Mon cahier d'habiletés

# Livre du Professeur

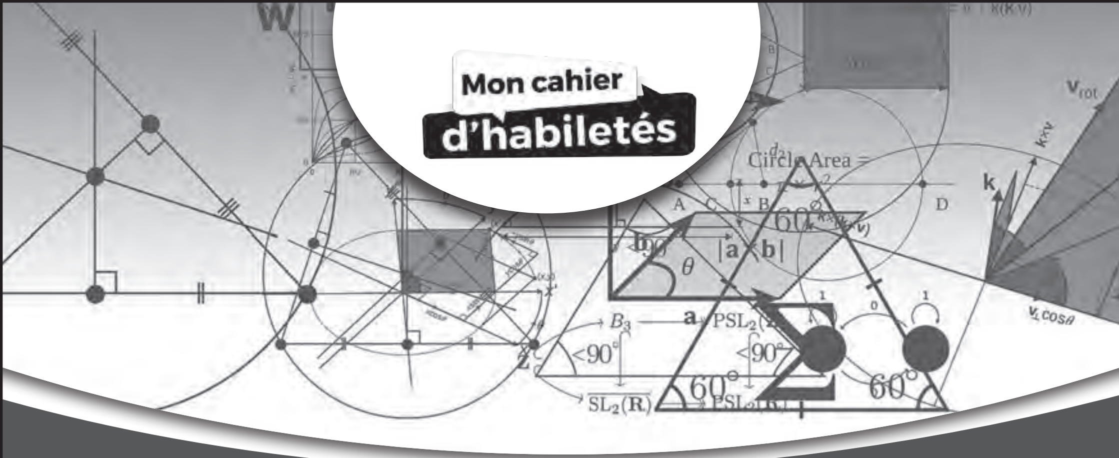
# Maths

## Tle A

CORRIGÉS DES EXERCICES

- Fixations
- Renforcements / Approfondissements
- Situations Complexes
- Devoirs de niveaux

JD Editions
L'Edition autrement



Mon cahier d'habiletés

# Livre du Professeur

# Maths

# $T^{le}$ A

**CORRIGÉS DES EXERCICES**

- Fixations
- Renforcements / Approfondissements
- Situations Complexes
- Devoirs de niveaux

JD Éditions
21 B.P. 3636 Abidjan 21
Côte d'Ivoire

# SOMMAIRE

*Ce document pourrait contenir des erreurs au fautes de frappes.*
*Prière les signaler à l'adresse : kyoussouphou@gmail.com*

# 1 ÉTUDE DE FONCTIONS POLYNÔMES ET DE FONCTIONS RATIONNELLES

## RÉSUMÉS DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

## I. NOTION DE LIMITE

***Propriété***

***Exercice 1***

1. Faux
2. Vrai

## II. LIMITE D'UNE FONCTION POLYNÔME

### 1. Limite d'une fonction polynôme en un point

***Exercice 2***

$a \rightarrow Oui$

***Exercice 3***

a) $\lim\limits_{x \to 4} (x^2 + 5x - 1) = 35.$

b) $\lim\limits_{x \to -5} (8x^2 + x) = 195.$

c) $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 + 4x^2 + x - 7) = -5.$

### 2. Limite à l'infini d'une fonction polynôme

***Exercice 4***

F ; V ; F ; F.

***Exercice 5***

F ; V ; F ; F.

***Exercice 6***

V ; F ; V ; V ; F ; F.

### *Exercice 7*

a) $\lim_{x\to-\infty} 19 = 19.$
b) $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$
c) $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$
d) $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty.$
e) $\lim_{x\to-\infty} x^2 = -\infty.$
f) $\lim_{x\to-\infty} -3x^2 = -\infty$
g) $\lim_{x\to-\infty} -3x^2 = -\infty.$

### Propriété

### *Exercice 8*

a) $\lim_{x\to-\infty}(6x^2 + 4x - 78) = +\infty$
b) $\lim_{x\to-\infty}(-3x^2 + x - 5) = -\infty$
c) $\lim_{x\to-\infty}(-3x^2 + x - 5) = -\infty.$

### *Exercice 9*

a) $\lim_{x\to-\infty}(x^3 + x^2 + 3) = -\infty$
b) $\lim_{x\to-\infty}(x^2 + x - 5) = +\infty$
c) $\lim_{x\to+\infty}(-3x^3 + x - 5) = -\infty.$

## III. LIMITE D'UNE FONCTION RATIONNELLE

### 1. Limite d'une fonction rationnelle en un point où elle est définie

### *Exercice 10*

$a \rightarrow Oui$

## Exercice 11

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{2x+3} = \frac{1}{5}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+2x+9}{x+1} = \frac{17}{3}$.

c) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2+3} = 0$.

## 2. Limite à gauche (respectivement à droite) en $a$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{x-a}$

## Exercice 12

a) Faux
b) Vrai
c) Faux
d) Faux

## Exercice 13

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{1}{x-1} = -\infty$ ;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{1}{x-1} = +\infty$ ;

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$ ;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$ ;

e) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} \frac{1}{x+2} = -\infty$ ;

f) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} \frac{1}{x+2} = +\infty$.

## 3. Limite à l'infini d'une fonction rationnelle

### Exercice 14

$a \rightarrow Faux$

$b \rightarrow Faux$

$c \rightarrow Faux$

$d \rightarrow Vrai.$

### Exercice 15

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{x-1} = 2$ ;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{x-1} = 2$ .

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-5}{-x^2+8x-9} = -1$ .

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4-x+14}{-x^2+12x+2} = -\infty.$

### Exercice 17

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2+x+7}{x+2} = +\infty$ ;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+85x}{8x+9} = -\infty$ ;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3-7}{x-10} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+3x^2+10x-5}{x^2-23x+1} = +\infty$

# IV. OPERATION SUR LES FONCTIONS

## 1. Limite de la somme de fonctions

## Exercice 18

a) Vrai
b) Faux
c) Faux
d) Vrai

## Exercice 19

$\lim_{x\to-3} f(x) = \frac{3}{2}$ ; $\lim_{x\to-3} g(x) = -11$, donc
$\lim_{x\to-3} (f(x) + g(x)) = -\frac{19}{2}$.

# 2. Limite du produit de deux fonctions

## Exercice 20

a) Vrai
b) Faux
c) Vrai
d) Faux.

## Exercice 21

$\lim_{x\to2} f(x) = -\frac{3}{2}$ ; $\lim_{x\to2} g(x) = -6$, donc
$\lim_{x\to2} f(x) \times g(x) = 9$.

## Exercice 22

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ ; $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, donc
$\lim_{x\to+\infty}(f \times g)(x) = +\infty$.

## Point Méthode 1

## Exercice 23

$-\infty$ **;** $-\infty$

## Exercice 24

a) $\lim_{\substack{x\to2 \\ <}} \frac{3x+1}{x-2} = -\infty$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{2}{3} \\ >}} \frac{3x+1}{3x-2} = +\infty.$

## *Exercice 25*

a) $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{5}{3} \\ >}} \frac{2x+3}{3x+5} = -\infty.$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} \frac{2x+1}{x+3} = +\infty.$

### 3. Limite du quotient de deux fonctions

## *Exercice 26*

1. Vrai
2. Faux
3. Vrai
4. Faux.

## *Exercice 27*

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\frac{2}{3}$ ; $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = -7$, donc $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{21}$.

# V. DÉRIVATION

### 1. Dérivées de fonctions élémentaires

## *Exercices de fixation*

## *Exercice 30*

1. $f'(x) = 0.$
2. $g'(x) = 2x$
3. $h'(x) = 3x^2$
4. $l'(x) = 8x^7.$

## *Exercice 31*

1. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$
2. $g'(x) = -\frac{2}{x^3}.$

3. $h(x) = -\frac{3}{x^4}$.
4. $l'(x) = -\frac{4}{x^5}$.

## 2. Dérivées et opération sur les fonctions

### ***Exercice 32***

a) $f'(x) = 2$.
b) $g'(x) = x + 1$.
c) $h'(x) = 12x^2 + 8x + 6$.
d) $l'(x) = 20x^3 + x$.

### ***Exercice 33***

a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
b) $g'(x) = 2 - \frac{1}{(x-1)^2}$ .
c) $h'(x) = x - \frac{2}{x^3}$ .

### ***Exercice 34***

a) $f'(x) = 30x + 22$
b) $g'(x) = 4x + 11$
c) $h'(x) = 8(4x + 1)$
d) $l'(x) = 2x(x+1)^2 + 2x^2(x+1)$

$$= 2x(x+1)[x + 1 + x]$$
$$= 2x(x+1)(2x+1).$$

### ***Exercice 35***

a) $f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$.
b) $g'(x) = \frac{-6}{(2x-1)^2}$.
c) $h'(x) = \frac{-14}{(4x-1)^2}$.
d) $l'(x) = \frac{2x^2+6x+5}{(2x+3)^2}$.

## 3. Dérivée et sens de variation

***Exercices de fixation***

***Exercice 35***

- $f$ est décroissante sur $]-\infty; 0[$.
- $f$ est constante sur $]0; 7[$.
- $f$ est strictement croissante sur $]7; +\infty[$.

***Exercice 36***

$f$ et $i$.

## 4. Équation de la tangente à une courbe

***Exercices de fixation***

***Exercice 38***

1.) $y = 0(x-0) - 2$ ; $y = -2$.

2.) $y = -2(x-1) - 3$ ; $y = -2x - 1$.

***Exercice 39***

$y = f'(-2)(x+2) + f(2)$

$= -6(x+2) + 8$

$= -6x - 12 + 8$

$y = -6x - 4$.

$f'(x) = 2x - 2$

$f'(-2) = 6$ .

$f(-2) = 4 + 4 = 8$.

## 5. Théorème des valeurs intermédiaires

***Exercice 40***

1)
1. $f$ est dérivable et monotone sur $\mathbb{R}$. Du plus, $f(1) \times f(2) < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$.
2. $f(2{,}1) \times f(2{,}2) < 0$.

## *Exercice 41*

1. V
2. F
3. V
4. V

### 6. Méthode de dichotomie

## *Exercice 42*

$f(-3) = -2$ ; $f(-3{,}5) \geq 0{,}2$

$f(-3) \times f(-3{,}4) < 0$ :

$-3{,}5 < \alpha < -3{,}4$.

### 7. Méthode par balayage

## *Exercice 43*

Choisir dans l'énoncé [0 ; 1]

| $x$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -1 | -0,9 | -0,8 | -0,6 | -0,4 | -0,2 | -0,04 | 0,2 |

$0{,}6 < \alpha < 0{,}7$

# VI. ÉTUDE D'UNE FONCTION RATIONNELLE

### 1. Asymptote à la courbe représentative d'une fonction

### Asymptote parallèle aux axes

## *Exercice 44*

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$, donc la droite d'équation $y = 3$ est asymptote à $(C)$.

### Propriété

## *Exercice 45*

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à $(C)$.

## Asymptotes obliques

## *Exercice 46*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=0 \quad et \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=0$$

Donc la droite d'équation y = x + 1 est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$

## *Exercice 47*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=0 \quad et \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)-x=0$$

Donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative de *f*.

## *Exercice 48*

$$g(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 10$$

$D_g = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 - 4x^2 - 3x + 10) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - 4x^2 - 3x + 10) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$g$ est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ ; on a :

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 3x^2 - 8x - 3 = 3(x + \frac{1}{3})(x - 3)$

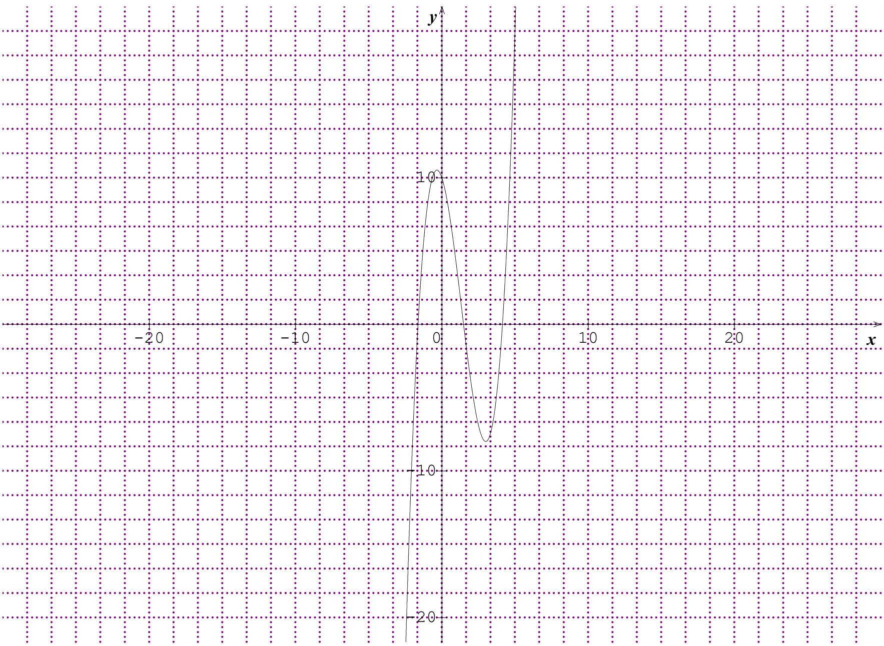
Le signe de $g'(x)$ donne : $\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[ \cup \left]3; +\infty\right[, g'(x) > 0$, donc $g$ est strictement croissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[$ et sur $]3; +\infty[$

$\forall x \in \left]-\frac{1}{3}; 3\right[$, $g'(x) < 0$,donc $g$ est strictement décroissante sur $\left]-\frac{1}{3}; 3\right[$

On en déduit le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{284}{27}$ | $\searrow$ | -8 | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Représentation graphique



## Exercice 49

S'inspirer de l'étude précédente

# EXERCICES DE RENFORCEMENTS / APPROFONDISSEMENTS

## Exercice 1

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. $\forall x \in 3$, $f'(x) = 2x - 2$.
3.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

## Exercice 2

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-5} g(x) = -\infty$ ;

$x = 1$ est asymptote ; $x = -5$ est asymptote à $(C)$.

## Exercice 3

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x-2)=0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x-2)=0$, donc la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe représentative de $f$.

## Exercice 4

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe représentative de $f$.

. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ .

Pour tout nombre réel $x$, $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

b) $f'(x) = 3x(x-2)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | – | 0 | + | |

- $f$ est croissante sur $]-\infty; 0[$ et $f$ et croissante sur $]2; +\infty[$.
- $f$ est décroissante sur $]0; 2[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | – | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | 1 | ↘ | –3 | ↗ | $+\infty$ |

2. a) $f$ est dérivable et strictement croissante sur [2 ; 3] et $f(2)\times f(3) < 0$
( $f(2) = -3$ et $f(3) = 1$).

b) $f(2{,}8) = -0{,}57$ et $f(2{,}9) = 0{,}6$ donc $2{,}8 < \alpha < 2{,}9$.

3. Soit g la fonction définie par $g(x) = f(1-x) + 1$ et démontrons que g est impaire.

$g(x) = (1-x)^3 - 3(1-x)^2 + 1 + 1$

$= -x^3 + 3x$

Pour tout $x$ élément de $\mathbb{R}$, $g(-x) = x^3 - 3x$

$= -g(x)$

Donc g est impaire. Donc le point A(1 ; -1) est centre de symétrie de la courbe de $f$.

Autre méthode

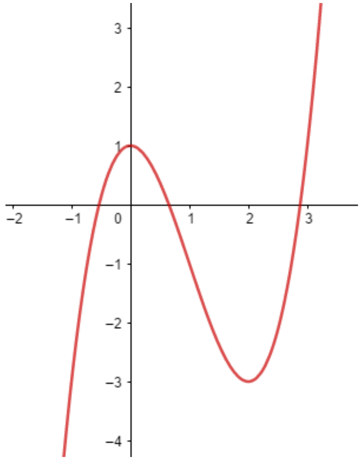
$f(1-x) = -x^3 + 3x - 1$ et $f(1+x) = x^3 - 3x - 1$

$f(1-x) + f(1+x) = -2$ donc le point A(1 ; -1) est centre de symétrie de la courbe de $f$.

4- a)

| $x$ | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -3 | 0,13 | 1 | 0,38 | -1 | -2,38 | -3 | -2,13 | 1 |

b)




## Exercice 5

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
2. a) $f'(x) = 3x^2 + 3$.

   b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f$ est croissante.

   c)

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow +\infty$ |

3. a) $f$ est dérivable et strictement croissante ;

   b) $f(-1) \times f(0) < 0$
4. a) $y = 3x + 2$.

   b) $f(x) - (3x + 2) = x^3 + 3x + 2 - 3x - 2 = x^3$.

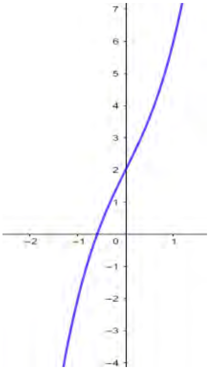
   $\forall x \in \left]-\infty; 0\right]$, $(T)$ est au dessus de $\left(C_f\right)$ ;

   $\forall x \in \left[0; +\infty\right[$, $\left(C_f\right)$ est au dessus de $(T)$.

5. a)

| $x$ | -2 | -1,5 | -1 | 0,5 | 0 | 1 | 2 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -12 | -5,8 | -2 | 3,6 | 2 | 6 | 10 | 25,1 | 38 |

b)




## ***Exercice 6***

5) 1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. a) $\forall x \in, \mathbb{R}\backslash\{2\}$ , $f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$.

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | | $2$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow$ | $-3$ | $\searrow -\infty$ | ‖ | $+\infty \searrow$ | $1$ | $\nearrow +\infty$ |

3) a) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe de $f$.

b) $f(x) - (x - 3) = \frac{1}{x-2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x - 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x - 3) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x - 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2}$

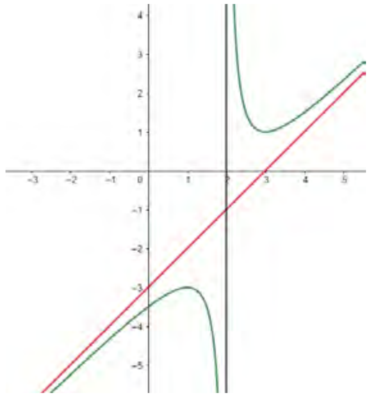
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x - 3) = 0$

c) $f(x) - (x - 3) = \frac{1}{x-2}$

Si $x < 2$,  (D) est au dessus de (C).
Si $x > 2$,  (D) est en dessous de (C).

4-

| $x$ | -4 | -2 | 0 | 1 | 1,5 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-\frac{43}{6}$ | $-\frac{21}{4}$ | $-\frac{7}{2}$ | -3 | -3,5 | 1 | 3/2 | $\frac{7}{3}$ |



## ***Exercice 7***

1. a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

   b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = -\infty$

   La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à $(C)$.

2. a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ ; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

   b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) - 2x + 1 = 0$.

   $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) - 2x + 1 = 0$ ;

La droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à la courbe représentative de $f$.

   c) $f(x) - 2x + 1 = -\frac{-3}{x-1}$

   $\forall x \in ]-\infty; 1[$, $(C)$ est au dessus de $(D)$

   $\forall x \in ]1; +\infty[$, $(D)$ *est au dessus de* $(C)$

3. a) $f'(x) = \frac{2x^2-4x+5}{(x-1)^2}$,

   b) $\forall x \in ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$

$f$ est croissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | \|\| | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow +\infty$ | \|\| | $-\infty$ | $\nearrow +\infty$ |

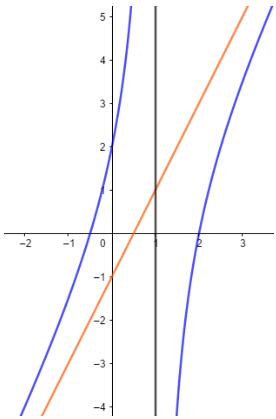
4) Soit g la fonction définie par : g($x$) = $f$(1- $x$) – 1 pour tout $x$ élément de $D_f$.

g($x$) = $\frac{2(1-x)^2-3(1-x)-2}{1-x-1}$ – 1

g($x$) = $-\frac{2x^2-3}{x}$ , on a : g(-$x$) = - g($x$), g est impair donc A(1 ; 1) est un centre de symétrie de (C).

