2. On a $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

**Exercice 69**

$(E_1)$ : $S_R = \left\{\frac{\pi}{24} + k\pi\ k \in Z\right\} \cup \left\{-\frac{7\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z\right\}$

$(E_2)$ : $S_R = \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in Z\right\} \cup \{k\pi, k \in Z\}$

$(E_3)$ : $S_R = \left\{\frac{11\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} k \in Z\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in Z\right\}$

$(E_4)$ : $S_R = \left\{\frac{4\pi}{15} + \frac{2k\pi}{3}, k \in Z\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{15} + \frac{2k\pi}{3}, k \in Z\right\}$

**Exercice 70**

$(E_1)$ : $S_R = \left\{\frac{-5\pi}{24} + \frac{2k\pi}{3}, k \in Z\right\} \cup \left\{\frac{19\pi}{40} + \frac{2k\pi}{5}, k \in Z\right\}$

$(E_2)$ : $S_R = \left\{\frac{23\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in Z\right\} \cup \left\{\frac{-7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in Z\right\}$

$(E_3)$ : $S_R = \left\{\frac{7\pi}{24} + k\pi, k \in Z\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{24} + k\pi, k \in Z\right\}$

$(E_4)$ : $S_R = \left\{\frac{5\pi}{24} + \frac{2k\pi}{3}, k \in Z\right\} \cup \left\{-\frac{3\pi}{56} + \frac{2k\pi}{3}, k \in Z\right\}$

**Exercice 71**

$(E_1)$ : $S_R = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z\right\}$

$(E_2)$ : $S_R = \left\{\frac{-5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z\right\}$

$(E_3):\ S_R = \left\{-\frac{6\pi}{35} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z\right\}$

$(E_4):\ S_R = \left\{-\frac{23\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in Z\right\}$

**Exercice 72**

$(I):\ S_R = \left]-\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{-5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}\right[ \ U \ \left]\frac{11\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right[ \ ,\ k \in Z$

$(J):\ S_R = \left]-\frac{61\pi}{132} + k\pi; \frac{-\pi}{22} + k\pi\right[ \ U \ \left]\frac{-\pi}{22} + k\pi; \frac{49\pi}{66} + k\pi\right[ \ ,\ k \in Z$

$(K):\ S_R = \left]\frac{\pi}{9} + 2k\pi; \frac{7\pi}{9} + 2k\pi\right[ \ U \ \left]\frac{-11\pi}{9} + 2k\pi; \frac{-5\pi}{9} + 2k\pi\right[ \ ,\ k \in Z$

**Exercice 73**

$(I_1):\ S_R = \left[-2\pi + 2k\pi\,; \frac{-4\pi}{3} + 2k\pi\right]$

$(I_2):\ S_R = \left[\frac{\pi}{12} + k\pi\,; \frac{2\pi}{3} + k\pi\right] U \ \left[\frac{-\pi}{3} + k\pi; -\pi + k\pi\right] \ ,\ k \in Z$

$(I_3):\ S_R = \mathbb{R}$

**Exercice 74**

$(I_1):\ S_R = \left]\frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\,; \frac{19\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}\right[ \ U \ \left]\frac{-\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}; \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}\right[ \ ,\ k \in Z$

$(I_2):\quad \tan(3x - \pi) \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$(I_2) \ \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + k\pi < 3x - \pi < \frac{5\pi}{6} + k\pi$ ou $\frac{\pi}{2} + k\pi < 3x - \pi < \frac{5\pi}{6} + k\pi$

$(I_2):\ S_R = \left]\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\,; \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}\right] U \ \left]\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3}\,; \frac{11\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}\right] \ ,\ k \in Z$

$(I_3) \ \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k\pi < x - \frac{\pi}{9} < \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $-\frac{2\pi}{3} + k\pi < x - \frac{\pi}{9} < -\frac{\pi}{2} + k\pi$

donc $S_R = \left]\frac{4\pi}{9} + k\pi\,; \frac{11\pi}{18} + k\pi\right[ \ U \ \left]\frac{-5\pi}{9} + k\pi; \frac{-7\pi}{18} + k\pi\right[ \ ,\ k \in Z$

**Exercice 75**

$(I_1) \ \Leftrightarrow \ \sqrt{2}\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$

donc $S_R = \mathbb{R}$

$(I_2) \ \Leftrightarrow \ 2\ \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow \ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2}$

donc $S_R = \left[-\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

$(I_3) \ \Leftrightarrow \ 2\ \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \ \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \ \frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$

donc $S_R = \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right]$

**Exercice 76**

$(E_1) \Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$

Donc $S_R=\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\ ,k\in Z\right\}\cup\{\pi+2k\pi,k\in Z\}$

$(E_2) \Leftrightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

donc $S_R=\left\{\frac{-\pi}{15}+k\pi\ ,k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{23\pi}{80}+\frac{k\pi}{2},k\in Z\right\}$

**Exercice 77**

$(I_1) \Leftrightarrow \cos\left(-3x+\frac{3\pi}{8}\right)\leq\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(-x+\frac{\pi}{48}\right)\sin\left(-2x+\frac{17\pi}{48}\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 0\leq -x+\frac{\pi}{48}\leq\pi$ et $0\leq -2x+\frac{17\pi}{48}\leq\pi$ ou $-\pi\leq -x+\frac{\pi}{48}\leq 0$ et $-\pi\leq -2x+\frac{17\pi}{48}\leq 0$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{47\pi}{48}\leq x\leq\frac{\pi}{48}$ et $-\frac{31\pi}{96}\leq x\leq\frac{17\pi}{96}$ ou $\frac{\pi}{48}\leq x\leq\frac{49\pi}{48}$ et $\frac{17\pi}{96}\leq x\leq\frac{65\pi}{96}$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{31\pi}{96}\leq x\leq\frac{\pi}{48}$ ou $\frac{17\pi}{96}\leq x\leq\frac{65\pi}{96}$

Donc $S_R=\left[-\frac{31\pi}{96}\ ;\ \frac{\pi}{48}\right]\cup\left[\frac{17\pi}{96};\frac{65\pi}{96}\right]$

$(I_2) \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)-\sin\left(-x-\frac{\pi}{18}\right)\leq 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(x-\frac{13\,\pi}{180}\right)\cos\left(-\frac{23\pi}{90}\right)\leq 0$ or $\cos\left(-\frac{23\pi}{90}\right)>0$

donc $-\pi\leq x-\frac{13\,\pi}{180}\leq 0$ d'ou $-\frac{167\,\pi}{180}\leq x\leq\frac{13\,\pi}{180}$

donc $S_R=\left[-\frac{167\,\pi}{180};\frac{13\,\pi}{180}\right]$

**Exercice 78**

**( A reformuler à la prochaine édition)**

**Exercice 79**

1) (E1): $2\,cos^2x-3\cos x-2=0$

$posons\ X=\cos x$

(E1): $2X^2-3X-2=0$

$\Delta=(-3)^2-4\times 2\times(-2)$

$\Delta=25$

$X_1=-\frac{1}{2}\ \ et\ \ X_2=2$

$on\ a:\ \cos x=-\frac{1}{2}\ \ et\ \cos x=2$

$\cos x=-\frac{1}{2}\ \ car\ \cos x\neq 2$

$\cos x=-\frac{1}{2}\ <=>\ \cos x=\cos\frac{2\pi}{3}$

$\cos x=-\frac{1}{2}\ \ <=>\ \ x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ \ ou\ \ x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$

$S_R=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi,-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in Z\right\}$

$cos^2x - 2\cos x + 1 = 0$
$(\cos x - 1)^2 = 0$
$(\cos x - 1) = 0$
$\cos x = 1$
$\cos x = \cos 0$
$x = 2k\pi, k \in Z$
$S_R = \{2k\pi, k \in Z\}$

2) ($F_1$): $sin^2x - \sin x - 6 = 0$
$posons\ X = \sin x$
($F_1$): $X^2 - X - 6 = 0$
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)$
$\Delta = 25$
$X_1 = \frac{1-5}{2}\ \ et\ \ X_2 = \frac{1+5}{2}$
$X_1 = -2\ \ et\ \ X_2 = 3$
$on\ a\ \ \sin x = -2\ \ ou\ \ \sin x = 3\ \ (impossible)$
$S_R = \emptyset$

($F_2$): $sin^2x + 2\sin x + 1 = 0$
$(\sin x + 1)^2 = 0$
$\sin x + 1 = 0$
$\sin x = -1$
$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ \ ou\ \ x = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$
$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ \ ou\ \ x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$
$S_R = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z\}$

3) ($T_1$): $-tan^2x + 2\tan x - 1 = 0$
$tan^2x - 2\tan x + 1 = 0$
$(\tan x + 1)^2 = 0$
$\tan x + 1 = 0$
$\tan x = -1$
$\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

$S_R = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z\right\}$

($T_3$): $4\,tan^2\text{x} + 3\tan x + 10 = 0$

$posons\ X = \tan x$

($T_3$): $4X^2 + 3\text{X} + 10 = 0$

$\Delta < 0$ donc l'equationn'admetpas de solution

$S_R = \emptyset$

**Exercice 80**

1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$
2) (E): $-4x^2 + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$
   $\Delta = 4(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 - 4 \times (-4) \times (\sqrt{6})$
   $\Delta = 4(5 - 2\sqrt{6}) + 16\sqrt{6}$
   $\Delta = 20 - 8\sqrt{6} + 16\sqrt{6}$
   $\Delta = 20 + 8\sqrt{6}$
   $\Delta = 4(5 + 2\sqrt{6})$
   $\Delta = \left(2(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right)^2$
   $x_1 = \frac{-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})-2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{-8}$ $\quad et \quad$ $x_2 = \frac{-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{-8}$
   $x_1 = \frac{-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{-8}$ $\quad et \quad$ $x_2 = \frac{-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{-8}$
   $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad et \quad$ $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
   $S_R = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

3) (E1): $\forall\, x \in [0, 2\pi[, -4\cos^2 x + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos x + \sqrt{6} = 0$
   $posons\ X = \cos x$
   (E1): $-4X^2 + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})X + \sqrt{6} = 0$
   $on\ a\ donc : \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \ ou\ \ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
   $\cos x = \cos\frac{\pi}{6}\ \ ou\ \ \cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
   $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ \ ou\ \ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ \ ou\ \ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\ \ ou\ \ x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

   $*\ cherchons\ les\ entiers\ relatifs\ k\ tels\ que\ 0 \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2\pi$
   $on\ obtient\ -\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{11}{12}\ \ donc\ \ k = 0$
   D'où $x = \frac{\pi}{6}$

   $*\ cherchons\ les\ entier\ relatifs\ k\ tels\ que\ 0 \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2\pi$
   $on\ obtient\ \ k = 1\ \ donc\ \ x = \frac{11\pi}{6}$

   $*\ cherchons\ les\ entiers\ relatifs\ k\ tels\ que\ 0 \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$
   $on\ obtient\ \ k = 0\ \ donc\ x = \frac{3\pi}{4}$

   $*\ cherchons\ les\ entiers\ relatifs\ k\ tels\ que\ 0 \leq -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$

$on\ obtient\ \ k = 1\ \ donc\ \ x = \frac{5\pi}{4}$

$Ainsi\ \ S_{[0,2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right\}$

4) Procédé de la même manière avec les sinus

**Exercice 81**

($I_1$) : $x \in [0,2\pi[,\ \ 2\,cos^2x + 7\cos x + 5 < 0$

$posons\ X = \cos x$

($I_1$): $2X^2 + 7X + 5 < 0$

$\Delta = 9, on\ a:\ X_1 = -\frac{5}{2}\ \ et\ \ X_2 = -1$

($I_1$): $2\left(\cos x + \frac{5}{2}\right)(\cos x + 1) < 0$

$S_{[0;2\pi[} = [0\,;2\pi[$

($I_2$): $x \in [-\pi;\pi], 2\,sin^2x - 6\sin x + 1 \geq 0$

$posons\ X = \sin x$

($I_2$): $2X^2 - 6X + 1 \geq 0$

**Exercice 82**

$$\begin{cases}\cos(a+b) = \cos(10)\\ \cos(ab) = \cos(22)\end{cases}$$

$a + b = 10$ ou $a + b = -10$

$ab = 22$ ou $ab = -22$

$a$ et $b$ sont solutions de l'équation :

1) $x^2 - 10x + 22 = 0$

$x = 5 + \sqrt{3}$ ou $x = 5 - \sqrt{3}$

2) $x^2 - 10x - 22 = 0$

$x = 5 + \sqrt{47}$ ou $x = 5 - \sqrt{47}$

3) $x^2 + 10x + 22 = 0$

$x = -5 + \sqrt{3}$ ou $x = -5 - \sqrt{3}$

4) $x^2 + 10x - 22 = 0$

$x = -5 + \sqrt{47}$ ou $x = -5 - \sqrt{47}$

**Exercice 83**

($I_1$) : $x \in [0,\pi[,\ \ 3\,sin^2x - 4\sin x - 4 \leq 0$

$posons\ X = \sin x$

($I_1$): $3X^2 - 4X - 4 \leq 0$

$\Delta = 9, on\ a :\ X_1 = -\frac{5}{2}\ \ et\ \ X_2 = -1$

(I1): $2\left(\cos x + \frac{2}{3}\right)(\cos x - 2) \leq 0$

$S_{[0;2\pi[} = [0\ ;2]$

(I2): $x \in [-\pi;\pi], 2\ sin^2 x - 6\sin x + 1 \geq 0$

$posons\ X = \sin x$

(I2): $2X^2 - 6X + 1 \geq 0$

(I3): $x \in [-\pi;\pi], 4\ sin^2 x + 3\sin x + 3 > 0$

$posons\ X = \sin x$

(I3): $4X^2 + 3X + 3 > 0$

**Exercice 84**

I1): $x \in [-\pi;\pi], -\ tan^2 x + 4\tan x - 5 > 0$

$posons\ X = \tan x$

(I1): $-X^2 + 4X - 5 > 0$

$S_R = \emptyset$

(I2) : $x \in [0{,}2\pi[,\ \ tan^2 x + \tan x - 6 \leq 0$

$posons\ X = \tan x$

(I2): $X^2 + X - 6 < 0$

$\Delta = 9, on\ a :\ X_1 = 2\ \ et\ \ X_2 = -3$

(I1): $(\tan x - 2)(\tan x + 3) \leq 0$

$S_{[0;2\pi[} =$

**Exercice 85**

1) $x \in Df \quad <=> \ \sin(2x) \neq 0$

$x \in Df \quad <=> \ \sin(2x) \neq \sin 0$

$x \in Df \quad <=> \ \ 2x \neq 0 + 2k\pi\ \ et\ \ 2x \neq \pi + 2k\pi$

$x \in Df \quad <=> \ \ x \neq k\pi\ \ et\ \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$Df = R\ \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi\right\}\ avec\ k \in Z$

2) $\forall\ x \in Df, f(x) = \frac{1-\cos 2x}{\sin(2x)}$

$f(x) = \frac{1-[cos^2 x - sin^2 x]}{2\sin x\cos x}$

$f(x) = \frac{1-cos^2 x + sin^2 x}{2\sin x\cos x}$

$f(x) = \frac{sin^2 x + sin^2 x}{2\sin x\cos x}$

$f(x) = \frac{2\ sin^2 x}{2\sin x\cos x}$

$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

$f(x) = \tan x$

3) $\forall\, x \in Df, -x \in Df \;\; et \;\; f(-x) = \tan(-x)$
$f(-x) = -\tan x$
$f(-x) = -f(x)$
$f \; est\ donc\ impaire$

**Exercice 86**

1. $(I_1) : \; \frac{2\cos(3x)+1}{1-\cos(3x)} \geq 0$

$\forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], 1 - \cos(3x) > 0$

$2\cos(3x) + 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \left[\frac{2\pi}{9}; \frac{4\pi}{9}\right]$

$S_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} = \left[\frac{2\pi}{9}; \frac{4\pi}{9}\right]$

2. $(I_2) : \; \sin(2x) \geq \sin x$

$(I_2) \;\Leftrightarrow\; 2\sin x \cos x - \sin x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 2\sin x\,(2\cos x - 1) \geq 0$ . soit $A = 2\sin x\,(2\cos x - 1)$

| $x$ | $-\pi$ $\pi$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $0$ | $\frac{\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $2\cos x - 1$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| $A$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |

Donc $S_{[-\pi;\pi]} = \left]-\pi; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

**Exercice 87**

1) $A = cos^2x - cos^4x$
$A = cos^2x(1 - cos^2x)$
$A = cos^2x \cdot sin^2x$

2) $A = 0 \;\; <=> \;\; \cos x = 0 \;\; ou \;\; \sin x = 0$
$<=> \;\; \cos x = \cos\frac{\pi}{2} \;\; ou \;\; \sin x = \sin 0$
$<=> \;\; x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; ou \;\; x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; ou \;\; x = 2k\pi \;\; ou \;\; x = \pi + 2k\pi$

3) $B$ existe si et seulement $si\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; et \;\; x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; et\ x \neq 2k\pi \;\; et\ x \neq \pi + 2k\pi$

$B = \frac{sin^2x - sin^4x}{cos^2x - cos^4x} = \frac{sin^2x(1-sin^2x)}{cos^2x(1-cos^2x)} = \frac{sin^2x \cdot cos^2x}{cos^2x \cdot sin^2x} = 1$

**Exercice 88**

1) Considérons le triangle $AMD$ rectangle en $M$.
Les angles $\widehat{ADM}$ $et$ $\widehat{AOM}$ sont des angles associés donc $mes\ \widehat{AMD} = \frac{1}{2}\ mes\ \widehat{AOM}$
On a : $\sin\widehat{AMD} = \frac{AM}{AD}$ $donc \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$Ainsi\ AM = 2r\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

2) $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}}\right) = \frac{2\pi}{3} - \alpha \quad et \quad mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OC}}\right) = -\frac{2\pi}{3} - \alpha$

3) $MB = 2r\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) \ \ et \ \ MC = 2r\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)$

4) a) $S = sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) + sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)$

$S = sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left[\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2 + \left[sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2$

$S = sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2$

$S = sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{4}cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{4}sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{4}cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{4}sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$S = sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{4}sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{4}sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{4}cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{4}cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$S = \frac{3}{2}sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{2}cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$S = \frac{3}{2}\left[sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$

$S = \frac{3}{2}$

b) la relation $MA^2 + MB^2 + MC^2$ ne dépend pas du point M car :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{3}{2}$

5) $A_{MBC} = \frac{MB \times BC \times MC}{4r}$

$A_{MBC} = \frac{2r\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot 2r\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\times BC}{4r}$

$= r\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot BC$

$A_{MBC} = r^2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)\sqrt{3}$

6) $A_{MBC} = r^2\frac{\sqrt{3}}{4} \iff r^2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right) = r^2\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\iff \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right) = \frac{1}{4}$

$\iff \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}$

$\iff \frac{3}{4}cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{1}{4}sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$

$\iff 3\,cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1$

$\iff 3\,cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\left(1-cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1$

$\iff 3\,cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1+cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1$

$\iff 4\,cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-2 = 0$

$\iff 2\,cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1 = 0$

$\iff cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\iff \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ ou\ \cos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\ ou\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{\alpha}{2} = \frac{3\pi}{4}+2k\pi\ ou\ \frac{\alpha}{2} = -\frac{3\pi}{4}+2k\pi\ ou\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}+2k\pi\ ou\ \frac{\alpha}{2} = -\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$\alpha = \frac{3\pi}{2}+4k\pi\ ou\ \alpha = -\frac{3\pi}{2}+4k\pi\ ou\ \alpha = \frac{\pi}{2}+4k\pi\ ou\ \alpha = -\frac{\pi}{2}+4k\pi$

**SITUATION COMPLEXE**

**Exercice 89**

Déterminons la mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FE}}\right)$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FE}}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FA}}\right)+mes\left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FB}}\right)+mes\left(\widehat{\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FE}}\right)$

On a $AFD$ qui est un triangle isocèle en $A$, donc $mes\left(\widehat{\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FA}}\right) = \frac{5\pi}{12}$

$AFB$ est un triangle équilatéral donc $mes\left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FB}}\right) = \frac{\pi}{3}$

$FBE$ est un triangle isocèle en $B$ donc $mes\left(\widehat{\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FE}}\right) = \frac{\pi}{4}$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FE}}\right) = \frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$

$= \frac{5\pi+4\pi+3\pi}{12}$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FE}}\right) = \pi$

Les vecteurs $\overrightarrow{FD}\ et\ \overrightarrow{FE}$ sont colinéairedes les points $F, D$ et $E$ sont alignés. La route sera donc construite.

**Exercice 90**

$P = \frac{V_0 \sin 2\alpha}{g}$

$\sin(2\alpha) = \frac{p \cdot g}{V_0}$

$\sin(2\alpha) = \frac{OC \times g}{V_0}$

$\sin(2\alpha) = \frac{50 \times 10}{1000}$

$\sin(2\alpha) = \frac{1}{2}$ $or$ $\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin(2\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $ou$ $2\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z$

$\alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi$ $ou$ $\alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in Z$

Les inclinaisons parfaites sont des angles de mesure principales $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{5\pi}{12}$

# 11 ÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}^2$ ET DANS $\mathbb{R}^3$

**Situation d'apprentissage**

Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves)), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de seconde. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.

Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

| Constituants de la situation | Exemples de questions possibles | Réponses possibles des élèves |
|---|---|---|
| Contexte | Où et quand se déroule la scène ? | Dans une bijouterie dans le cadre de la confection d'un bijou pour un mariage. |
| Circonstances | Indique pour quelles raisons le bijoutier sollicite son fils.<br>Quel est le problème auquel le bijoutier est confronté ? | Le bijoutier sollicite son fils pour l'initier au métier de la bijouterie et respecter scrupuleusement les consignes du client |
| Tâche | Qu'a décidé de faire le fils du bijoutier pour répondre à la préoccupation de son papa ? | De faire des recherches sur les équations dans $IR^2$ et dans $IR^3$ afin de mieux s'outiller pour répondre à la préoccupation de son père. |

**Activités de découvertes**

**Activités 1**

On donne le système $(2):\begin{cases}2x+6y-7=0\\3x+5y+8=0\end{cases}$.

Le nombre réel équivalent issu du système (2) est 2x5 – 3x6 = -8

**Exercice de fixation 1**

le déterminant du système : $\begin{cases}-2x+3y+1=0\\ \ \ 4x+y-2=0\end{cases}$ est -2x1 – 4x3 = -14

**Activités 2**

Détermine la notation issue du système (2) est $\begin{vmatrix}3 & 4\\2 & 5\end{vmatrix}$

**Exercice de fixation 2**

La notation issue du système $\begin{cases} -x+2y+3=0 \\ 3x-y+7=0 \end{cases}$ est $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

**Activité 3**

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} b' \\ -a' \end{pmatrix}$, deux vecteurs directeurs respectifs des droites $(D_1)$ et $(D_2)$.

1) $\det(\vec{u};\vec{v})$ = - ba'+ ab'
2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non colinéaires si et seulement si $-a'b+ab'\neq 0$ ou $ab'-a'b\neq 0$
3) Les droites $(D_1)$ et $(D_2)$ soient sécantes si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'-a'b\neq 0$
4) Le système $(\Sigma)$ admet une solution unique si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.

**Exercice de fixation 3**

Le déterminant du système (1) est $3\neq 0$ ; le système (1) admet une solution unique.
Le déterminant du système (2) est 0 ; le système (2) n'admet pas de solution unique.
Le déterminant du système (3) est 0 ; le système (3) n'admet pas de solution unique.

**Activité 4**

On considère le système d'équations suivant $(\Sigma)$ : $\begin{cases} x+y+z=2 & (1) \\ 2x+y+3z=7 & (2) \\ x+3y+2z=2 & (3) \end{cases}$

Le triplet $(1;-1;2)$ est l'unique solution de système $(\Sigma)$.

**Exercice de fixation 4**

Résolvons le système $(\sum)$ par la méthode de subtitution.

$$\begin{matrix} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=-1 \\ x-y+2z=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-y-z \\ 2(3-y-z)-y+z=-1 \\ (3-y-z)-y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y-z \\ -3y-z=-7 \\ -2y+z=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y-z \\ z=7-3y \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=1 \\ x=0 \end{cases}$$ Le triplet (0 ;2 ;1) est la solution du système $(\sum)$

**Activité 5**

On considère le système d'équations suivant $(\Sigma): \begin{cases} x+y+z=2 & (E_1) \\ 2x+y+3z=7 & (E_2) \\ x+4y+3z=3 & (E_3) \end{cases}$

Le triplet $(1;-1;2)$ est l'unique solution de système $(\Sigma)$.

