

Maitrise *Art*
L'art de la maîtrise

3^e

Manuel
Maths



Mathématiques

3^e

Sous la supervision d'Inspecteurs Pédagogiques expérimentés

AUTEURS

AKA Jean Baptiste
Professeur de Lycée

TA Bi Ta Célestin
Professeur de Lycée

FP Éditions
11 BP 211 Abidjan 11
Tél. : 01 51 45 23 45
Côte d'Ivoire

AVANT - PROPOS

Ce manuel de Mathématiques des classes de 3^e est conforme au programme en vigueur dans le système éducatif ivoirien, qui est basé sur l'Approche par Compétence (APC). Il est conçu de manière à permettre :

- à l'enseignant d'y trouver des activités et des exercices pour conduire ses cours ;
- à l'apprenant(e) de travailler en autonomie ;
- au parent, s'il le peut, d'aider son enfant dans son travail quotidien.

Chaque leçon est présentée comme suit :

La page de garde :

Sur cette page il y a :

- **Le titre de la leçon** : C'est celle donnée par le programme éducatif.
- **Une situation d'apprentissage** : Elle a un lien direct avec la notion à l'étude.
- **Une image** : Elle est en arrière-plan du titre de la leçon et de la situation d'apprentissage. Elle a un lien avec la situation d'apprentissage ou avec la leçon.

Les activités de découverte :

Elles sont regroupées dans la rubrique « **Découvre de nouveaux outils** ».

Ici les habiletés/contenus sont présentés comme des outils pour résoudre des exercices ou des problèmes.

Dans cette rubrique qui est organisée selon le plan de la leçon, chaque séquence du cours est organisée de la manière suivante :

- **Le titre**
- **Les habiletés/contenus** à installer
- **Les activités**, chacune d'elles étant suivie d'une synthèse
- **Les exercices de fixation**, appelés « **Utilise le nouvel outil** » ou « **Utilise les nouveaux outils** ».

Le résumé de la leçon :

Il est dénommé « **Retiens les outils essentiels** », et présente les notions essentielles à retenir de la leçon.

• **Les exercices commentés** : Ce sont des exercices suivis de leurs corrigés, pour permettre aux apprenant(e)s de rédiger les solutions des exercices. Les corrigés donnent des méthodes de résolution.

• **Les exercices** : Ils sont regroupés dans la rubrique « **Utilisation des outils essentiels** », qui est divisée en trois parties :

- **A. Utilise plusieurs outils de la leçon pour résoudre un exercice** : ce sont des exercices de renforcement ;
- **B. Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un exercice** : ce sont des exercices d'approfondissement ;
- **C. Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un problème** : ce sont des situations d'évaluation.

SOMMAIRE

1 CALCUL LITTÉRAL

5

Découvre de nouveaux outils	6
Retiens les outils essentiels	13
Exercices commentés	16
Utilisation des outils essentiels	17

2 PROPRIÉTÉ DE THALÈS DANS UN TRIANGLE

21

Découvre de nouveaux outils	22
Retiens les outils essentiels	28
Exercices commentés	29
Utilisation des outils essentiels	30

3 RACINES CARRÉES

35

Découvre de nouveaux outils	36
Retiens les outils essentiels	43
Exercices commentés	46
Utilisation des outils essentiels	48

4 TRIANGLE RECTANGLE

59

Découvre de nouveaux outils	54
Retiens les outils essentiels	64
Exercices commentés	66
Utilisation des outils essentiels	68

5 CALCUL NUMÉRIQUE

73

Découvre de nouveaux outils	74
Retiens les outils essentiels	84
Exercices commentés	87
Utilisation des outils essentiels	89

6 ANGLES INSCRITS

93

Découvre de nouveaux outils	94
Retiens les outils essentiels	97
Exercices commentés	98
Utilisation des outils essentiels	99

7 VECTEURS

103

Découvre de nouveaux outils	104
Retiens les outils essentiels	114
Exercices commentés	117
Utilisation des outils essentiels	119

8 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

123

Découvre de nouveaux outils	124
Retiens les outils essentiels	129
Exercices commentés	131
Utilisation des outils essentiels	132