5) B(-1/2 ; 0) et C(2 ; 0)

6)



## Exercice 8

### *Partie A*

Ecrire plutôt $f(x) = \frac{-x^2+4x-13}{(x-2)^2}$

P($x$) = $-x^2 + 4x + 5$

1) Les solutions sont -1 et 5.

2) Tableau de signe

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P($x$) | | - | 0 | + | 0 | - | |

$P(x) < 0$ si $x \in ]-\infty\ ;\ -1[\cup]5\ ;\ +\infty[$

$P(x) > 0$ si $x \in ]-1\ ;\ 5[$

***Partie B***

1- $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

2- a) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$, $x = 2$ est asymptote à la courbe de (C).

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

3- $f(x) = \dfrac{-x^2+4x-13}{(x-2)^2}$

Pour tout $x$ élément $\mathbb{R} - \{2\}$, $f'(x) = \dfrac{(-2x+4)(x-2)+x^2-4x+13}{(x-2)^2}$

$$= \frac{-x^2+4x-21}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{p(x)}{(x-2)^2}$$

4- $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 2[$ et sur $]2\ ;\ +\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $6$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-6$ | ↘ | $-\infty$ |

5- Pour tout $x$ élément $\mathbb{R} - \{2\}$, $f(x) = -x + 2 - \dfrac{11}{x-2}$

a $= -1$ ; b $= 2$ et c $= -11$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (-x+2)] = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{11}{x-2}$

$= 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-x+2)] = \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{11}{x-2}$

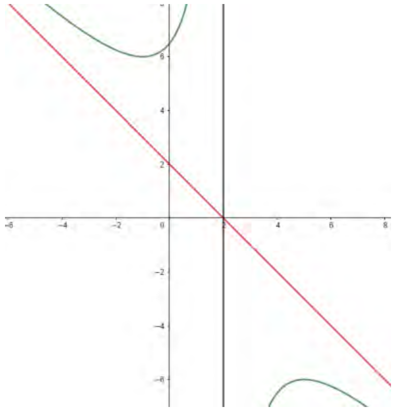
$= 0$

Donc la droite d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) $f(x) - (-x+2) = -\dfrac{11}{x-2}$

si $x \in ]-\infty\ ;\ 2[$, (C) est en dessous de (D).

si $x \in ]2\ ;\ +\infty[$, (C) est au-dessus de (D).



## Exercice 9

1) $f(x) = \frac{ax+2}{2x+1}$

Si la tangente à la courbe de $f$ en 0 est parallèle à la droite d'équation $y = -5x + 2$, alors $f'(0) = -5$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}; f'(x) = \frac{a(2x+1)-2(ax+2)}{(2x+1)^2} = \frac{a-4}{(2x+1)^2}$

$f'(0) = -5 \Leftrightarrow a = -1.$

2) $f(x) = \frac{-x+2}{2x+1}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}; f'(x) = \frac{-5}{(2x+1)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}, f'(x) < 0$ donc $f$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

Tableau de variations

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | \|\| | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\frac{1}{2}$ | ↘ $-\infty$ | \|\| | $-\infty$ ↘ | $-\frac{1}{2}$ |

## ***Exercice 10***

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$$

1) Si la tangente à la courbe de $f$ au point de coordonnées $(-3\,;1)$ est horizontale, alors $f'(-3) = 0$ et $f(-3) = 1$.
   $f(-3) = 1 \Leftrightarrow -3a + b = -13$. (1)

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; f'(x) = \frac{x^2-2x-a-b}{(x-1)^2}$

$f'(-3) = 0 \Leftrightarrow a + b = 15$. (2)

(1) et (2) implique $\begin{cases} -3a + b = -13 \\ a + b = 15 \end{cases}$ donc $a = 7$ et $b = 8$.

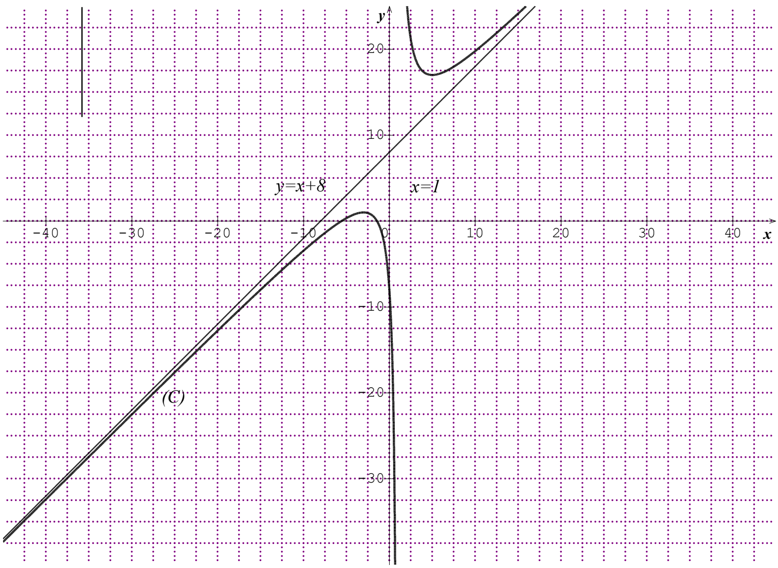
2) On a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; f(x) = \frac{x^2+7x+8}{x-1} = x + 8 + \frac{16}{x-1}$
   $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; f'(x) = \frac{x^2-2x-15}{(x-1)^2} = \frac{(x+3)(x-5)}{(x-1)^2}$
   - $\forall x \in ]-\infty; -3[ \cup ]5; +\infty[$, $f'(x) > 0$, donc $f$ est strictement croissante sur$]-\infty; -3[$et sur $]5; +\infty[$.
   - $\forall x \in ]-3; 1[ \cup ]1; 5[$, , $f'(x) < 0$, donc $f$ est strictement décroissante sur$]-3; 1[$ et sur $]1; 5[$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$
- Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ $\|$ $+\infty$ | $\searrow$ | $17$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x+8)] = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+8)] = 0$, donc la droite d'équation $y = x + 8$ est une asymptote à (C)en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à (C).



## Exercice 11

$f(x) = \frac{x^2-2x+3}{2x(x-2)}$

1)a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = +\infty$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = -\infty$ ;

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} f(x) = +\infty$

c)

- Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$, alors la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Comme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à (C)
- Comme $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} f(x) = +\infty$, alors la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à (C)

2) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}; f'(x) = \frac{-12x+12}{4x^2(x-2)^2}$

3.a) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}, 4x^2(x-2)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-12x + 12$

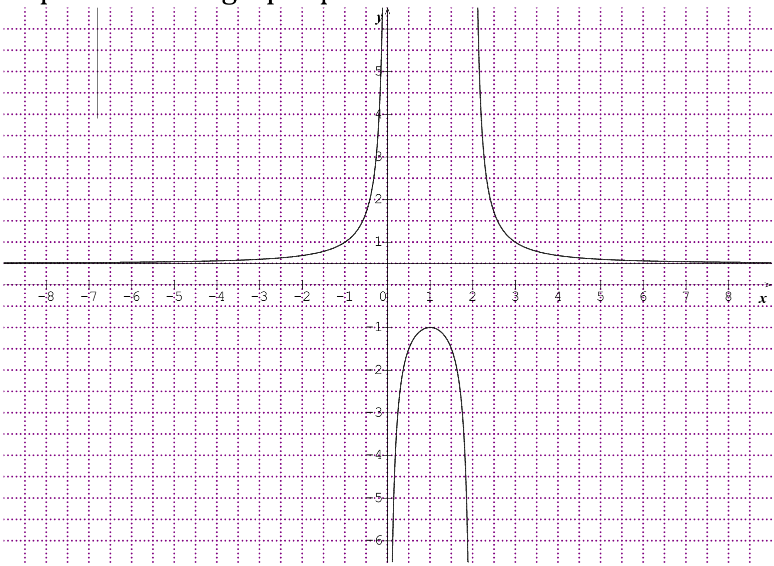
$\forall x \in \,]-\infty; 0[\, \cup \,]0; 1[, f'(x) > 0$, donc $f$ est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; 1[$

$\forall x \in \,]1; 2[\, \cup \,]2 + \infty[, f'(x) < 0$, donc $f$ est strictement décroissante sur $]1; 2[$ et sur $]2; +\infty[$

b) Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $-$ | |
| $f(x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}$ |

4) Représentation graphique



# SITUATIONS COMPLEXES

## Exercice 12

Soit B le bénéfice réalisé.
$B(x) = R(x) - C(x)$
$B(x) = -x^3 + 5x^2 + 200x - 400$
$B'(x) = -3x^2 + 10x + 200$

$\Delta = 2500 \quad X_1 = 10 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-20}{3}$

$\forall x \in [0\ ;\ 10[,\ B'(x) > 0$
$\forall x \in ]10\ ;\ +\infty[,\ B'(x) > 0$
B admet un maximum en 10.
Il faut produire 10 portables par jour pour réaliser un bénéfice maximum.

## Exercice 13

Pour déterminer le nombre de parapluie à fabriquer par l'entreprise pour réaliser le bénéfice maximal, je vais étudier les variations de la fonction $b(x)$ qui représente le bénéfice journalier de l'entreprise en milliers de francs.

- Je vais déterminer la fonction $p(x)$ qui représente le prix de vente du parapluie en millier de francs.
- Je vais déterminer la fonction $b(x)$
- je vais déterminer la dérivée de $b(x)$
- je vais étudier le signe de $b(x)$ puis en déduire les variations de la fonction $b$.
- je vais déduire des variations de $la\ fonction\ b$, la valeur de $x$ pour laquelle $b$ est maximal.

$p(x) = 3x$, car chaque parapluie est vendu à 3000 f

$b(x) = p(x) - f(x) = -x^2 + 84x$

$x \in [0; 60]$, $b'(x) = -2x + 84$

$x \in [0; 42], b'(x) > 0$ et $x \in [42; 60], b'(x) < 0$

$b$ est strictement croissante sur $[0; 42]$ et strictement décroissante sur $[42; 60]$

On a le tableau de variation suivant :

| $x$ | 0 | | 42 | | 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| $b'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $b(x)$ | | $\nearrow$ | 1764 | $\searrow$ | |

$b$ atteint le maximum en 42 donc pour que le bénéfice soit maximal, l'entreprise doit fabriquer quotidiennement 42 parapluie.

# 2 PROBABILITÉ

## RÉSUMÉS DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

## VII. PROBABILITÉ

### 1. Définition d'une expérience aléatoire

***Exercice 1***

1. Vrai
2. Vrai
3. Vrai
4. Vrai

***Exercice 2***

Expérience A

C'est une expérience aléatoire, car :

- On connait tous les résultats possibles : 3 boules rouges numérotées R1, R2, R3 et 1 boule noire N ;
- On ne peut prévoir les résultats car indiscernables au toucher ;
- On peut refaire cette expérience autant de fois que l'on veut dans les mêmes conditions.

Expérience B

Ce n'est pas une expérience aléatoire, car on sait à l'avance la couleur de la boule tirée.

Expérience C

Ce n'est pas une expérience aléatoire, car quatre résultats sont possibles mais on ne sait lesquels

### 2. Vocabulaire des probabilités

(***Éventualité***)

***Exercice 3***

{1} ; {2} ; {3}

***Univers***

***Exercice 4***

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

***Exercice 5***

Enoncé incomplet (A supprimer)

***Évènement***

***Exercice 6***

1. $\{2; 4; 6\}$
2. $\emptyset$
3. $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

## 3. Vocabulaire ensembliste, vocabulaire Probabiliste

***Exercice 7***

1. $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
2. {1} ; {2} ; {3}.
3. $A = \{1 ; 3 ; 5\}$ ; $\overline{A} = \{2; 4; 6\}$
4. $B = \{1; 2; 3; 4\}$ ; $C = \{3; 4; 5; 6\}$.
   a) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
   b) $A \cap B = \{3; 4\}$
5. « Le nombre lu est inférieur à 5 » ; « Le nombre lu est supérieur à 5 » sont deux événements incompatibles

## 4. Probabilité d'un événement

## 5. Evènement élémentaires équiprobables

## Exercice 8

1. Vrai
2. Vrai
3. Faux
4. Vrai.

## Exercice 9

1Vrai
2. Vrai
3. Faux
4. Vrai.

# Propriété1

## Exercice 10

$P = \frac{1}{2}$.

## Exercice 11

$P = \frac{1}{4}$.

# Propriété 2

## Exercice 12

1. Faux
2. Vrai
3. Vrai
4. Faux.

## Exercice 13

$P(B) = \frac{1}{2}$.

## Exercice 14

1) L'univers $\Omega$ de l'expérience est constitué de tous les tirages possibles de 5 cartes parmi 32. Le nombre de cas possibles est $C_{32}^{5}$ , c'est-à-dire 201376. Le choix des cartes se faisant au hasard, on est en situation d'équiprobabilité. Soit A l'évènement « Tirer 2 carreaux et 3 piques ». La probabilité de A est : $\frac{card(A)}{card(\Omega)}$.
Un cas (une éventualité) est favorable à la réalisation de A si on tire 2 carreaux parmi 8 puis 3 piques parmi 8. Le nombre de cas favorables à la réalisation de A est $C_8^2 \times C_8^3$. On a :

card(A) = 1568. On en déduit que : P(A) = $\frac{1568}{201376}$.

2) Il faut distinguer deux cas : a) le tirage contient le roi de pique ; b) le tirage ne contient pas le roi de pique.

a) Le tirage contient le roi de pique
Il faut ensuite choisir 1 roi parmi les 3 rois autres que le roi de pique puis 2 piques parmi les 7 piques autres que le roi de pique et enfin 1 carte parmi les 21 restantes qui ne sont ni roi ni pique. Soit 1323 possibilités.

b) Le tirage ne contient pas le roi de pique
Il faut choisir 2 rois parmi les 3 rois autres que le roi de pique puis 3 piques parmi les 7 piques autres que le roi de pique. Soit 105 possibilités.

Au total, il y a au total 1428 cas favorables à la réalisation de B. D'où :

P(B) = $\frac{1428}{201376}$. P(B) vaut environ 0,007.

## Exercice 15

$P(B) = \frac{45}{115}$

## Exercice 16

$P(V) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

## Exercice 17

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0,45 + 0,6 - 0,57$
$= 0,48$.

# VIII. VARIABLE ALÉATOIRE (Série A1)

## Exercice 18

1. Vrai
2. Faux
3. Vrai

### Notation

## Exercice 19

a) $(X = 1)$ est l'événement $\{2; 4; 6\}$.
b) $(X = 0)$ est l'événement $\{1; 3\}$.
c) $(X = -2)$ est l'événement $\{5\}$.

# IX. LOI DE PROBABILITÉ D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

## Exercice 20

| $x$ | –2 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ |

# X. ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

## *Exercice 21*

$E(X) = -2 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}5 + 6 \times 0{,}07 + 9 \times 0{,}06 + 10 \times 0{,}08 + 14 \times 0{,}19 = 4{,}72.$

## Variance et écart-type

## *Exercice 22*

$V(X) = 31{,}2416$ ; $\sigma(x) = 5{,}6$

# EXERCICES DE RENFORCEMENTS / APPROFONDISSEMENTS

## *Exercice 1*

1. $P = 30^3$.
2. $P = 1 - \frac{12^3}{30^3}$.
3. $P = \frac{1}{10}$.

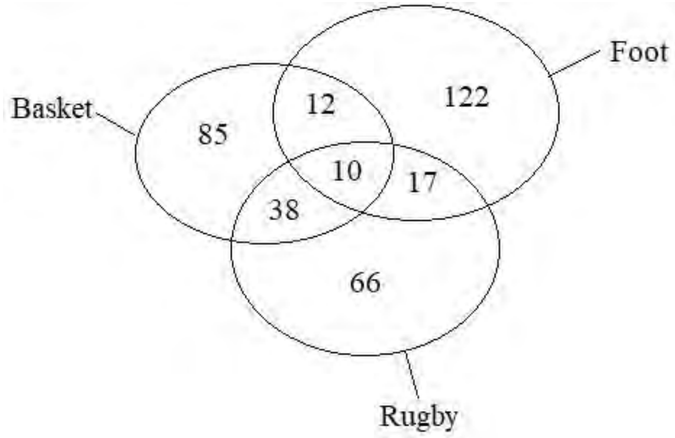
## *Exercice 2*

$(A \cup B) \rightarrow$ l'individu est atteint de la maladie $M_1$ ou de la maladie $M_2$.

$(A \cap B) \rightarrow$ L'individu est atteint des deux maladies.

## *Exercice 3*

1. $\frac{122}{350}$.
2. $\frac{66}{350}$.
3. $\frac{17}{350}$.
4. 




## Exercice 4

1. $15 \times 14 \times 13$
2. $\frac{4\times3\times2\times4\times2}{C_{15}^5} = \frac{192}{3003} = \frac{64}{1001}$.
3. $\frac{C_4^2 \times C_{11}^3}{C_{15}^3}$
4. $1 - \frac{C_{11}^5}{C_{15}^5}$.
5. $\frac{C_7^5}{C_{15}^5}$.
6. $1 - \frac{C_7^5}{C_{15}^5}$.

## Exercice 5

1. $\frac{C_3^1 \times C_{197}^4}{C_{200}^5}$.
2. $\frac{C_3^2 \times C_{197}^3}{C_{200}^3}$
3. $\frac{C_3^3 \times C_{197}^3}{C_{200}^5}$.

4.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X)$ | $\frac{C_{197}^5}{C_{200}^5}$ | $\frac{C_3^1 \times C_{197}^4}{C_{200}^5}$ | $\frac{C_3^2 \times C_{197}^3}{C_{200}^3}$ | $\frac{C_3^3 \times C_{197}^2}{C_{200}^5}$ |

## ***Exercice 6***

F ; V ; F ; V ; V ; V ; F.

## ***Exercice 7***

F ; F ; V.

## ***Exercice 8***

1. c ; 2. b ; 3. b ; 4. B

## ***Exercice 9***

1. a) $A \cap B = \emptyset$, donc A et B sont incompatible.
   b) $B \cap C = \{2; 3\}$, B et C ne sont pas incompatibles.
2. $P(A) = \frac{4}{7}$ ; $P(B) = \frac{3}{7}$ ; $P(A \cup B) = 1$
   $P(A \cap B) = 0$ ; $P(C \cup B) = \frac{4}{7}$ ; $P(C \cap B) = \frac{2}{7}$.

## ***Exercice 10***

1. $P(A) = \frac{90}{150} = \frac{3}{5}$
2. $P(B) = \frac{27}{150} = \frac{9}{50}$.
3. $P(C) = \frac{105}{150}$.

## ***Exercice 11***

P = $\frac{1}{4\,!}$.

## Exercice 12

1. $11^3$. 2. $P(A) = \frac{5^3+4^3}{11^3}$ ; $P(B) = 1-\frac{6^3}{11^3}$ ; $P(C) = \frac{5\times4\times2}{11^3}$.

## Exercice 13

1. 1 h signifie : 1 secteur hachuré.

$\{1h,\ 2h,\ 3h,\ 1,;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$.