**Exercice de fixation 5**

Résolvons le système $(\sum)$ par la méthode de Gauss.

$$\begin{cases} 2x-3y+5z=0 \\ 3x-5y+2z=1 \\ 2x-5y+3z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+5z=0 & E_1 \\ y-11z=-2 & 3E_1-2E_2 \\ y+z=-1 & E_1-E_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+5z=0 \\ y-11z=-2 \\ z=\frac{1}{12} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{1}{12} \\ y=\frac{-13}{12} \\ x=\frac{-11}{6} \end{cases}$ Le triplet $(\frac{-11}{6};\frac{-13}{12};\frac{1}{12})$ est la solution du système $(\sum)$

<u>**QUESTIONS D'EVALUATION**</u>

**<u>Question 1 :</u> Comment justifier qu'un système dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ admet une solution unique ?**

**Exercice non résolu**

Soit le système $(\Sigma_1)$ : $\begin{cases} -3x-4=-y \\ y=2x+7 \end{cases}$

Justifions que le système admet une solution unique. $\det(\Sigma_1) = -1$. Le déterminant du système est différent de zéro. Donc, le système admet une solution unique.

**Question 2 : Comment justifier qu'un système d'équation dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ n'admet pas de solution ou admet une infinité de solutions.**

**Exercice non résolu 1**

Soit le système $(\Sigma)$ $\begin{cases} -x+4y=3 \ (E_1) \\ 3x-12y=2 \ (E_2) \end{cases}$

Justifions que $(\Sigma)$ n'a pas de solution. $\det(\Sigma)=0$ . Donc le système n'admet pas de solution unique. Or $E_2 \Leftrightarrow -x+4y=\frac{-2}{3}$. Les équations $E_1$ et $E_2$ du système $(\Sigma)$ ne sont pas équivalentes. Donc le système $(\Sigma)$ n'a pas de solution.

**Exercice non résolu 2**

Soit le système $(\Sigma)$ $\begin{cases} 2x+7y=-8 & E_1 \\ -6x-21y=24 & E_2 \end{cases}$

Justifions que le $(\Sigma)$ admet une infinité de solutions. det$(\Sigma)$ = 0. Donc le système n'admet pas de solution unique. Or $E_2 \Leftrightarrow 2x + 7y = -8$. Donc les équations du système $(\Sigma)$ sont équivalentes. Le système $(\Sigma)$ admet une infinité de solution.

**Question3** : **comment résoudre une situation de vie courante**

**Exercice non résolu**

$x$ désigne la quantité de jus d'orange et $y$ la quantité de jus de pomme

On peut traduire la situation à l'aide du système linéaire dans IR$^2$ suivant :

$$(S)\begin{cases} x + y = 250 \\ \frac{52}{100}x + \frac{12}{100}y = 110 \end{cases} \qquad S_{\mathbb{R}^2} = \{(200; 50)\}$$

Julien doit consommer 200 ml de jus d'orange et 50 ml de jus de pomme

## MES SENCES D'EXERCICES

### Exercices de fixation

**Exercice 1**

| Affirmations | Réponses | | |
|---|---|---|---|
| La notation du déterminant du système $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ex+fy+g=0 \end{cases}$ est | | $\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}$ | |
| La notation du déterminant du système $\begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{cases}$ est | | | $\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix}$ |
| La notation du déterminant du système $\begin{cases} 2x+by=0 \\ cx-3y=0 \end{cases}$ est | $\begin{vmatrix} 2 & b \\ c & -3 \end{vmatrix}$ | | |
| La notation du déterminant du système $\begin{cases} 2x+3y-4=0 \\ 5x+4y+10=0 \end{cases}$ est | | | $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$ |

**Exercice 2**

| Affirmations | Réponses | | |
|---|---|---|---|
| $\begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix}$ est égal à | | | $-ec+ag$ |
| Le déterminant du système $\begin{cases} 2x+by+7=0 \\ cx-3y-2=0 \end{cases}$ est | | $-bc+6$ | |
| Le déterminant du système $\begin{cases} 2x+3y-4=0 \\ 5x-\frac{1}{2}y+10=0 \end{cases}$ est | $-16$ | | |

**Exercice 3**

Pour chaque affirmation dans le tableau ci-dessous, réponds pas Vrai ou par Faux.

| Affirmations | Réponse |
|---|---|
| Un système de deux équations à deux inconnues admet une solution unique si et seulement si son déterminant est supérieur à zéro. | **faux** |
| Un système de deux équations à deux inconnues admet une infinité de solution si son déterminant est égal à zéro. | **Vrai** |
| Si le déterminant d'un système de deux équations à deux inconnues est égal à zéro, alors ce système admet soit une infinité de solution ou n'admet pas de solution | **Vrai** |

**Exercice 4**

1) Faux ; 2) Faux ; 3) Vrai ; 4) Faux

**Exercice 5**

| Affirmations | Réponse |
|---|---|
| Le système $\begin{cases} 2x+4y-8=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$ admet une unique solution | **Vrai** |
| Le système $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}$ a pour solution unique le couple $(1;2)$ | **Faux** |
| Le système $\begin{cases} 2x+4y-6=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases}$ a pour solution unique le couple $(5;-1)$ | **Faux** |
| Le système $\begin{cases} 2x+4y-8=0 \\ x+2y-4=0 \end{cases}$ admet une infinité de solution | **Vrai** |
| Le système $\begin{cases} 4x+8y-1=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases}$ n'admet pas de solution | **Vrai** |

**Exercice 6**

1) FAUX ; 2) FAUX ; 3) VRAI ; 4) FAUX

**Exercice 7**

ceux qui admettent une solution unique

$(S_1)$ ; $(S_2)$ ; $(S_4)$

**Exercice 8**

$$(S_1)\begin{cases} x + y = 100 \\ 6x + 4y = 450 \end{cases}$$

**Exercice 9**

$$(S_2)\begin{cases} x + y = 438 \\ 5x + 7y = 960 \end{cases}$$

**Exercice 10**

$$(S_3)\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 2650 \\ x + 5y + 2z = 1900 \\ 5x + y + 6z = 4550 \end{cases}$$

## EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT

**Exercice 11**

$det\ (\Sigma_1) = 2$ ; $det\ (\Sigma_2) = -19$ ; $det\ (\Sigma_3) = 0$

**Exercice 12**

1) $det\ (S) = -\frac{13}{18}$

2) On a : $det\ (S) = -\frac{13}{18}$ , comme $det\ (S) \neq 0$ alors (S) admet une unique solution dans IR².

**Exercice 13**

1) On a : $det\ (S_1) = -1$ , donc $(S_1)$ admet une solution une unique solution dans IR².

2) On a : $det\ (S_2) = 0$, donc $(S_2)$ n' admet pas une solution une unique solution dans IR².

3) On a : $det\ (S_3) = -4\sqrt{6}$ , donc $(S_3)$ admet une solution une unique solution dans IR².

4) On a : $det\ (S_4) = 0$, donc $(S_4)$ n' admet pas une solution une unique solution dans IR².

**Exercice 14**

1) Le système linéaire $(S_1)$ admet une solution unique si $a \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{15}{2}\right\}$

2) Le système linéaire $(S_2)$ admet une solution unique si $a \in \mathbb{R} - \left\{0; \frac{45}{7}\right\}$

3) Le système linéaire $(S_1)$ admet une solution unique si $a \in \mathbb{R} - \{-6; 6\}$

**Exercice 15**

On donne le système linéaire dans IR² suivant : $(S)\begin{cases} 4x - 6y = 14 \\ -2x + 3y = -7 \end{cases}$

1) $det\ (S) = 0$
2) On : $det\ (S) = 0$ , et en divisant chaque membre de $(E_1)$ par $-2$ on obtient $(E_2)$. Comme les équations $(E_1): 4x - 6y = 14$ et $(E_2): -2x + 3y = -7$ sont équivalentes alors (S) admet une infinité de solutions dans IR².

**Exercice 16**

On donne le système linéaire dans IR² suivant : $(S)\begin{cases} 18x - 3y = 27 \\ 6x - y = -9 \end{cases}$

1) $det\ (S) = 0$

2) On : $det\ (S) = 0$ , et en divisant chaque membre de $(E_1)$ par 3 on obtient $6x - y = 9$.
Comme $(E_1): 6x - y = 9$ et $(E_2): 6x - y = -9$ sont équivalentes alors (S) n'admet pas de solutions dans IR²

**Exercice 17**

$(\Sigma_1): S_{\mathbb{R}^2} = \{(1; -1)\}$ ; $(\Sigma_2): S_{\mathbb{R}^2} = \{(-1; 2)\}$ ; $(\Sigma_3): S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(x; x - \frac{1}{4}\right)\ x \in \mathbb{R}\right\}$

**Exercice 18**

$S_{\mathbb{R}^2} = \{(2; 3)\}$

$S_{\mathbb{R}^2} = \{(-2; 1)\}$

**Exercice 19**

$(\Sigma_1)$ : $S_{\mathbb{R}^3} = \{(0; 2; 1)\}$

$(\Sigma_2)$ : $S_{\mathbb{R}^3} = \{(-1; -2; 3)\}$

$(\boldsymbol{\Sigma_3})$ **:** $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}; \frac{13}{2}\right)\right\}$

**Exercice 20**

$(\Sigma_1)$ ; $S_{\mathbb{R}^3} = \{(2; -1; -10)\}$

$(\Sigma_2)$ ; $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(-\frac{4}{25}; -\frac{54}{25}; -\frac{103}{25}\right)\right\}$

$(\Sigma_3)$ **;** $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(-\frac{11}{10}; -\frac{9}{10}; -\frac{1}{10}\right)\right\}$

**Exercice 21**

$(\Sigma_1)$ ; $S_{\mathbb{R}^3} = \{(-4; 16; -11)\}$

$(\Sigma_2)$ ; $S_{\mathbb{R}^3} = \{(1; -1; 1)\}$

$(\Sigma_3)$ $S_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(\frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{9}{20}\right)\right\}$

**Exercice 22**

$(S_1)$ : $S_{\mathbb{R}^2} = \left\{(-\frac{3}{2};\frac{9}{2})\right\}$

$(S_2)$ : $S_{\mathbb{R}^2} = \{(9;7)\}$

$(S_3)$ : $S_{\mathbb{R}^2} = \left\{(\frac{390}{41};\frac{516}{41})\right\}$

$(S_4)$ : $S_{\mathbb{R}^2} = \{(1;-1)\}$

**Exercice 23**

$(\Sigma_1)$ ; $S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(\frac{4}{m+1};\frac{3m+1}{m+1}\right)\right\}$ avec $m \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$(\Sigma_2)$ ; $S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(\frac{2m+2}{m^2+1};\frac{2m-2}{m^2+1}\right)\right\}$ avec $m \in \mathbb{R}$

$(\Sigma_3)$; $S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(\frac{5m-14}{m(m-2)};\frac{-4}{m-2}\right)\right\}$ avec $m \in \mathbb{R} - \{0;2\}$

$(\Sigma_4)$ ; $S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(\frac{5m^2-7m-3}{(m-2)(m-3)};\frac{-m^2+16m-27}{(m-2)(m-3)}\right)\right\}$ avec $m \in \mathbb{R}$

$(\Sigma_5)$ ; $S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(\frac{-2m^2-2m+4}{-m^2+m-2};\frac{m^2-m-2}{-m^2+m-2}\right)\right\}$ avec $m \in \mathbb{R}$

**Exercice 24**

$(\Sigma_1)$ : $S_{\mathbb{R}^2} = \{(-6;5)\}$

$(\Sigma_2)$ : $S_{\mathbb{R}^2} = \{(10;1);(1;10)\}$

$(\Sigma_3)$ **:** $S_{\mathbb{R}^2} = \{(3;2);(-3;2)\}$

**Exercice 25**

1) Soient $x$ le nombre d'adultes et $y$ le nombre d'enfants, on obtient le système linéaire dans IR$^2$ suivant

$$(S)\begin{cases}10x + 7y = 460 \\ 2x + y = 80\end{cases}$$

2) Il y a 25 adultes et 30 enfants qui participent au voyage.

**Exercice 26**

Soient $x$ le la quantité d'avoine et $y$ la quantité de blé.

- Mise en équation
  - Pour satisfaire à des besoins nutritionnels de 200 g de protéines, on obtient l'équation suivante :

    $(E_1)$: $\frac{4}{30}x + \frac{3}{30}y = 200$

    $(E_1)$: $4x + 3y = 6000$

- Pour satisfaire à des besoins nutritionnels 1320 g d'hydrates, on obtient l'équation suivante :
  $(E_2): \frac{18}{30}x + \frac{24}{30}y = 1320$
  $(E_2): 3x + 4y = 6600$

- On obtient le système linéaire dans $IR^2$ suivant

$$(S)\begin{cases} 4x + 3y = 6000 \\ \\ 3x + 4y = 6600 \end{cases} \qquad S_{\mathbb{R}^2} = \{(600; 1200)\}$$

Pour satisfaire à des besoins nutritionnels de 200 g de protéines et 1320 g d'hydrates de carbone, il faut 600g d'avoine et 1200 g de blé.

**Exercice 27**

$$(S)\begin{cases} 300x + 250y = 320 \\ \\ 150x + 400y = 215 \end{cases} \qquad S_{\mathbb{R}^2} = \{(0{,}9; 0{,}2)\}$$

donc $80 \times 0{,}9 + 140 \times 0{,}2 = 100$

par suite la valeur énergétique de 80 g de bananes et de 140 g de clémentines est 100 kcal

**Exercice 28**

La longueur du champ est de 187,5 mètres et 107,5 mètres de largeur

**Exercice 29**

1)
*x* désigne le nombre de bracelets du modèle $M_1$
*y* désigne le nombre de bracelets du modèle $M_2$
*z* désigne le nombre de bracelets du modèle $M_3$

- Un bijoutier fabrique pendant une heure 12 bracelets
  On a : $(E_1): x + y + z = 12$
- Masse d'un bracelet en gramme
  On a : $(E_2): 5x + 5y + 10z = 75$
- Le cout de production des bracelets en francs
  On a : $(E_3): 7500x + 9000y + 15000z = 118500$

La situation peut se traduire à l'aide du système linéaire dans $IR^3$ suivant

$$(S)\begin{cases} 75x + 90y + 150z = 1185 \\ \\ 5x + 5y + 10z = 75 \\ \\ x + y + z = 12 \end{cases} \qquad S_{\mathbb{R}^3} = \{(5; 4; 3)\}$$

2) Il y a 5 bracelets du modèle $M_1$ , 4 bracelets du modèle $M_2$ et 3 bracelets du modèle $M_3$

**Exercice 30**

Le prix du billet d'entrée pour un adulte est 2500 et celui d'un enfant est de 1500.

**Exercice 31**

Mise en équation

$$(S)\begin{cases} x+y=8 \\ 3x+y=\frac{60}{\pi} \end{cases} \qquad S_{\mathbb{R}^2}=\left\{\left(\frac{30-4\pi}{\pi};\frac{6(2\pi-5)}{\pi}\right)\right\}$$

la longueur du cylindre est $\frac{30-4\pi}{\pi}$ et la hauteur cône est $\frac{6(2\pi-5)}{\pi}$

**Exercice 32**

On peut traduire la situation à l'aide du système linéaire dans $IR^2$ suivant :

$$(S)\begin{cases} x+y=100 \\ \frac{35}{100}x+\frac{60}{100}y=\frac{50}{100}\times 100 \end{cases} \qquad S_{\mathbb{R}^2}=\{(40;60)\}$$

Il faudrait fondre 40g de l'alliage contenant 35 % d'argent et 60g de l'alliage contenant 60 % d'argent.

**Exercice 33**

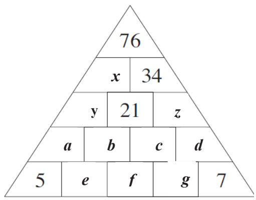
Soient $x$ le montant à investir sur le fond à 6% et $y$ le montant à investir sur le fond à 8%

$$(S)\begin{cases} x+y=15000 \\ 6x+8y=100000 \end{cases} \qquad S_{\mathbb{R}^2}=\{(10000;5000)\}$$

Pour qu'elle reçoive 1000 f à la fin de l'année, elle doit investir 10000 sur le fond à 6% et 5000 le fond à 8%.

**Exercice 34**

$x$=42 ; $y$=21 ; $z$=13 ; $a$=8 ; $b$=13 ; $c$=8 ; $d$=5 ; $e$=3 ; $f$=10 et $g$ = -2




**Exercice 35**

**On a :**

$P(1)=2 \Leftrightarrow a+b+c=0$

$P(-1)=-1 \Leftrightarrow -a+b-c=-3$

$P(2)=3 \Leftrightarrow 8a+4b+2c=1$

On obtient le système linéaire dans $IR^3$ suivant

$$(S)\begin{cases} a+b+c=0 \\ -a+b-c=-3 \\ 8a+4b+2c=1 \end{cases} \qquad S_{\mathbb{R}^3}=\left\{\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{2};\frac{5}{6}\right)\right\}$$

D'où $a = \frac{2}{3}$ ; $b = -\frac{3}{2}$ et $c = \frac{5}{6}$

Donc $P(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{6}x + 2$

**Exercice 36**

On a :

$s(2) = 110 \iff 2a + 2v_0 + s_0 = 110$

$s(4) = 220 \iff 8a + 4v_0 + s_0 = 220$

$s(10) = 670 \iff 50a + 10v_0 + s_0 = 670$

On obtient le système linéaire dans IR$^3$ suivant

$$\begin{cases} 2a + 2v_0 + s_0 = 110 \\ 8a + 4v_0 + s_0 = 220 \\ 50a + 10v_0 + s_0 = 670 \end{cases} \qquad S_{\mathbb{R}^3} = \{(5; 40; 20)\}$$

D'où : $a = 5$ ; $v_0 = 40$ et $s_0 = 20$

Donc $s(t) = \frac{5}{2}t^2 + 40t + 20$

**Exercice 37**

$x$ désigne le montant du premier
$y$ désigne le montant du deuxième
$z$ désigne le montant du troisième

On obtient le système linéaire dans IR$^3$ suivant

$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} = 3000000 \\ \frac{x}{3} + y = 3000000 \\ \frac{x}{4} + z = 3000000 \end{cases} \qquad S_{\mathbb{R}^3} = \{(1800000; 2400000; 2550000)\}$$

le montant du premier est de 1.800.000 francs
le montant du deuxième est de 2.400.000 francs
le montant du troisième est de 2.550.000 francs

**Exercice 38**

Soit $x$ F le prix d'un kilogramme de Robusta et $y$ F le prix d'un Kilogramme d'arabica.

- Le prix d'un paquet de café extra est défini par : $120x + 130y = 13,3$
- Le prix d'un paquet de café suprême est défini par : $50x + 200y = 15,75$

Résolvons le système $\begin{cases}120x+130y=13,3\\50x+200y=15,75\end{cases}$ afin de déterminer le couple $(x\,;y)$

$$On\ a\ \begin{cases}120x+130y=13,3\\50x+200y=15,75\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}600x+650y=66,5\\-600x-2400y=-189\end{cases}\Rightarrow -1750y=-122,5$$

$$Alors\ y=0,07\ et\ x=\frac{15,75-200\times0,07}{50}.$$

$$Donc\ S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{(0,035;0,07)\}$$

Ainsi le prix d'un kilogramme de Robusta est 0,035F et le prix d'un kilogramme d'Arabica est 0,07F

Par Conséquent 250 kilogramme de Robusta couterait 8,75F et le prix de 250 kilogramme d'Arabica serait 17,5F

**Exercice 39**

Soit $x$ F le prix d'entrée à tarif normal pour un adulte et $y$ F le prix d'entrée à tarif normal pour un enfant.

- La recette du 19 décembre est défini par : $90x+42y=4290$
- La recette du 20 décembre est défini par : $140(1-\frac{25}{100})x+54(1-\frac{20}{100})y=4860$

Résolvons le système $\begin{cases}90x+42y=4290\\140(1-\frac{1}{4})x+54(1-\frac{1}{5})y=4860\end{cases}$ afin de déterminer le couple $(x\,;y)$

$$On\ a\begin{cases}90x+42y=4290\\140(1-\frac{1}{4})x+54(1-\frac{1}{5})y=4860\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9x+4,2y=429\\21x+8,64y=972\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}63x+29,4y=3003\\-63x+-25,92y=-2916\end{cases}$$

$$D'ou\ 3,48y=87\Leftrightarrow y=25$$

$$Et\ x=\frac{429-4,2\times25}{9}=36$$

$$Donc\ S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{(36;25)\}$$

Ainsi, à tarif normal, le prix d'entrée pour un adulte est 36F et celui d'un enfant est 25F.

**Exercice 40**

Soit *x, y* et *z* les longueurs, en km, respectives des montées, des plats et des descentes pour le trajet de A vers B.

- La distance, en km, des ville A et B est définie par : $x+y+z=23$
- Sur le parcourt de la ville A à la ville B on a :
    - Le temps de parcourt, en mn, en montée est $7,8x$
    - Le temps de parcourt, en mn, du terrain plat est $5y$
    - Le temps de parcourt, en mn, en descente est $4z$

D'où le temps de parcourt, en mn, de la ville A à la ville B est défini par
$7,8x+5y+4z=120$

- En effectuant le retour de la ville B à la ville A on a :
  - Le temps de parcourt, en mn, en montée est $7,8z$
  - Le temps de parcourt, en mn, du terrain plat est $5y$
  - Le temps de parcourt, en mn, en descente est $4x$

  D'où le temps mis au retour, en mn, de la ville B à la ville A est défini par
  $4x+5y+7,8z=134$

Résolvons le système $\begin{cases} x+y+z=23 \\ 7,5x+5y+4z=120 \\ 4x+5y+7,5z=134 \end{cases}$ afin de déterminer le triplet $(x\,;y\,;z)$

$$On\ a \begin{cases} x+y+z=23 \\ 7,5x+5y+4z=120 \\ 4x+5y+7,5z=134 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=23 \\ 0-2,5y-3,5z=-52,5 \\ 0+y+3,5z=42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=23 \\ 0+0+5,25z=52,5 \\ 0+y+3,5z=52,5 \end{cases}$$

$$D'ou\ z=10\ \ y=42-3,5\times 10\ et\ x=23-10-7\ \ et\ \ S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{(6;7;10)\}$$

**Exercice 41**

Soit $x$ le nombre de ration existant initialement par are, $y$ le nombre de ration produite chaque jour par are et $z$ le nombre de bœufs que pourra nourrir 96 ares en 18 jours.

- Le nombre de ration disponible par are en 12 jours est défini par $x+12y$
- Le nombre de ration disponible par are en 15 jours est défini par $x+15y$
- Le nombre de ration disponible par are en 18 jours est défini par $x+18y$
- Le nombre de ration consommé par are en 12 jours est $\dfrac{75\times 12}{60}=15$
- Le nombre de ration consommé par are en 15 jours est $\dfrac{81\times 15}{72}=16,875$
- Le nombre de ration consommé par are en 18 jours est $\dfrac{18\times z}{96}=\dfrac{3}{16}z$

Résolvons le système $\begin{cases} x+12y=15 \\ x+15y=16,875 \end{cases}$ afin de déterminer le couple $(x\,;y)$

$$On\ a \begin{cases} x+12y=15 \\ x+15y=16,875 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+12y=15 \\ 0+3y=1,875 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7,5 \\ y=0,625 \end{cases}$$

$$Donc\ S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{(7,5;0,625)\}$$

$$Ainsi\ 7,5+18\times 0,625=\frac{3}{16}z \Leftrightarrow z=100$$

Par conséquent, un pré de 96 ares pourra nourrir 100 bœufs en 18jours.

## SITUATION COMPLEXE

**Exercice 42**

$$(S)\begin{cases} 3x + y + 2z = 130 \\ 5x + y + 4z = 210 \\ 4\,x + y + 2z = 140 \end{cases} \qquad S_{\mathbb{R}^3} = \{(10; 40; 30)\}$$

La production journalière du tapissier est de 10 canapés, 40 chaises et 30 fauteuils.

On a : $10 \times 15000 + 40 \times 2500 + 30 \times 7000 = 460000$
Comme $480000 > 460000$ alors l'entreprise pourra acquérir ses meubles.

**Exercice 43**

La situation peut se traduire à l'aide du système linéaire dans $IR^3$ suivant

$$(S)\begin{cases} 50x + 70y + 90z = 2350 \\ 10x + 20y + 30z = 650 \\ 20x + 20y + 30z = 800 \end{cases} \qquad S_{\mathbb{R}^3} = \{(15; 10; 10)\}$$

On a
L'unité A fabrique 15 produits, l'unité B fabrique 10 produits et l'unité C fabrique 10 produits par jour, le groupe 1 aura donc la récompense.