9 COORDONNÉES DE VECTEURS

135

Découvre de nouveaux outils	136
Retiens les outils essentiels	150
Exercices commentés	152
Utilisation des outils essentiels	154

10 ÉQUATIONS DE DROITES

159

Découvre de nouveaux outils	160
Retiens les outils essentiels	171
Exercices commentés	174
Utilisation des outils essentiels	175

SOMMAIRE

11 STATISTIQUE 179

Découvre de nouveaux outils	180
Retiens les outils essentiels	192
Exercices commentés	195
Utilisation des outils essentiels	197

13 APPLICATIONS AFFINES 227

Découvre de nouveaux outils	228
Retiens les outils essentiels	236
Exercices commentés	242
Utilisation des outils essentiels	243

12 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $R \times R$ 203

Découvre de nouveaux outils	204
Retiens les outils essentiels	217
Exercices commentés	218
Utilisation des outils essentiels	222

14 PYRAMIDES ET CÔNES 247

Découvre de nouveaux outils	248
Retiens les outils essentiels	260
Exercices commentés	264
Utilisation des outils essentiels	266

Leçon

1

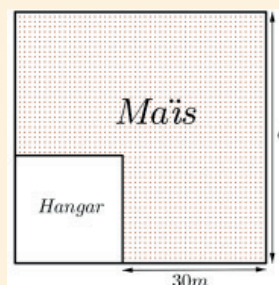
CALCUL LITTÉRAL

Situation d'apprentissage

Après les congés de Noël passés dans un village d'Adzopé, chez son oncle, un élève de 3^e du lycée moderne de Cocody présente à son voisin de classe, le schéma ci-contre qui représente le champ de son oncle.

Ce champ est de forme carrée de côté a , dans lequel se trouve un hangar de forme carrée.

Cet élève a calculé l'aire du champ de maïs. Il demande à son voisin de classe de calculer à son tour l'aire de ce même champ, afin de comparer leurs résultats. Son voisin décide alors d'effectuer des calculs.



Découvre de nouveaux outils

1 Égalité de quotients

À la fin de cette séquence, tu dois être capable de connaître :

- ✓ la propriété relative à l'égalité de deux quotients ;
- ✓ la définition de deux nombres inverses l'un de l'autre.

Activité 1

Compare $\frac{1,2}{3}$ et $\frac{2}{5}$ puis $5 \times 1,2$ et 3×2 .

Fais le point

- $\frac{1,2}{3} = \frac{2}{5}$ équivaut à $1,2 \times 5 = 3 \times 2$.
- On admet que pour tous nombres rationnels a , b , c et d avec b et d différents de 0, on a :
 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $a \times d = b \times c$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

x , y , z et t sont des nombres rationnels tels que $y \neq 0$ et $t \neq 0$.
Parmi les affirmations ci-dessous, indique celle qui est correcte.

1. $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$ équivaut à $x \times z = y \times t$.
2. $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$ équivaut à $x \times y = z \times t$.
3. $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$ équivaut à $x \times t = y \times z$.

Activité 2

Calcule le produit suivant : $\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}$.

Fais le point

- $\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1$, on dit que les nombres $\frac{2}{5}$ et $\frac{5}{2}$ sont inverses l'un de l'autre.
- L'inverse de $\frac{2}{5}$ est $\frac{5}{2}$.
- Deux nombres rationnels sont inverses l'un de l'autre lorsque leur produit est égal à 1.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Donne l'inverse de chacun des nombres rationnels suivants : $\frac{3}{2}$; 7 ; 0,8.

EXERCICE

2

Justifie que les nombres rationnels suivants sont inverses l'un de l'autre :

- a) 0,25 et 4.
- b) -2 et $-\frac{1}{2}$.

2 Puissance à exposant entier relatif

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ de connaître les règles relatives aux puissances à exposant entier relatif d'un nombre rationnel ;
- ✓ calculer avec les puissances d'exposant entier relatif.