1. a) $X(\Omega) = \{1500;\ 2000;\ 0;\ 500\}$.
2.

b)

| $x$ | 0 | 500 | 1500 | 2000 |
|---|---|---|---|---|
| | $\frac{5}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

c) $E(X) = \frac{1000}{10} + \frac{3000}{10} + \frac{2000}{10} = 500.$

Le gain moyen à ce jeu est 500 F.

## Exercice 14

1. $C_{10}^3$.
2. $\frac{C_3^3+C_5^3}{C_{10}^3}$
3. $1 - \frac{C_7^3}{C_{10}^3}$.
4. a) $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

b)

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{7}{24}$ | $\frac{63}{120}$ | $\frac{21}{120}$ | $\frac{1}{120}$ |

c) $E(X) = 0{,}9$.

# SITUATIONS COMPLEXES

## Exercice 15

1. $P = \frac{1}{2^4}$.
2. a) * 1 réponse fausse + 1 réponse juste donne 0.
   * 2 réponses justes donnent 4 ;
   * 3 réponses justes donnent 12 ;
   * 4 réponses justes donnent 20.

b)

| $x$ | 0 | 4 | 12 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| P(X = $x$) | $\frac{5}{2^4}$ | $\frac{6}{2^4}$ | $\frac{4}{2^4}$ | $\frac{1}{2^4}$ |

$$E(X) = \frac{24 + 48 + 20}{16}$$
$$E(X) = 5{,}75$$

c) * Si l'élève joue au hasard, il peut espérer avoir $\frac{5}{20}$.
* La moyenne si personne n'a étudié sa leçon est 5,75 et non 10.

## Exercice 16

**Option 1**

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de « faces » obtenu à l'issu des trois lancers.

X suit la loi binomiale de paramètres (3 ; $\frac{1}{2}$ ).

P(X = 2) = $C_3^2 (\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{2})^1$

P(X = 2) = $\frac{3}{8}$

**Option 2**

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de « faces » obtenu à l'issu des quatre lancers.

Y suit la loi binomiale de paramètre (4 ; $\frac{1}{2}$).

P (Y=3) + P(Y= 4) = $C_4^3(\frac{1}{2})^3 \times (\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^4$

P (Y=3) + P(Y= 4) = $\frac{5}{16}$

**Conclusion**

$\frac{3}{8} > \frac{5}{16}$ . Donc je choisis l'option1.

# 3 PRIMITIVE ET CALCUL INTÉGRAL

## RÉSUMÉS DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

### 1. NOTION DE CONTINUITÉ

***Exercice 1***

Les fonctions $f$ et $h$ sont continues en O.

***Exercice 2***

Ces fonctions $f+g$; $f-g$; $fg$; $\frac{f}{g}$ sont continues en 2.

**Définition**

***Exercice 3***

a) Vrai
b) Faux
c) Vrai

### PRIMITIVE

***Exercice 4***

1. Vrai
2. Faux

***Exercice 5***

G, H et Q

***Exercice 6***

1. Faux
2. Vrai
3. Vrai
4. Faux.

***Exercice 7***

Les fonctions G et H telles que :

$G(x) = F(x) + 7$ ; $H(x) = F(x) - 10{,}5$

## Primitive de fonctions de référence

***Exercice 8***

a) $F(x) = k$; $k \in 3$.

b) $F(x) = -5x + k$; $k \in \mathbb{R}$

c) $F(x) = \frac{x}{2} + k$; $k \in \mathbb{R}$

d) $F(x) = \frac{x^3}{3} + k$; $k \in \mathbb{R}$

e) $F(x) = -\frac{1}{x} + k$; $k \in \mathbb{R}$.

## Propriété

***Exercice 9***

a) $F(x) = 3x + \frac{x^2}{2} + k$

b) $F(x) = \frac{7}{2}x^2 + k$

c) $F(x) = x^2 + \frac{4}{3}x^3 + k$

d) $F(x) = x + x^2 + 3x^3 + k$

e) $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + k$

## Propriété

***Exercice 10***

a) $F(x) = 3x + \frac{x^2}{2} + k$

$F(x) = 0 \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{2} + k = 0$ ; $k = -3 - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$

$F(x) = 3x + \frac{x^2}{2} - \frac{7}{2}$.

b) $F(x) = 2x^2 + 2x + k$ et $F(3) = -5$ ;

$18 + 6 + k = -5$; $k = -5 - 18 - 6$.

c) $F(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3-166$

d) $F(x)=x+x^2+x^3+8$

## 2. CALCUL INTÉGRAL

### *Exercice 11*

1. a) $\int_0^1(x+2)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^1=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$.

b) $\int_{-2}^4(5x-3)dx=\left[\frac{5x^2}{2}-3x\right]_{-2}^4=40-12-10-6=12$.

c) $\int_2^5(3t^2+4t-5)dt=[t^3+2t^2-5t]_2^5=144$.

### Propriété 1

### *Exercice 12*

Notons précisément OBCD le rectangle (R) tel que OB = $a$ et OD = $b$.
Considérons le repère orthonormé (O, I, J) tel que l'unité soit le centimètre et : I ∈ [OB) et J ∈ [OD).
L'aire du rectangle (R) en cm² est l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équation x = 0 et x = $a$ et la courbe représentative de la fonction constante : $x \longmapsto b$. Cette aire vaut : $\int_0^a bdx=ab$

### *Exercice 13*

L'unité d'aire est 3×2 cm². La fonction $f$ étant continue et positive sur [1 ; 2], l'aire en unité d'aire est : $\int_1^2(x^2+x-2)$dx, soit $\frac{11}{6}$ u.a. Ce qui donne : 11 cm²

### *Exercice 14*

L'unité d'aire est 9 cm². La fonction $f$ étant continue et négative sur [-2 ; 0], l'aire en unité d'aire est : $-\int_{-2}^0(x^2+x-2)$dx, soit $\frac{4}{3}$ u.a.
Ce qui donne : 12 cm².

## Exercice 15

Cette aire, en unité d'aire, vaut : $\int_0^3 (g(x) - f(x))dx$.

Ce qui donne 9 u.a.

# EXERCICES DE RENFORCEMENTS / APPROFONDISSEMENTS

## Exercice 1

$F(x) = -x^2 + x + k$ ; $\quad F(0) = 0$ ; $\quad k = 0$

$$F(x) = -x^2 + x.$$

## Exercice 2

$$F(x) = x^2 + x - \frac{1}{x} + k \; ; \quad F(1) = 3 \; ; \quad F(1) = 1 + 1 - 1 + k = 3$$

$k = 2.$

$F(x) = x^2 + x - \frac{1}{x} + 2.$

## Exercice 3

$A = \int_1^3 2dx = [2x]_1^3 = 4$

$$B = \int_0^2 (2x - 1)dx = [x^2 - x]_0^2 = 2.$$

$$C = \int_1^{-1} \frac{-1}{x^2} dx = \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

$$D = \int_1^4 \frac{-2}{2x+1^{\;2}} dx = -\frac{2}{9}$$

## Exercice 4

1. $f(x) = x - 2 + \frac{5}{(x+2)^2}$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{5}{x+2} + k.$$

2. $\int_0^3 f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{5}{x+2}\right]_0^3 = -\frac{2}{3}$

## Exercice 5

1. $\int_{-1}^{1} f(x) = \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1}$

$$= -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1$$
$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

2. $\int_0^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 - \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1}$

$$= -\frac{1}{3} + 1 - 0 + \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

## Exercice 6

1) $\int_0^2 (x + 2 - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$

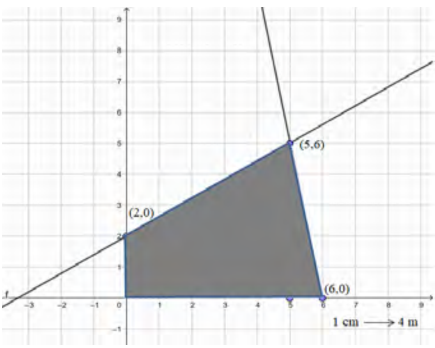
$$= \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3}$$
$$= 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}.$$

# SITUATIONS COMPLEXES

## Exercice 7

Dans la figure ci-contre, la partie hachurée représente le jardin accordé par le Proviseur d'un Lycée aux classes de Terminale A pour y apprendre l'agriculture. Les élèves veulent y planter de la tomate. Avant d'acheter les grains de tomate, ils doivent déterminer l'aire du jardin. Ils te sollicitent.

Calcule l'aire du jardin.



1) $\mathcal{A} = \int_0^5 \left(\frac{4}{5}x + 2\right) dx + \int_5^6 (36 - 6x)\, dx$

$$= \left[\frac{2x^2}{5} + 2x\right]_0^5 + [36x - 3x^2]_5^6$$
$$= (10 + 10 + 108 - 105)\ 14$$
$$= 23 \times 14$$

$\mathcal{A} = 322\ m^2$.

## ***Exercice 8***

La surface OABC en unités est donnée par : $\int_0^{550} \left(\frac{t^2}{100} - \frac{t}{4} + 125\right) dt$.

Soit environ 65599 $m^2$

# 4 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIENNE

## RÉSUMÉS DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

### DEFINITION ET PROPRIETES

**Définition**

***Exercice 1***

Entourage

$1 \rightarrow C$ ;
$2 \rightarrow B$ ;
$3 \rightarrow B$.

**2. Propriété**

***Exercice 2***

$1 \rightarrow B$;   $2 \rightarrow C$;   $3 \rightarrow A$;   $4 \rightarrow B$.

***Exercice 3***

$L1 \rightarrow C$;   $L2 \rightarrow B$;   $L3 \rightarrow D$;   $L4 \rightarrow B$;   $L5 \rightarrow A$.

***Exercice 4***

1.
a) ln20 ; b) ln6 ; c) ln2

2. $\ln(1+\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{2} - 1) = \ln(\sqrt{2} - 1) + \ln(\sqrt{2} - 1)$
$= \ln[(\sqrt{2} - 1)\times(\sqrt{2} - 1)]$
$= \ln(2 - 1)$
$= \ln 1$
$= 0$

***Exercice 5***

a) ln4 + ln9 ; b) ln4 + ln$\sqrt{2}$ ; c) ln7 +ln$\pi$

## Limites

### *Exercice* 6

1. $\lim\limits_{x\to 0} x+\ln x = -\infty$ ; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\ln x = +\infty$ ; 3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x = +\infty$

### *Exercice* 7

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$.

   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2+lnx) = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1-lnx) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2-\frac{1}{x}-\frac{lnx}{x}\right) = +\infty$ car

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x} = 0$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} -x+5+\ln x = -\infty$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-lnx) = -\infty$, donc

   $\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x-lnx) = -\infty$.

## Propriété 1

### *Exercice 8*

1)
   1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1) = +\infty$,
      donc $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,(x^2+x+1) = +\infty$
   2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+1) = +\infty$,
      donc $\lim\limits_{x\to-\infty} ln\,(x^2+x+1) = +\infty$
   3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x-6) = +\infty$,
      donc $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,(x^2+x-6) = +\infty$
   4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x-6) = +\infty$,
      donc $\lim\limits_{x\to-\infty} ln\,(x^2+x-6) = +\infty$

## Propriété 2

## Exercice 9

1) $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ et $x^2 + x - 6 > 0$ lorsque $x < -3$ ou $x > 2$.

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} (x^2 + x - 6) = 0$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} ln(x^2 + x - 6) = -\infty$.
2. $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} (x^2 + x - 6) = 0$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} ln(x^2 + x - 6) = -\infty$.

# 4. Dérivée

## Exercice 10

a) $f'(x) = -\frac{1}{x}$ ;

b) $g'(x) = 7 + \frac{1}{x}$ ;

c) $h'(x) = -9 - \frac{1}{x}$.

## Exercice 11

$1 - A$; $2 - B$; $3 - C$; $4 - A$; $5 - C$; $6 - A$.

## Exercice 12

a) $f'(x) = \frac{1}{x+4}$ ;

b) $f'(x) = \frac{-2}{-2x+1}$ ;

c) $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+5}$ .

## Exercice 13

1. $5 < 7 \Rightarrow \ln 5 < \ln 7$
2. $\frac{1}{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} < \ln\sqrt{3}$
3. $29^2 = 841$ et $(4\sqrt{5})^2 = 400$

$(4\sqrt{5})^2 < 29^2 \Rightarrow 4\sqrt{5} \leq 29$

$\Rightarrow \ln 4\sqrt{5} < \ln 29$

## Exercice 14

- $\ln(e^{-5}) = -5$
- $\ln(e^2) + [\ln(e)]^2 + 2\ln(e^3) = 2 + 1 + 6$
  $= 9$
- $\ln(e^{-5}) + [\ln(e^3)]^2 + 2\ln(e^{-1}) = -5 + 9 - 2$

## Exercice 15

**Remarque** : *les branches paraboliques ne sont pas au programme en série A, mais peut s'avérer utile dans le cadre de la préparation de certains concours*

Soit (C) la courbe représentative de la fonction ln dans un repère (O; I, J).

$\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

D'où, (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique dans la direction de la droite (OI).

## Exercice 16

| | Affirmations | Réponses |
|---|---|---|
| a | $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} xlnx = +\infty$ | faux |
| b | $\lim\limits_{x\to1} \frac{elnx}{x-1} = e$ | vrai |
| c | $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2lnx}{x+1} = 0$ | faux |
| d | $\lim\limits_{x\to+\infty} xln\frac{x+1}{x} = 1$ | vrai |

## Exercice 17

Considérer pour la question a), $x$-ln $x$ au lieu de $x^2$-ln $x$

a) $\forall x\in]0\,;+\infty[$, $x - \ln x = x(1 - \frac{lnx}{x})$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{lnx}{x}\right) = 1\end{array}\right. \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(x - lnx) = +\infty$$

b) $$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{lnx} = 0\end{array}\right. \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(lnx + \frac{1}{lnx}\right) = +\infty$$

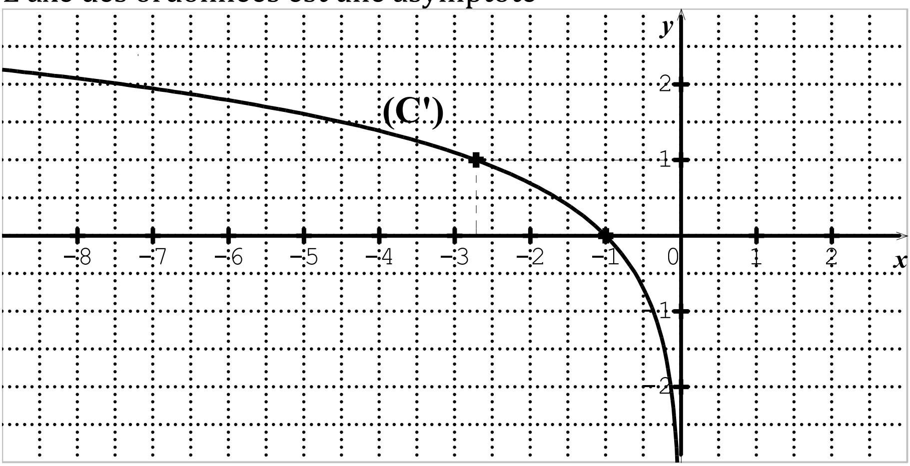
c) $$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} lnx = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{1}{lnx} = 0\end{array}\right. \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(lnx + \frac{1}{lnx}\right) = -\infty$$

## ***Exercice 18***

Soit (C) la courbe représentative de la fonction ln et (C') la courbe représentative de la fonction f.
(C) et (C') sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

| x | -1 | -e | $-e^2$ |
|---|---|---|---|
| f(x) | 0 | 1 | 2 |

.
L'axe des ordonnées est une asymptote



# EQUATION ET INEQUATION FAISANT INTERVENIR LA FONCTION LN

## 1) Equation faisant intervenir la fonction ln

***Exercice 19***

a) * Contraintes sur l'inconnue

$1 - x > 0$

$x < 1$

$V_a = ]-\infty ; 1[$

* $\ln(1-x) = -2 \Rightarrow 1-x = e^{-2}$

$\Rightarrow x = 1 - e^{-2}$

* $1 - e^{-2} \in V_a$

D'où, $S_a = \{1 - e^{-2}\}$

b) * Contraintes sur l'inconnue

$3x-4 > 0$ et $x^2 - 4 > 0$

$x > \frac{4}{3}$ et $(x < -2$ ou $x > 2)$

$V_b = ]2 ; +\infty[$

* $\ln(3x-4) = \ln(x^2 - 4) \Rightarrow 3x-4 = x^2 - 4$

$\Rightarrow x^2 - 3x = 0$

$\Rightarrow x(x - 3) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$

* $0 \notin V_b$ et $3 \in V_a$

D'où, $S_b = \{3\}$

c) * $V_C = ]0 ; +\infty[$

* $2e\ln(x) + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2e}$

$\Rightarrow x = e^{\frac{-1}{2e}}$

$S_c = \{e^{\frac{-1}{2e}}\}$

d) * Contraintes sur l'inconnue

$x+5 > 0$ et $x - 2 > 0$

$x > -5$ et $x > 2$

$V_b = ]2 ; +\infty[$

* $\ln(x+5) = 2\ln 2 - \ln(x - 2) \Rightarrow \ln[(x+5)(x - 2)] = \ln 4$

$\Rightarrow\ (x+5)(x - 2) = 4$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 14 = 0$

$\Delta = 9 - 4(-14) = 65$

$x=\frac{-3-\sqrt{65}}{2}$ ou $x=\frac{-3+\sqrt{65}}{2}$

D'où, $S_d = \{\frac{-3+\sqrt{65}}{2}\}$

e) $S_e = \{1\}$

**Inéquation faisant intervenir la fonction ln**

## ***Exercice 20***

a) * Contraintes sur l'inconnue

$1 - x^2 > 0$

$-1 < x < 1$

$V_a = ]-1 ; 1[$

* $\ln(1 - x^2) > 1 \Rightarrow 1 - x^2 > e$ (impossible car $1- x^2 < 1$)

$S_a = \varnothing$

b) * Contraintes sur l'inconnue

$x^2 - 4e^2 > 0$

$x < -2e$ ou $x > 2e$

$V_b = ]-\infty ; -2e[\cup]2e ; +\infty[$

* $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 \Rightarrow x^2 - 4e^2 < e$

$\Rightarrow x^2 < 4e^2 + e$

$\Rightarrow -\sqrt{4e^2 + e} < x < \sqrt{4e^2 + e}$

* $S_b = ]-\infty ; -\sqrt{4e^2 + e}[ \cup ]\sqrt{4e^2 + e} ; +\infty[$

c) * Contraintes sur l'inconnue

$x+e > 0$ et $x-e < 0$

$x > -e$ et $x < e$

$V_b = ]-e ; e[$

* $\ln(x + e) + \ln(x - e) \leq 2 + \ln 3$

$\ln[(x + e)(x - e)] \leq 2 + \ln 3$

$x^2 - e^2 \leq e^{2+\ln 3}$

$x^2 \leq e^2 + 3e^2$

$x^2 \leq 4e^2$

$-2e \leq x \leq 2e$

$S_c = ]-e ; e[$

d) * Contraintes sur l'inconnue

$2-x > 0$

$x < 2$

$V_b = ]-\infty ; 2[$

* $\ln(2 - x) > 2$

$2 - x > e^2$

$x < 2-e^2$

$S_d = ]-\infty ; 2-e^2[$

e) * Contraintes sur l'inconnue

$1 < x < 2$ et $x > 0$

$V_b = ]1 ; 2[$

* $\ln\frac{x-2}{1-x} < \ln x$

$\frac{x-2}{1-x} < x$

$\frac{x-2}{1-x} - x < 0$

$\frac{x-2+x^2-x}{1-x} < 0$

$\frac{x^2-2}{x-1} > 0$

$S_e = ]\sqrt{2} ; 2[$

## ***Exercice 21***

$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n > 0{,}95$

$\left(\frac{3}{4}\right)^n < 0{,}05$

$n\ln\left(\frac{3}{4}\right) < \ln(0{,}05)$

$n > \frac{ln(0{,}05)}{ln\left(\frac{3}{4}\right)}$

Et, $\frac{ln(0{,}05)}{ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 10{,}41$ (à $10^{-2}$ près)

$n = 11$

## 6.Primitives des fonctions du type :

$$-\frac{1}{x}; x \longmapsto \frac{c}{cx+d};\ \ x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$$

### Exercice 22

1) Notons F une primitive de $f$ :

1. $F\colon x \longmapsto ln(x+2)$
2. $F\colon x \longmapsto ln(3x-1)$
3. $F\colon x \longmapsto ln(-5x+1)$
4. $F\colon x \longmapsto ln(x^2+x+5)$.