# 12 SUITES NUMÉRIQUES

**La situation d'apprentissage**

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (lecture silencieuse des élèves, lecture par un élève et par le professeur), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte en leur demandant par exemple d'en faire un résumé.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

| **Constituants de la situation** | **Exemples de questions possibles** | **Réponses possibles des élèves** |
|---|---|---|
| Contexte | ✓ Où se déroule la scène ?<br>✓ De quoi s'agit-il ? | ✓ Dans un village<br>✓ Une étude démographique. |
| Circonstances | Pour quelles raisons on sollicite les élèves ? | Pour programmer de façon efficiente le développement (écoles, centres de santé, marchés……).du village |
| Tâche | Que doivent faire les élèves pour répondre à la sollicitation ? | prévoir le nombre d'habitants dans ce village année par année sans recours à de nouveaux recensements dans les trente années à venir. |

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation, tout en faisant remarquer l'importance des suites numériques pour traduire, traiter et trouver des solutions à des problèmes de vie courante, d'où son importance dans le programme scolaire. Il invitera les apprenants à être très attentifs car les suites numériques interviennent dans la suite du programme et dans plusieurs domaines notamment en physiques, en SVT. Il annoncera par la suite le titre et le plan de la leçon

Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

**Découverte des activités**

**Activité 1** :

| **t** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ en $m/s$ | **10** | **10,8** | **11,6** | **12,4** | **13,2** | **14** | **14,8** | **15,6** | **16,4** | **17,2** | **18** |

**Exercice de fixation1** :

$f$ ; $h$ et $w$

**Activité 2** :

Soit $f$ la fonction définie de ℕ vers ℝ par : $f(x)$= $5x^3$- $x^2$ +1

1) $f$ est une fonction numérique définie sur ℕ
2) $f_2 = 37$ ; $f_{20} = 39\,601$ ; $f_{100} = 4\,990\,0$à1 ; $f_{50} = 622\,501$

3) Pour tout entier naturel $n$, $f_n = f(n)$= $5n^3$- $n^2$ +1

**Exercice de fixation 2**

$u_0 = 2$ ; $u_5 = -623$ ; $u_{15} = -16873$; $v_{50} == \frac{1}{50}$ et $v_{60} == \frac{1}{60}$

**Activité 3**

a) l'application $p$ qui à chaque durée de $n$ en heures associe la quantité $p_n$ de bactéries est une fonction numérique definie sur ℕ .
b) $p_0 = 5$ ; $p_1 = 6{,}5$; $p_2 = 8{,}45$ ; $p_3 = 10{,}985$ et $p_4 = 14{,}2805$
c) $p_{n+1}$= $p_n$+ 0,3 $p_n$+ = 1,3 $p_n$

**Exercice de fixation 3**

Formule explicite :( $v_n$) ; ( $w_n$)
Formule de récurrence :( $u_n$) ; ( $k_n$) ; ( $f_n$) ; ( $g_n$)

**Activité 4**
objectif : représenter graphiquement les termes d'une suite définie par une formule de récurrence.

(voir étapes de représentation d'une suite définie suite définie par une formule de récurrence)

**Solution exercice de fixation 4**

(voir étapes de représentation d'une suite définie suite définie par une formule de récurrence)

**Activité 5**

1) $u_0 = 4$
2) pour tout $n \in$ ℕ, $u_{n+1}$- $u_n$ = $3(n+1) + 4$ – (3 $n$ +4)= $3n + 3 + 4$ – 3 $n$ -4=3

**Exercice de fixation 5**

a. faux
b. faux
c. vrai
d. vrai

**Activité 6**

1)
$u_1 = u_0 + r$ $u_2 = u_1 + r$ $u_3 = u_2 + r$ $u_4 = u_3 + r$ ………………
………………… $u_{n-2} = u_{n-3} + r$ $u_{n-1} = u_{n-2} + r$ $u_n = u_{n-1} + r$

2)
$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n = u_0 + r + u_1 + r + u_2 + r + u_3 + r + \cdots + u_{n-3} + r + u_{n-2} + r + u_{n-1} + r = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + + u_{n-1} + nr$

3)
On a : $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + nr$
donc : $(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1}) + u_n = u_0 + (u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + + u_{n-1}) + nr$
Ainsi : $u_n = u_0 + (u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1}) + nr - (u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1})$
$= u_0 + nr$

**Exercice de fixation 6**

$u_n = 2 + 3n$

**Activité 7**

1) commutativité de l'addition
2) $u_{k+1} = u_k + r$ , $u_{k+2} = u_k + 2r$ , …, $u_{k+p-2} = u_k + (p-2)\, r$, $u_{k+p-1} = u_k + (p-1)\, r$
3) $u_{k+p-2} = u_{k+p-1} - r$, $u_{k+p-3} = u_{k+p-1} - 2\, r$ ……m, $u_{k+2} = u_{k+p-1} - (p-3)$ ,
$u_{k+1} = u_{k+p-1} - (p-2)\, r$ et $u_k = u_{k+p-1} - (p-1)\, r$ en fonction de $u_{k+p-1}$ et $r$
4) (1) : S = $u_k + u_k + r + u_k + 2r + \ldots\ldots + u_k + (p-2)\, r + u_k + (p-1)\, r$
(2) : S = $u_{k+p-1} + u_{k+p-1} - r + u_{k+p-1} - 2 + \ldots + u_{k+p-1} - (p-3)\, r + u_{k+p-1} - (p-2)\, r + u_{k+p-1} - (p-1)\, r$

2S = $(u_k + u_{k+p-1}) + (u_k + r + u_{k+p-1} - r) + (u_k + 2r + u_{k+p-1} - 2r) + \ldots\ldots$
$(u_k + (p-1)r + u_{k+p-1} - (p-1)\, r) + (u_k + (p-2)\, r + u_{k+p-1} - (p-2)\, r) +$
$(u_k + (p-1)\, r + u_{k+p-1} - (p-1)\, r)$
$= (u_k + u_{k+p-1}) + \left(u_k + u_{k+p-1}\right) + \cdots \left(u_k + u_{k+p-1}\right) + \left(u_k + u_{k+p-1}\right)$
$= p\,(u_k + u_{k+p-1})$
Donc S = $\frac{1}{2}\, p\,(u_k + u_{k+p-1})$

**Exercice de fixation 7**

$u_5 + \cdots \ldots \ldots \ldots + u_{50} = \frac{1}{2} \times 46 \times (8 - 10) = -46$

**Activité 8**

1) $v_0 = 3 \times 2^0 = 3$
2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3 \times 2^{n+1}}{3 \times 2^n} = \frac{3 \times 2^n \times 2}{3 \times 2^n} = 2$

**Exercice de fixation 8**

a. vrai
b. vrai
c. faux
d. vrai

**Activité 9**

1) $v_1 = v_0q^1$ ;$v_2 = \text{q}v = v_0q^2$ ; $v_3 = \text{q}v_2 = v_0q^3$; $v_4 = v_0q^4$ ; $v_5 = v_0q^5$ ;$v_6 = v_0q^6$
2) $v_n = v_0q^n$

**Exercice de fixation 9**

$v_n = 2(-5)^n$

**Activité 10**

1) S= $v_k + v_kq + v_kq^2 + v_kq^3 \ldots\ldots + v_kq^{p-2} + v_kq^{p-1}$
2) S= $v_k(1+ q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots + q^{p-2} + q^{p-1}) = v_k \frac{1-q^p}{1-q}$

**Exercice de fixation 10**

$w_0 + \cdots \ldots \ldots \ldots + w_{199} = w_0 \frac{1-3^{200}}{1-3} = 2\text{x} \frac{1-3^{200}}{1-3} = -1 + 3^{200}$

**Question d'évaluation**
**Question 1**

**Solution exercice non résolu**

- Soit $v_n$ le nombre de voiture dans le parking au nième jour de la semaine
- $v_{n+1} = v_n + 10$ donc $(v_n)$ est une suite arithmétique de raison 10 et de premier terme 350
- S= $v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = \frac{1}{2}$ x 7 $(v_0 + v_6)$ avec $v_6 = v_0 + 6\text{x}10 = 410$
  Ainsi : S= $\frac{1}{2}$ x 7 (350 + 410)= 2660 voitures.

**Question 2**
**Solution exercice non résolu**

$u_n = \frac{1}{15} + \frac{\sqrt{2}}{3}n$ donc $u_n$ est une suite arithmétique de premier terme $\frac{1}{15}$ et de raison $\frac{\sqrt{2}}{3}$

**Question 3**
**Solution exercice non résolu**

$v_n = -\frac{1}{7}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ donc $v_n$ est une suite géométrique de premier terme $-\frac{1}{7}$ et de raison $\frac{2}{3}$

**Question 4**
**Solution exercice non résolu**

1. $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{34} = 35 \times \frac{u_0 + u_{34}}{2} = 35 \times \frac{3 - 65}{2} = -1\,085$
2. $S = v_4 + v_5 + \cdots + v_{15} = 35 \times \frac{v_4 + v_{15}}{2} = 12 \times \frac{-10 - 43}{2} = -318$

**Question 5**
**Solution exercice non résolu**

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$ donc
$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_7 = 1 \times \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 255$

**MES SEANCES D'EXERCICES**
**Exercices de fixation**

**Exercice 1**

*h ;* *g ;* *w ;*

**Exercice 2**

On appelle suite numérique, toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$

**Exercice 3**

$u_0 = 0$; $u_1 = -1$; $u_2 =$-5 ; $v_0 = 0$ ; $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; $v_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

**Exercice 4**

$u_1 = \sqrt{14}$ ; $u_2 = \sqrt{5\sqrt{14} + 4}$ ; $u_3 = \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{14} + 4} + 4}$

**Exercice 5**

$u_2 = u_1 - 4u_0 = -22$ ; $u_3 = u_2 - 4u_1 = -14$ ; $u_4 = u_3 - 4u_2 = 74$

**Exercice 6**

Représenter dans le plan repère (O, I, J), $x \mapsto \sqrt{x}$ puis suivre les étapes de construction

**Exercice 7**

Représenter dans le plan repère (O, I, J), $x \mapsto x^2$ puis suivre les étapes de construction

**Exercice 8**

$w_{n+1} = w_n + 3$

**Exercice 9**

$w_{n+1} - w_n = -(n+1) + \sqrt{5} - (-n + \sqrt{5}) = -n - 1 + \sqrt{5} + n - \sqrt{5} = -1$ suite arithmétique de raison -1 et de premier terme $w_0 = \sqrt{5}$

**Exercice 10**

$u_n = -3 + 2n$ donc : $u_5 = 7$ , $u_{10} = 17$ et $u_{100} = 197$

**Exercice 11**

$u_n = u_p + (n-p)r$ donc $u_{10} = u_3 + (10-3)r$ ainsi $r = \frac{3}{7}$

**Exercice 12**

$w_0 + \cdots \ldots \ldots \ldots + w_{19} = 20 \text{x} \frac{60+2}{2} = 620$

**Exercice 13**

$v_n = 9 - 4n$ , Donc $v_0 = 9$ *et* $v_{99} = -387$

$v_0 + \cdots \ldots \ldots \ldots + v_{99} = 100 \text{x} \frac{9-387}{2} = -18900$

**Exercice 14**

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \text{x}\, 5^{n+1}}{3 \text{x}\, 5^n} = 5$ donc $(u_n)$ est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme 3

**Exercice 15**

$v_{n+1} = 3\, v_n$

**Exercice 16**

$w_n = 5 \text{x} (-2)^n$

**Exercice 17**

$v_5 = -96$ , $v_{10} = -3072$ et $v_{100} = -3 \text{x} 2^{100}$

**Exercice 18**

$u_{10} = u_0 \text{x} 7^{10}$ donc $u_0 = \frac{14}{7^{10}} = \frac{2}{7^9}$

**Exercice 19**

- $u_{51} = u_5 \text{x } 2^{46} = -10 \text{ x } 2^{46}$
- $u_{51} + \cdots \ldots \ldots \ldots + u_{100} = u_{51} \text{x} \frac{1-2^{50}}{1-2} = -10 \text{ x } 2^{46} \text{x} \frac{1-2^{50}}{1-2} = 10 \text{ x } 2^{46} \text{x}(1 - 2^{50})$

**Exercice 20**

$v_0 + \cdots \ldots \ldots \ldots + v_{29} = v_0 \frac{1-(-4)^{30}}{1-(-4)} = 9 \text{x} \frac{1-(-4)^{30}}{1-(-4)} = 9 \text{x} \frac{1-4^{30}}{5}$

**EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT**

**Exercice** 21

1)
   - $r = \frac{w_{12}-w_4}{12-4} = -\frac{3}{8}$
   - $w_4 = w_0 + 4 \text{x} \frac{-3}{8}$ donc $w_0 = w_4 - 4 \text{x} \frac{-3}{8} = 8 + \frac{3}{2} = \frac{19}{2}$
2) $w_n = \frac{19}{2} - \frac{3}{8}\, n$
3) $w_4 + \cdots \ldots \ldots \ldots + w_{12} = \frac{117}{2}$

**Exercice** 22

1) $u_{12} = 5$ donc $u_{13} = 5 + 10 = 15$ $u_{14} = 15+10 = 25$
2) $u_0 = -115$ et $u_{99} = 875$ donc $u_0 + \cdots \ldots\ldots + u_{99} = 100 \text{ x } (\frac{-115+875}{2}) = 38000$

**Exercice** 23

1) $u_{n+1} - u_n = -3$
2) $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1) \text{ x } (\frac{u_0+u_n}{2} = (n+1) \text{ x } (\frac{u_0+u_n}{2}) = (n+1) \text{ x } (\frac{10-3n+5}{2})$

**Exercice** 24

$v_0 + \ldots + v_9 = v_0 \text{ x } \frac{3^{10}-1}{3-1} = -2 \text{ x } \frac{3^{10}-1}{3-1} = -3^{10} + 1$

**Exercice 25**

$v_0 + \ldots + v_9 = v_0$ x $\frac{2^{10}-1}{2-1} = 5$ x $\frac{2^{10}-1}{2-1} =$ 5x ( $2^{10} - 1$)= 5115

**Exercice** 26

Soit ( $w_n$) une suite géométrique telle que $w_{12} = 36$ et $w_{10} = 6$

1) $w_{12} = w_{10}q^2$ donc $q^2 = \frac{w_{12}}{w_{10}} = \frac{36}{6} = 6$ ainsi $q = \sqrt{6}$

   $w_{10} = w_0 q^{10}$ donc $w_0 = \frac{w_{10}}{q^{10}} = \frac{6}{\sqrt{6}^{10}} = \frac{6}{6^5} = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296}$

2) $w_n = w_0 q^n = \frac{1}{1296}\sqrt{6}^n$

3) $w_0 + \cdots \ldots \ldots \ldots + w_{12} = \frac{1}{1296}$x$\frac{\sqrt{6}^{13}-1}{\sqrt{6}-1}$

**Exercice** 27

1) $u_5 = u_2$x$(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}u_2$

2) $u_5 = \frac{5}{8}$; $u_2 = u_0(\frac{1}{2})^2 = 5$ donc $u_0 = 20$

**Exercice 28**

1) $u_{2n} = (2n)^2 = 4n^2 = 4\,u_n$

2) $u_{3n} = (9n)^2 = 9\,n^2 = 9u_n$

**Exercice 29**

2 +5 + 8 + 11 + ……+ (3$n$ +2) = $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ avec $u_n = 3n + 2$ qui est une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 3 d'où le résultat

**Exercice** 30

1+2+3+…….+1000 = 1000 $\frac{1+1000}{2}$= 500500 (somme des 1000 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1)

**Exercice 31**

Somme des 40 premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1

S = $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{39}} = 1(\frac{1-(\frac{1}{2})^{40}}{1-\frac{1}{2}}) = 2-\frac{1}{2^{39}}$

**Exercice** 32

1.
   - $7u_{n+1} = 7u_n - 2 \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n - \frac{2}{7}$ donc suite arithmétique de raison $-\frac{2}{7}$
   - $u_5 = u_0 + 5$x$(-\frac{2}{7})$ donc $u_0 = u_5 + 5$x$\frac{2}{7} = 2+\frac{10}{7}=\frac{24}{7}$

2. $u_n = \frac{24}{7} - \frac{2n}{7} = \frac{24-2n}{7}$

**3.** $u_9 = \frac{6}{7}$ donc $u_0 + \cdots \ldots + u_9 = 10$x$\frac{\frac{24}{7}+\frac{6}{7}}{2} = 5$x$\frac{30}{7} = \frac{150}{7}$

**Exercice 33**

1.
   - $v_0 = u_0 - 1 = 5$
   - $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1) = \frac{1}{5}v_n$ donc suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme 5

2. $v_n = 5$x$(\frac{1}{5})^n = \frac{1}{5^{n-1}}$

3. $u_n = \frac{1}{5^{n-1}} + 1$
4. $S = u_0 + u_1 \ldots + u_{19} = v_0 + 1 + v_1 + 1 \ldots\ldots + v_{19} + 1 = v_0 + v_1 + \cdots + v_{19} + 20$

   Donc $S = 5x\, \frac{1-\frac{1}{5^{20}}}{1-\frac{1}{5}} + 20$

**Exercice 34**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_n = 3^n + 5n - 6$

1) $u_0 = 5$ ; $u_1 = 2$ : $u_3 = 36$ ; $u_4 = 95$ ; $u_5 = 262$ et $u_6 = 753$
2) Calcule : $S = u_0 + u_1 \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{100}$

$u_n = a_n + b_n = 3^n + 5n - 6$ avec $a_n = 3^n$ et $b_n = 5n - 6$

$(a_n)$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 1

$(b_n)$ est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $-6$

donc $S = u_0 + u_1 \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{100} = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{100}) + (b_0 + b_1 \ldots\ldots\ldots\ldots + b_{100})$

Ainsi : $S = 1x\, \frac{1-3^{101}}{1-3} + 101x\frac{-6+494}{2}$

**Exercice 35**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 + \sqrt{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{{u_n}^2 - 2u_n + 4} \end{cases}$

3) $u_1 = 1 + \sqrt{5}$; $u_2 = 1 + 2\sqrt{2}$ et $u_3 = 1 + \sqrt{11}$
4) On pose $v_n = (u_n - 1)^2$
   a)
      - $v_0 = 2$ premier terme
      - $v_{n+1} = {u_n}^2 - 2u_n + 4 = (u_n - 1)^2 + 3 = v_n + 3$ suite arithmétique de raison 3
   b) $v_n = 2 + 3\,n$
   c) $u_{33} = 1 + \sqrt{v_{33}} = 1 + \sqrt{101}$
   d) $v_6 + v_7 + \cdots + v_{50} = 45x\, \frac{20+152}{2} = 3870$

**Exercice 36**

- $u_0 + u_1 \ldots\ldots\ldots\ldots + u_p = (p + 1)\ \frac{-175+35}{2} = -70(p + 1) = -2170$ donc $p = 30$
- $u_p = u_{30} = 35 = u_0 + 30\,r$ ainsi : $r = \frac{35-(-175)}{30} = 7$

**Exercice 37**

1. faire figure
2. $u_1 = A_1A_2 = OA_1 = 1, u_2 = A_2A_3 = OA_2 = \sqrt{2}, u_3 = OA_3 = 2$ et $u_4 = OA_4 = 2\sqrt{2}$
3. $u_{n+1} = A_{n+1}A_{n+2} = OA_{n+1} = \sqrt{(OA_n)^2 + (A_nA_{n+1})^2}$ or $OA_n = A_nA_{n+1}$ car triangle isocéle , donc $u_{n+1} = \sqrt{2(A_nA_{n+1})^2} = \sqrt{2(u_n)^2} = \sqrt{2}\, u_n$ on a ainsi une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 1
4. Soit l la longueur de la spirale $A_1A_2 \ldots\ldots A_{100}$,

   on a $l = u_1 + u_2 \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{99} = 1\left(\frac{1-(\sqrt{2})^{99}}{1-\sqrt{2}}\right)$

**Exercice 38**

1. $u_0 = 4$ ; $u_1 = 4 + r$ et $u_2 = 4 + 2r$ or ${u_2}^2 = {u_1}^2 + {u_0}^2$ on obtient :
   $(4 + 2r)^2 = (4 + r)^2 + 4^2 \Leftrightarrow 3r^2 + 8r - 16 = 0$ on résout et on obtient $r = \frac{4}{3}$ car
   $u_0 < u_1 < u_2$
2. $u_0 + \cdots \ldots \ldots . + u_{29} = 700$

**SITUATIONX COMPLEXES**

**Exercice 39**

**Premier contrat** :

On a une suite arithmétique de raison 100 et de premier terme 2000

$u_0 + \cdots \ldots \ldots . + u_{35} = 36\,\frac{2000+5500}{2} = 135000$ francs

**Deuxième contrat** :

On a une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme 2000

$u_0 + \cdots \ldots \ldots . + u_{35} = 2000\,\left(\frac{1-(\mathbf{1{,}05})^{36}}{\mathbf{1-1{,}05}}\right) \approx 191672{,}586$ francs

Le premier contrat est plus avantageux

**Exercice 40**

le montant à payer chaque année est une suite géométrique de premier terme 600000 et de raison 1,05 donc le montant total à payer pendant les 10 ans est :

$u_0 + \cdots \ldots \ldots . + u_9 = 600000\,\left(\frac{1-(\mathbf{1{,}05})^{10}}{\mathbf{1-1{,}05}}\right) \approx 7546735$ francs

# 13 ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

**La situation d'apprentissage**

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (lecture silencieuse des élèves, lecture par un élève et par le professeur), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte en leur demandant par exemple d'en faire un résumé.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

| **Constituants de la situation** | **Exemples de questions possibles** | **Réponses possibles des élèves** |
|---|---|---|
| Contexte | ✓ Où se déroule la scène ?<br>✓ De quoi s'agit-il ? | ✓ Dans un village<br>✓ Construction des bureaux d'une coopérative. |
| Circonstances | Pour quelles raisons tu veux les aider ? | Les propriétaires se demandent comment faire pour s'assurer que le plan contenant la face A soit perpendiculaire au plan contenant la face D |
| Tâche | Que dois-tu faire pour les aider ? | Etudier avec les élèves de la classe, les notions relatives à l'orthogonalité dans l'espace. |

.

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation, tout en faisant remarquer l'importance de la géométrie dans l'espace, en particulier l'orthogonalité dans l'espace pour traduire, traiter et trouver des solutions à des problèmes de vie courante (architecture, aménagement urbain,…) d'où son importance dans le programme scolaire. Il invitera les apprenants à être très attentifs car dans le programme scolaire la géométrie de l'espace est présente à tous les niveaux dans les séries scientifiques. Il annoncera par la suite le titre et le plan de la leçon

Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

**Découverte des habiletés**

**Activité 1 :** Droites orthogonales

1) ABFE est un carré car côté d'un cube.
2) EFGH est un carré.
3) ABFE est un carré.

**Exercice de fixation 1**

(AB)∥ (EF) et (DH) ∥ (AE).

**Activité 2 :** Droites et plans orthogonaux

1) BCGF carré
2) I milieu de [HF] et J milieu de [DB]
   J appartient à la droite (AC) , (IJ) ⊥ (AC) ,
   (IJ) ∥ (FB) et (IJ) ∥(CG) Justifie que la droite est orthogonale aux droites (BF) et (CG).
3) ABCD carré de diagonale [AC] et de côté [BC]
4) (DC) et (BC) sont deux droites sécantes en C
5) (AE) ∥ (CG) et (CG) orthogonale à (DC) et (BC)

**Exercice de fixation 2**

1) (BF) est orthogonale aux droites (EF) et (FG)
2) (DC) est orthogonale aux droites (CG) et (BC) plan (BCG).

**Activité 3**

1) I appartient au plan (EFG))
2) J appartient à la droite (AC) contenue dans le plan (ABC)
3) (IJ) est orthogonale aux (DB) et (AC) deux droites sécantes du plan (ABC)

**Exercice de fixation 3**

1-faux ; 2-faux ; 3-vrai ; 4-faux ; 5vrai

**Activité 4 :**

1)
   a) La droite (EF) est orthogonale au plan (P) en G.
   b) G.
2)
   a) si M un point de la droite (AB) de projeté orthogonale M’ sur (P) alors M’ appartient à l’intersection du plan (P) et du plan (ABA’) qui est (A’B’)
   b) soit H’ un point de de la droite (A’B’**)**, il existe un et un seul point H de la droite (AB) tel que (HH’) parallèle à (AA’)
   c) (A’B’**)**

**Exercice de fixation 4**

1-A ; 2-A ; 3-C ; 4-C ;5-B ;6-B

**Activité 5**

1) [HD] ⊥ (ABC) et [FB] ⊥ (ABC)
2) (IJ) ⊥ (ABC)
3) I est l’intersection des diagonales du carré EFGH
4) J est l’intersection des diagonales du carré ABCD

**Exercice de fixation 5**

[BE] est le projeté orthogonal de [AD] sur le plan (BCF) donc G milieu de [BE].

**Activité 6 :**

1) J milieu de [BD], (GK) est orthogonale à (HK) et (JK)
2) GK < GF ; GK < GH ; GK < GB ; GK < GD

**Exercice de fixation 6**

1-faux ;2-faux ;3-vrai ;4-vrai ;5-vrai

**Activité 7**

1) La droite (AB) est l'intersection des plans ($P_1$) et ($P_2$)
2) ($d_2$) est orthogonale à toute droite de ($P_1$) donc à ($d_1$),de plus ($d_1$) est orthogonale à (AB)

**Exercice de fixation7**

1- vrai ;2-faux ;3-vrai ;4-faux

**QUESTION D'EVALUATION**

**Question 1 : Comment démontrer que deux droites sont orthogonales ?**
**<u>Exercice non résolu</u>**

- (AE) ⊂ (ABE)
- (AB) ⊂ (ABE) et (EB) ⊂ (ABE) , (AB) et (EB) sont sécantes
- (AC) ⊥ (EB) et (AC) ⊥ (AB)
- donc (AC) ⊥ (AEB) qui contient (AE) donc (AC) ⊥ (AE)

**Question 2 : Comment démontrer que deux plans sont perpendiculaires ?**
**<u>Exercice non résolu</u>**

(DEF) // (ABC) et (DEF) ⊥ (BEC) donc (ABC) ⊥ (BEC)

**MES SEANCES D'EXERCICES**
**Exercices de fixation**

**Exercice 1**

1 ; 3 ; 4

**Exercice 2**

1-A ; 2-A ; 3-C ; 4-A

**Exercice 3**

1-faux ; 2-faux ; 3-faux ; 4-vrai ; 5-faux

**Exercice 4**

(AB) ⊥ (MB) pour tout point M du plan car (D) ⊥ (P) donc ABM est rectangle en B

**Exercice 5**

1) p(D) = D, p(C)= F et p(B) = E
2) p ([DC])= [DF], p ([AD])= {D} et p ([BF]) = [EF]
3) p(ABED) = [DE] et p(BCFE) = [EF]
4) p(BCD)=EDF, p(DEF)= DEF et p(ABC)= DEF

**Exercice 6**

Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [AC] et [CB], soient I', J', K' les projetés respectifs de I, J et K sur le plan (DEF). I', J', K' sont les milieux respectifs des segments [DE], [DF] et [EF] (milieu du projeté d'un segment), G intersection des médianes de ABC, donc l'image de G est l'intersection des médianes de DEF.

**Exercice 7**

D'après les propriétés d'une pyramide régulière à base carré, H l'intersection des diagonales du carré ABCD est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC), donc la distance cherchée est SH, de plus le triangle AHS est rectangle en H.

- AH = HB et (AH) ⊥ (HB) donc
  $AH^2 = \frac{AB^2}{2}$
- $SH^2 = AS^2 - \frac{AB^2}{2} = 100-8 = 92$ et donc SH= $\sqrt{92}$ cm

**Exercice 8**

(BC) est orthogonale au plan (ABE)

**Exercice 9**

Soit H le projeté orthogonal de B sur (ACF), [BH] est la hauteur du triangle ABC et BH est la distance cherchée : BH = $\frac{AB\text{x}BC}{AC}$ or AC = $\sqrt{130}$ donc BH = $\frac{63\text{x}\sqrt{130}}{130}$

**Exercice 10**

(SO) ⊥(AC) et (SO) ⊥(BD) , (AC) et (BD) deux droites sécantes de (ABC) donc (SO) est orthogonale à (ABC), ainsi (DBS) contient une droite qui est orthogonale à (ABC), donc les deux plans sont perpendiculaires.

**Exercice 11**

1-C ; 2-A ; 3-C ; 4-A

**Exercice 12**

1-Faux ; 2-vrai ; 3-vrai ; 4-Faux ; 5-vrai

**Exercice 13**

Soit (D') une droite passant par A et orthogonale à (D), (D) ⊥(P) et (D) ⊥(D') donc

(D') ∥ (P) or A ∈ (P) et A ∈ (D') donc (D') ⊂ (P).

**Exercice 14**

- G est le projeté orthogonal de F sur (SDC) donc (FG) ⊥ (CS)
- H est le projeté orthogonal de F sur (SBC) donc (FH) ⊥ (CS)
- (FG) et (FH) sont sécantes donc (CS) est orthogonale au plan (FGH)

**Exercice 15**

- (CB) ⊥(P) donc (CB) ⊥(D)
- (CA) ⊥ (D)
- Donc (D) est orthogonale à (CB) et (CA) deux droites sécantes de (ACB) d'où le résultat.

**Exercice 16**

- ABC est équilatéral donc (BC) ⊥ (AG)
- (DG) ⊥ (ABC) donc (BC) ⊥ (DG)
- donc (BC) ⊥ (ADG) qui contient (AD) ainsi (BC) ⊥(AD)

**Exercice 17**

**1)** la distance de G au plan (CDE) est nulle

**2)** la distance de G au plan (BCD) est la hauteur du triangle ABC c'est-à-dire $2\sqrt{3}$

**Exercice 18**

1) IJKL est un losange d'après la propriété des droites des milieux
2) Soit O intersection des diagonales de IJKL, on a (SO) ⊥ (IJ) et (SO) ⊥ (IK) or (SO) ⊂ (SBD) donc un des plans contient une droite orthogonale à l'autre d'où le résultat
3) (SO) ⊥ (ABC) et (SO) ⊥(IJK)

**Exercice 19**

Le projeté de H par p sur le plan (DEF) est l'orthocentre de DEF

**Exercice 20**

1) Montre que (AH) ⊥ (BC)
    - (BC) ⊥ (EH) car H est l'orthocentre du triangle BCE
    - (BC) ⊥ (AE) car la droite (AE) est orthogonale au plan (ABC)
    - donc (BC) ⊥(AEH) ainsi (BC) ⊥ (AH)
2) Montre que (AH) ⊥ (BE)
    - (BE) ⊥ (CH)

- (BE) ⊥ (AC)
- (BE) ⊥ (ACH) ainsi (AH) ⊥ (BE)

3) On a (BE) et (BC) sécantes donc (AH) ⊥ (BCE)

**Exercice 21**

1) Montre que les plans (SIK) et (SJL) sont perpendiculaires
   - (Jl) ⊥ (SH) de plus les deux droites sont sécantes
   - (IK) ⊥ (SH) et (IK) ⊥ (JL)
     donc (IK) ⊥ (SJL) ainsi (SIK) et (SJL) sont perpendiculaires
2) Montre que les plans (SAC) et (SBD) sont perpendiculaires.
   - (SH) et (DB) sont deux droites sécantes du plan (SBD) et (AH) est une droite du plan (SAC)
   - ABCD est un carré donc les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires de plus (SH) et (AC) sont perpendiculaires. (BD) et (SH) sont sécantes en H
   - donc (AC) ⊥ (SBD) d'où le résultat
3) (SIK) et (SAD) sont perpendiculaires
   - (AD) ⊂ (SAD) ;(IK) ⊂ (SIK) et (SH) ⊂ (SIK)
   - (IK) et (SH) sont sécantes
   - (AD) ⊥ (IK) et (AD) ⊥ (SH)
   - donc (SAD) ⊥ (SIK)

**Exercice 22**

- Montrons que les droites (AC) et (AE) sont orthogonales
  - ✓ (AE) ⊂ (ABE)
  - ✓ (AB) ⊂ (ABE) et (EB) ⊂ (ABE), (AB) et (EB) sont sécantes
  - ✓ (AC) ⊥ (EB) et (AC) ⊥ (AB)

  donc (AC) ⊥ (ABE) qui contient (AE) donc (AC) ⊥ (AE)
- déduisons que les plans (ABE) et (ACE) sont perpendiculaires
  - ✓ on a (AC) ⊥ (ABE)
  - ✓ or (AC) ⊂ (ACE) donc (ACE) ⊥ (ABE)

**Exercice 23**

1) $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ donc ABGH est un
   parallélogramme (HG) ⊥(ADH) donc (HG) ⊥ (AH) d'où le résultat.
   de la même façon on montre que CDEF est un rectangle
**2)** en considérant les rectangles ABGH et CDEF
**3)** (ED) ⊥ (AH) et (ED) ⊥ (IJ)
4) (ED) ⊂ (CDE) et (ED) ⊥ (ABG)
5)

| points | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| projetés | A | B | J | I | I | J | G | H | I | J |

**Exercice 24**

- (AH) ⊂ (AHE) et G ∈ (AH) donc G ∈ (AHE)
- (BG) ⊥ (AH) et (BG) ⊥ (HE) donc (BG) ⊥ (AHE)
  Ainsi G est le projeté orthogonal du point B sur le plan (AHE)

**Situation complexe**

**Exercice 25**

Désignons par ABCDEFGH le pavé droit du bâtiment A tel que (ABC) est la face 1-A et par IJKLMFOP l'autre pavé droit tel que (IJK) est la face 2-B, on a :

- (AB) ∥ (EF) et (EF) ⊥ (IJ) donc (AB) ⊥ (IJ)
- (BC) ∥ (JK) et (JK) ⊥ (IJ) donc (BC) ⊥ (IJ)
- donc (ABC) ⊥ (IJK)
  En conclusion : les faces 1-A et 2-B sont bien perpendiculaires

**Exercice 26**

En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle FBI rectangle en B on a :
$FI^2 = FB^2 + BI^2$ donc $FI^2 = \frac{13}{4}$. de même dans le triangle FEJ rectangle en E on a $FJ^2 = FE^2 + EJ^2$ on a : $FJ^2 = \frac{13}{4}$ d'où $FJ = FI$. Le triangle FIJ est donc isocèle en F

le triangle FIJ est isocèle en F et K est le milieu de $[IJ]$ donc la droite (FK) est la hauteur issue de point K. donc (FK) ⊥ (IJ)
(FK) ⊥ (IJ) et (GK) ⊥ (IJ) ( par hypothèse) donc et (IJ) ⊥ (GKF) et (GK) ⊥ (IJ)

# 14 COMPOSÉES DE TRANSFORMATIONS DU PLAN

Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves)), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de seconde. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.

Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

| **Constituants de la situation** | **Exemples de questions possibles** | **Réponses possibles des élèves** |
|---|---|---|
| Contexte | Où et quand se déroule la scène ? | La scène se déroule sur lot de Monsieur Ozouoloua dans le cadre de l'agrandissement de sa maison. |
| Circonstances | Indique les raisons qui ont motivé le fils de Monsieur Ozouoloua. | Réaliser la sollicitation de de l'Expert |
| Tâche | Qu'a décidé de faire le fils de Monsieur Ozouoloua pour répondre à la préoccupation de son papa ? | Le fils de M OZOUOLOUA a décidé de faire des recherches sur la leçon intitulée « composées de transformation du plan » |

**Activités de découvertes**

**Activité 1**

$OM_1 = OM \; et \; OM_1 = OM_2$ , donc $OM = OM_2$ .

1) $Mes(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}})$ = Mes($\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}}$) + Mes($\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}}$)

$Mes(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}}) = \alpha_1 + \alpha_2$

2) a) Puisque $OM = OM_2$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}}) = \alpha_1 + \alpha_2$, On en déduis que $r_2 \circ r_1(M) = M_2$

b) $r_2 \circ r_1$ est une rotation de centre O et d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$.

3) $r(O, \alpha_1 + \alpha_2) = r(O, \alpha_2 + \alpha_1). Donc,\; r_2 \circ r_1 = r_1 \circ r_2$

**Exercice de fixation 1**

Soit $r_1$ la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et $r_2$ la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

La composée $r_1 \circ r_2$ est une rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$

**Activité 2**

Soit $h_1$ l'homothétie de centre O et de rapport $k_1$ ; $h_2$ l'homothétie de centre O et de rapport $k_2$.

Soit M, M1 et M2 des points du plan tels que M1 est l'image de M par l'homothétie $h_1$ et M2 est l'image de M1 par l'homothétie $h_2$.

1) $M_1 = h_1(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} = k_1\overrightarrow{OM}$ et $M_2 = h_1(M_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_2} = k_2\overrightarrow{OM_1}$

$\overrightarrow{OM_2} = k_2\overrightarrow{OM_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_2} = k_2k_1\overrightarrow{OM}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM_2} = k_1k_2\overrightarrow{OM}$ car $k_2k_1 = k_1k_2$

2) a) $\overrightarrow{OM_2} = k_1k_2\overrightarrow{OM}$ , donc $h_2 \circ h_1(M) = M_2$

b) $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de centre O et de rapport $k_1k_2$

3) $k_2k_1 = k_1k_2$ *, donc* $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$

**Exercice de fixation 2**

Soit $h_1$ l'homothétie de centre A et de rapport 3 et $h_2$ l'homothétie de centre A et de rapport -2.

$h_1 \circ h_2$ est une homothétie de centre A et de rapport -2x3 = - 6

**Activité 3**

Soit $r_1 = r(\text{O}, \frac{\pi}{3})$ ; $r_2 = r(\text{ O}, -\frac{\pi}{6})$. $r_2 \circ r_1 = r(O, \frac{\pi}{6})$

**Construire l'image $M'$ du point M par la rotation $r(O, \frac{\pi}{6})$.**

**Faire la construction**

**Exercice de fixation 2**

Soit $r_1$ la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et $r_2$ la rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{3}$.

$r_2 \circ r_1 = \boldsymbol{r(O, \frac{-\pi}{6})}$**. Construire l'image A' du point A par la rotation.**

**Activité 4**

Soit $h_1$ l'homothétie de centre O et de rapport $4$ ; $h_2$ l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$

$h_2 \circ h_1$ **est une homothétie de centre O et de rapport 2.**

**Construis l'image M' de M par l'homothétie $\boldsymbol{h(O,2)}$.**

**Exercice de fixation 4**

Soit $h_1$ l'homothétie de centre A et de rapport 2 ; et $h_2$ l'homothétie de centre A et de rapport $-3$

$h_2 \circ h_1$ **est une homothétie de centre A et de rapport -6**

**Construis l'image B' de B par l'homothétie $\boldsymbol{h(A,-6)}$.**

**Activité 5**

On donne un cercle (C) de centre O et un point B n'appartenant pas à (C) et extérieur à (C). A chaque point M de (C) on associe le point M' tel que le triangle BMM' soit équilatéral direct.

1) Soit $r$ la rotation de centre B et de rapport $\frac{\pi}{3}$ . On a $r(M) = M'$.

2) Lorsque M décrit (C), M'décrit le cercle (C') image du cercle (C) par la rotation $r$.

**Exercice de fixation 5**

ABCD est un carré direct. M parcours le périmètre du carré.

Soit $r$ la rotation de centre O et de rapport $\frac{\pi}{2}$ . On a $r(M) = M'$.

Lorsque M décrit le carré ABCD , M' décrit le carré A'B'C'D' image du carré ABCD par la rotation $r$.

**Activité 6**

On donne un cercle (C) et un point A de (C). Pour tout point M de (C) privé du point A, on détermine le point I, milieu du segment [AM].

1) Soit $h$ l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ . On a $h(M) = I$.

2) Lorsque M décrit le cercle (C) , $I$ décrit le cercle (C') image du cercle (C) par l'homothétie $h$.

**Exercice de fixation 6**

G est l'isobarycentre des points A,B, et M , donc on a : $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{O}$. $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$ .

G est l'image M par l'homothétie $h$ de centre I et de rapport $\frac{1}{3}$ .

Lorsque M décrit le cercle (C) , G décrit le cercle (C') image du cercle (C) par l'homothétie $h$.

## QUESTIONS D'EVALUATION

**Question 1 : Comment déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h qui applique un point donné sur un autre point donné.**

**Exercice no corrigé**

On donne quatre points O, A , B et P alignés tels que : $\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{PO}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$.

1) - $\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OA}$ . Donc l'homothétie qui applique A sur P est l'homothétie de centre O et de rapport 3
   - $\overrightarrow{PO}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{OP}$ .Donc l'homothétie qui transforme P en B l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{-2}{3}$.
2) $\overrightarrow{OB}=-2\,\overrightarrow{OA}$ . L'homothétie qui transforme A en B est l'homothétie $h\ de\ centre\ O\ et\ de\ rapport-2$.

**Question 2 : comment justifier que trois points sont alignés ?**

**Exercice non corrigé**

1) $h_1\big((CG)\big)=(EF)$; $h_2\big((EF)\big)=(AH)$ .Donc, $h_2oh_1\big(\,(CG)\big)=(AH)$.
2) $h_2(F)=H\ et\ h_1(H)=H'$ . $H'\in\ h_1oh_2\big((CF)\big)$ et (CF) est parallèle à la droite passant par $H'$.D'où $h_2oh_1\big(\,(CF)\big)=(AD)$.
3) $(CF)\cap(CG)=\ \{C\}$. $h_2oh_1(\,(CF)\cap(CG))=h_2oh_1(C)$. (DA) $\cap\,(AH)=A$
   Donc $h_2oh_1(C)=A$. Les points I, A et C sont alignés

**Question 3 : comment justifier que deux droites sont parallèles ?**

**Exercice non corrigé**

**1)** $r(D)=B$ . L'image de (AD) est la droite passant par B et perpendiculaire à (AD). Donc, $r\big((AD)\big)=(AB)$.

2) a) $M\in(AD)$. Donc $r(M)\in(AB)$ car (AB) = $r\big((AD)\big)$. Or $P\in(AB)et\ Mes(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CP}})=\frac{\pi}{2}$

Donc $r(M)=P$

$N\in(AD),donc\ r(N)\in(AB)$. Or $Q\in(AB)et\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CQ}}\right)=\frac{\pi}{2}$. Donc, $r(N)=Q$ .

b) Le triangle CMP est isocèle rectangle en C. Le triangle CNQ est isocèle rectangle en C.

3) M est orthocentre du triangle NQP. Donc, (PM) est la troisième hauteur du triangle NQP. Par conséquent (PM)⊥ (QN).

**Question 4 : comment déterminer le lieu géométrique des points $M'$ lorsque $M$ décrit un ensemble donné.**

**Exercice non corrigé**

Soit $r$ $la\ rotation\ de\ cente\ A\ et\ d'angle\ \frac{\pi}{2}$ . N décrit la droite (D') perpendiculaire à (D) passant par le point A.

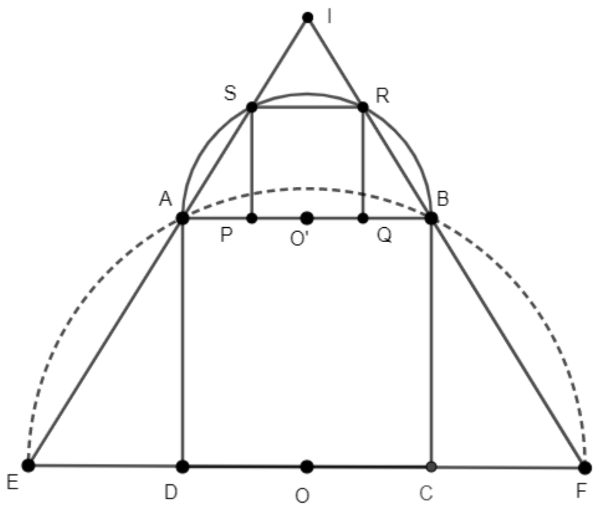
**Question 5 : comment résoudre un problème de construction**

**Exercice non corrigé**

Soit $(C) un\ demi-cercle\ de\ centre\ O\ et\ de\ diamètre\ [AB]$. Construire un carré PQRS tel que : $P \in [AB]$, $Q \in ([AB], R \in (C) et\ S \in (C)$.

Solution commentée

- On construit le carré ABCD.
- Soit h l'homothétie de centre I qui applique D sur P et C sur Q.
- $h$(E) = A ; $h(F) = B$.
- $h(A) = S; h(B) = R$
- PSRQ est l'image du carré ABCD.



## MES SEANCES D'EXERCICES

### Exercices de fixation

**Exercice 1 :** $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1 = r(A;\ -\alpha)$

**Exercice 2 :** $r_1 \circ r_1 .= r(O, 2\beta)$

**Exercice 3 :** 1)Vrai ; 2) Faux ; 3) Faux

**Exercice 4 :** 1)Vrai ; 2) Faux ; 3) Faux ; 4) Faux

**Exercice 5 :** 1.C ; 2.B ; 3.C

**Exercice 6 :**

1) $r(I;\ \frac{\pi}{6})$ ; 2) $r(I;\ -\frac{\pi}{2})$ ; 3) $r(I;\ \beta_1 + \beta_2)$

**Exercice 7 :**

1) $r(I;\ \frac{5\pi}{6})$ ; 2) $r(I;\ -\frac{\pi}{2})$ ; 3) $r(I;\ \frac{11\pi}{30})$

**Exercice 8**

$h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2 = h(A;\ 3k + \frac{1}{2})$

**Exercice 9**

$h_1 \circ h_1 = h(O; k)$.

**Exercice 10**

1) Vrai ; 2) Vrai : 3) Faux ; 4) vrai

**Exercice 11**

1) B ; 2) A ; 3) C

**Exercice 12**

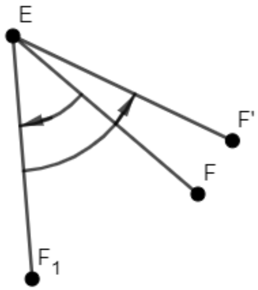
1. $h_{\left(\Omega\ ;\frac{3}{2}\right)}$ ; 2. $h_{(\Omega\ ;\sqrt{2})}$ ; 3. $h_{(\Omega\ ;2\,k_1{}^2)}$

**Exercice 13**

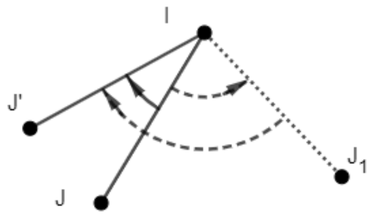
1. $h_{2(\Omega\ ;3)}$ ; 2. $h_{2\left(\Omega\ ;\frac{7}{2}\right)}$ ; 3. $h_{2\left(\Omega\ ;\frac{27}{4}\right)}$

**Exercice 14**

On construit le point $F_1 = r_2(F)$ puis F'= $r_1(F_1)$



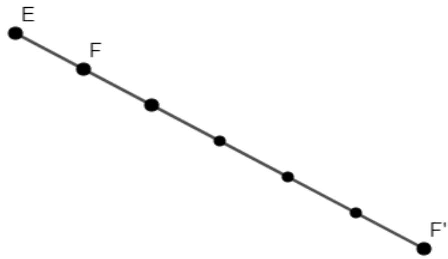

**Exercice 15**




**Exercice 16**

On considère les rotations $h_1$ et $h_2$ de centre E et de rapports respectifs -2 et -3.

On Construit l'image F' de F par l'homothétie de centre E et de rapport 6.




**Exercice 17 :**

On considère les rotations $h_1$ et $h_2$ de centre I et de rapports respectifs -2 et $\frac{1}{2}$.

On construit l'image J' de J par la symétrie centrale de centre I.


**Exercice 18**

b) l'image de la droite (D) par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

**Exercice 19**

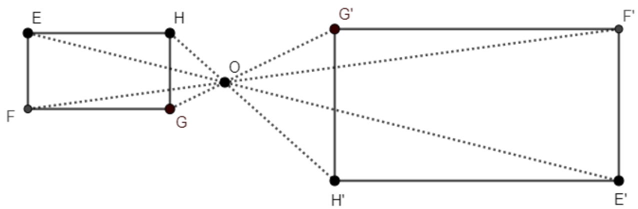
c) l'image de la droite (D) par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$

**EXERCICES DE RENFORCEMENT / APPROFONDISSEMENT**

**Exercice 20**

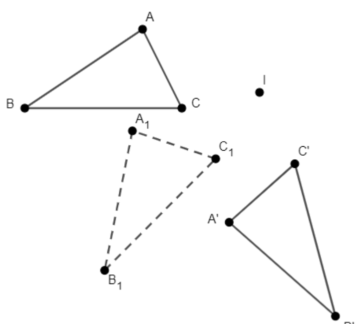
$r_1(K) = J;\ r_3(J) = C\ ;\ r_2 o r_1(B) = M;\ r_2 o r_3(C) = N;\ r_1 o r_3(J) = B;\ r_3 o r_2(E) = E$

**Exercice 21 :**



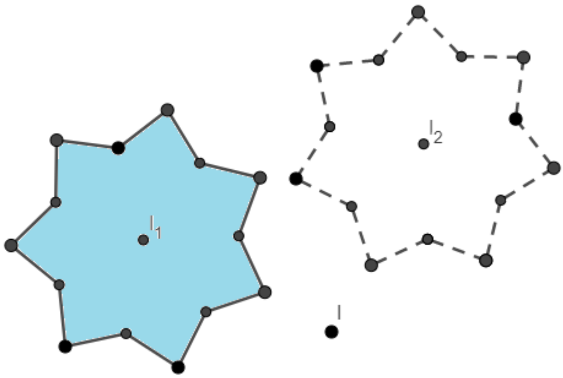

**Exercice 22**

$r_1 = r\left(I;\frac{\pi}{3}\right)$ et $r_2 = r(I;\frac{\pi}{4})$



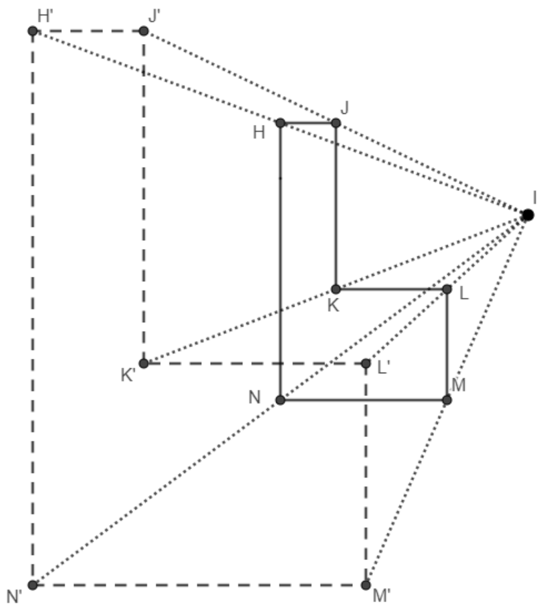
**Exercice 23 :**

On construit l'image de la figure la rotation de centre I et d'angle $\frac{-\pi}{2}$ .