### Exercice 23

1. $\forall x \in ]\frac{3}{2}; +\infty[$ ;

$f(x) = \frac{2}{2x-3}$

$= \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = 2x - 3$

$F(x) = \ln|2x - 3| + c$ ($c \in \mathbb{R}$)

2. $\forall x \in \mathbb{R}$ ;

$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

$= \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = x^2 + x + 1$

$F(x) = \ln|x^2 + x + 1| + c$ ($c \in \mathbb{R}$ )

## EXERCICES DE RENFORCEMENTS / APPROFONDISSEMENTS

### Exercice 1

1) 1. $\Delta = 49 - 4 \times 2 \times 6 = 25$

$x_1 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-7+5}{4} = 3$ ;

$S_3 = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$.

2. a) $P(-1) = 2 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - (-1) + 6$

$= -2 - 5 + 1 + 6 = 0$.

b)

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 - 5x^2 - x + 6 & x+1 \\ \cline{2-2}
-(2x^3 + 2x^2) \quad\quad & 2x^2 - 7x + 6 \\ \cline{1-1}
-7x^2 - x \quad & \\
-(-7x^2 - 7x) & \\ \cline{1-1}
6x + 6 & \\
-(6x + 6) & \\ \cline{1-1}
0 \quad & \\
\end{array}
$$

$$P(x) = (x + 1)(2x^2 - 7x + 6)$$

3. $P(x) = 0$

$$(x + 1)(2x^2 - 7x + 6) = 0$$

$$x + 1 = 0 \ \ ou \ \ 2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$x = -1$ ou $x = \frac{1}{2}$ ou $x = 3$.

$S_3 = \left\{-1;\ \frac{1}{2}; 3\right\}$.

4. Ensemble de validité : $V = ]0; \infty[$. En posant $X = lnx$, l'équation devient $2X^2 - 5X^2 - X + 6 = 0$

D'après 3), on a : $X = -1 \ \ ou \ \ X = \frac{1}{2} \ \ ou \ \ X = 3$.

Par suite, $lnx = -1 \ \ ou \ \ lnX = \frac{1}{2} \ \ ou \ \ lnx = 3$.

Soit $X = e^{-1} \ \ ou \ \ x = e^{\frac{1}{2}} \ \ ou \ \ x = e^3$.

$S_3 = \left\{e^{-1};\ \ e^{\frac{1}{2}};\ \ e^3\right\}$.

## Exercice 2

1. a) $\lim_{x\to+\infty} (x - 2) = +\infty$ , donc $\lim_{x\to+\infty} ln(x - 2) = +\infty$.

b) $\lim_{\substack{x\to 2 \\ >}} (x - 2) = 0$, donc $\lim_{\substack{x\to 2 \\ >}} f(x) = -\infty$

**Interprétation graphique :**

La droite d'équation $x - 2$ est asymptote verticale à $(C)$.

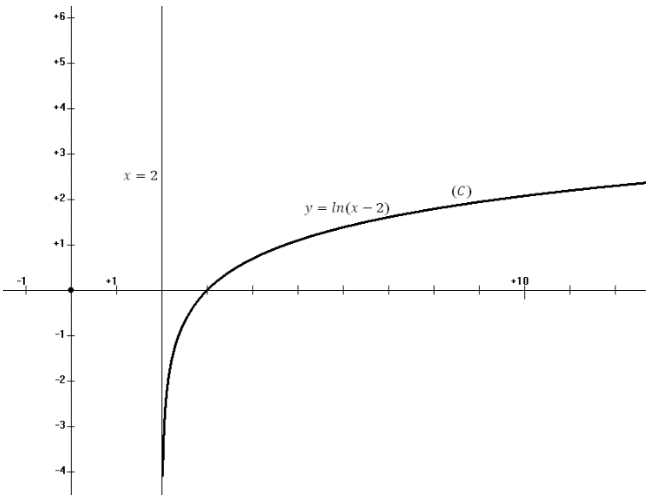
2. Pour tout $x \in ]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x-2}$.
3. Pour tout $x \in ]2; +\infty[$, $x - 2 > 0$, donc $f'(x) > 0$ et donc $f$ est strictement croissante sur $]2; +\infty[$.

| $x$ | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ | $-\infty$ | $\nearrow +\infty$ |

4. a) Voir énoncé.

| $x$ | 2,25 | 2,5 | 3 | 5 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | –1,4 | 1,6 | 0 | 1,1 | 1,6 | 2,1 |

b) Tracé de la courbe.




## *Exercice 3*

2) 1. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3 - x) = +\infty$ , donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} (3 - x) = 0$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = -\infty$.

**Interprétation graphique :**

La droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à $(C)$.

2. Pour tout $x \in ]-\infty; 3[$, $f'(x) = \frac{-1}{3-x}$.

3. Pour tout $x \in ]-\infty; 3[$, $3 - x > 0$. Or $-1 < 0$, donc $f'(x) < 0$ sur $]-\infty; 3[$. Par conséquent, $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty; 3[$.

| $x$ | $-\infty$ | $3$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty \searrow -\infty$ | |

4. $(T)$: $y = f'(x)(x-2) + f(2)$

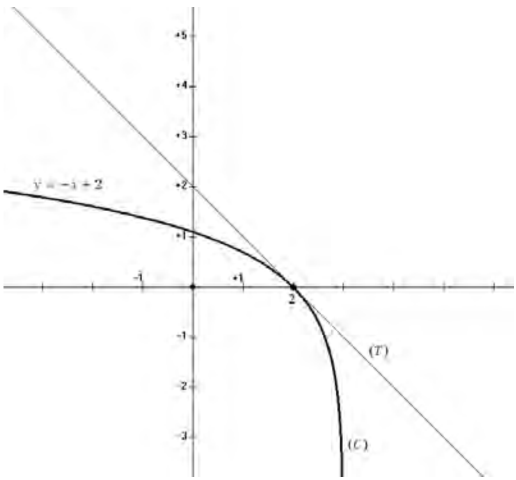
$y = -1(x-2) + 0$.

$(T)$: $y = -x + 2$.

5. a)

| $x$ | –5 | –3 | 0 | 1 | 2 | 2,25 | 2,5 | 2,75 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2,1 | 1,8 | 1,1 | 0,7 | 0 | –0,3 | –0,7 | –1,4 |

b) Construction de la courbe :




## ***Exercice 4***

1. a) $\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 2x - 3) = +\infty$, donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2x - 3) = +\infty$, donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} (x^2 - 2x - 3) = 0$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$.
$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} (x^2 - 2x + 3) = 0$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = -\infty$.

**<u>Interprétation graphique</u> :**

La droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $(C)$.
La droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à $(C)$.

2. Pour tout $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]3; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3}$ .

3. Pour tout $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]3; +\infty[$, $x^2 - 2x - 3 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $2x - 2$ .

$2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 2 \;\Leftrightarrow x > 1$ ;
$2x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.
$f'(x) > 0$ sur $]3; +\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $]-\infty; -1[$.
Donc $f$ est strictement croissante sur $]3; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$.

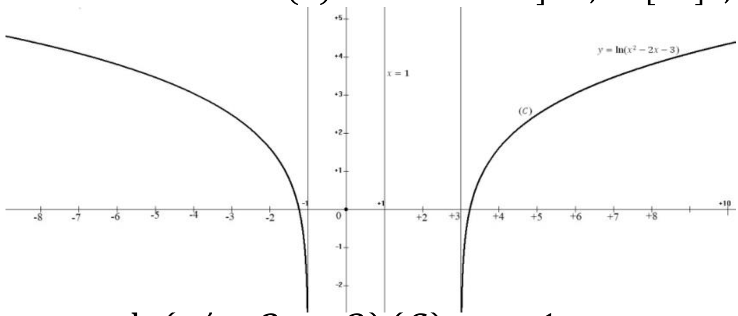
| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | | | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ $-\infty$ | | | | $-\infty$ ↗ $+\infty$ |

4. Pour tout $x \in D_f$ tel que $(2 - x) \in D_f$, on a :

$$f(2 - x) = ln((2 - x)^2 - 2(2 - x) - 3)$$
$$= ln(4 - 4x + x^2 - 4 + 2x - 3)$$
$$= (x^2 - 2x - 3) = f(x).$$

Donc la droite d'équation $x = 1$ est axe de symétrie de $(C)$.

5. Construction de la courbe $(C)$ sur l'intervalle $]-8;-1[$ et $]3;10[$




$y = \ln(x^{\angle} - 2x - 3)\ (C) \quad x = 1$

## ***Exercice 5***

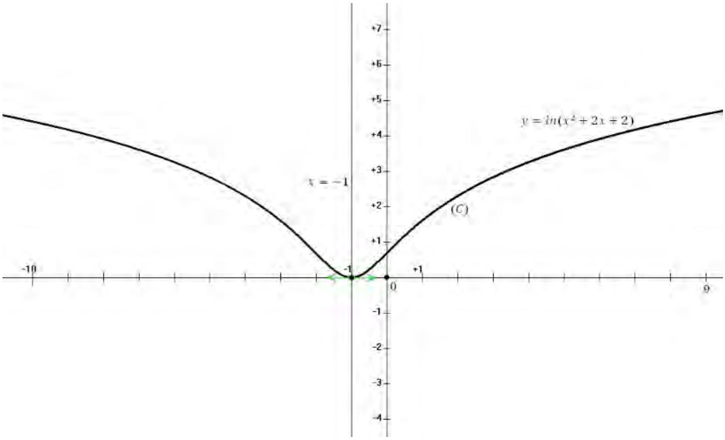
1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Pour tout $x \in 3$, $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$ .
3. Pour tout $x \in 3$, $x^2 + 2x + 2 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $2x + 2$.

$f'(x) < 0$ si $x < -1$ et $f'(x) > 0$ si $x > -1$.
$f$ est strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$ et strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ¶ | 0 | $+\infty$ |

4. Pour tout $x \in 3$, on a : $(2(-1) - x) \in 3$ et
$f\big((2(-1) - x)\big) = f(-2 - x)$.
$= ln((-2 - x)^2 + 2(-2 - x) + 2)$
$= ln(4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 2)$
$= ln(x^2 + 2x + 2) = f(x)$.
Donc la droite d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de $(C)$.

5. Construction de $(C)$ sur l'intervalle $[-10; 9]$.




## ***Exercice 6***

1. a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

   b) La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à $(C)$.

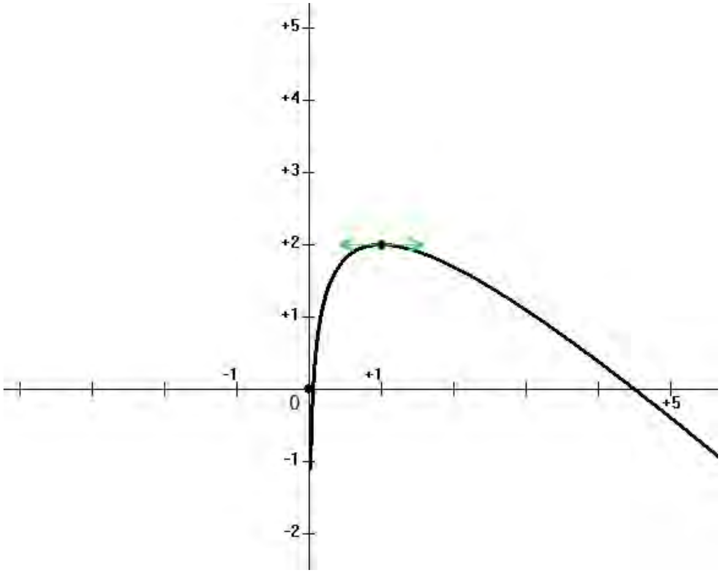
2 a) Pour tout $x \in \, ]0; +\infty[$, $f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x}$ .

   b) Pour tout $x \in \, ]0; +\infty[$, $x > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que
$1 - x$.
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - x < 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0$
$\Leftrightarrow x < 1$.
Donc $f$ est strictement décroissante szur $]1; +\infty[$ et strictement croissante sur $]0; 1[$.

   c) Tableau de variation

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-2ln5$ |

3. $f$ est dérivable et strictement décroissante sur $[1;5]$ en particulier sur $[4;5]$.
De plus, $f(4) \simeq 0{,}38$ et $f(5) \simeq 0{,}39$ sont de signes contraires.
Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique comprise entre 4 et 5.
4. Construction de la courbe $(C)$ sur l'intervalle $]0;5]$.




## ***Exercice 7***

1. $D_f = ]-2;+\infty[$.
2. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. $\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$.
4. $f'(x) = \frac{1}{2+x}$.
5 $f$ est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$.

| $x$ | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ |
| $f(x)$ | ‖ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ |

6. $(T)$ : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$.

$$y = \frac{1}{4}(x-2) + ln4$$

$y = \frac{1}{4} \times -\frac{1}{2} + ln4$.

7. $V = ]-2; +\infty[$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ln(2+x) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2 + x = 1$$

$\Leftrightarrow x = 1$.

$S = \{-1\}$.

## Exercice 8

3) 1. a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à $(C)$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2. a) Pour tout $x \in ]0; +\infty[$, $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x} = \frac{-x+2}{2x}$.

b) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow -x + 2 < 0 \Leftrightarrow x > 2$.

$f$ est strictement croissante sur $]0; 2[$ et strictement décroisante

sur $]2; +\infty[$.

c)

| $x$ | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | ‖ | $-\infty$ ↗ | $-\frac{1}{2} + ln2$ | ↘ $+\infty$ | |

3. a) $f(1) = \frac{-1+1}{2} + ln1 = 0 + 0 = 0$.

b) $f$ est dérivable et strictement décroissante sur $]3,5; 4[$.

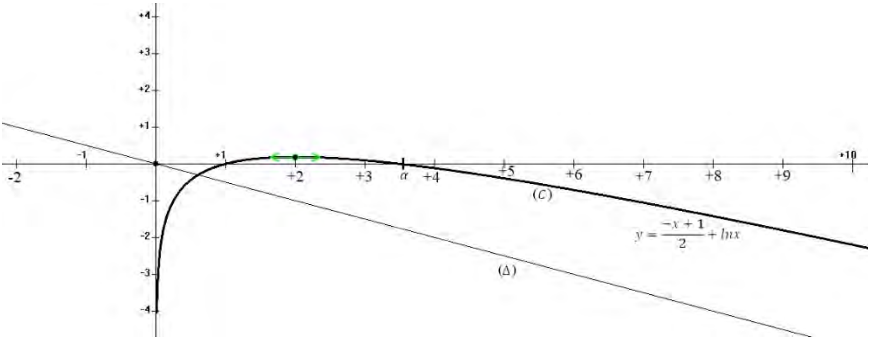
Aussi, $f(3,5) \simeq 0,003$ et $f(4) \simeq -0,11$ sont de signes contraires.

Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]4,5; 5[$.

c) $f(3{,}5) \simeq 0{,}003$ et $f(3{,}6) \simeq -0{,}02$.

$f(3{,}5) \times f(3{,}6) < 0$, donc $3{,}5 < \alpha < 3{,}6$.

4. Tracé de la courbe :




5. a) Pour tout $x \in ]0; +\infty[$,

$$F'(x) = -\frac{2x}{4} - \frac{1}{2} + lnx + x\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 1 + lnx$$
$$= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + lnx$$

$= f(x)$.

Donc F est une primitive de $f$ sur $]0; 8[$.

b) $A = \int_1^e f(x)dx \;\; u.a.$

$$A = \big(F(e) - F(1)\big) \;\; u.a.$$
$$= \left(-\frac{e^2}{4} - \frac{1}{2}e + e - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 0\right)\right) \;\; u.a.$$

$= \left(-\frac{e^2}{4} + \frac{1}{2}e + \frac{3}{4}\right) \times 10\ cm^2$.

c) $A = 10\left(-\frac{2{,}7^2}{4} + \frac{2{,}7}{2} + \frac{3}{4}\right) cm^2$ ;

$A = 2{,}775\ \ cm^2$.

# SITUATIONS COMPLEXES

## Exercice 9

1. L'âge du squelette de l'homme de la Cro-Magnon est :
$C = -8130ln(0{,}05) \simeq 24355{,}3$ soit 24 336 ans
L'âge du squelette de la momie d'hibernation est
$h = -8130ln(0{,}528) \simeq 5192{,}3$ soit 5193 ans.
2. On a : $5\ \% < 52{,}8\ \%$ et $C > h$.
On peut généraliser : Pour $0 < P_1 < P_2 < 1$.
On a : $-8130ln(P_1) > -8130ln(P_2)$.
Donc c'est Bintou qui a raison.

## Exercice 10

Soit la suite
$(u_n)$ désignant la consommation de charbon l'année $2019 + n$ .
Avec $u_0 = 10.000$ ( *année* 2019)
On a ainsi $u_{n+1} = u_n - 0{,}08u_n = 0{,}92u_n$
La suite
(
$u_n$) est une suite géométrique de raison 0,92 et de premier termes $u_0 =$ 10.000
On a donc $u_n = u_0 \times (0{,}92)^n = (0{,}92)^n \times 10.000$
Cherchons l'année à laquelle ce pays consommera moins de 2000 tonnes.
$u_n < 2000 \Longrightarrow (0{,}92)^n \times 10.000 < 2000$ .
$(0{,}92)^n < 0{,}2 \Rightarrow n > \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}92)} \Rightarrow n > 19{,}30$ . Prenons $n = 20$
La consommation en charbon sera donc moins de 2000 tonnes à partir de 2039. Ce pays ne gagnera pas la lutte contre le réchauffement climatique.

# 5 FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

**Définition**

**Conséquence de la définition**

***Exercice 1***

1) V ; 2) F ; 3) V : 4) F ; 5) F ; 6) V ; 7) F ; 8) V ; 9) V.