**Exercice 24 :**

On construit l'image de la figure par l'homothétie de centre I et de rapport 2.



**Exercice 25 :**

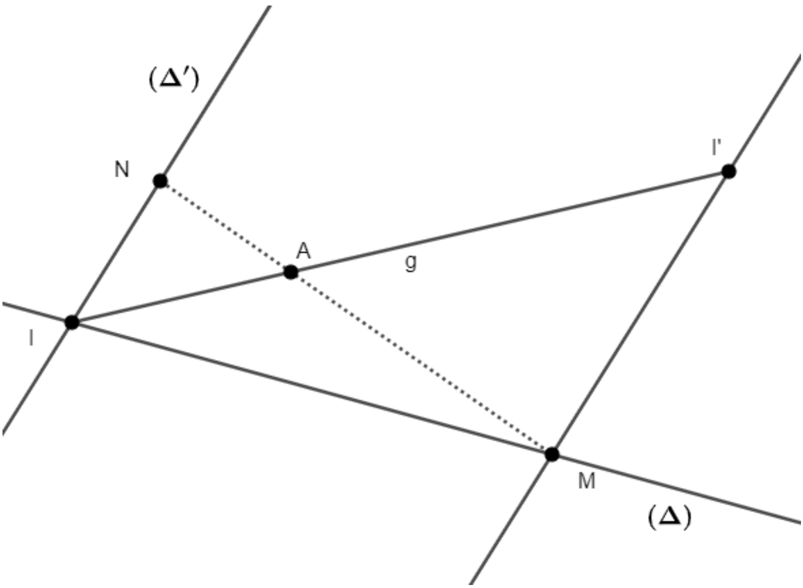
La rotation de centre B et d'angles $\frac{-\pi}{3}$ transforme le triangle ADB en le triangle CBE.

**Exercice 26**

1) La rotation de centre A d'angle $\frac{-\pi}{2}$
   Transforme le lézard 9 en le lézard 10
2) a) la rotation de centre C d'angle $\pi$
   transforme le lézard 6 en le lézard 2

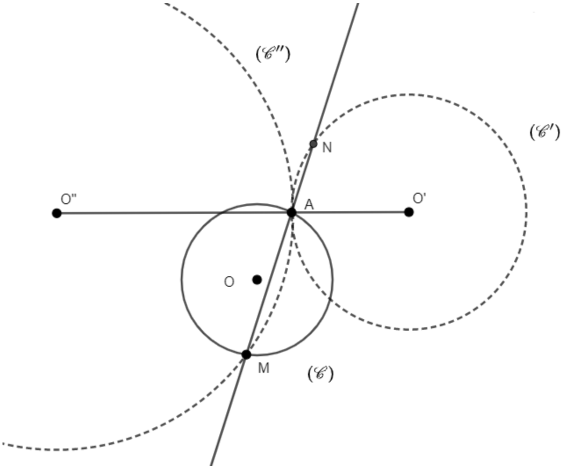
**Exercice 27**

$\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AN} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AN}$. Soit $h$ l'homothétie de centre A et de rapport-2 .
On a $h(N) = M$ . $Soit$ $\{I\} = (\Delta) \cap (\Delta')$ et $I' = h(I)$. On a $\overrightarrow{MI'} = -\overrightarrow{NI}$ .
-construire le point $I'$.
Construire la parallèle à $(\Delta')$ passant par $I'$ . elle coupe $(\Delta)$ en M.



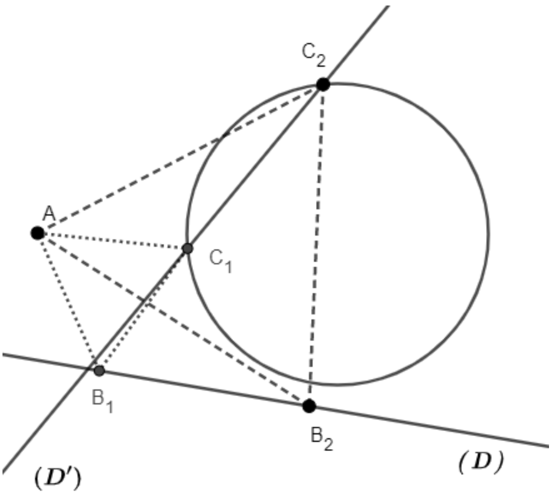

**Exercice 28**

$\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AN} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AN}$. Soit $h$ l'homothétie de centre A et de rapport-2 .
$N \in (C')$ et $M \in (C)$.
Lorsque N décrit le cercle de centre $(C')$ de centre O' et de rayon OA, M va décrire le cercle $(C'')$ de centre $h(O') et\ de\ rapport\ 2O'A$. $\{M\} = (C'') \cap (C)$ et $h(M) = N$
La droite $(\Delta)$ est la droite qui passe par les points A,M et N




**Exercice 29 :**

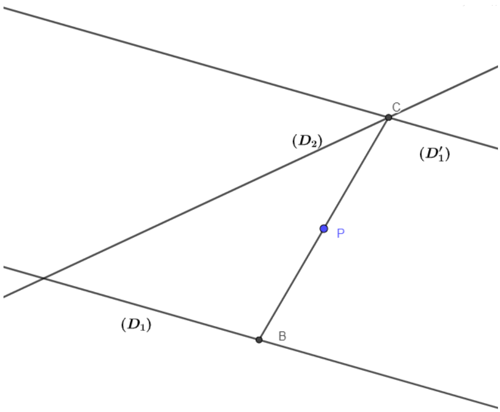
- construire la droite $(\Delta')$ image de la droite $(\Delta)$ par la rotation $r$.
- Soit $\{C\}= (\Delta') \cap (C)$. On a deux choix possible de C sur (C).
- Construire le point B image du point C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{-\pi}{3}$
- B$\in (D) et\ C \in (C), et\ le\ triangle\ ABC\ est$ équilat$\acute{e}ral$



**Exercice 30 :**

Soit $h$ *l'homothétie de cente P et de rapport* -1.

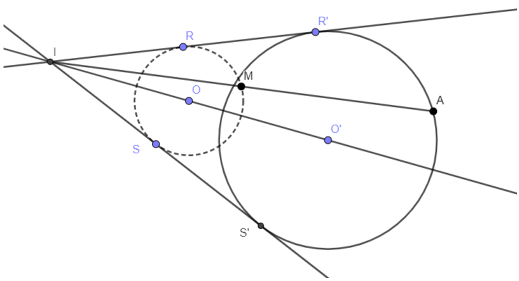
- Construire la droite $(D'_1)$*image de la* $(D_1)$ par $h$.
- Soit $\{C\} = (D'_1) \cap (D_2)$
- Construire le point B image du point C par l'homothétie de centre P et de rapport -1.
- $B \in (D_1)$, $C \in (D_2)$ et P est le milieu de $[BC]$




**Exercice 31 :**

Soit $\{I\} = (D_1) \cap (D_2)$ *et* $A \in (D_1)$ *et* $B \in (D_2)$ .

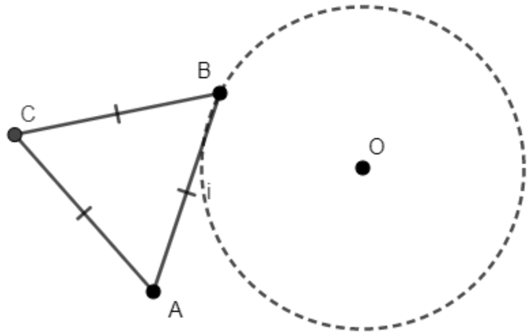
- Construire la bissectrice de l'angle $\widehat{AIB}$.
- Construire un cercle $(\Gamma)$ *de centre O tangent* à $(D_1)$ *en S et* à $(D_2)$ *en R*.
- Soit $M \in (\Gamma)$ . On définit l'homothétie $h$ de centre $I$ qui transforme M en A.
- Construire $S' = h(S)$;  $R' = h(R)$ *et* $O' = h(O)$.
- Construire $(\Gamma') = h(\Gamma)$.
- $(\Gamma)$ passe par le point A et $(\Gamma')$ est tangent à $(D_2)$ en $R'$ et à $(D_1)$ en $S'$.
- $(\Gamma')$ est le cercle demandé.



**Exercice 32 :**

Soit la rotation $r$ de centre a et d'angle $\frac{\pi}{3}$. $r(B) = A$.

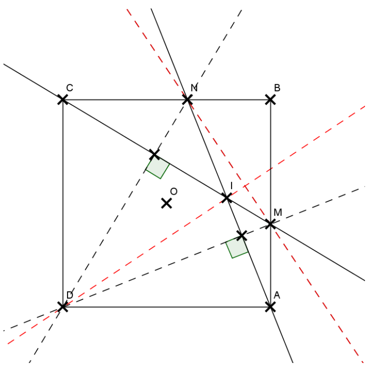
Lorsque B décrit le cercle (C), C va décrire le cercle (C') image du cercle (C) par r.




**Exercice 33**

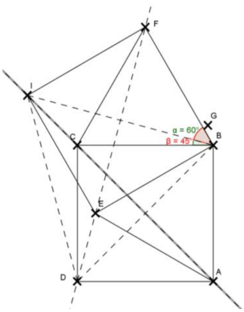
ABCD est un carré direct de centre O. Soit M un point de [AB] et N le point de [BC] tels que AM = BN. Les droites (CM) ;(AN) se coupent en I.

1) $r$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2) $r\big((AB)\big) = (BC); M \in (AB) et\ N \in (BC)\ et\ AM = BN. Donc\ R(M) = N$
3) $r((CM)) = (DN); Donc\ (CM) \perp (DN).$
4) $r\big((DM)\big) = (AN); Donc\ (DM) \perp (AN).$
5) $considerons\ le\ triangle\ DMN. I\ est\ l'orthocentredu\ triangle.$
   $Donc\ (DI)$ ⊥(MN)



**Exercice 34**

1) BD =BI car diagonales respectives des carrés ABCD et BFIE.
   Le triangle BDI est isocèle en B.
   Déplus $Mes(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}) + Mes(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}) = Mes(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BA})$. Or Mes$(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{4}$ et $Mes(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BA}) = Mes(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BE}) + Mes(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BA})$=$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$
   Donc $Mes(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{3}$. Donc le triangle BDI est équilatéral.
2) Considérons le segment $[BD]$. $A \in$ à la médiatrice du segment $[BD]$. $I \in$ à la médiatrice du segment $[BD]$. $C \in$ à la médiatrice du segment $[BD]$. Donc les points A, Cet I alignés.
3) Considérons le segment $[BI]$. $E \in$ à la médiatrice du segment $[BI]$. $F \in$ à la médiatrice du segment $[BI]$. $D \in$ à la médiatrice du segment $[BI]$. Donc les points D, E et F alignés.




**Exercice 35**

Considérons les triangles NMT et N'M'T. Ces deux triangles sont semblables car leurs angles sont de mesures égales deux à deux. Donc, il existe un nombre réel non nul tel que

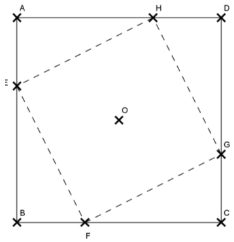
$\overrightarrow{M'T} = k\overrightarrow{MT}$ et $\overrightarrow{N'T} = k\overrightarrow{NT}$. On définit une homothétie de centre T et de rapport $k$ telle que

$h(M) = M' et\ h(N) = N'$. Donc $(M'N') \parallel (MN)$

**Exercice 36**

Soit un carré ABCD de centre O. E est un point de [AB], F est un point de [BC], G est un point de [CD] et H est un point de [DA] tels que AE = BF = CG = DH.

Soit $r\ la\ rotation\ de\ centre\ o\ et\ d'angle \frac{\pi}{2}$
$r(A) = B; r(B) = C\ ; r(C) = D\ et\ r(D) = A$
$r(E) = F; r(F) = G; r(G) = H; r(H) = E.$
Les diagonales du quadrilatère EFGH ont la même mesure et sont perpendiculaires. Donc EFGH est un carré.




**Exercice 37**

Soit ABI un triangle équilatéral direct, Ω le symétrique de B par rapport à (AI).

$r$ est la rotation direct de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) Démontre que $r$ (A) = I et construit C le symétrique de A par rapport à I

2)A tout point M ∈ [AB] distinct de A et B on associe le point M' ∈ [IC] tel que AM = IM'.

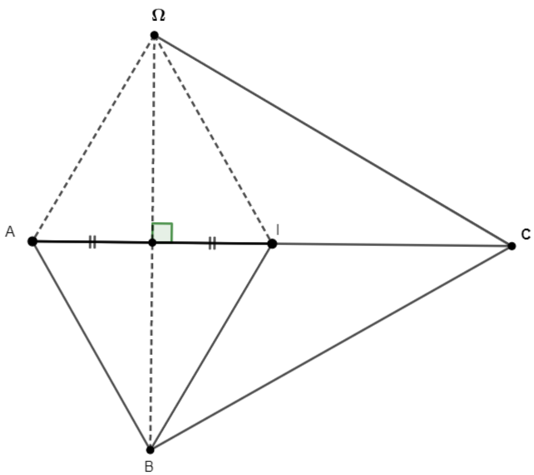
Démontre que le triangle ΩMM' est équilatéral.

Le triangle ΩAI est équilatéral. Donc, ΩA= ΩI et Mes$(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega I}}) = \frac{\pi}{3}$. Donc $r(A) = I$

M$\in [AB]$ et M'$\in [IC]$ $tel\ que\ AM = IM'.\ Mes(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{IC}) = \frac{\pi}{3}$ ; alors

$Mes\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{IM'}\right) = \frac{\pi}{3}$ ; de plus AM=IM' et r(A)= I. Donc, r(M)= M'

Le triangle ΩMM' est équilatéral.



**Exercice 38**

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en B. O le milieu de [AC] et r est la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{-\pi}{2}$ .

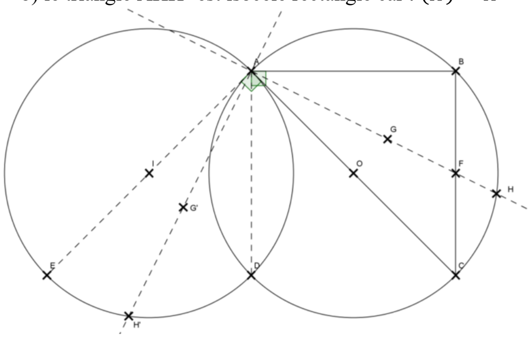
1) $r(B) = D$ *et* $AB = BC = AD$. *Donc ABCD est un carré*.
2) 2) $r((AB)) = (AD)$. L'image de la droite (BC) est la droite passant par D et perpendiculaire à (BC). Donc $r((BC)) = (DC)$.
3) $r(C) = E$, d'où AE = AC. (AD) est la médiatrice de la droite (EC) et D$\in [EC]$. Donc D est le milieu de $[EC]$.
4) a) Le centre du cercle (C) circonscrit au carré ABCD est le point O. O est le milieu de $[AC]$. Donc $I$ centre du cercle (C') image du cercle (C) par la rotation r est le milieu de $[AE]$.
   b) (C)$\cap$ $(C') = \{A; D\}$

5) a) soit $G = bar\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$

$$r(G) = bar\{(r(A);1);(r(B);1);(r(C);1)\}$$
$$= bar\{(A;1);(D;1);(E;1)\}$$
$$= bar\{(D;1);(I;2)\} \text{ car I est le milieu de } [AE]$$

On a $r(G) = G'$

b) le triangle AHH' est isocèle rectangle car $r(H) = H'$

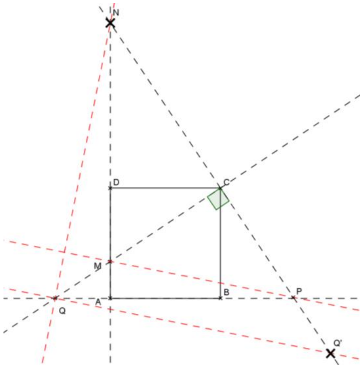



**Exercice 39**

ABCD est un carré direct. Soit M un point de [AD], M distinct de D. La droite (CM) coupe (AB) en Q. La perpendiculaire à (CM) en C coupe respectivement (AB) en P et (AD) en N. Soit *r* le quart de tour direct de centre C.

1) $r(D) = B$. L'image de la droite (AD) est la droite passant par B et perpendiculaire à (AD). Donc $r((AD)) = (AB)$.
2) $a)\ (CM) \perp (CP); r((AD) = (AB) et\ M \in (AD); P \in (AB). donc\ r(M) = P$
   $N \in (AD) et\ Q \in (AB). d'ou\ r(N) = Q$
   b) Le triangle CMP est isocèle rectangle en C. Le triangle CNQ est isocèle rectangle en Q.

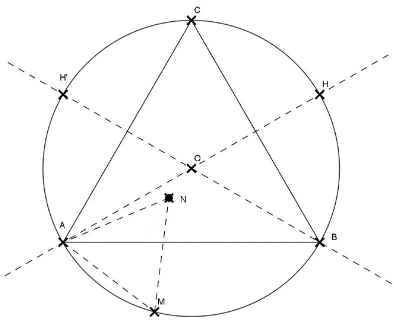
c) Considérons le triangle NQP. Les hauteurs (QM) et (NM) du triangle NQP sont concourantes en M. Le point M est l'orthocentre du triangle NPQ. Donc, la troisième hauteur ((MP) est perpendiculaire à (NQ)




**Exercice 40**

1) a) $r(A) = B; r(B) = C$
b) $r\big((OA)\big) = (OB); r\big((C)\big) = (C)$
2) Soit $r_1$ $la\ rotation\ de\ centre\ A\ et\ d'angle\ \frac{\pi}{3}$ tel que r(M) = N

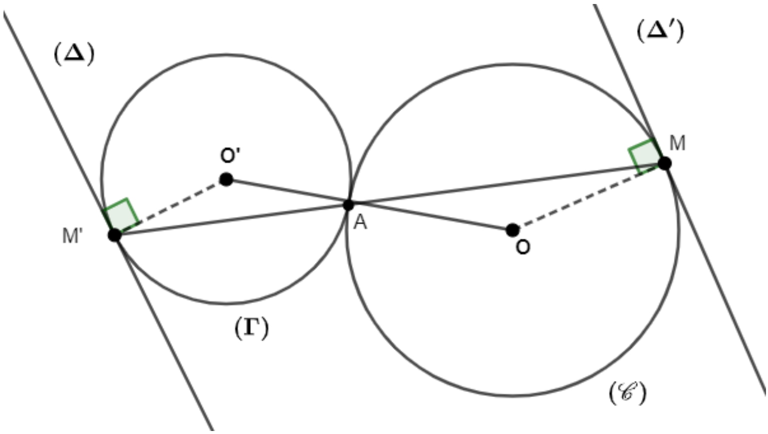
Lorsque M décrit le cercle (C) , N va décrire le cercle (C') image de (C) par $r_1$ privé de A.
(C') est le de centre H' $=r_1(O)$ et de rayon AH' privé de A.



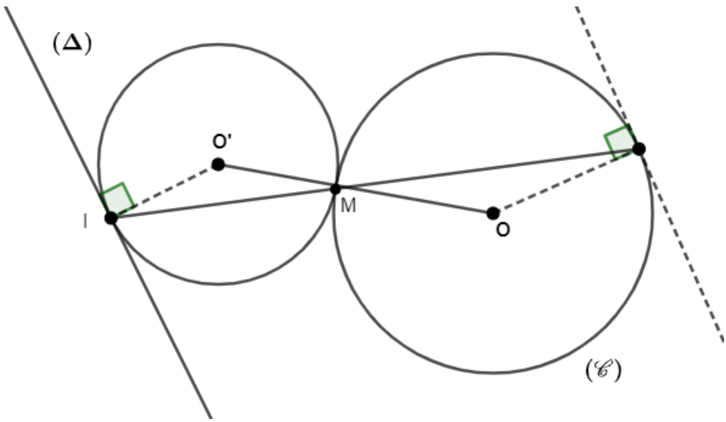

**Exercice 41**

Soit $(\Delta)$ une droite , $(\mathcal{C})$ un cercle , A un point de $(\mathcal{C})$.
Construire un cercle $(\Gamma)$ tangent à $(\mathcal{C})$ en A et tangent à $(\Delta)$ .

- Construire une droite $(\Delta')$ parallèle à $(\Delta)$ et tangent au cercle (C) en un point M.
- On considère l'homothétie $h$ de centre O qui transforme $(\Delta')$ en $(\Delta)$. $h(M) = M'$. Le centre O' du cercle $(\Gamma)$ est l'image du point O, centre du cercle (C). $(\Gamma)$ est tangent à $(\Delta)$ en M' et tangent à (C) en A.

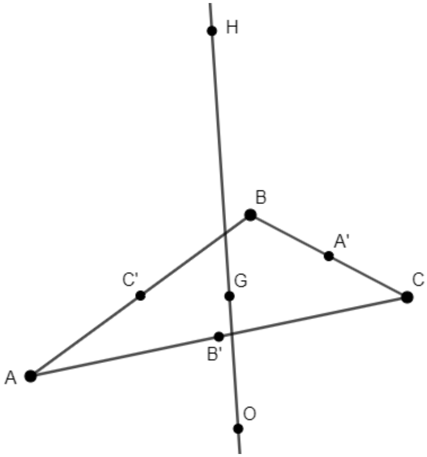



**Exercice 42**



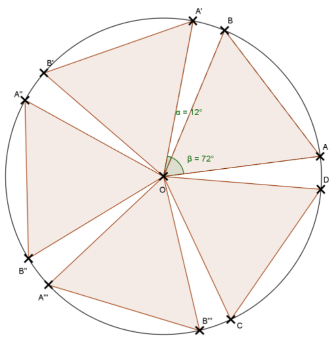

**Exercice 43**

1) G centre de gravité du triangle ABC. $\overrightarrow{GA}$ = -2$\overrightarrow{GA'}$. On définit l'homothétie $h$ de centre G qui transforme A' en A.
   Comme (AH) est parallèle à (OA'), alors $h\big((OA')\big) = (AH)$ ;
   $de\ \ même\ h((OB') = (BH)\ et\ h((OC') = (CH).$
2) $(OA') \cap (OB') \cap\cap (OC') = \{O\}$ ; $(AH) \cap (BH) \cap (CH) = \{H\}$ .
   Donc $h(O) = H$. Les O, G et H sont alignés.




**Situation complexe**

**Exercice 44**
pour atteindre son objectif, l'intervalle d'angle $\widehat{\beta}$ entre les différents triangles que espère construire le concepteur devra répondre à la condition suivante : $5\beta + \frac{5\pi}{3} = 2\pi \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{15}$.
Pour la construction des triangles, le concepteur devra construire les images successives des point A et B par la rotation d'angle $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{15} = \frac{2\pi}{5}$ de centre O.