**5. Propriété**

**Conséquence de la définition**

***Exercice 2***

a) $e^{6} \times e^{-4} = e^{2}$
b) $e^{8} \times e^{3} = e^{11}$
c) $e^{-3} \times e^{-4} = e^{-7}$
d) $e^{-5} \times e^{3} = e^{-2}$

**Propriété**

***Exercice 3***

a) $\frac{e^7}{e^3} = e^{7-3} = e^{4}$
b) $(e^{-5})^6 \times e^{3} = e^{-27}$
c) $\frac{e^7 \times e^{-4}}{e^3} = e^{7-4-3} = e^{0} = 1$
e)
$\frac{e^{1+ln3}}{e^{2+ln3}} = e^{1+ln3-2-ln3} = e^{-1}$

***Exercice 4***

a) $\frac{1}{(e^{-3})^2} \times \frac{\left(e^4\right)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} = e^{-6} \times 1 = e^{-6}$
b) $(e^{-2})^{-3} \times (e^{-4})^2 = e^{6} \times e^{-8} = e^{-2}$

# ETUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

## Exercice 5

| | Affirmations | Réponses |
|---|---|---|
| a | $e^x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ | faux |
| b | $e^x > 2 \Leftrightarrow \ln 2 < x$ | vrai |
| c | $\ln(e^x) < 3 \Leftrightarrow x > 3$ | faux |
| d | $x > -1 \Leftrightarrow e^{-1} < e^x$ | vrai |

## Exercice 6

a) $\forall x \in ]0 ; +\infty[$, $-2e^x + x = x(-2\frac{e^x}{x} + 1)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-2\frac{e^x}{x} + 1\right) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (-2e^x + x) = -\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (limite de référence)

c) $\forall x \in ]0 ; +\infty[$, $e^x - x = x(\frac{e^x}{x} - 1)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (2e^x - x) = +\infty$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+e^x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^{-x} + 1)$

$= 1$

e) $\forall x \in ]0 ; +\infty[$, $e^x - \ln x = x(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x})$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (e^x - \ln x) = -\infty$$

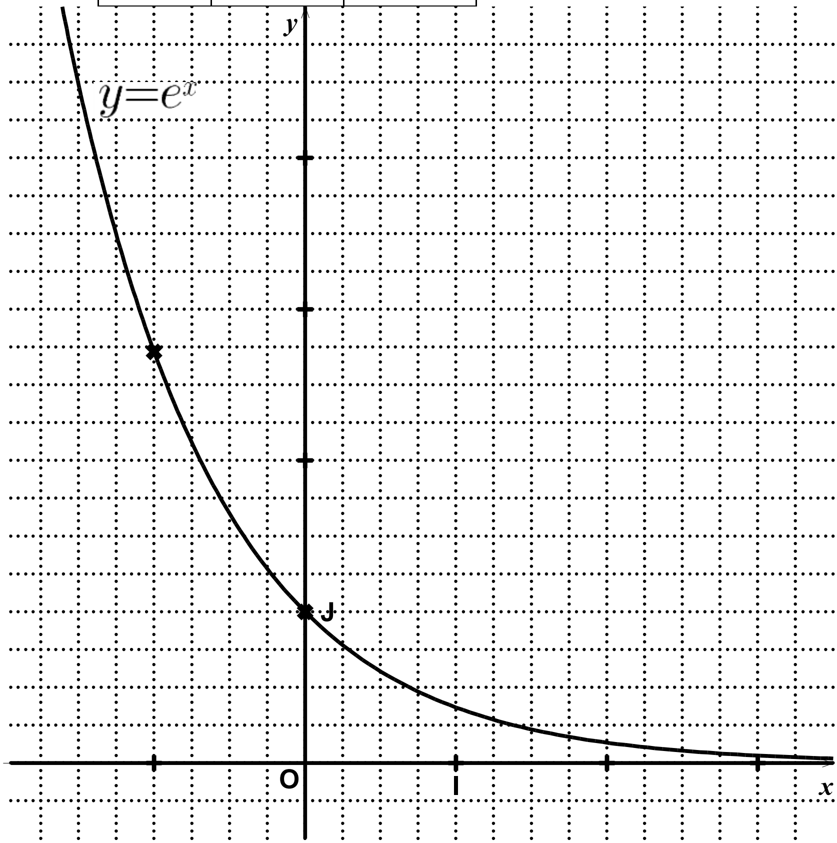
f) $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} \sqrt{x}\ln x = \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} x^{\frac{1}{2}}\ln x = 0$

g) $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 4e^x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} (-x + 4e^x) = +\infty$$

## *Exercice 7*

Cette courbe et celle de la fonction exp sont symétriques par rapport à la droite (OJ).

| x | 0 | -1 |
|---|---|---|
| $e^x$ | 1 | e |




## EQUATION ET INEQUATIONS FAISANT INTERVENIR LA FONCTION EXP

## Exercice 8

a) $e^{3x+4} = 2 \Leftrightarrow 3x+4 = \ln 2$

$\Leftrightarrow x = \frac{-4+ln2}{3}$

$S_b = \{\frac{-4+ln2}{3}\}$

b) $e^{3x+4} = 2 \Leftrightarrow 3x+4 = \ln 2$

$\Leftrightarrow x = \frac{-4+ln2}{3}$

$S_b = \{\frac{-4+ln2}{3}\}$

c) $e^{-x} = 2e^{x} = 0 \Leftrightarrow -x = \ln 2 + x$

$\Leftrightarrow x = \frac{-ln2}{2}$

$S_d = \{\frac{-ln2}{2}\}$

d) $e^{2x} - 3e^{x} + 3 = 0 \Leftrightarrow (e^{x})^2 - 3e^{x} + 3 = 0$

$\Delta = 9 - 12 = -4$

$\Delta < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} - 3e^{x} + 3 > 0$

$S_e = \varnothing$

e) $e^{3x}(e^{x+3} - 1) = 0 \Leftrightarrow e^{x+3} = 1$

$\Leftrightarrow x+3 = 0$

$\Leftrightarrow = -3$

$S_f = \{-3\}$

## Inéquations

## Exercice 9

a) $3e^{2x} - 16e^{x} + 5 \geq 0 \Leftrightarrow 3(e^{x})^2 - 16e^{x} + 5 \geq 0$

$\Delta' = 64 - 15 = 49$

$\frac{8-7}{3} = \frac{1}{3}$ et $\frac{8+7}{3} = 5$

$e^{x} \leq \frac{1}{3}$ ou $e^{x} \geq 5$

$x \leq -\ln 3$ ou $x > \ln 5$

$S_a = ]-\infty ; -\ln 3] \cup [\ln 5 ; +\infty[$

b) $e^{2x+3} < \ln 3 \Leftrightarrow 2x+3 < \ln(\ln 3)$

$\Leftrightarrow x < \frac{-3+ln(ln3)}{2}$

$S_b = ]-\infty ; \frac{-3+ln(ln3)}{2}[$

c) $V_c = \mathbb{R}^*$

$\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} < -1 \Rightarrow \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} + 1 < 0$

$\Rightarrow \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} < 0 \quad |2e^{2x} > 0$

$\Rightarrow e^{2x} - 1 < 0$

$\Rightarrow x < 0$

$S_c = ]-\infty ; 0[$

d) $2e^{2x+1} - 3e^x + 1 < 2e \Leftrightarrow 2ee^{2x} - 3e^x + 1\text{-}2e < 0$

$\Delta = 9 - 4(2e)(1-2e)$

$= 16e^2 - 8e + 9$ ($\approx 105{,}5$ à $10^{-1}$ près)

$\frac{3-\sqrt{16e^2-8e+9}}{4e} < e^x < \frac{3+\sqrt{16e^2-8e+9}}{4e}$

$e^x < \frac{3+\sqrt{16e^2-8e+9}}{4e}$

$x < \ln\left(\frac{3+\sqrt{16e^2-8e+9}}{4e}\right)$

$S_d = ]-\infty ; \ln\left(\frac{3+\sqrt{16e^2-8e+9}}{4e}\right)[$

## IV Primitives des fonctions du type : $x \mapsto e^x$ ;

### *Exercice 10*

1. $F(x) = e^x$
2. $F(x) = e^{2x+1}$
3. $F(x) = e^{x2+3x-5}$

# EXERCICES DE RENFORCEMENTS / APPROFONDISSEMENTS

## Exercice 1

1) 1. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{e^x}{(x-3)^2} = +\infty.$

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{e^x}{-x+2} = +\infty.$

3. $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ <}} \frac{e^x}{2x-1} = -\infty.$

4. $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{2}{3} \\ >}} \frac{e^x}{2-3x} = -\infty.$

## Exercice 2

Erreur de numérotation des questions : il y'a cinq questions

1. P(1) = 1 – 7 + 6 ; P(1) = 0
2. a = 1 et b = -6
3. S = {-3 ; 2}
4. a) S = {1 ; -3 ; 2}
   b) S = [-3 ; 2 ]
5. a) S = {ln2}
   b) S= [0 ; ln2]

## Exercice 3

2) 1. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$

b) * $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

* La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $(C)$ en $+\infty$.

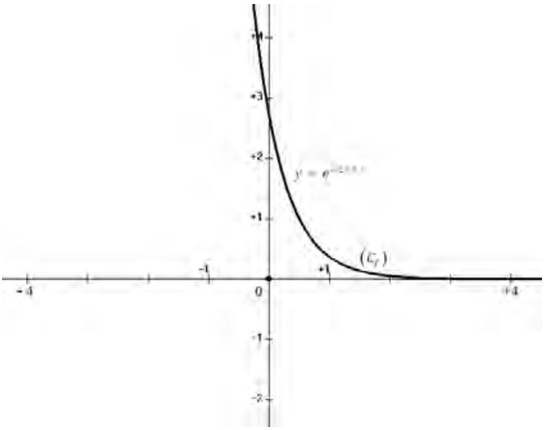
2. a) Pour tout $x \in 3$, $f'(x) = -2e^{-2x+1}$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$. Donc $f$ st strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

3.

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty \searrow 0$ |

Courbe de la fonction *f*




## ***Exercice 4***

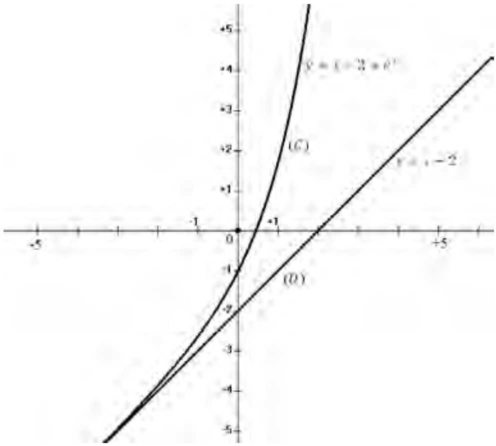
3) 1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) Pour tout $x \in 3$, $f'(x) = 1 + e^x$.

   b) Pour tout $x \in 3$, $f'(x) > 0$, donc $f$ est strictement croissante sur 3.

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow +\infty$ |

3. a) $f$ est dérivable et strictement croissante sur 3, en particulier sur $]0;1[$.
   De plus $f(0) = -1$ et $f(1) \simeq 1{,}71$ sont de signes contraires.
   Donc, l'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire $x - 2 + e^x = 0$, admet une unique solution dans $]0;1[$.
   b) $f(0{,}44) \simeq -0{,}007$ et $f(0{,}5) \simeq 0{,}018$.
   $f(0{,}44) \times f(0{,}45) < 0$, donc $0{,}44 < \alpha < 0{,}45$.
4. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x) - (x-2)\big) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.
   D'où le résultat.
   b) $f(x) - (x-2) = e^x$ et $e^x > 0$ pour tout nombre réel $x$.
   Donc $(C)$est au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$
5. Tracé de la courbe




## ***Exercice 5***

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(-1 + \frac{1}{x} + \frac{e^x}{x}\right) = +\infty$.
2. a) Pour tout $x \in 3$, $f'(x) = -1 + e^x$.
   b) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 + e^x \geq 0$
   $\Leftrightarrow e^x \geq 1$
   $\Leftrightarrow x \geq 0$.
   $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

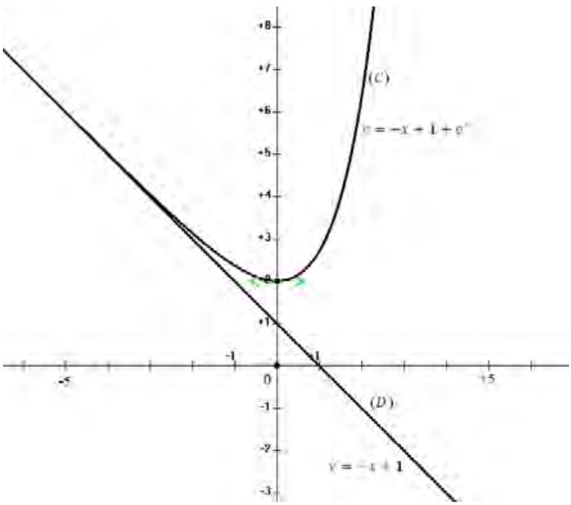
$f$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3. a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-x+1) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. D'où le résultat.
   b) $f(x) - (-x+1) = e^x$ et $e^x > 0$ pour tout nombre réel $x$.

Donc $(C)$ est au-dessus de (D) sur 3.

4. Tracé de la courbe.




## ***Exercice 6***

1. $D_f = \mathbb{R}$.
2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (2x+2)e^{x^2+2x-1}$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x - 1 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $2x + 2$.

$f$ est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$.

Tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $e^{-2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

5. $f(x) = 1$

$$e^{x^2+2x+1} = 1$$

$x^2 + 2x + 1 = 0.$

$$\Delta = 4 + 4 = 8$$

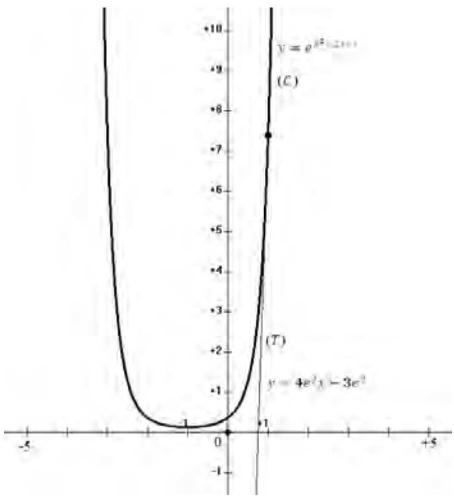
$x_1 = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{2}$.

$S = \{-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}\}$ .

6. $(T)$ : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ ;

$$y = 4e^2(x-1) + e^2$$

$y = 4e^2x - 3e^2$.



## Exercice 7

1. a) $\lim\limits_{-\infty} f = 0$. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $(C)$ en $-\infty$.

   b) $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

   c) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$.

   La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à $(C)$.

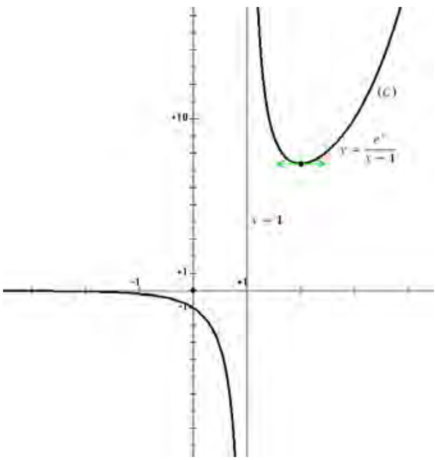
2. a) Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $e^x > 0$ et $(x-1)^2$ aussi. Donc $f'(x)$ a le signe que $x - 2$.

   b) $f$ est strictement croissante sur $]2; +\infty[$.
   $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; 2[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ ↘ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $e^2$ | ↗ | $+\infty$ |

3. Construction de la courbe :



## ***Exercice 8***

1. $\lim\limits_{-\infty} \ f = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \ f = +\infty$.

2. a) $f'(x) = 2e^{x} + (2x+1)e^{x} = (2x+3)e^{x}$.

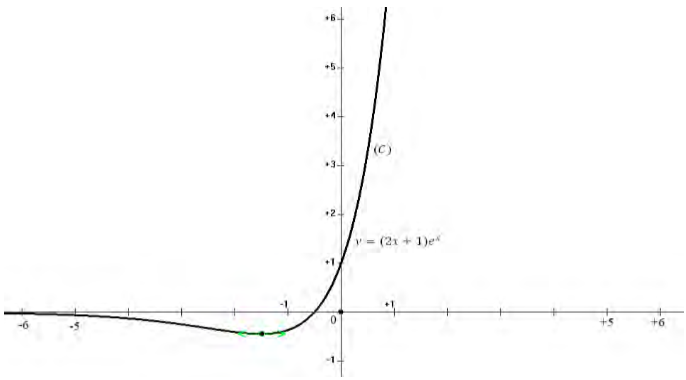
   b) Pour tout $x \in \mathcal{J}$, $e^{x} > 0$.

   Donc $f(x)$ a le même signe que $2x+3$.

$f$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$ et strictement croissante sur $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-2e^{-\frac{3}{2}}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

c) Construction de la courbe $(C)$.




## ***Exercice 9***

4) 1. $\lim\limits_{-\infty} \ f = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \ f = +\infty$ .

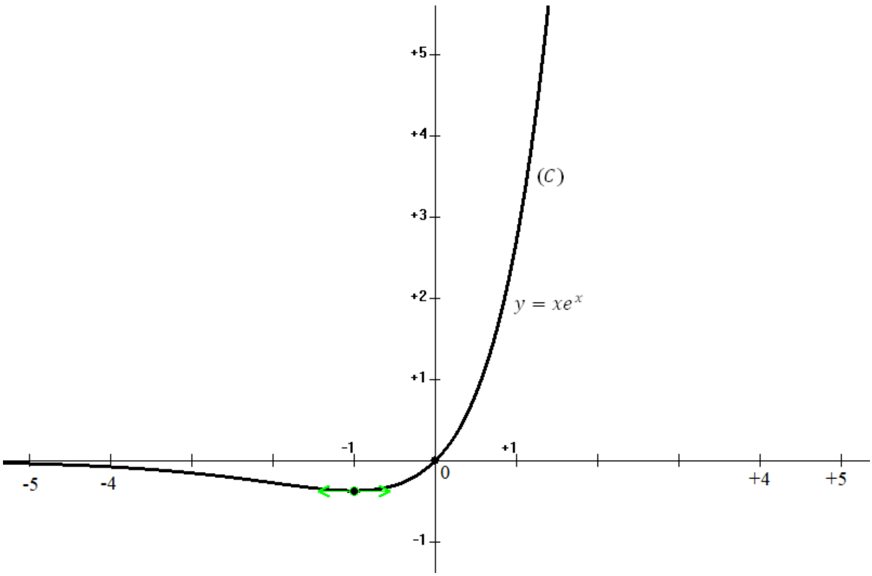
2. a) $f'(x) = (x+1)e^{x}$.

   b) $f'(x)$ a le signe de $x+1$.

$f$ est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$. Et strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-e^{-1}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3. Construction de la courbe $(C)$.




## ***Exercice 10***

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ; $y = 0$ est asymptote horizontale.

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{-x+2} = -\infty$ .

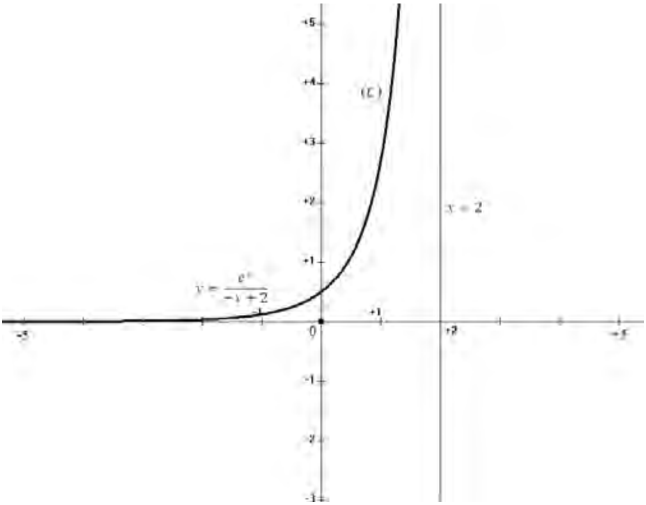
   c) $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$ ; $x = 2$ est asymptote.