# 15 STATISTIQUE À UNE VARIABLE

**Situation d'apprentissage**

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de troisième. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

| Constituants de la situation | Exemples de questions possibles | Réponses possibles des élèves |
|---|---|---|
| Contexte | Où ou quand se déroule la scène ? | La scène se déroule dans une centrale d'achat de café- cacao, pendant la dernière campagne agricole. |
| Circonstances | Pourquoi les élèves décident de se mettre en groupes pour traiter l'exercice ? | Le gérant de cette centrale négocie un crédit bancaire pour augmenter son capital afin d'attirer plusieurs coopératives, mais la banque fixe deux conditions. |
| Tâche | Que décides- tu de faire avec les élèves ? | Les élèves décident avec l'aide du professeur d'étudier les paramètres de position et de dispersion d'une série statistique regroupée en classes afin de mieux appréhender les conditions posées par la banque. |

**Découverte des habiletés**

**Activité 1**

1. 2. 3. 4.

| Classe | $[9{,}725; 9{,}775[$ | $[9{,}775; 9{,}800[$ | $[9{,}800; 9{,}825[$ | $[9{,}825; 9{,}850[$ | $[9{,}850; 9{,}900[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 1 | 4 | 4 | 6 | 5 |
| Amplitude | 0,05 | 0,025 | 0,025 | 0,025 | 0,05 |

| Effectif / Amplitude | 20 | 160 | 160 | 240 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| Centre | 9,75 | 9,7875 | 9,8125 | 9,8375 | 9,875 |

5.a) L'effectif total est 20

| Classe | $[9{,}725; 9{,}775[$ | $[9{,}775; 9{,}800[$ | $[9{,}800; 9{,}825[$ | $[9{,}825; 9{,}850[$ | $[9{,}850; 9{,}900$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 1 | 4 | 4 | 6 | 5 |
| Fréquence | 0,05 | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,25 |
| Fréquence en % | 5 | 20 | 20 | 30 | 25 |

**Exercice de fixation 1**

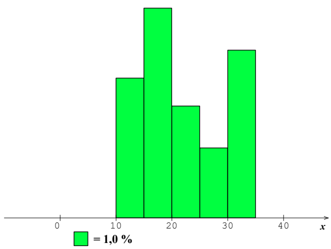
| A | B |
|---|---|
| L'amplitude de la classe $[a; b[$ | Le nombre réel $c$ tel que $c = \frac{a+b}{2}$ |
| La densité d'une classe est | Le quotient de l'effectif de cette classe par l'effectif total |
| Le centre de la classe $[a; b[$ est | Le nombre réel $b - a$ |
| La fréquence d'une classe est | Le quotient de l'effectif de cette classe par l'amplitude de cette classe |

**Exercice de fixation 2**

1. L'amplitude de la classe $[5; 8[$ est 3
2. La densité de la classe $[3; 5[$ est $\frac{3}{2}$ soit 1,5
3. Le centre de la classe $[8; 10]$ est 9
4. La fréquence, en pourcentage de la classe $[0; 3[$ est $\frac{2}{15} \times 100$ soit 13,33%

**Activité 2**

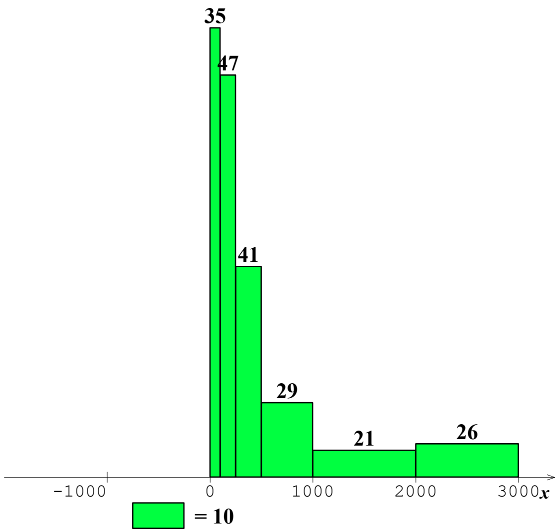
A.



B. 1.

| Classe | [0; 100[ | [100; 250[ | [250; 500[ | [500; 1000[ | [1000; 2000[ | [2000; 3000] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tarif en milliers de francs CFA | 3,5 | 7,10 | 10,3 | 14,60 | 21 | 26,5 |
| Amplitude | 100 | 150 | 250 | 500 | 1000 | 1000 |
| $\frac{\text{Effectif}}{\text{Amplitude}}$ | 35 | 47,33 | 41,2 | 29,2 | 21 | 26,5 |

2. Construction de l'histogramme

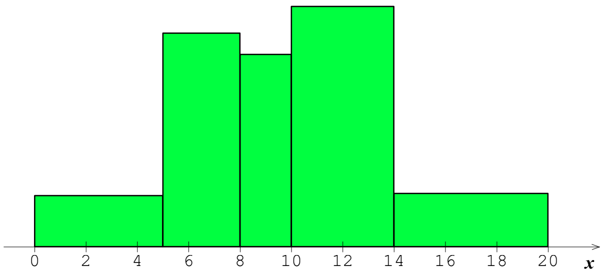



**Exercice de fixation 3**

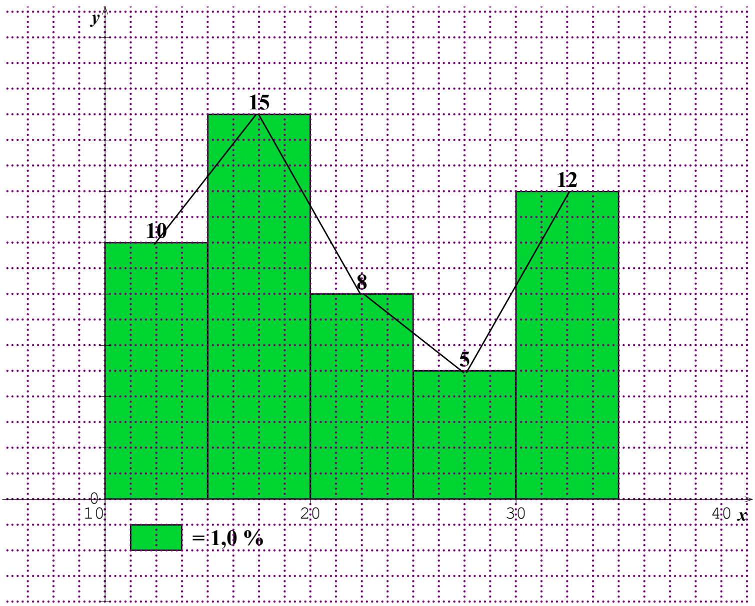
1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Vrai ; 4. Faux

**Exercice de fixation 4**

Histogramme de la série statistique



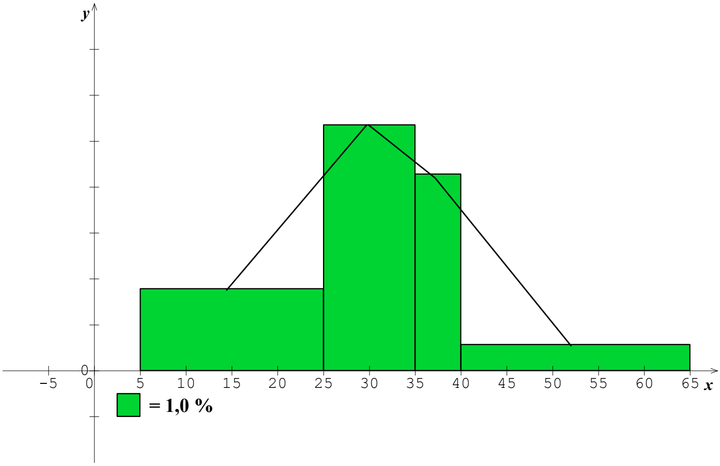

**Activité 3**



**Exercice de fixation 5**

Le polygone des effectifs est obtenu en joignant les milieux des bases supérieures des rectangles

**Exercice de fixation 6**

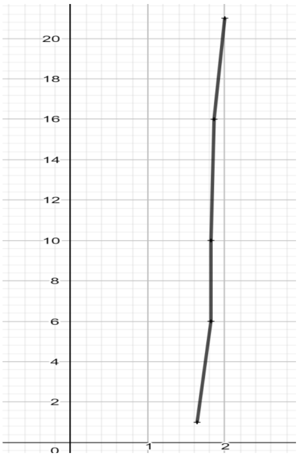



**Activité 4**

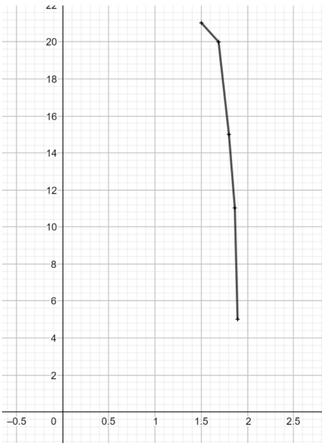
1. Complétons

| Classe | [1,5; 1,65[ | [1,65; 1,800[ | [1,800; 1,825[ | [1,825; 1,850[ | [1,850; 1,900[ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 1 | 5 | 4 | 6 | 5 |
| ECC | 1 | 6 | 10 | 16 | 21 |
| ECD | 21 | 20 | 15 | 11 | 5 |
| FCC | 0,0476 | 0,28 | 0,476 | 0,76 | 1 |
| FCD | 1 | 0,952 | 0,714 | 0,52 | 0,238 |

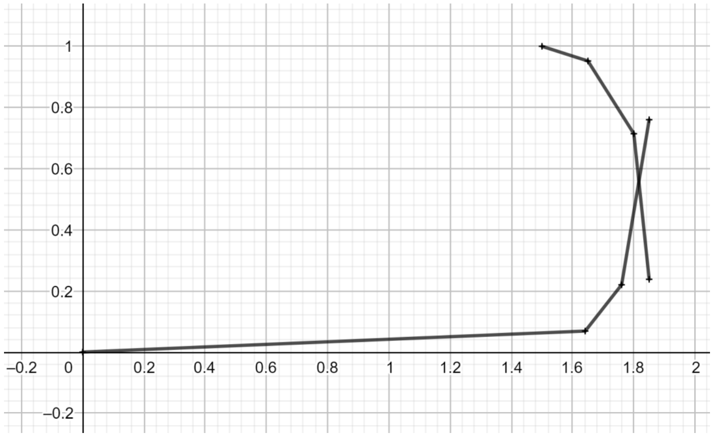
2. a)




b)

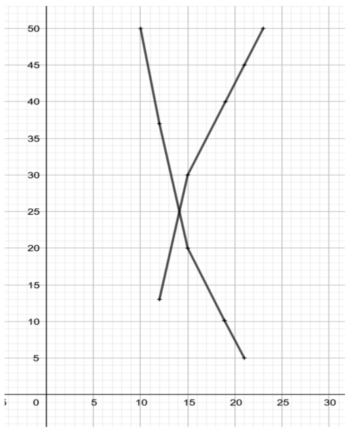


4. Construction des polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes




**Exercice de fixation 7**

| Classe | $[10; 12[$ | $[12; 15[$ | $[15; 19[$ | $[19; 21[$ | $[21; 23[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 13 | 17 | 10 | 5 | 5 |
| ECC | 13 | 30 | 40 | 45 | 50 |
| ECD | 50 | 37 | 20 | 10 | 5 |



**Activité 5**

Représentation graphique des fonctions F et de G

**Exercice de fixation 8**

**( PRENDRE LE CENTRE DE CHAQUE CLASSE )**

| Classe | $[0; 20[$ | $[20; 30[$ | $[30; 35[$ | $[35; 40[$ | $[40; 50[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Centre | 10 | 25 | 32,5 | 37,5 | 45 |
| Effectif | 5 | 7 | 10 | 18 | 10 |
| ECC | 5 | 12 | 22 | 40 | 50 |

Soit la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

Si $x \in ]-\infty; 10[$ , $F(x) = 0$

Si $x \in [10; 25[$ , $F(x) = 5$
Si $x \in [25; 32{,}5[$ , $F(x) = 12$

Si $x \in [32{,}5; 37{,}5[$ , $F(x) = 22$
Si $x \in [37{,}5; 50[$ , $F(x) = 40$

Si $x \in [50; +\infty[$ , $F(x) = 50$

La courbe cumulative des effectifs est la représentation graphique de $F$.

**Activité 6**

1 la classe modale d'une série statistique regroupé en classe de même amplitude est la classe de plus grand effectif.

2.

| Classe | $[9{,}725; 9{,}775[$ | $[9{,}775; 9{,}800[$ | $[9{,}800; 9{,}825[$ | $[9{,}825; 9{,}850[$ | $[9{,}850; 9{,}900[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 1 | 5 | 4 | 6 | 4 |
| Fréquence | 5 | 25 | 20 | 30 | 20 |
| Amplitude | 0,05 | 0,025 | 0,025 | 0,025 | 0,05 |
| Densité | 20 | 200 | 160 | 240 | 80 |
| $\frac{\text{Densité}}{\text{effectif total}}$ | 1 | 10 | 8 | 12 | 4 |
| Centre | 9,75 | 9,7875 | 9,8125 | 9,8375 | 9,875 |

1. La classe de plus grande densité est $[9{,}825; 9{,}850[$
2. a)

   b) La classe de plus grande densité de fréquence est $[9{,}825; 9{,}850[$

3. a)

| Classe | [9,725; 9,775[ | [9,775; 9,800[ | [9,800; 9,825[ | [9,825; 9,850[ | [9,850; 9,900[ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif ($n_i$) | 1 | 5 | 4 | 6 | 4 |
| Centre ($c_i$) | 9,75 | 9,7875 | 9,8125 | 9,8375 | 9,875 |
| $n_i c_i$ | 9,75 | 48,9375 | 39,25 | 59,025 | 39,5 |

la moyenne est $\frac{196,4625}{20} = 9,823\ 125$

b) la moyenne est 9,823 125

**Exercice de fixation 9**

1. Vrai ; 2. Faux ; 3. Faux ; 4. Vrai ; 5. faux ; 6. Faux

**Exercice de fixation 10**

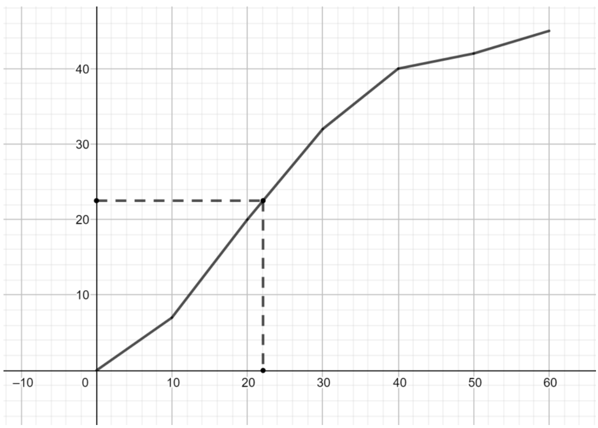
1. La classe modale est [53,55]
2. La taille moyenne est 51,22

**Activité 7**

1. La médiane

Détermination graphique

a)



b) La médiane est $22{,}08$

c) Il faudra faire le partage à $22{,}08$ mn

Détermination algébrique

a) $\frac{45}{2} = 22{,}5$ et $22{,}5 \in [20; 30[$

b)

| | | |
|---|---|---|
| 20 | 22,5 | 32 |
| 20 | $m$ | 30 |

on a ; $\frac{m-20}{22{,}5-20} = \frac{30-20}{32-20}$ donc

$m = 22{,}08$

2.a) $Q_1 = 13{,}2692$

b) $Q_3 = 32{,}1875$

**Exercice de fixation 11**

1. $m = 56{,}46$

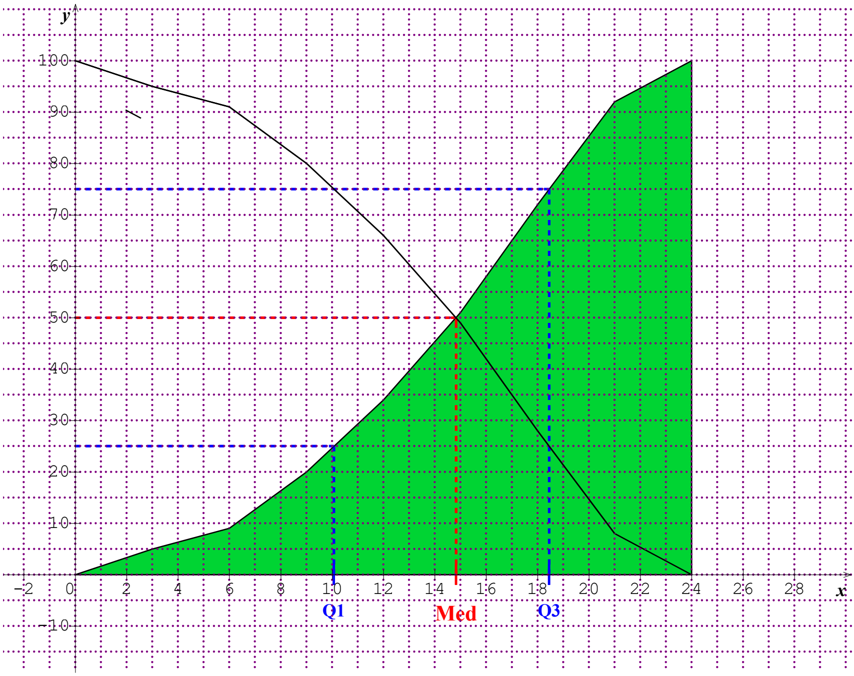
2. $Q_1 = 28{,}75$ et $Q_3 = 100{,}714$

**Activité 8**

1.

| Tranche horaire (en H) | [0; 3[ | [3; 6[ | [6; 9[ | [9; 12[ | [12; 15[ | [15; 18[ | [18; 21[ | [21; 24[ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence (%) | 5 | 3,9 | 10,8 | 13,6 | 17,1 | 21,4 | 19,8 | 8,4 |
| FCC (%) | 5 | 8,9 | 19,7 | 33,3 | 50,4 | 71,8 | 91.6 | 100 |
| FCD (%) | 100 | 95 | 91,1 | 80,3 | 66,7 | 49,6 | 28,2 | 8,4 |

2.a) ; b)




c) 14,8

3. a) 14,82

b) 10,07

c) 18,45

4. a) L'intervalle qui contient la médiane est $[12; 15[$

b) la médiane est égale à 14,82

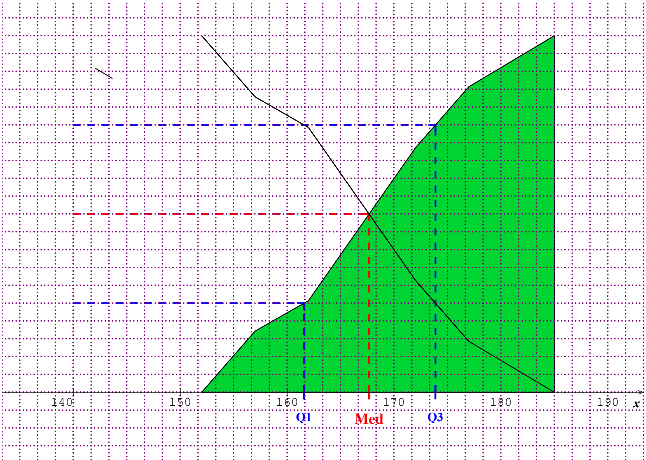
5.a) L'intervalle qui contient $Q_1$ est $[9; 12[$

b) $Q_1 = 10{,}07$

6.a) L'intervalle qui contient $Q_3$ est $[18; 45[$

b) $Q_3 = 18{,}45$

**Exercice de fixation 12**




$m = 167{,}66$ ; $Q_1 = 161{,}58$ ; $Q_3 = 173{,}87$

**Activité 9**

1.a) 13,2692

b) $Q_3 - Q_1 = 32{,}1875 - 13{,}2692 = 18{,}9183$

b) l'écart correspond à l'étendue de la distribution une fois que l'on a retiré les 25% des valeurs

les plus faibles et les 25% des valeurs les plus fortes.

2.a)

| Classe | $[0; 10[$ | $[10; 20[$ | $[20; 30[$ | $[30; 40[$ | $[40; 50[$ | $[50; 60[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif ($n_i$) | 7 | 13 | 12 | 8 | 2 | 3 |
| Centre ($c_i$) | 5 | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 |
| $n_i c_i$ | 9,75 | 48,9375 | 39,25 | 59,025 | 39,5 | $n_i x_i$ |

$e_m = 10{,}822$

b) $e_m$ mesure les fluctuations de la série par rapport à la moyenne.

c) la classe la plus régulière est celle dont l'écart absolue moyen est plus petit.

**Exercice de fixation 13**

1.a) $Q_1 = 46{,}25$ et $Q_3 = 74{,}31$

b) $Q_3 - Q_1 = 74{,}31 - 46{,}25 = 28{,}06$

l'écart correspond à l'étendue de la distribution une fois que l'on a retiré les $25\%$ des valeurs

les plus faibles et les $25\%$ des valeurs les plus fortes.

2. $e_m = 12{,}672$

L'écart entre la masse des élèves et la moyenne de la masse des élèves est de $12{,}672$

**Activité 10**

1.a) $V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i\,(\bar{x} - x_i)^2}{N} = \frac{1}{N}\,(\sum_{i=1}^{p} n_i\,{x_i}^2) - (\bar{x})^2$

b) $V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i\,(\bar{x} - c_i)^2}{N} = \frac{1}{N}\,(\sum_{i=1}^{p} n_i\,{c_i}^2) - (\bar{x})^2$

c) $V = 233{,}921$

2. a)

b) $V = 233{,}921$

3.a) $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{233{,}921} = 15{,}2945$

b) l'écart type est la concentration des valeurs du caractère autour de la moyenne.

**Exercice de fixation 14**

1. $V = 124{,}476$

3.a) $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{124{,}476} = 11{,}1569$

b) le temps mis par les élèves est étalé de part et d'autre du temps moyen.

**DES QUESTIONS D'ÉVALUATIONS**

**Question 1 : Comment déterminer la classe modale d'une série statistique regroupée en classes d'amplitudes différentes ?**

**Exercice non corrigé**

On a le tableau de calculs suivant

| Classe | $[9{,}7; 9{,}8[$ | $[9{,}8; 9{,}9[$ | $[9{,}9; 10{,}2[$ | $[10{,}2; 10{,}3[$ | $[10{,}3; 10{,}7[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 3 | 7 | 9 | 5 | 6 |
| Amplitude | 0,1 | 0,1 | 0,3 | 0,1 | 0,4 |
| Densité | 30 | 70 | 30 | 50 | 15 |

La plus grande densité est 70, par conséquent la classe modale de cette série statistique est $[9{,}8; 9{,}9[$

**Question 2 : Comment déterminer graphiquement les quartiles d'une série statistique regroupée**
**en classes ?**

**Exercice non corrigé**

Dressons le tableau des effectifs cumulés croissants de cette série statistique

| Classe | $[45; 48[$ | $[48; 53[$ | $[53; 60[$ | $[60; 62[$ |
|---|---|---|---|---|
| Effectif | 12 | 14 | 18 | 6 |
| ECC | 12 | 26 | 44 | 50 |

Construisons le polygone des effectifs cumulés croissants


On a :

$\frac{N}{4} = \frac{50}{4} = 12{,}5$ à l'aide du graphique on obtient donc $Q_1 = 48{,}17$

$\frac{3N}{4} = \frac{3}{4} \times 50 = 37{,}5$ à l'aide du graphique on obtient donc $Q_3 = 57{,}47$

**Question 3 : Comment calculer l'écart type d'une série statistique regroupée en classes ?**

**Exercice non corrigé**

Calculons la moyenne $\bar{x}$ de cette série statistique

| Classe | $[80;100[$ | $[100;150[$ | $[150;220[$ | $[220;300[$ | $[300;400[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif ($n_i$) | 52 | 70 | 38 | 25 | 5 |
| Centre ($c_i$) | 90 | 125 | 185 | 260 | 350 |
| $n_i c_i$ | 4 680 | 8 750 | 7 030 | 6 500 | 1 750 |

$\bar{x} = \frac{1}{190}(4\,680 + 8\,750 + 7\,030 + 6\,500 + 1\,750) = 151{,}105$

Ensuite on a le tableau suivant

| Classe | $[80;100[$ | $[100;150[$ | $[150;220[$ | $[220;300[$ | $[300;400[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif ($n_i$) | 52 | 70 | 38 | 25 | 5 |
| Centre ($c_i$) | 90 | 125 | 185 | 260 | 350 |
| $n_i {c_i}^2$ | 421 000 | 1 093 750 | 1 300 500 | 1 690 000 | 612 500 |

La variance de cette série statistique est :

$V = \frac{1}{190}(421\,000 + 1\,093\,750 + 1\,300\,500 + 1\,690\,000 + 612\,500) - (151{,}105)^2$

$V = 4104{,}121$

l'écart type de cette série statistique est :

$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{4656{,}083} = 64{,}06$

## MES SEANCES D'EXERCICES

### Exercices de fixation

**Exercice 1**

1. Vrai ; 2. Faux ; 3. Faux ; 4. Faux ; 5. Vrai

**Exercice 2**

On obtient le tableau suivant

| Classe | $[2;5[$ | $[5;9[$ | $[9;11[$ | $[11;15[$ | $[15;18[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 7 | 13 | 12 | 8 | 2 |
| Centre | 3,5 | 7 | 10 | 13 | 16,5 |
| Amplitude | 3 | 4 | 2 | 4 | 3 |
| Densité | 2,3 | 3,25 | 6 | 2 | 0,6 |

**Exercice 3**

On obtient le tableau suivant

| Taille | [155; 160[ | [160; 165[ | [165; 170[ | [170; 175[ |
|---|---|---|---|---|
| Effectif | 12 | 30 | 48 | 61 |
| Fréquence | 0,048 | 0,12 | 0,192 | 0,244 |
| Fréquence en pourcentage | 4,8 | 12 | 19,2 | 24,4 |

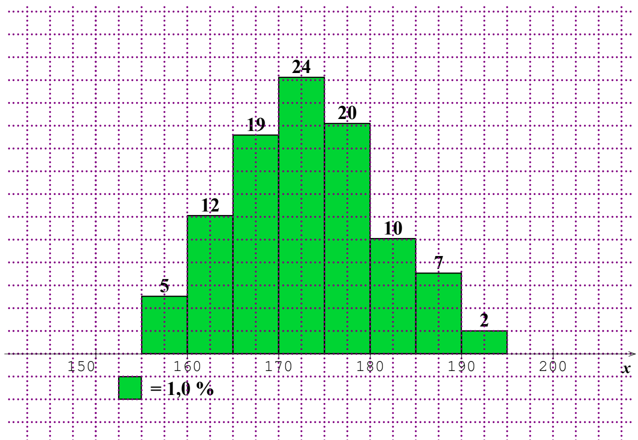
| Taille | [157; 180[ | [180; 185[ | [185; 190[ | [190; 195[ |
|---|---|---|---|---|
| Effectif | 50 | 26 | 17 | 6 |
| Fréquence | 0,2 | 0,104 | 0,068 | 0,024 |
| Fréquence en pourcentage | 20 | 10,4 | 6,8 | 2,4 |

**Exercice 4**

1.C ; 2.A ; 3. C ; 4. A

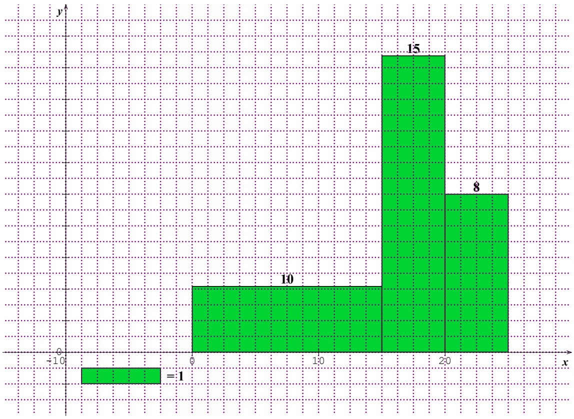
**Exercice 5**

Histogramme des fréquences



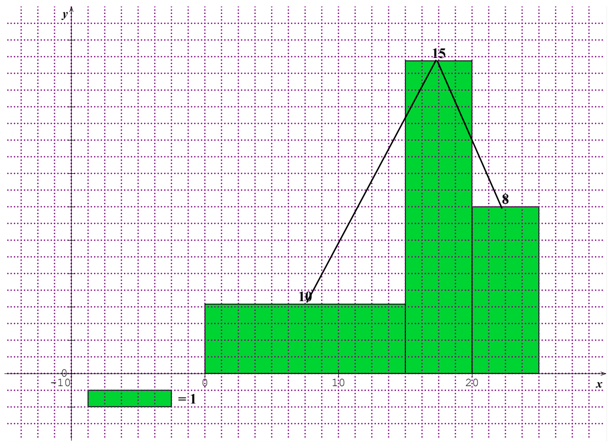
**Exercice 6**

histogramme des effectifs



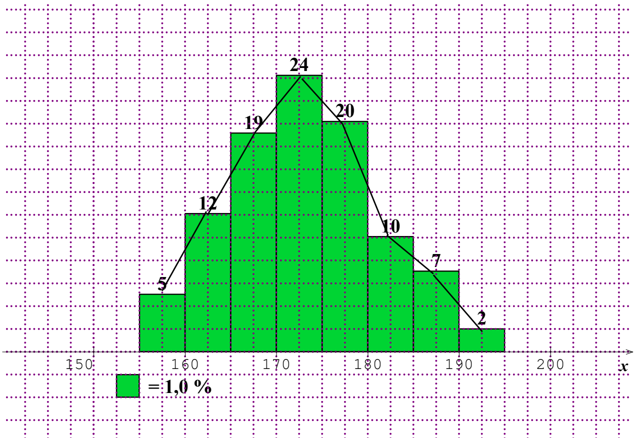

**Exercice 7**

Polygone des effectifs



### Exercice 8

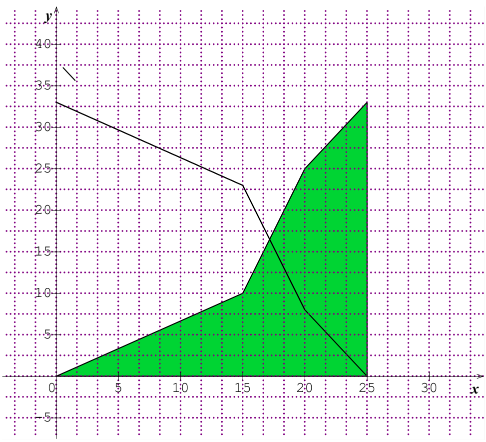
Polygone des fréquences



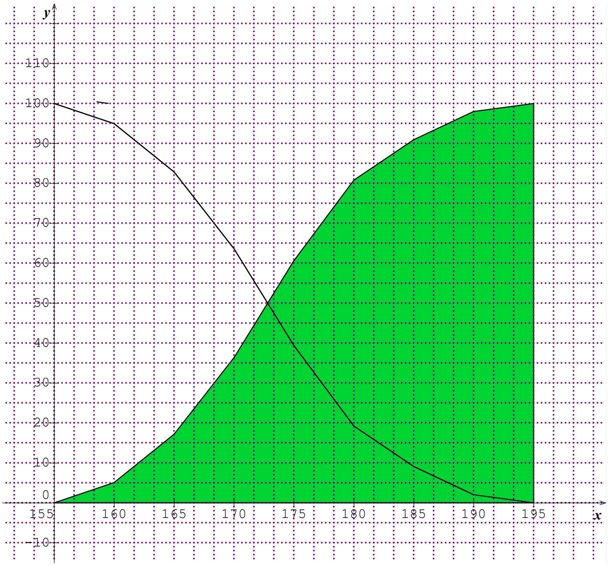

### Exercice 9

On complète le tableau ci-dessus, en créant les tableaux des ECC et de ECD.

| Durée du trajet en minutes | [0; 15[ | [15; 20[ | [20; 25[ |
|---|---|---|---|
| Effectifs | 10 | 15 | 8 |
| Effectifs cumulés croissants (ECC) | 10 | 25 | 33 |
| Effectifs cumulés décroissants (ECD) | 33 | 23 | 8 |



**Exercice 10**




**Exercice 11**

1.Vrai ; 2. Faux ; 3.Vrai ; 4. Faux

**Exercice 12**

1. La courbe cumulative des effectifs de cette série statistique est la représentation graphique de la
fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

Si $x \in ]-\infty; 0[$ , $F(x) = 0$

Si $x \in [0; 1[$ , $F(x) = 5$

Si $x \in [1; 2[$ , $F(x) = 25$

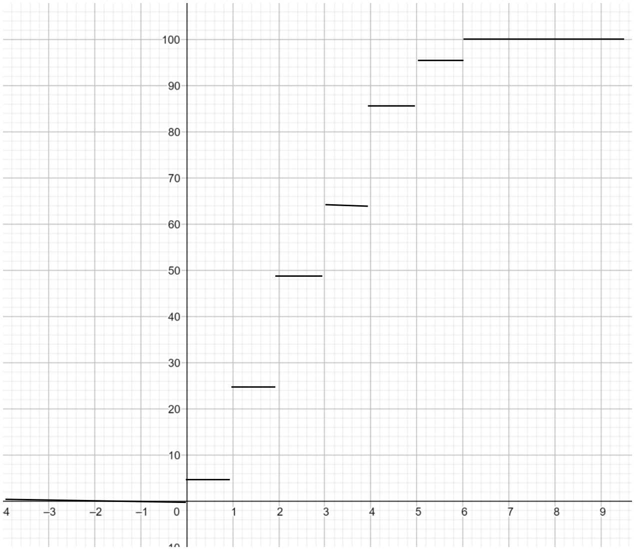
Si $x \in [2; 3[$ , $F(x) = 49$

Si $x \in [3; 4[$ , $F(x) = 64$

Si $x \in [4; 5[$ , $F(x) = 84$

Si $x \in [5; 6[$ , $F(x) = 94$

Si $x \in [6; +\infty[$ , $F(x) = 100$




2. La courbe cumulative des fréquences de cette série statistique est la représentation graphique de la fonction $G$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

Si $x \in ]-\infty; 0[$ , $G(x) = 0$

Si $x \in [0; 1[$ , $G(x) = 0{,}05$

Si $x \in [1; 2[$ , $G(x) = 0{,}25$

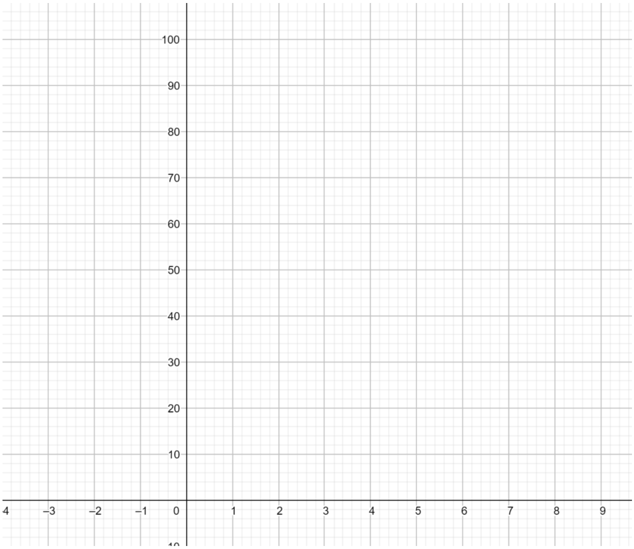
Si $x \in [2; 3[$ , $G(x) = 0{,}49$

Si $x \in [3; 4[$ , $G(x) = 0{,}64$

Si $x \in [4; 5[$ , $G(x) = 0{,}84$

Si $x \in [5; 6[$ , $G(x) = 0{,}94$

Si $x \in [6; +\infty[$ , $G(x) = 1$




**Exercice 13**

1.C ; 2.B ; 3. A ; 4. B ; 5. B ; 6. C

**Exercice 14**

toutes les classes ont la même amplitude donc la classe modale est la classe qui a la plus grande
fréquence. C'est donc $[170; 175[$

**Exercice 15**

On obtient le tableau suivant

| Durée du trajet | $[0; 15[$ | $[15; 20[$ | $[20; 25[$ |
|---|---|---|---|
| Effectif | 10 | 15 | 8 |
| Amplitude | 15 | 5 | 5 |
| Centre de la classe | 7,5 | 17,5 | 22,5 |
| Densité | 0,6 | 3 | 1,6 |

3 est la densité la plus grande, la classe modale est donc $[15; 20[$

**Exercice 16**

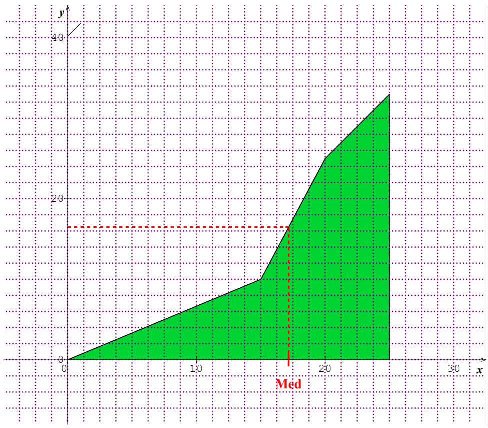
La durée moyenne du trajet des élèves est égale à : $\frac{10\text{x}7,5+15\text{x}17,5+8\text{x}22,5}{33} = \frac{65}{6}$ soit environ 11 minutes

**Exercice 17**

La moyenne est 173,05

**Exercice 18**

1. la médiane

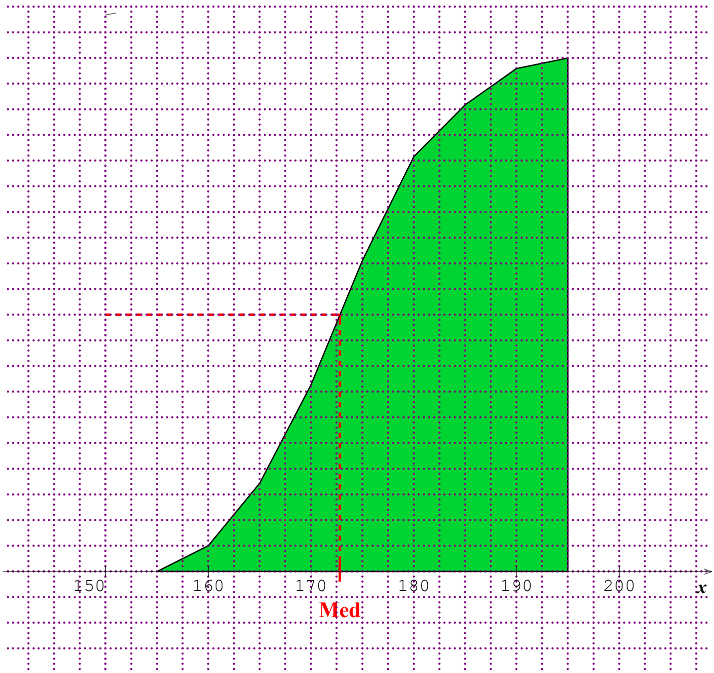



A l'aide du graphique la médiane semble être égale à 17,16

2. Par le calcul, la médiane de cette série est égale à 17,16

3. il y'a au moins la moitié des élèves qui ont durée de trajet de 17,16 mn

**Exercice 19**



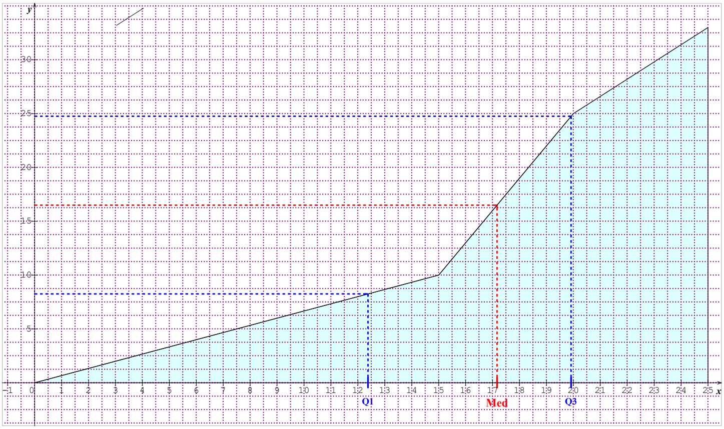

2. La médiane est 172, 81
3. Il y'a au moins la moitié des élèves qui ont une taille inférieure ou égale à 172,81cm

**Exercice 20**

1.Vrai ; 2. Vrai ; 3.Vrai ; 4. Vrai

**Exercice 21**

1.




Graphiquement, le premier quartile est environ 12,4. le troisième quartile est environ 19,91.

2 . 3. Vérifications à l'aide du calcul et interprétation.

On complète le tableau en y insérant la ligne des ECC.

| Durée du trajet en minutes | $[0;15[$ | $[15;20[$ | $[20;25[$ |
|---|---|---|---|
| Effectifs | 10 | 15 | 8 |
| ECC | 10 | 25 | 33 |

On détermine le premier quartile $q_1$ par la méthode d'interpolation linéaire :

D'abord $q_1$ est la valeur qui est telle que 25% des valeurs soient inférieures ou égales à $q_1$ et 75% des valeurs soient supérieures ou égales à $q_1$.

Donc $q_1$ est à chercher dans la classe $[0;15[$. On obtient le tableau suivant :

| | | |
|---|---|---|
| 0 | $q_1$ | 15 |
| 0 | 8,25 | 10 |

Soit donc : $\frac{10-0}{15-0} = \frac{15-q_1}{10-8,25}$. Ce qui donne $q_1 = 12,375$ soit environ $12,4$

On détermine le troisième quartile $q_3$ par la méthode d'interpolation linéaire :

D'abord $q_3$ est la valeur qui est telle que 75% des valeurs soient inférieures ou égales à $q_3$ et 25% des valeurs soient supérieures ou égales à $q_3$.

Donc $q_3$ est à chercher dans la classe $[0; 15[$. On obtient le tableau suivant :

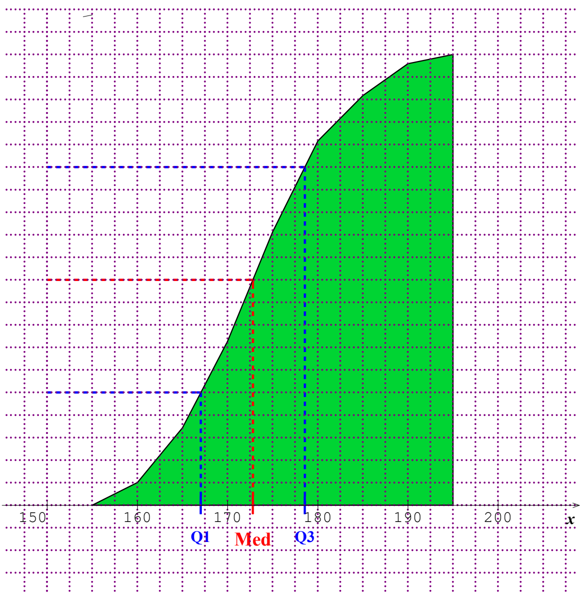
| | | |
|---|---|---|
| 20 | $q_3$ | 25 |
| 25 | 24,75 | 33 |

$Q_3 = 19,91$

4. $Q_3 - Q_1 = 19,91 - 12,37 = 7,54$

**Exercice 22**

1.



$Q_1 = 167{,}039$ et $Q_3 = 178{,}56$

2. $Q_1 = 167{,}039$ et $Q_3 = 178{,}56$
3. Interprétation

4. $Q_3 - Q_1 = 178{,}56 - 167{,}039 = 11{,}521$

**Exercice 23**

1.a) $e_m = 1{,}49$
b) $e_A = 2{,}46$

2. $e_A > e_m$ donc c'est Masse qui est la plus régulière que Amine

**Exercice 24**

1. $V = 32{,}94$

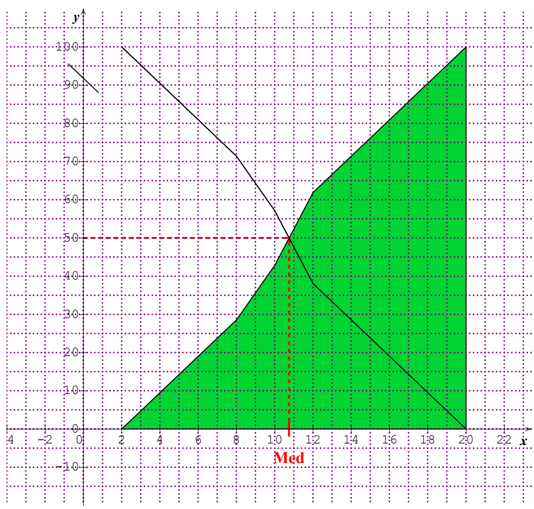
2.a) $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{32{,}94} = 5{,}74$
b) le temps mis par les élèves n'est très éloigné du temps moyen.

**Exercice 25**

1.Faux ; 2. Vrai ; 3.Faux ; 4. Faux ; 5.Faux ; 6. Faux ; 7.Faux ; 8. Vrai ; 9.Faux ; 10. Vrai

**Exercice 26**

1. la classe modale est : $[10; 12[$
2. La moyenne est : 10,90
3. Polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes



4.a) Graphiquement la médiane est 10,8

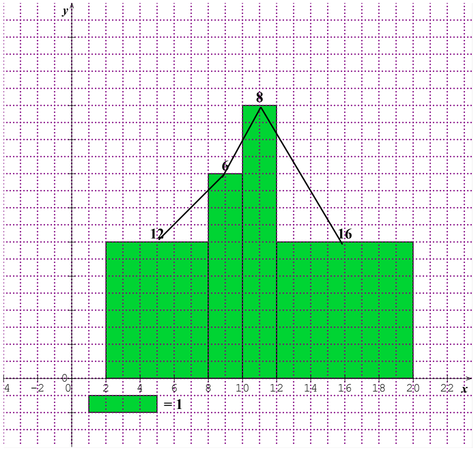
b) Algébriquement la médiane vaut 10,75

c) Interprétation

5. $Q_1 = 7{,}25$ et $Q_3 = 14{,}75$

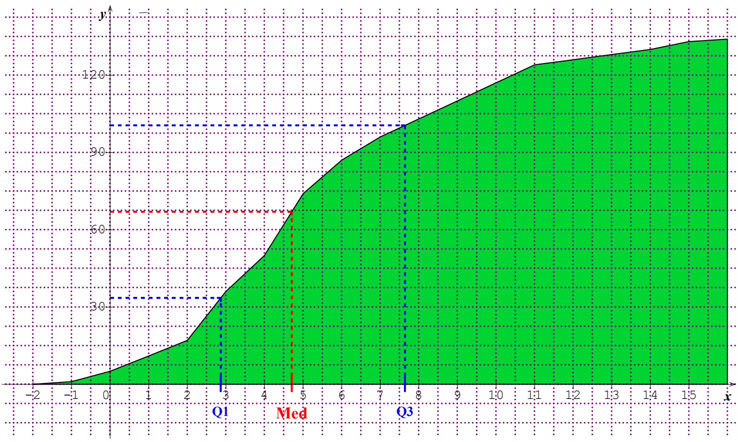
6. a) histogramme

b) polygone des effectifs




**Exercice 27**

1. a) Polygone des effectifs cumulés croissants



b) la médiane vaut : 4,7

$Q_1 = 2{,}86$ et $Q_3 = 7{,}64$

c) $Q_3 - Q_1 = 7{,}64 - 2{,}86 = 4{,}78$

Interprétation :

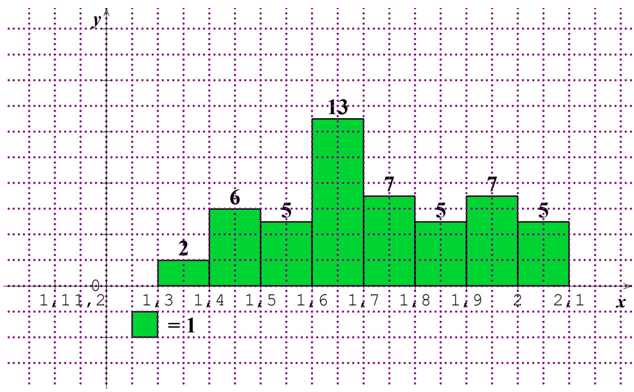
2. La moyenne vaut : 5,44

3. la variance vaut : 12,81

L'écart type vaut : $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{12{,}81} = 3{,}58$

**Exercice 28**

1. La moyenne est égale à : 1,72
2. Histogramme

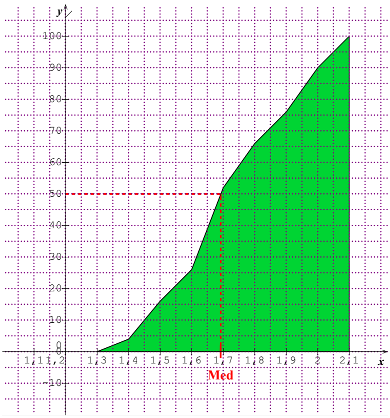



3.a) tableau des fréquences en pourcentage et des fréquences cumulées en pourcentage

| Glycémie | Effectifs | Fréquences en % | FCC (en %) |
|---|---|---|---|
| [1,3; 1,4[ | 2 | 4 | 4 |
| [1,4; 1,5[ | 6 | 12 | 16 |
| [1,5; 1,6[ | 5 | 10 | 26 |
| [1,6; 1,7[ | 13 | 26 | 52 |
| [1,7; 1,8[ | 7 | 14 | 66 |
| [1,8; 1,9[ | 5 | 10 | 76 |
| [1,9; 2[ | 7 | 14 | 90 |
| [2; 2,1[ | 5 | 10 | 100 |

b) la classe médiane est : [1,6; 1,7[

c) Polygone des fréquences cumulées croissantes




d) la médiane est 1,69

**Exercice 29**

1. a) La moyenne $\bar{x} = 70$

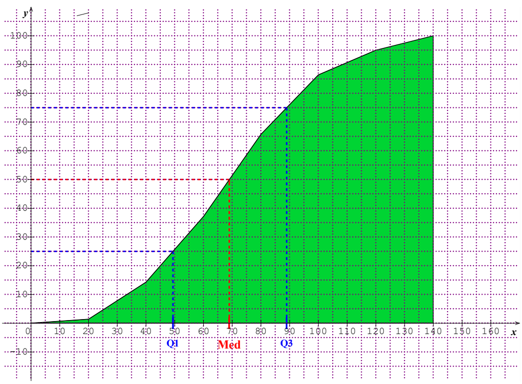
b) L'écart type est $s = 27{,}39$

c) Interprétation

l'intervention de moussa sur un téléphone dur en moyenne 70

Cet écart type est relativement grand. Cela signifie que les temps d'intervention ne sont pas resserrées autour de la moyenne. Le temps d'intervention n'est donc pas homogène.