2. a) $f'(x) = \frac{(3-x)e^x}{(-x+2)^2}$.

b) Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ $+\infty$ | ‖ | $-\infty$ $\nearrow$ | $f(3)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

3. Construction de la courbe $(C)$.




## ***Exercice 11***

1. $f(x) = (-2x+1)e^x$.
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
2. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
$y = 0$ Asymptote.
3. a) $f'(x) = -2e^x - 2xe^x + e^x$
$$= (-1-2x)e^x$$
$= -(2x+1)e^x$.
b) Le signe de $f'(x)$ dépend du signe $2x+1$.
$\forall x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$, $f'(x) > 0$.
c) $\forall x \in \left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$, $f'(x) < 0$.

d) Tableau de variation

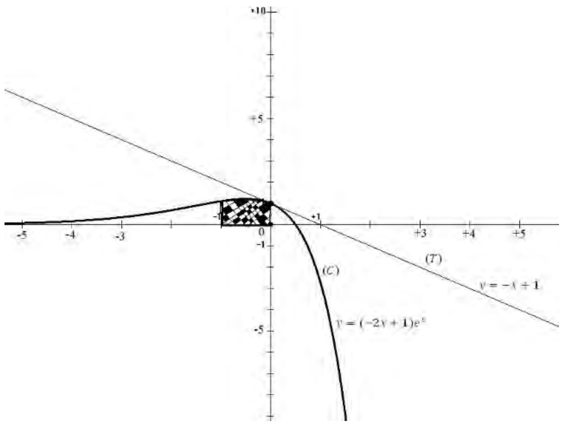
| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | – | |
| $f(x)$ | 0 | $\nearrow$ | $2e^{-\frac{1}{2}}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

4. $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
$= -x + 1.$

5. a)

| $x$ | –5 | –3 | –1 | –0,5 | 0 | 0,5 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$ | 0,3 | 1,1 | 1 | 2,7 | 1 | 0 | –2 |

b) Courbe




6. a) $F'(x) = -2e^x - (2x - 3)e^x$
$= -2e^x - 2xe^x + +3e^x = (-2x + 1)e^x$
$= f(x).$

Donc F est une Primitive de $f$.

b) $\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} f(x)dx$

$$= [F(x)]_{-1}^{0}$$
$$= (3 - 5e^{-1}) \text{ ua , donc}$$
$$\mathcal{A} = 12 - 20e^{-1}cm^2$$

# SITUATION D'ÉVALUATION

## *Exercice 12*

1. Cette proposition est $P(3), soit$ 46,7 % car $P(3) = 1 - e^{-0,21\times3} = 1 - e^{-0,63} \simeq 0,4674.$
2. Il s'agit de trouver $t$ tel que $P(t) = 0,9$

$$P(t) = 0,8$$
$$1 - e^{-0,21t} = 0,9$$
$$e^{-0,21t} = 0,1$$
$$-0,21t = ln0,1$$
$$t = \frac{ln0,1}{-0,21}$$
$$t \simeq 10,96$$

Le nombre de jours nécessaires est 11.

# 6 SÉRIE STATISTIQUE DOUBLE

## RÉSUMÉS DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

## SÉRIE STATISTIQUE DOUBLE ET NUAGE DE POINTS

***Exercice 1***

Représentation du nuage de point (immédiat)

### a. POINT MOYEN DU NUAGE

***Exercice 2***

1. $1 \to F;$ $2 \to V;$ $3 \to F.$

***Exercice 3***

$$\bar{X} = \frac{10 + 6 + 2 \times 6{,}5 + 11{,}5 + 2 \times 11 + 8 + 9 + 7}{10} = \frac{86{,}5}{10} = 8{,}65$$

$\bar{Y} = \frac{250+220+228+262+268+244+240+222+259+246}{10} = \frac{2439}{10} = 243{,}9.$

$G(8{,}65; 243{,}9).$

### b. AJUSTEMENT AFFINE

### Ajustement linéaire par la méthode de Mayer

***Exercice 4***

1. Détermination des coordonnées de $G_1$ et $G_2$.

$G_1(\bar{X}_1; \bar{Y}_1)$ avec :

$\bar{X}_1 = \frac{6+6{,}5\times2+7+8}{5} = \frac{34}{5} = 6{,}8$ ;

$\bar{Y}_1 = \frac{220+222+228+240+244}{5} = \frac{1285}{5} = 257.$

Donc $G_2(10{,}5; 257).$

2. Partageons la série en deux.

$S_1$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 6,5 | 6,5 | 7 | 8 |
| 220 | 222 | 228 | 240 | 244 |

$S_2$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 10 | 11 | 11 | 11,5 |
| 246 | 250 | 259 | 268 | 262 |

3. Détermination de la droite d'équation :

$M(x, y) \in (G_1G_2)$ équivaut à : $\frac{y-230,8}{x-6,8} = \frac{-257-230,8}{10,5-6,8}$

$\frac{y-230,8}{x-6,8} = 7,10.$

$$y - 230,8 = 7,10(x - 6,8)$$
$$y - 230,8 = 7,1x - 48,28$$

$y = 7,1x + 182,52.$

Donc, $(G_1G_2)$ : $y = 3,6x + 182,52.$

## AJUSTEMENT PAR LA METHODE DES MOINDRES CARRES

### Exercice 5

Déterminons $Cov( X, Y)$

On a : $\bar{X} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$ ; $\bar{Y} = \frac{12+13+15+19+21+22}{6} = \frac{102}{6} = 17$

Donc $Cov( X, Y) = \frac{1\times12+2\times13+3\times15+4\times19+5\times21+6\times22}{6} - 3,5 \times 17 = \frac{396}{6} - 59,5 = 6,5$

2. $V( X) = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} - 3,5^2 = 2,91$ et $V( Y) = \frac{12^2+13^2+15^2+19^2+21^2+22^2}{6} - 17^2 = 15$

3. Calculons le coefficient de corrélation linéaire

$$r = \frac{Cov( X,Y)}{\sqrt{V( X)} \times \sqrt{V( Y)}} = \frac{6,5}{1,7 \times 3,87} = 0,98$$

On a $0,87 < 0,98 < 1$ , donc un ajustement linéaire est approprié

4. a) Déterminons une équation de la droite de régression $( D )$ de $Y$ en $X$

On a $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{6,5}{2,91} = 2,23$ et $b = \bar{Y} - a\,\bar{X} = 17 - 2,23 \times 3,5 = 9,2$
donc $(D) : y = 2,23x + 9,2$

b) Déterminons une équation de la droite de régression $(D')$ de $X$ en $Y$

On a $a' = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)} = \frac{6,5}{15} = 0,43$ et
$b' = \bar{X} - a'\bar{Y} = 3,5 - 0,43 \times 17 = -3,81$ donc $(D') : x = 0,43y - 3,81$

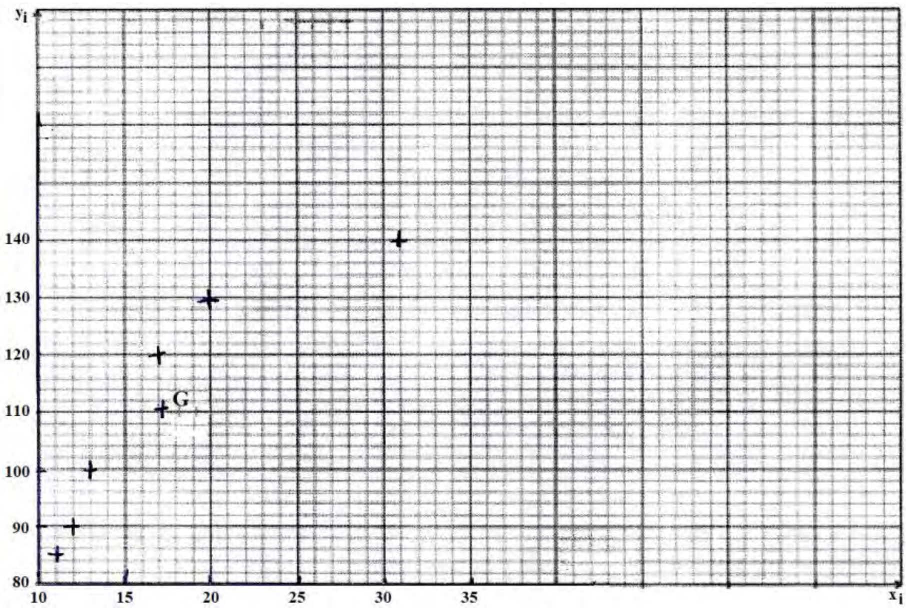
5. À la fin du septième mois on a : $x = 7$ donc le chiffre d'affaires est
$y = 2,23 \times 7 + 9,2 = 24,81 \simeq 25$
Le chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7e mois est de 25 millions.

0,7 < r < 1, donc il y a une forte corrélation entre le chiffre d'affaires et le montant des frais de publicité.

## EXERCICES DE RENFORCEMENTS / APPROFONDISSEMENTS

### Exercice 1

1. Le nuage de points associé à la série (X,Y).



2. $G(\overline{X}, \overline{Y})$ avec $\overline{X} = \frac{13+17+11+20+12+31}{6} = \frac{104}{6} \simeq 17,3$ et

$$\overline{Y} = \frac{100+120+85+130+90+140}{6} = \frac{665}{6} \simeq 110,8$$

Donc $G(17,3; 110,8)$.

3.

$S_1$

| | | |
|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 |
| 85 | 90 | 100 |

et $S_2$

| | | |
|---|---|---|
| 17 | 20 | 31 |
| 120 | 130 | 140 |

$$G_1(12; 991,67) G_2(22,67; 130)$$

$M(x, y) \in (G_1G_2)$ équivaut à : $\frac{y - *91,67}{x-12} = \frac{130-91,67}{22,67-12}$.

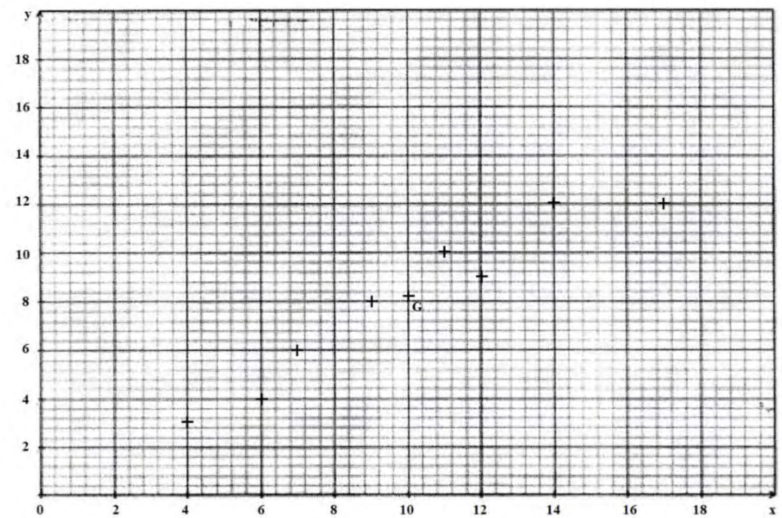
$$(G_1G_2): y = 3,6x + 48,47$$

4. a) Pour $y = 240$, on a : $240 = 3,6x + 48,47$, soit $x = 53,2$.
La dépense serait de 53,2 millions.

b) Pour $x = 50$, on a : $y = 3,6x \times 50 + 48,47 = 228,47$.
Le chiffre d'affaires serait de 228,47 millions.

## Exercice 2

1.



2. $G(\overline{X}\,,\overline{Y}\,)$ avec $\overline{X} = \frac{4+6+7+9+11+14+12+17}{8} = \frac{80}{8} = 10$

et $\overline{Y} = \frac{314+6+8+10+12+9+14}{8} = \frac{66}{8} = 8{,}25.$

Donc $G(10; 8{,}25)$.

3.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 6 | 7 | 9 |
| 3 | 4 | 6 | 8 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | 14 | 12 | 17 |
| 10 | 12 | 9 | 14 |

$$G_1(6{,}5; 5{,}25)G_2(13{,}5; 11{,}25)$$

$M(x, y) \in (G_1G_2)$ si et seulement si $\frac{y-5{,}25}{x-6{,}5} = \frac{11{,}25-5{,}25}{13{,}5-6{,}5}$

$$y = \frac{6}{7}(x - 6{,}5) + 5{,}25$$

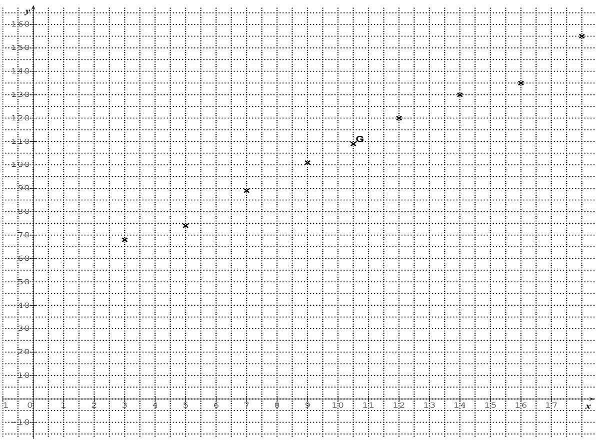
$y = \frac{6}{7}x - \frac{9}{28}.$

4. a) Pour $x = 12$, on a : $y = \frac{6}{7} \times 16 - \frac{9}{28} \simeq 13{,}4$, soit 13 sur 20.

b) Pour $y = 15$, on a : $15 = \frac{6}{7}x - \frac{9}{28} \simeq 17{,}875$, soit 18 sur 20.

## ***Exercice 3***

1. Représentation graphique du nuage de points $(x_i\ ;\ y_i)$



2. a) Déterminons les coordonnées du point moyen G

On a : $\bar{X} = \frac{3+5+\cdots\ldots+16+18}{8} = 10{,}5$ ; $\bar{Y} = \frac{68+74+\cdots\ldots\ldots+135+155}{8} = 109$

donc $G(10{,}5\,;109\,)$

b) Construction du point G

3. a) Déterminons la covariance de la série double $(x_i\ ;\ y_i)$

$$Cov(\,X,Y) = \frac{3\times68+5\times74+\ \ldots\ldots+16\times135+8\times155}{8} - 10{,}5\times109 = 145$$

b) Déterminons une équation de la droite de régression $(\,D\,)$ de $y$ en fonction de $x$

On a : $V(\,X) = \frac{3^2+5^2+\ \ldots\ldots+16^2+18^2}{8} - 10{,}5^2 \ = 25{,}25$

et $V(\,Y) = \frac{68^2+74^2+\ \ldots\ldots\ldots+135^2+155^2}{5} - 109^2 \ = 840{,}5$

De plus $a = \frac{Cov(\,X,Y)}{V(\,X)} = \frac{145}{25{,}25} = \frac{580}{101}$ et $b = \bar{Y} - a\,\bar{X} = 109 - \frac{580}{101}\times 10{,}5 = \frac{4919}{101}$

donc $(\,D\,) : y = \frac{580}{101}x + \frac{4919}{101}$

c) Calculons le coefficient de corrélation linéaire $r$

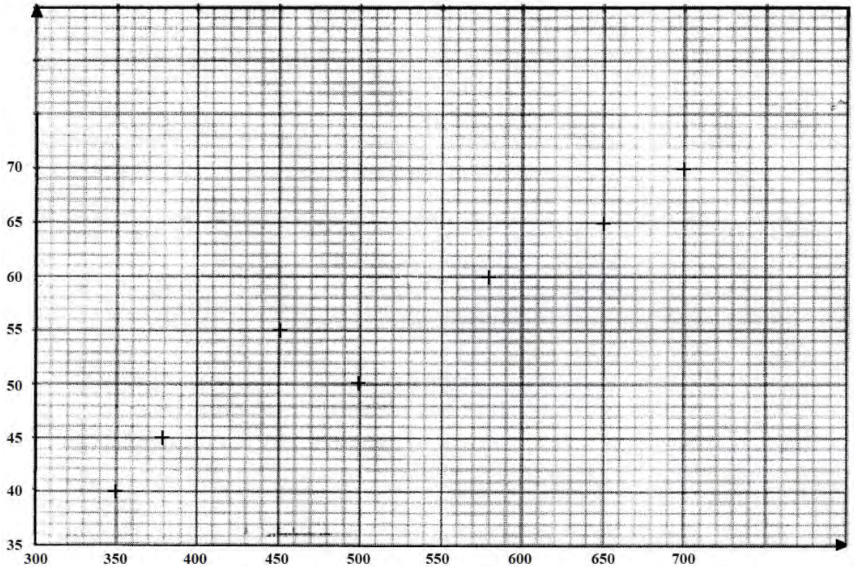
$$r = \frac{Cov(\,X,Y)}{\sqrt{V(\,X)}\times\sqrt{V(\,Y)}} = \frac{145}{5{,}02\times28{,}99} = 0{,}99$$

On a $0{,}87 < 0{,}99 < 1$ , donc un ajustement linéaire est approprié

d) Pour : $x = 24$ , on a : $y = \frac{580}{101}\ \times 24\ + \frac{4919}{101} = 186{,}52\ \simeq 187$

Dans sa $24^{ème}$ année un ouvrier a 187 000 F

## Exercice 4




2. a) $\overline{X} = 515{,}7$ ;
   b) $\overline{Y} = 55$.
3.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 350 | 380 | 450 | 500 |
| 40 | 45 | 55 | 50 |

| | | |
|---|---|---|
| 580 | 650 | 700 |
| 60 | 65 | 70 |

$$G_1(420; 50)G_2(643{,}3;\ 65)$$

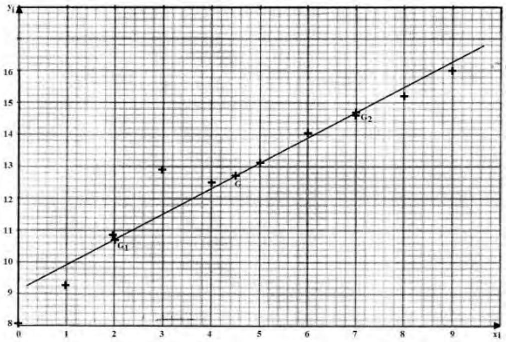
$M(x, y) \in (G_1G_2)$ si et seulement si $\frac{y-50}{x-420} = \frac{65-50}{643{,}3-420}$

$y = 0{,}067x + 21{,}86$.

4. a) $r \simeq 0{,}96$.
   Il y a une forte corrélation entre le chiffre d'affaires et le coût de production.
   b) $(D)\ :\ \ y = 0{,}078x + 14{,}6$.
5. a) Si $x = 800$, alors $y = 70{,}6$, soit un coût de 70,6 millions.
   b) Si $y = 90$, alors $x = 966{,}67$, soit un chiffre d'affaires de 966,67millions.

## Exercice 5

1. a) Représentation du nuage de points $(x_i, y_i)$.



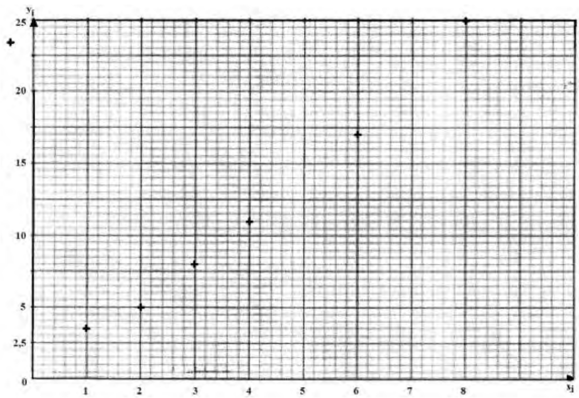
b) $G(4{,}5\ ;12{,}676)$

2. a) $G_1(2\ ;10{,}736)$ et $G_2(7\ ;14{,}616)$

b) $(G_1G_2)$ : $y = 0{,}8x + 9{,}1$.

## Exercice 6

1) 1. Représentation du nuage de points $(x_i, y_i)$.



2.

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $y_i$ | 3 | 5 | 8 |

| $x_i$ | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|
| $y_i$ | 11 | 17 | 25 |

3. $G_1\left(2;\frac{16}{3}\right) G_2\left(6;\frac{53}{3}\right)$

$(G_1G_2)$ : $y = \frac{37}{8}x - \frac{47}{12}$.

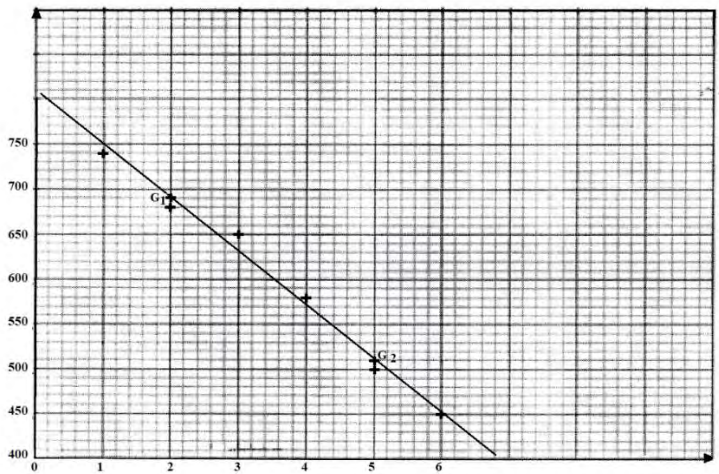
4. Pour $x = 10$, on a : $y = \frac{508}{12} \simeq 42{,}33$.

   La récolte de riz est de 42,33 tonnes.

# SITUATIONS COMPLEXES

## *Exercice 7*

1. Voir figure ci-dessous :




2.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 740 | 680 | 650 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 |
| 580 | 500 | 450 |

$$G_1(2;690)G_2(5;510)$$

$(G_1G_2)$ : $y = -60x + 810$.

3. Le stock est épuisé lorsque $y = 0$.

   Pour $y = 0$, on a : $x = 13{,}5$.

$x = 13{,}5$ correspond au 15 juin 2014.

   Donc le stock sera épuisé avant la date d'entrée en vigueur du décret.

## Exercice 8

- Une équation de la droite de régression de $y$ en $x$ est :
  $y = 86{,}05x + 1014{,}85$
- $r = 0{,}96$ d'où l'existence d'une forte corrélation linéaire

- Déterminons la plus petite valeur de $x$ pour que :
  $86{,}05x + 1014{,}85 \geq 3000$
  $x$ vaut 24
- Conclusion

X = 24 correspond au mois de décembre 2019

# 7 SUITE NUMÉRIQUE

## RÉSUMÉS DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

## GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

***Exercice 1***

$u_0 = 1$ ; $u_1 = 3$ ; $u_2 = 5$ et $u_3 = 7$.

***Exercice 2***

$u_1 = 3$ ; $u_2 = 7$ ; $u_3 = 15$.

**Diverses déterminations d'une suite**

***Exercice 3***

$1 \rightarrow Faux$ ; $2 \rightarrow Vrai$ ; $3 \rightarrow Vrai$ ; $4 \rightarrow Faux$.

### i. Suite majorée, suite minorée, suite bornée

***Exercice4***

$1 \rightarrow Vrai$ ; $2 \rightarrow Vrai$ ; $3 \rightarrow Faux$.

***Exercice 5***

1. 1. Pour tout entier naturel $n$, on a :

$n \geq 0 \Longrightarrow n + 1 \geq 1 \Longrightarrow \frac{1}{n+1} \leq 1 \Longrightarrow u_n \leq 1$.

Donc $u$ est majorée par 1.

2. Pour tout entier naturel $n$, on a :

$n \geq 0 \Longrightarrow n + 1 > 0 \Longrightarrow \frac{1}{n+1} > 0 \Longrightarrow u_n > 0$.

Donc $u$ est minorée par 0.

3. Pour tout entier naturel $n$, on a : $(-1)^n = 1$ $ou$ $(-1)^n = -1$, donc

$-1 \geq (-1)^n \leq 1$ et donc la suite est bornée.

**Sens de la variation d'une suite**

## Exercice 6

1. Pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 1 - (2n+1) = 2$ et $2 > 0$.
   Donc $u$ est croissante.
2. Pour tout entier naturel *n*, $v_{n+1} - v_n = 1 - 7(n+1) - (1 - 7n) = -7$ et
$-7 < 0$. Donc $v$ est décroissante.

## Exercice 7

$1 \rightarrow Vrai$ ; $2 \rightarrow Vrai$ ; $3 \rightarrow Faux$

# SUITE ARITHMÉTIQUE

## Exercice 8

1. FAUX
2. VRAI
3. VRAI
4. VRAI
5. FAUX

## Exercice 9

1. $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison 4 et 4 > 0, donc $(u_n)$ est croissante.
2. $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison –3 et –3 < 0, donc $(u_n)$ est décroissante.

# Formule explicite

## Exercice 10

$u_n = u_0 + nr = 1 + 5n.$

$v_n = v_0 + nr = 2 - 3n.$

## Exercice 11

$u_n = u_1 + (n-1)r = 3 - 4(n-1) = -4n + 7$

$v_n = v_2 + (n-2)r = 2 + 3(n-2) = 3n - 4.$

## Exercice 12

$u_4 = u_0 + 4r$
$11 = 1 + 4r$
$r = \frac{10}{4} = 2{,}5.$

## Exercice 13

$u_1 = u_2 + (1-2)r = -2$ ;
$u_3 = u_2 + r = -8$ ;
$u_4 = u_3 + r = -11$ .

### Sens de variation

## Exercice 14

1. $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison 4 et 4 > 0, donc $(u_n)$ est croissante.
2. $(v_n)$ est une suite arithmétique de raison –3 et –3 < 0, donc $(v_n)$ est décroissante.

### Somme de ternes consécutifs d'une suite arithmétique

## Exercice 15

1. $S = 10 \times \frac{u_0+u_9}{2} = 100.$
2. $S = \frac{100}{2}(u_0 + u_{99}) = -14550.$

### SUITE GÉOMÉTRIQUE

## Exercice 16

$1 \rightarrow Faux;$ $2 \rightarrow Vrai;$ $3 \rightarrow Faux.$

## Exercice 17

1. $u_{n+1} = 2u_n$. D'après la définition d'une suite géométrique, $(v_n)$ est une suite géométrique.
2. Pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 3^{n+1} = 3^n \times 3 = 3u_n$, donc $(u_n)$ est une suite géométrique de raison 3.

3. Pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = -5 \times 4^{n+1} = -5 \times 4^n \times 4 = 4v_n$, donc
$(v_n)$ est une suite géométrique de raison 4.

## ii. Formule explicite d'une suite géométrique

***Exercice 18***

1. $u_n = u_0 \times q^n = -1 \times (-5)^n$.
2. $v_n = v_0 \times q^n = 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

***Exercice 19***

1. 1. $u_n = u_1 \times q^{n-1} = -1 \times (-5)^{n-1}$
2. $v_n = v_2 \times q^{n-2} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

***Exercice 20***

$u_5 = u_2 \times q^{5-2} = 12 \times 2^3 = 96$.

***Exercice 21***

$u_5 = u_2 \times q^3$
$486 = 18 \times q^3$
$q^3 = 27$
$q = 3$.
La raison de $(u_n)$ est 3.

## iii. Sens de variation d'une suite géométrique

***Exercice 22***

1. $u_0 = 1$ et $q = 5$. On a $u_0 > 0$ et $q > 1$, donc $(u_n)$ est croissante.
2. $v_0 = 2$ et $q = \frac{1}{2}$. On a $v_0 > 0$ et $0 < q < 1$, donc $(v_n)$ est décroissante.

***Exercice 23***

1. $u_0 = -2$ et $q = 5$. On a $u_0 < 0$ et $q > 1$, donc $(u_n)$ est décroissante.

2. $v_0 = -12$ et $q = \frac{1}{2}$. On a $v_0 < 0$ et $0 < q < 1$, donc $(v_n)$ est croissante.

## Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

### *Exercice 24*

1. 1. $S = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = -\frac{1}{2}(1 - 3^{n+1})$

   S = $-\frac{1}{2}(1 - 3^{10})$ = 29524, pour $n$ = 9

   2. $S = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = -5 \times \frac{1-4^{n+1}}{1-4} = \frac{5}{3}(1 - 4^{n+1})$

   $S = \frac{5}{3}(1 - 4^{100})$ , pour $n$ = 99

## EXERCICES DE RENFORCEMENTS / APPROFONDISSEMENTS

### *Exercice 25*

1. $S_1 = 2S_0 = 6\ cm^2$ ; $S_2 = 12\ cm^2$; $S_3 = 24\ cm^2$ ; $S_4 = 48\ cm^2$.
2. a) $S_{n+1} = 2S_n$.

   b) $(S_n)$ est une suite géométrique de raison 2 et de 1[er] terme $S_0 =$
3. $S_n = 3 \times \frac{1-2^n}{1-2} = 3(2^n - 1)$.

4. $S_{10} = 3(2^{10} - 1) = 3069$.

### *Exercice 26*

1. $R_2 = R_1 + 200 = 1700$ ; $R_3 = 1900$ et $R_4 = 2100$.
2. $(R_n)$ est une suite arithmétique de raison 2. Donc $R_n = 1500 + 200n$.
3. $R_n = 4100$ donne $n = 13$. Donc c'est le 13[e] jour.
4. $R_1 + R_2 + \cdots + R_{14} = \frac{14}{2} \times (R_1 + R_{14}) = 40600$.

   Au bout des 14 jours, il aura 40600. Ce qui est insuffisant.

## Exercice 27

1) 1. $C_1 = C_0 + 1500 = 21500$ ; $C_2 = 230000$ et $C_3 = 245000$.

2. $C_n$ est suite arithmétique de raison 15000 car pour tout entier $n$, $C_{n+1} = C_n + 15000$.
3. $C_n = 200000 + 15000n$.
4. $C_6 = 200000 + 15000 \times 6 = 290^2000$.
5. 200000+15000$\times$ $n \geq 360000$ pour $n \geq 10,66$. Ce sera au bout de 11 ans.

## Exercice 28

1. $V_1 = V_0 + 5500 = 25500$.
$V_{36} = V_0 + 36 \times 5500 = 218000$.
2. $(V_n)$ est une suite arithmétique de 1[er] terme $V_0$ et de raison 5500.
La somme des versements est :

$$V_0 + V_1 + \cdots + V_{36} = 37 \times \frac{20000 + 218000}{2}$$

= 4 403 000 F.

## Exercice 29

1. $S_2 = 1{,}05S_1 = 157000$ et $S_2 = 10{,}5S_2 = 165\,375$.
2. Pour tout $n \in \angle$, $S_{n+1} = 1{,}05S_n$, donc $(S_n)$ est une suite géométrique.
3. $S_{18} = S_1 \times q^{18-1} = 150\,000 \times 1{,}05^{17}$
$S_{18} = 343\,802{,}7477$.
Le salaire au terme du contrat est 343 805 F.

## Exercice 30

a) $(u_n)$ est décroissante ;
b) $(u_n)$ est décroissante ;
c) $(u_n)$ est croissante ;
d) $(u_n)$ est décroissante ;
e) $(u_n)$ est croissante ;
f) $(u_n)$ est croissante.

## ***Exercice 31***

1. $u_1 = \frac{19}{2}$ ; $u_2 = \frac{73}{8}$ ; $u_3 = \frac{283}{32}$ et $u_4 = \frac{1105}{128}$ .
2. a) $v_1 = \frac{3}{2}$ ; $v_2 = \frac{9}{8}$ ; $v_3 = \frac{27}{32}$ et $v_4 = \frac{81}{128}$.

b) Pour tout $n \in \angle$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 8 = \frac{3}{4}u_n - 6 = \frac{3}{4}(u_n - 8) = \frac{3}{4}v_n$.
Donc $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

3. a) $u_n = v_n + 8$.

b) $u_n = 8 + 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

## ***Exercice 32***

1. a) * $\forall n \in$, $u_{n+1} = u_n + 2$. Donc $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison 2 et de 1er terme $u_0 = 1$.

* $u_1 = 3$ ; $u_2 = 5$ ; $u_3 = 7$ et $u_4 = 9$.

b) $\forall n \in \angle$, $u_{n+1} - u_n = 2$ et $2 > 0$. Donc $(u_n)$ est croissante.

2. $u_{n+1} = 2u_n - 3$ et $v_n = u_n - 3$.

a) $u_1 = -1$ donc $v_1 = -4$ ;
$u_2 = -5$ donc $v_2 = -8$ ;
$u_3 = -13$ donc $v_3 = -16$ ;
$u_4 = -29$ donc $v_4 = -32$ .

b) $\forall n \in \angle$, $v_{n+1} - u_{n+1} - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3) = 2v_n$
Donc $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 2 et de 1er terme $v_0 = u_0 - 3 = 1 - 3 = -2$.

c) $v_0 = -2$ et $q = 2$. On a $v_0 < 0$ et $q > 1$. Donc $(v_n)$ est décroissante.

3. a) $v_n = v_0 \times q^n = -2 \times (2^n) = -2^{n+1}$.

b) $v_n = u_n - 3$, donc $u_n = v_n + 3 = 3 - 2^{n+1}$.

# SITUATION D'ÉVALUATION

## *Exercice 33*

1. Notons $V_n$le volume de bois au 1er juin 2017 + $n$. Ainsi,
$V_0 = 100\,000$.
Le volume en juin 2018 et $V_1 = 1{,}07V_0$, soit $107\,000\ m^3$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = 1{,}07V_n$, donc $(V_n)$ est une suite géométrique de raison q = 1,07 et de 1er terme $V_0 = 100\,000$.
Par conséquent, $V_n = 100000 \times (1{,}07^n)$.

$V_n = 300\,000$.

$100000 \times (1{,}07^n) = 300\,000$.

$$1{,}07^n = 3$$

$$nln1{,}07 = l3$$

$n = \frac{ln3}{ln1{,}07} \simeq 16{,}24$.

Il faut 17 ans pour atteindre ce volume de bois.

## *Exercice 34*

f(0) = 1 et f(t) = 120t +1. Il s'agit d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 120. Calculons la en fonction de t la somme :

S = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + … + f(t)

S = $\frac{t+1}{2}(f(0)+f(t))$ soit S = $\frac{t+1}{2}(120t+2)$, donc S = $60t^2+61t+1$ (t> 0 )

S ≥ $10^4 \Leftrightarrow 60t^2+61t-9999 \geq 0$ et t > 0 donc $t \geq \dfrac{-61+7\sqrt{2403481}}{120}$ ;

t est un entier donc la plus petite valeur de t est : 13.

Le couvre-feu interviendra 13 jours après la déclaration du premier cas contrairement à l'affirmation du camarade de classe

# 8 SYSTÈMES LINÉAIRES DANS $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

## RÉSUMÉS DE COURS – EXERCICES DE FIXATION

### SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS FAISANT INTERVENIR LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

***Exercice 1***

Posons $X = lnx$ et $Y = lny$. Le système devient :

$$\begin{cases} 2X + Y = 3 & (a) \\ X + Y = 1 & (b) \end{cases}$$

$(a) - (b)$ donne X = 2. Par suite Y = –1

$lnx = 2$ et $lnY = -1$

$x = e^2 y = e^{-1}$.

$S = \{(e^2, e^{-1})\}$.

***Exercice 2***

Posons $X = lnx$ et $Y = lny$. On a alors :

$\begin{cases} X + 3Y = 5 \\ 2X - Y = 3 \end{cases}$, soit $\begin{cases} X = 2 \\ Y = 1. \end{cases}$ Donc $\begin{cases} x = e^2 \\ y = e^1. \end{cases}$

$S = \{(e^2; e)\}$.

### SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS FAISANT INTERVENIR LA FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

***Exercices 3***

Posons $X = e^x$ et $Y = e^y$. Le système devient :

$\begin{cases} X + 3Y = 5 \\ 2X - Y = 3 \end{cases}$, soit $\begin{cases} X = 2 \\ Y = 1. \end{cases}$

$S = \{(ln2; 0)\}$.

## ***Exercices 4***

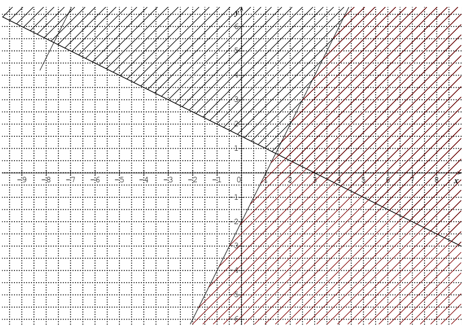
Posons $X = e^x$ et $Y = e^y$. On a alors $\begin{cases} 2X + Y = 3 \\ X + Y = 1 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} X = 2 \\ Y = -1. \end{cases}$, $e^y = -1$ impossible, donc

$S = \{\emptyset\}$.

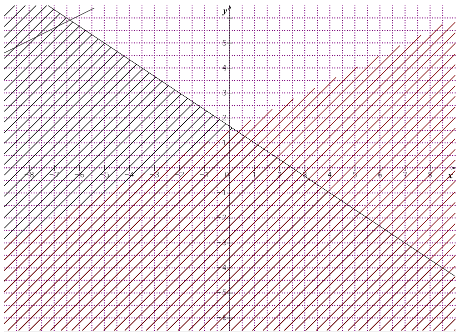
## SYSTEMES D'EQUATIONS DU PREMIER DEGRE DANS $\mathbb{R}^2$

## ***Exercice 5***

a )

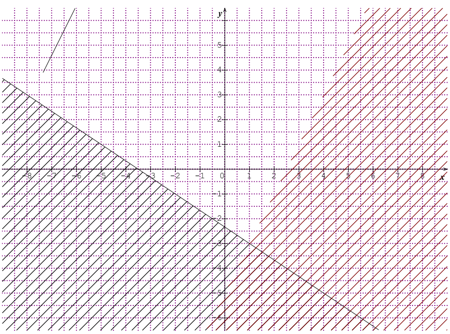


b)

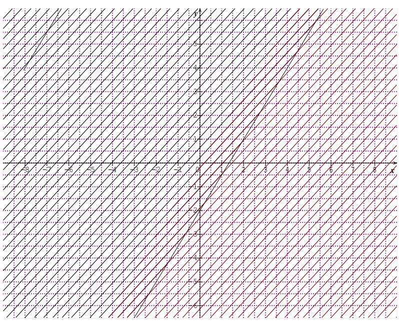


## ***Exercice 6***

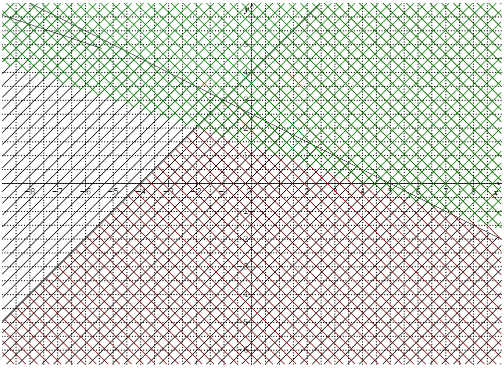
a)



b)



## Exercices 7



## Exercices 8

1. Soit $x$ le nombre de cacaoyers et $y$ le nombre de caféiers. On a : $0{,}7x + 0{,}5y \leq 11$.

2. Soit $x$ le nombre de jours où il fait la peinture et $y$ le nombre de jours où il fait du carrelage. On a : $17000x + 12000y > 65000$..