2. Polygone des fréquences cumulées croissantes



3. a) $\bar{x} - s = 70 - 27{,}39 = 42{,}61$ et $\bar{x} + s = 70 + 27{,}39 = 97{,}39$

On a donc l'intervalle $[42{,}61 \,;\, 97{,}39\,]$ on peut donc estimer l'effectif à 101

b) $\bar{x} - 2s = 70 - 54{,}78 = 15{,}22$ et $\bar{x} + 2s = 70 + 54{,}78 = 124{,}78$

On a donc l'intervalle $[15{,}22 \,;\, 124{,}78\,]$ on peut donc estimer l'effectif à 140

**Exercice 30**

A partir de l'histogramme on a le tableau suivant

| Classe | $[45;50[$ | $[50;55[$ | $[55;60[$ | $[60;65[$ | $[65;70[$ | $[70;75[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 4 | 7 | 8 | 5 | 11 | 2 |
| ECC | 4 | 11 | 19 | 24 | 35 | 37 |

1. On a : $\frac{37}{2} = 18{,}5$ donc la classe médiane est $[55\,;60\,]$
   la classe de $Q_1$ est $[50\,;55\,]$
   la classe de $Q_3$ est $[65\,;70\,]$
2. La médiane est égale à $59{,}66$ ; $Q_1 = 53{,}75$ et $Q_3 = 66{,}70$

**Exercice 31**

1. Construction du polygone des effectifs de la série ( voir figure dans le manuel)
2. A partir de l'histogramme on a le tableau suivant

| Classe | $[11;17[$ | $[17;19[$ | $[19;21[$ | $[21;23[$ | $[23;25[$ | $[25;35[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 15 | 25 | 30 | 25 | 10 | 5 |
| ECC | 15 | 40 | 70 | 95 | 105 | 110 |

3-a)

*On a $\frac{110}{2}$ = 55 qui correspond à l'effectif cumulé croissant de la médiane. Donc la médiane est ]19 ;21]

*On a $\frac{110}{4}$ = 27,5 qui correspond à l'effectif cumulé croissant du premier quartile. Donc la classe du premier quartile est ]17 ;19]

*On a $\frac{3\,x\,110}{4}$ = 82,5 qui correspond à l'effectif cumulé croissant du troisième quartile. Donc la classe du troisième quartile est ]21 ;23]

3-b)

*Détermine le premier quartile $Q_1$

| | | |
|---|---|---|
| 17 | $Q_1$ | 19 |
| 15 | 27 ?5 | 40 |

On a : $\frac{Q_1-17}{27{,}5-15} = \frac{19-17}{40-15}$ Donc $Q_1$= 18

*Déterminons le troisième quartile $Q_3$

| | | |
|---|---|---|
| 21 | $Q_3$ | 23 |
| 70 | 82,5 | 05 |

On a : $\frac{Q_3-21}{82,5-70} = \frac{23-21}{40-15}$   Donc $Q_3 = 22$

L'écart interquartile est : $Q_3 - Q_1 = 22 - 18 = 4$

50% de l'effectif est concentré sur un intervalle de longueur 4

**Exercice 32**

La représentation de soutcho est la correct car la largeur des rectangles sont proportionnelles aux amplitudes et leurs hauteurs sont proportionnelles aux bases

2. La classe modale de cette série statistique est $[5; 6[$

3.a) On a $\frac{31}{2} = 15,5$ donc la classe médiane est $[19; 21[$

b) la médiane est donc 5,21

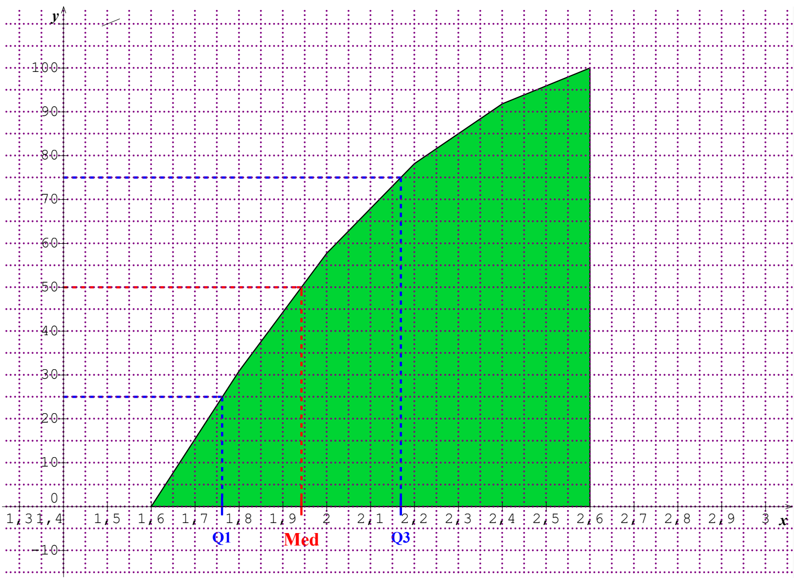
4.a) la moyenne est : 5,08

b) l'écart type est : 2,34

Les différentes valeurs de cette série statistique ne s'éloignent pas de 5,08

**Exercice 33**

1. Polygone des fréquences cumulées croissantes



2. Par lecture graphique, il y'a environ 68 % de personnes ayant un taux anormal

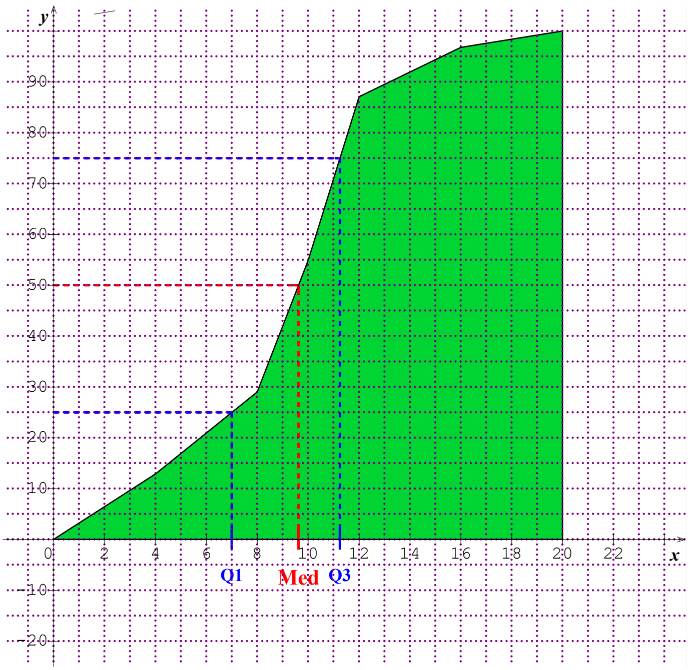
**Exercice 34**

1.la population étudiée : les élèves d'une classe de première
le caractère étudié : les notes
le caractère est quantitatif

2. On obtient le tableau suivant

| Valeur | [0; 4[ | [4; 8[ | [8; 10[ | [10; 12[ | [12; 16[ | [16; 20[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 4 | 5 | 8 | 10 | 3 | 1 |
| Fréquences arrondi | 0,13 | 0,16 | 0,26 | 0,32 | 0,1 | 0,03 |
| FCC | 0,13 | 0,29 | 0,55 | 0,87 | 0,97 | 1 |

3. La classe modale de cette série statistique est [10; 12[
4. La moyenne est : 9,03
5. L'écart type est : 3,75 en%
6. a) Polygone des fréquences cumulées croissantes



b) La médiane est égale à 9,62 ; $Q_1 = 7$ et $Q_3 = 11{,}25$

c) $Q_3 - Q_1 = 11{,}25 - 7 = 4{,}25$

50% des notes sont concentrées dans un intervalle d'amplitude 4, 25, ce qui témoigne d'un assez bon regroupement de notes autour de la médiane.

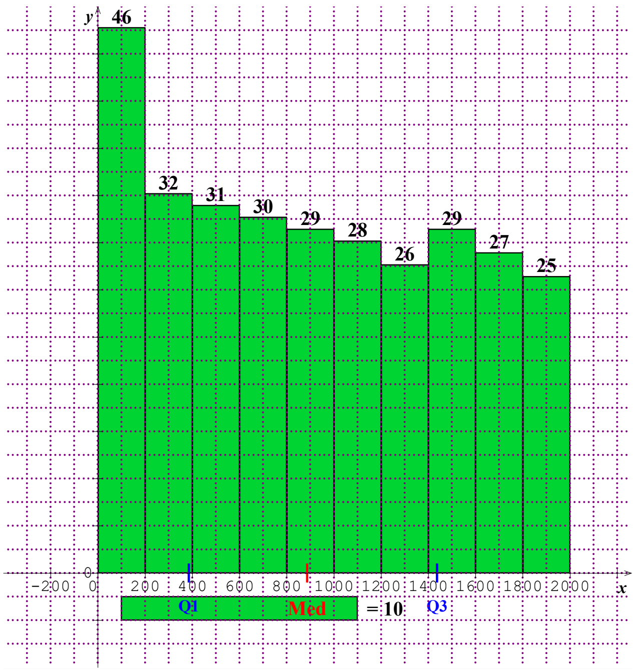
d) ) $\bar{x} - s = 9{,}03 - 3{,}75 = 5{,}28$ et $\bar{x} + s = 9{,}03 + 3{,}75 = 12{,}72$

On a donc l'intervalle $[5{,}28 \ ; 12{,}72]$. On peut donc estimer à environ 68% des élèves qui ont une note comprise entre $[5{,}28 \ ; 12{,}72]$ (voir l'interprétation statistique de $[\ \bar{x} - s \,; \bar{x} + s]$

**Exercice 35**

1.

2.a) Histogramme des effectifs



b)

| Valeur | 1 à 200 | 201 à 400 | 4001 à 600 | 601 à 800 | 801 à 1000 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 46 | 32 | 31 | 30 | 29 |
| Fréquences | 15,18 | 10,56 | 10,23 | 9,9 | 9,6 |
| FCC | 15,18 | 25,74 | 35,97 | 45,87 | 55,47 |

| Valeur | 1001 à 1200 | 1201 à 1400 | 1401 à 1600 | 1601 à 1800 | 1801 à 2000 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 28 | 26 | 29 | 27 | 25 |
| Fréquences | 9,3 | 8,6 | 9,5 | 8,9 | 8,23 |
| FCC | 64,77 | 73,37 | 82,87 | 91,77 | 100 |

c) La médiane est entre 801 à 1000 donc on a au moins 50 % des nombres premiers répertoriés ici sont inférieur à 1000.

**Exercice 36**

**(Exercice à reformuler à la prochaine édition)**

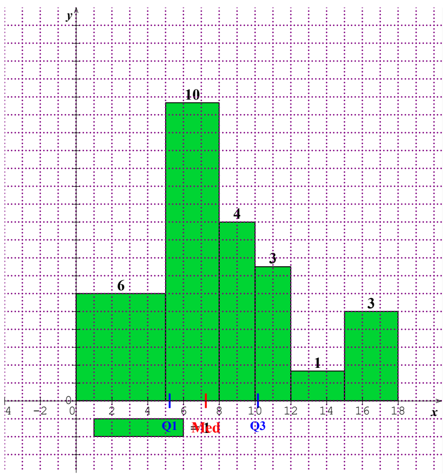
1- $H_1 \Leftrightarrow$ Série B ; $H_2 \Leftrightarrow$ Série A ; $H_3 \Leftrightarrow$ Série D ; $H_4 \Leftrightarrow$ Série C
2- $H_4 \Leftrightarrow L1$ ; $H_2 \Leftrightarrow L2$ ; $H_1 \Leftrightarrow S_1$ ; $H_3 \Leftrightarrow S_2$
3- a) Série B ; b) Série D ; c) Série C ; d) Série A

**Exercice 37**

Graphique à améliorer et calcul à vérifier

| Classe | [0; 5[ | [5; 8[ | [8; 10[ | [10; 12[ | [12; 15[ | [15; 18[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 6 | 10 | 4 | 3 | 1 | 3 |
| ECC | 6 | 16 | 20 | 23 | 24 | 27 |

2-histogramme de la série statistique



3.a) le nombre d'élèves qui ont eu plus de 10 sur 20 est : 7

b) le nombre d'élèves qui ont eu moins de 08 sur 20 est :16

4. La moyenne de la classe est $\bar{x} = 7{,}85$ or 7,85 < 10 donc le devoir n'est pas réussi

5. $Q_1 \approx 5$ et $Q_3 \approx 10$ donc $Q_3 - Q_1 = 10 - 5 = 5$

Interprétation : 50% des notes sont comprises entre 5 et 10 et sont situés en au plus 5 points autour de la médiane.

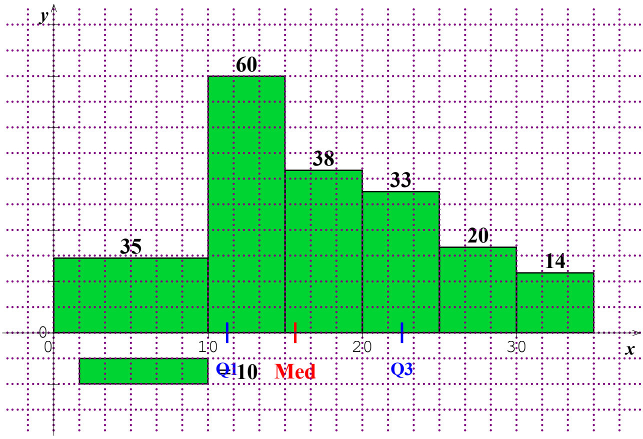
6. $V = 17{,}86$

2.a) $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{17{,}86} = 4{,}22$

Cet écart type est relativement grand. Cela signifie que les notes ne sont pas resserrées autour
de la moyenne. Le niveau de la classe à ce devoir n'est donc pas homogène.

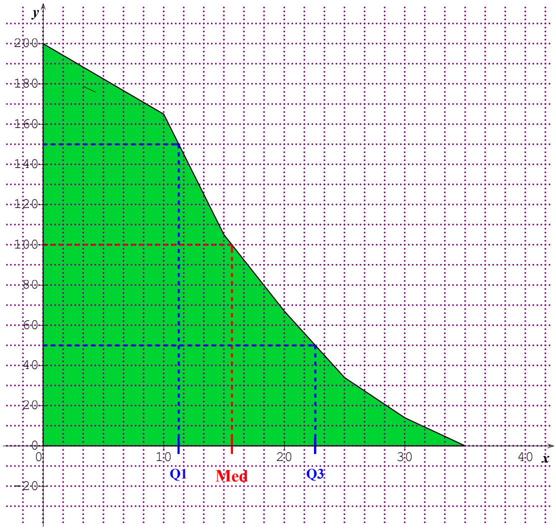
**Exercice 38**

1. Histogramme de la série statistique




2. Calcul des effectifs cumulés décroissants et représentation graphique on obtient le tableau suivant :

| Prix en milliers de francs CFA | $[0; 10[$ | $[10; 15[$ | $[15; 20[$ | $[20; 25[$ | $[25; 30[$ | $[30; 35[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 35 | 60 | 38 | 33 | 20 | 14 |
| ECD | 200 | 165 | 105 | 67 | 34 | 14 |




3.a) Par lecture graphique , le nombre de paires est d'environ 83, soit 41,5 % environ.

b) Par lecture graphique le nombre de paires est d'environ est 22 soit 11% environ.

c) On déduit que : (100 -41,5-11) = 47,5 donc, soit environ 47,5 % ont un prix compris entre 14 000 et 28 000 f

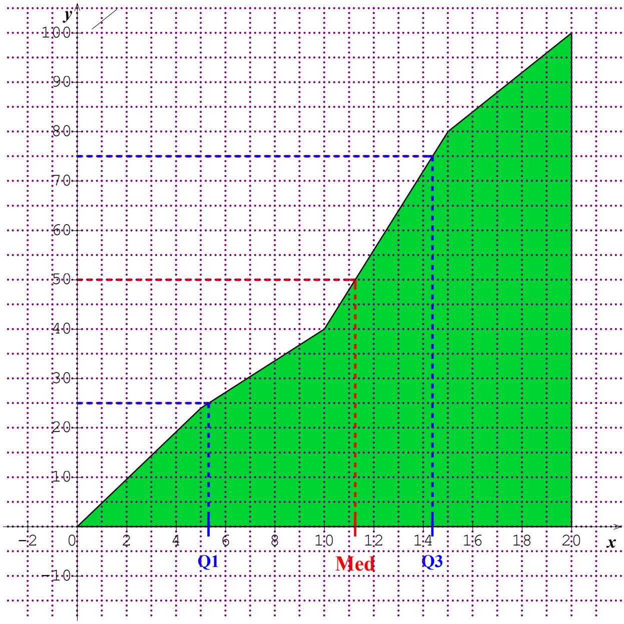
4.a) $\bar{y} = \frac{1}{5}\bar{x} - \frac{17,5}{5}$

b) $\delta$ (y) = $\sqrt{a}\delta(x)$ où y = $a\,x + b$, donc $\delta$ (y) = $\frac{\sqrt{5}}{5}\delta(x)$ (faire le calcul)

c)Faire le calcul

## SITUATIONS COMPLEXES

### Exercice 39




La moyenne est : 10,3

La médiane est : 11,25

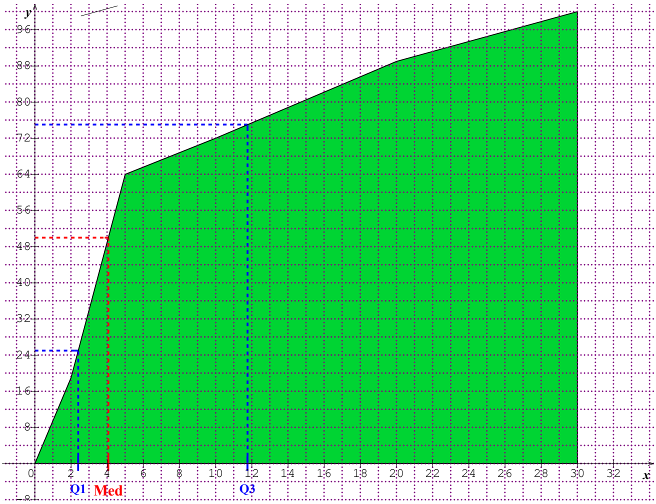
$Q_1 = 5{,}31$ et $Q_3 = 14{,}37$

En interprétant des résultats nous avons :

la moyenne est supérieur à 10 , la note médiane est supérieure ou égale à 11 et que 50 % des élèves ont des notes comprises entre 5 et 14.

les élèves ayant obtenu au moins la note de 10 seront récompensés.

**Exercice 40**




On a :

La moyenne est : 7,66

Interprétation : le temps d'attente est en moyenne de 7,66 mn donc plus de 5 mn

La médiane est : 4,02

Interprétation : dans plus de 50 % des cas, on attendra 4,02 mn donc moins de 5mn

C'est donc le slogan 2 que le directeur doit choisir

**Exercice 41**

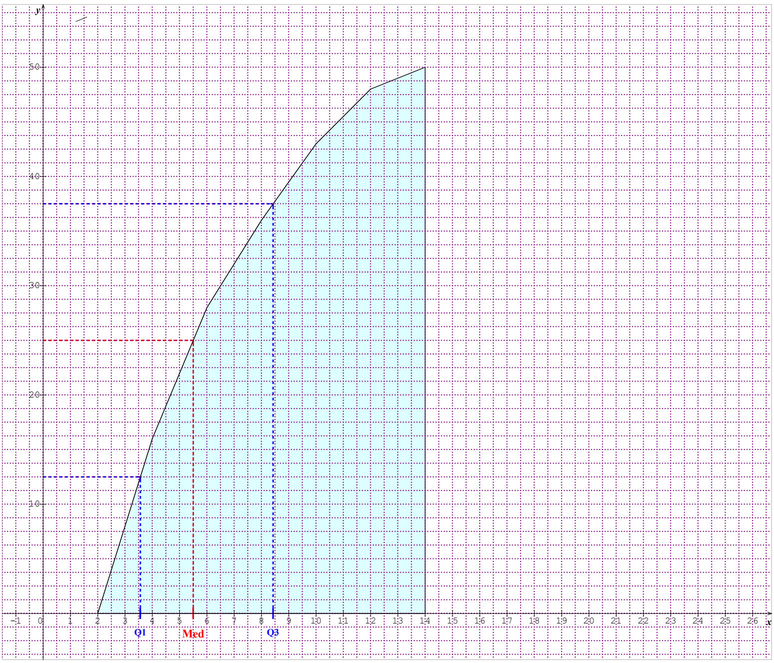
| Diamètre | Effectif | Effectifs cumulés croissants |
|---|---|---|
| [24,2; 24,4[ | 5 | 5 |
| [24,4 ; 24,6[ | 13 | 18 |
| [24,6; 24,8[ | 24 | 42 |
| [24,8; 25[ | 19 | 61 |
| [25; 25,2[ | 14 | 75 |
| [25,2; 25,4[ | 10 | 85 |
| [25,4; 25,6[ | 8 | 93 |
| [25,6; 25,8[ | 5 | 98 |
| [25,8 ; 26[ | 2 | 100 |

1) Le diamètre moyen de cette production est $\bar{X} = 24{,}946\ mm$. L'écart-type est $\sigma = 0{,}386$mm.
2) On a bien $24{,}9 < \bar{X} < 25{,}1$ et $\sigma < 0{,}4$. Ensuite $\bar{X} - 2\sigma = 24{,}174$ et $\bar{X} + 2\sigma = 24{,}718$.

L'intervalle $[\bar{X} - 2\sigma; \bar{X} + 2\sigma]$ est donc $[24{,}174; 24{,}718]$. Il n'y a que 42% de l'effectif qui appartient à l'intervalle $[\bar{X} - 2\sigma; \bar{X} + 2\sigma]$.

Sur les trois conditions imposées, deux seulement sont satisfaites. Donc cette production n'est pas bonne.

**Exercice 42**



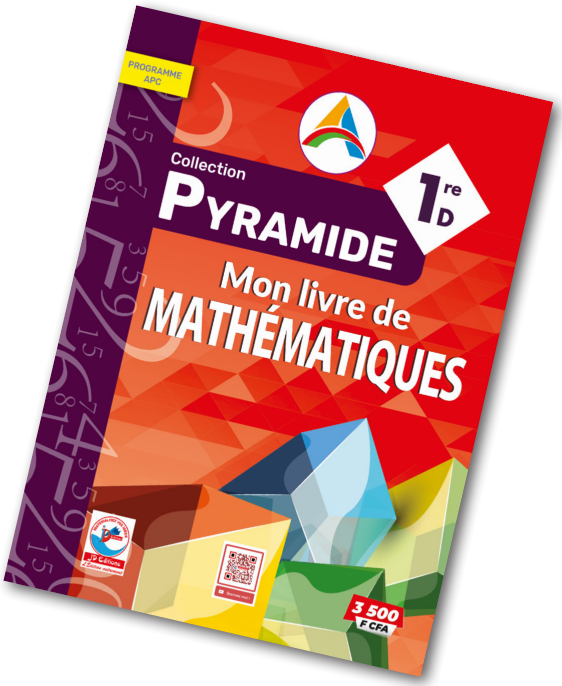

Le tonnage moyen est 6,16 tonnes. La condition 1 est donc bien remplie par cette centrale.

Cependant le tonnage moyen est 5,5 tonnes qui sont largement inférieure à 13 tonnes.

En conclusion, cette centrale ne peut pas bénéficier du crédit.

Achevé d'imprimer sous les presses de : JD Éditions
Pour le compte de JD Éditions.
Tél. : 25 23 00 17 50
Mise en page : JD Éditions

## Manuel de base




## COVID-19 / MESURES DE PREVENTIONS

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Lavez-vous les mains fréquemment | Respectez la distanciation physique | Portez un masque | Toussez ou éternuez dans votre coude | Ouvrez les fenêtres | Faites-vous vacciner |