## Exercices 9

1. Soit $x$ le nombres de sacs de 10 kg et $y$ le nombre de sacs de 25 kg.

On a : $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 5 \\ 10x + 25y \leq 300 \\ 6000x + 14000y \leq 150000 \end{cases}$

2. Soit $x$ le nombre de bateaux de type A et $y$ le nombre de bateaux de de type B. On a : $\begin{cases} x \leq 30 \\ y \leq 35 \\ 10x + 25y \leq 300 \\ 6000x + 14000y \leq 150000 \end{cases}$

# EXERCICES DE RENFORCEMENTS / APPROFONDISSEMENTS

## Exercices 1

1. $\begin{cases} 2lnx - 3lny = -3 \\ -lnx + 2lny = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} lnx = 0 \\ lny = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = e \end{cases}$$
$$S = \{(1; e)\}$$

2. $\begin{cases} -2lnx + 3lny = 1 \\ 3lnx - 4lny = -2 \end{cases}$

$$\begin{cases} lnx = -2 \\ lny = -1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = e^{-2} \\ y = e^{-1} \end{cases}$$

$S = \{(e^{-2}; e^{-1})\}$.

## Exercice 2

1. $\begin{cases} 4e^x - 3e^y = 5 \\ -2e^x + e^y = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} e^x = -4 \\ e^y = -7 \end{cases}$$

$S = \{\emptyset\}$.

2. $\begin{cases} 3e^x - 2e^y = 1 \\ -5e^x + 4e^y = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} e^x = 1 \\ e^y = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$S = \{(0; 0)\}$.

## ***Exercice 3***

1. Figure laissée (voir la méthode dans les exemples précédents)

$S = \{(0;0);\ (0;1);\ (0;-1);\ (1;0);\ (-1;0);\ (2;-1);\ (-2;-1)\}$.

2. idem

## ***Exercice 4***

Soit $x$ le nombre d'élèves et $y$ le prix du repas.

$$\begin{cases} 500x = xy - 500 \\ 570x = xy + 200 \end{cases}$$

$$70x = 700$$

$$x = 10$$

Par suite, $5000 = 10y - 500$

$y = 550$.

Le nombre d'élèves et 10 et le prix du repas est 550 F.

## ***Exercice 5***

Soit $x$ le prix d'un tricot et $y$, celui d'un mètre de tissu.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 14\,500 \\ 2x + 5y = 16\,000 \end{cases}$$

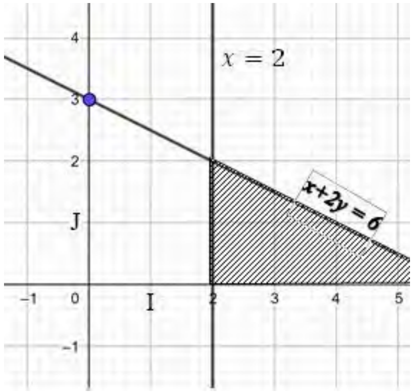
$$\begin{cases} x = 1750 \\ y = 2500 \end{cases}$$

Le prix, d'un tricot est 17 50 F et celui d'un mètre de tissu est 2500 F.

## ***Exercice 6***

Soit $x$ le nombre du kilogramme de mouton et $y$ le nombre de pintades.

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 0 \\ y \geq 02500x + 5000y \leq 15000 \end{cases} \begin{cases} x \geq 2 \\ y > 0 \\ x + 2y \leq 6 \end{cases}$$




(kg de monton; Pin
(2 ; 1)
(2 ; 2)
(4 ; 1)

## ***Exercice 7***

1. Soit $x$ le nombre de paquets de couvertures et $y$ le nombre de caisses de
matériel. On a :

$$\begin{cases} 150x \leq 3000 \\ 50y \leq 2000 \\ 150x + 50y \leq 3000 \\ x \geq xy \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x \leq 20 \\ y \leq 40 \\ 3x + y \leq 60 \\ x - 2y \geq 0 \end{cases}$$

Voir papier millimétré.

2. Une solution possible et $x = 15$ et $y = 5$, soit 15 paquets de couvertures et 5 caisses de matériel.

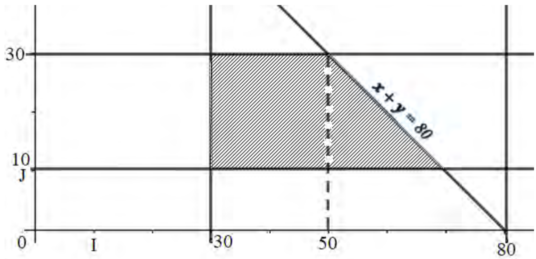
## ***Exercice 8***

Soit $x$ le nombre de blouses pour ouvrier et $y$ le nombre de blouses pour cadre.

$$\begin{cases} 30 \leq x \leq 80 \\ 10 \leq y \leq 30 \\ x + y \leq 80 \end{cases}$$

$$10\,000x + 8\,000y = m$$

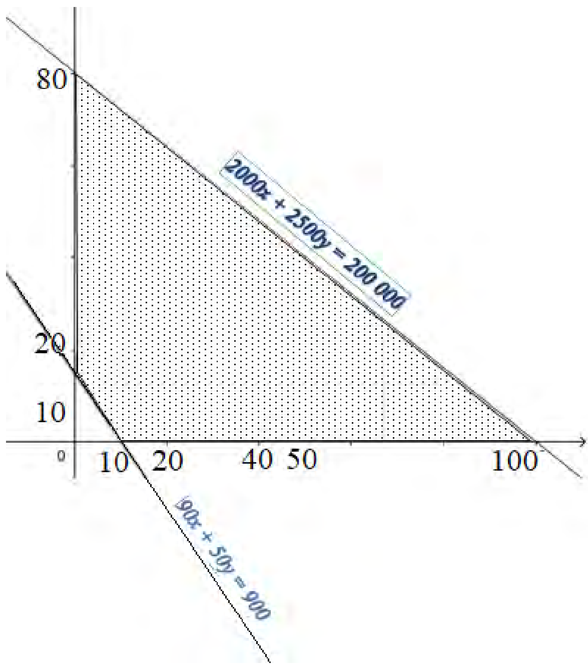
Pour avoir un bénéfice maximal, il faut fabriquer 50 blouses pour ouvrier et 30 blouses pour cadre.




## ***Exercice 9***

1. Soit $x$ le nombre de sacs d'arachides et $y$ le nombre de bidon de miel.

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 90x + 50y \leq 900 \\ 2\,000x + 2\,500y \geq 200\,000 \end{cases}$$



## SITUATIONS COMPLEXES

### Exercice 10

1. Soit $x$ la somme empruntée par Achille et $y$, celle empruntée par Hilaire.

$$\begin{cases} 0{,}15x + 0{,}2y = 75\ 000 \\ 0{,}2x + 0{,}2y = 80\ 000 \end{cases}$$

$$0{,}05x = 5\ 000$$

$$x = 100\ 000$$

$$y = 300\ 000$$

Elle a prêté 100 000 F à Achille et 300 000 F à Hilaire.

2. Achille rembourse $1{,}15\times 100\ 000$ ; soit 115 000 F et Hilaire, $1{,}2 \times 300\ 000$ f soit 360 000 F

### Exercice 11

1. Voir figure. Il y a 12 couples de nombres entiers naturels solutions pour lesquelles $x \neq 0 \;\; ou \;\; y \neq 0$.
2. $240x + 300y$ est maximal pour $x = 100 \;\; et \;\; y = 600$ et cette valeur
Est 204 000F.
3. La coopérative doit produire 100 yaourts X et 600 yaourts Y pour faire
Un bénéfice maximal.

### Exercice 12

Soit $x$ le nombre d'œufs extra et $y$, le nombre d'œufs sublime. On a :

$$(S)\begin{cases} x + 3y \leq 18 \\ x + y \leq 8 \\ 2x + y \leq 14 \end{cases}$$

Soit $b = 2000x + 300y$.

Les solutions de $(S)$ pour lesquelles $b$ est maximal sont $(3; 5)$ et $(6; 2)$.

Elle doit produire 3 extra et 5 sublime ou bien 6 extra et 2 sublime.

# DEVOIR DE NIVEAU

# Devoir de niveau 1

## Exercice 1

1. Vrai
2. Vrai
3. Faux

## Exercice 2

$1 \to A$ ;    $2 \to C$ ;    $3 \to B$.

## Exercice 3

1. $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} f(x) = -\infty$;    $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} f(x) = +\infty$.

2. a) $f'(x) = \frac{x^2+6x+4}{(x+3)^2}$

   b)

| $x$ | $-\infty$ | $3-\sqrt{5}$ | | -3 | | | $3+\sqrt{5}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | ▒ | ▒ | $-$ | $0$ | $+$ |

   c)

| $x$ | $-\infty$ | $3-\sqrt{5}$ | | $3$ | | | $3+\sqrt{5}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | ▒ | ▒ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty \nearrow$ | $f(x_1)$ | $\searrow -\infty$ | ▒ | ▒ | $+\infty \searrow$ | $f(x_2)$ | $\nearrow +\infty$ |

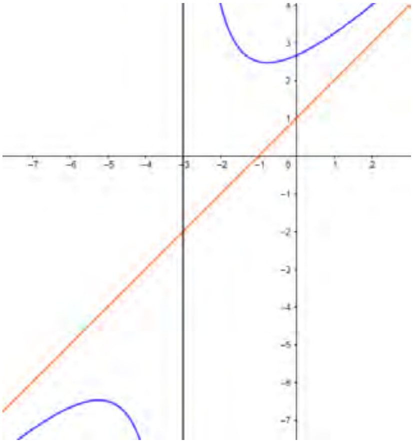
3. a) $f(x) - (x+1) = -\frac{5}{x+3}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x+1) = 0 \end{array}\right\}$$

$y = x + 1$ est asymptote à $(C)$en $+\infty$ et en $-\infty$.

   b) $y = \frac{4}{9}x + \frac{8}{3}$ .

4. Construction des courbes $(C)$ et (T) :



## ***Exercice 4***

a) $P = \frac{33}{95}$.

b) $P(b) = 1 - \frac{33}{95} = \frac{62}{95}$.

c) $\frac{C_1^1 \times C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{12}{190} = \frac{6}{95}$.

## ***Exercice 5***

Loi de probabilité

| $x$ | -200 | –100 | 0 | 100 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

$$E(x) = \frac{-200 - 100 + 0 + 100 + 200}{5}$$

$$E(x) = 0.$$

Une personne qui joue plusieurs fois à ce jeu peut espérer obtenir 0 F au lieu de 100F. Il ne doit donc pas participer à ce jeu.

# Devoir de niveau 2

## *Exercice 1*

1) c) ; 2) c)
A1 seulement

3) b) 4) d ) 5 < A <7 ; (A = 7 - $\frac{28}{e^3}$ )

## *Exercice 2*

1) P (1) = 0
2) Il suffit de développer $(x-1)(x-4)^2$
3) S = {1 ; 4}
4) On pose X = ln$x$ ; X = 1 ou X = 4 soit $x$ = e ou $x = e^4$.

## *Exercice 3*

1) D$f$ = ℝ - {1]

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$

Donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à (C).

4) a) $d(x) = \frac{-2}{x*1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} d(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = 0$

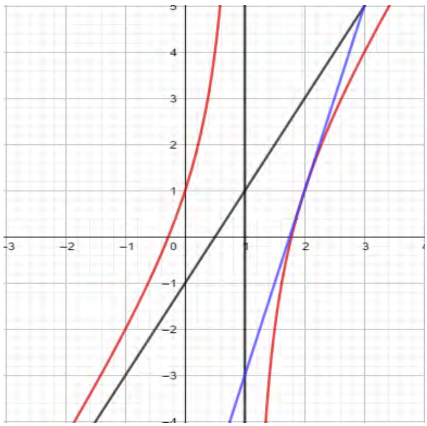
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} d(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à (C).

5) a) $f(x) = 2x - 1 - \frac{-2}{x \times 1}$ donc $f'(x) = 2 + \frac{2}{(x-1)^2}$

b) $f$ est croissante sur ] - ∞ ; 1[ et sur ]1 ; +∞[

6) On trouve $y = 4x - 7$.

7)




## ***Exercice 4***

Nombre de litre de jus pour lequel le bénéfice est maximal.

B(x) = $23x - \frac{1}{2}x^2 - 2x - 200$

B(x) = $-\frac{1}{2}x^2 + 21x - 200$

B'(x) = $-x + 21$

Le bénéfice est maximal si $x = 21$.

Nombre de litre de jus pour lequel le cout moyen de production est minimal.

Le coût total de production est : C(x) = $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 200$

Le cout moyen $C_M(x)$ de production est $\frac{C(x)}{x}$

$C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x}{2} + 2 + \frac{200}{x}$

$C'_M(x) = \frac{1}{2} - \frac{200}{x^2}$

$= \frac{x^2-400}{2x^2}$

$C'_M(x) = 0$ si $x = 20$

Le coût moyen de production est maximal si $x = 20$.

En conclusion pour 20 litres de jus le cout moyen de production est minimal et pour 21 litres de de jus le Bénéfice est maximal. Il est plus avantageux de produire 21 litres de jus par jour.

# Devoir de niveau 3

## Exercice 1

1) faux ; 2) faux ; 3) vrai ; 4) vrai

## Exercice 2

1) C ; 2) B ; 3) B ; 4) B.

## Exercice 3

Le couple solution est : (ln 2 ; -ln2).

## Exercice 4

$f(x) = \frac{x^2-2x+3}{2x(x-2)}$

1)a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ ; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ ;

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$

c)

- Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$, alors la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à (C)
- Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$, alors la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à (C)

2) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}; f'(x) = \frac{-12x+12}{4x^2(x-2)^2}$

3.a) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}, 4x^2(x-2)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-12x + 12$

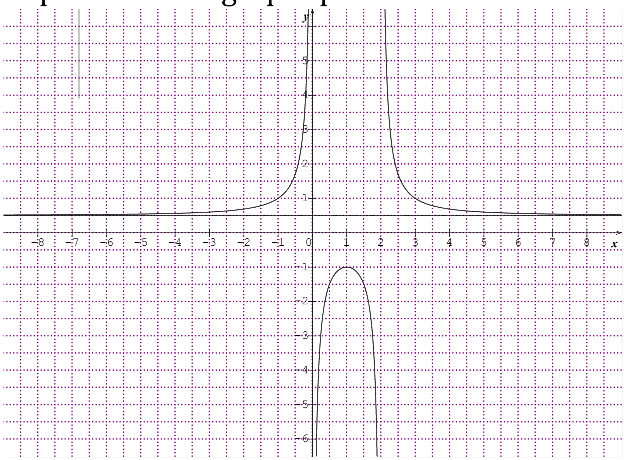
$\forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]0; 1[, f'(x) > 0$, donc $f$ est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; 1[$

$\forall x \in ]1; 2[ \cup ]2 + \infty[, f'(x) < 0$, donc $f$ est strictement décroissante sur $]1; 2[$ et sur $]2; +\infty[$

b) Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\frac{1}{2}$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↗ | $\frac{1}{2}$ |

5) Représentation graphique



## ***Exercice 5***

Notons $v_1$ le loyer payé au cours de la première année. On a :
$v_2 = v_1 + 0{,}1v_1$ soit $v_2 = 1{,}1\ v_1$. Le problème peut donc être modélisé par une suite géométrique de raison 1,1 et de premier terme $v_1$.
La somme $S_{10}$ des loyers durant les 10 ans de séjour de M Kouadio est telle que :

$S_{10} = v_1 + v_2 + \ldots + v_{10}.$

$S_{10} = v_1 \times \frac{1-(1{,}1)^{10}}{1-1{,}1}$ soit : $S_{10} = 600000 \times \frac{1-(1{,}1)^{10}}{1-1{,}1}$.

.

$S_{10}$ vaut environ 9 563000 F

La somme prévue par M Kouadio est insuffisante pour la location du studio.

## FORMAT DES EPREUVES

### SUJET 1

**Exercice 1**

1) F
2) F
3) V
4) V

**Exercice 2**

1) D (**Attention considérer *f* au lieu de *f '***)
2) C
3) B
4) A

**Exercice 3**

1 Nombre de cartes magnétiques possibles : $10^4$

2 P = $\frac{10^3}{10^4}$

3 $\frac{4!}{10^5}$

**Exercice 4**

1. a) $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$.
b) La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à $(C)$.

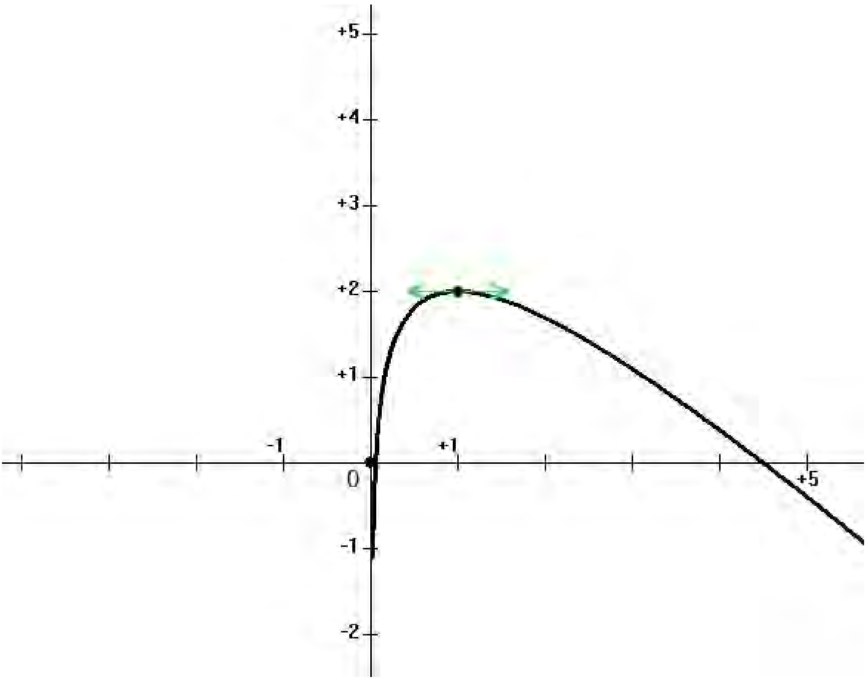
2 a) Pour tout $x \in ]0;+\infty[$, $f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x}$ .

b) Pour tout $x \in ]0;+\infty[$, $x > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que
$1 - x$.
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - x < 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$.
Donc $f$ est strictement décroissante szur $]1;+\infty[$ et strictement croissante sur $]0;1[$.

c) Tableau de variation

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-2ln5$ |

3. $f$ est dérivable et strictement décroissante sur $[1; 5]$ en particulier sur $[4; 5]$.
De plus, $f(4) \simeq 0{,}38$ et $f(5) \simeq 0{,}39$ sont de signes contraires.
Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique comprise entre 4 et 5.
4. Construction de la courbe $(C)$ sur l'intervalle $]0; 5]$.




## ***Exercice 5***

f(0) = 1 et f(t) = 120t +1. Il s'agit d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 120. Calculons la en fonction de t la somme :

S = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + … + f(t)

$S = \frac{t+1}{2}(f(0) + f(t))$ soit $S = \frac{t+1}{2}(120t + 2)$,

donc S = $60t^2 + 61t + 1$ (t> 0 )

$S \geq 10^4 \Leftrightarrow 60t^2 + 61t - 9999 \geq 0$ et $t > 0$ donc $t \geq \dfrac{-61 + 7\sqrt{2403481}}{120}$ ;

t est un entier donc la plus petite valeur de t est : 13.

Le couvre-feu interviendra 13 jours après la déclaration du premier cas contrairement à l'affirmation du camarade de classe

**Les autres sujets du format sont laissés à l'appréciation du lecteur**

Achevé d'imprimer sous les presses de : JD Éditions
Pour le compte de JD Éditions.
Tél. : 25 23 00 17 50
Mise en page : JD Éditions

# De la même collection