Activité 3

1. Calcule $3^2 \times 4^2$ et $(3 \times 4)^2$, puis compare les résultats.
2. Calcule $2^3 \times 2^2$ et 2^{3+2} , puis compare les résultats.
3. Calcule $(3^4)^2$ et $3^{4 \times 2}$, puis compare les résultats.
4. Calcule $\frac{4^6}{4^3}$ et 4^{6-3} , puis compare les résultats.

Fais le point

$$3^2 \times 4^2 = (3 \times 4)^2 ; 2^3 \times 2^2 = 2^{3+2} ; (3^4)^2 = 3^{4 \times 2} ; \frac{4^6}{4^3} = 4^{6-3} .$$

On admet que pour tous nombres rationnels a et b différents de 0 et tous nombres entiers relatifs m et n , on a :

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n ; a^m \times a^n = a^{m+n} ; (a^m)^n = a^{m \times n} ; \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} .$$

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

a et b sont des nombres différents de 0.

Écris plus simplement : $a^{-4} \times b^{-4}$; $a^{-5} \times a^2$; $(a^{-2})^{-3}$ et $\frac{a^{-3}}{a}$.

EXERCICE 2

Recopie et complète les pointillés par les nombres qui conviennent.

$$6^5 \times 6^2 = 6^{\dots} ; (-7)^3 \times (-7)^{-5} = (-7)^{\dots} ; (8^{-2})^3 = 8^{\dots} ;$$

$$3^3 \times 8^3 = (\dots \times \dots)^{\dots} = \dots ; \frac{9^8}{9^5} = \dots$$

3 Développement, réduction et factorisation

À la fin de cette séquence, tu dois être capable de :

- ✓ développer des expressions littérales ;
- ✓ réduire des expressions littérales ;
- ✓ factoriser des expressions littérales.

Activité 1

Réduis les expressions suivantes :

$$S = x - (3x + 1) \quad ; \quad T = x - (1 - 2x) \quad ; \quad U = x + (x - 1).$$

Fais le point

On admet que pour tous nombres rationnels a , b et c , on a :

$$a + (b - c) = a + b - c ;$$

$$a - (b - c) = a - b + c ;$$

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Réduis les expressions suivantes:

$$P = x - (2 - 3x) \quad ; \quad Q = 2y + (4 - 3y) - 1 \quad ; \quad R = -(x - y) + (-x + y).$$

Activité 2

Développe les produits suivants:

$$A = 3x(2 + x) ;$$

$$B = x(4x - 1) ;$$

$$C = (2 + x)(4y - 1) ;$$

$$D = (a + b)^2 ;$$

$$E = (a - b)^2 ;$$

$$F = (a + b)(a - b).$$

Fais le point

On admet que :

- pour tous nombres rationnels x , y et z , on a :

$$x(y + z) = xy + xz ;$$

$$x(y - z) = xy - xz.$$

- pour tous nombres rationnels a et b , on a :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 ;$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Développe et réduis les expressions littérales suivantes:
 $K = 5x(x + 3)$; $L = -4x(x - 2)$; $M = (2x - 5)(3x + 1)$.

EXERCICE 2

Développe et réduis les expressions littérales P ; Q et R.
 $P = (3a + 1)^2$
 $Q = (7 - a)^2$
 $R = (12a + 3)(12a - 3)$

Activité 3

Factorise les expressions A ; B et C suivantes:

$$A = 2x(3x + 1) - 17(3x + 1)$$

$$B = 3x(2x + 1) + 2x + 1$$

$$C = 9a^2 + 24a + 16$$

$$D = 64 - 16x + x^2$$

$$E = 25 - (3x + 7)^2$$

Fais le point

On admet que pour tous nombres rationnels a , b , x et y , on a :

- $ax + ay = a(x + y)$
- $ax - ay = a(x - y)$
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Factorise chacune des expressions A ; B et C suivantes:
 $A = 3x + 6$; $B = 2x - 8y$; $C = x^2 + 7x$.

EXERCICE 2

Factorise chacune des expressions A ; B ; C et D suivantes:
 $A = x^3 - x$;
 $B = 4x^2 - 9$;
 $C = x^2 - 10x + 25$;
 $D = x^2 + 6x + 9$.

4 Produit nul ; nombres de même carré

À la fin de cette séquence, tu dois être capable de connaître :

- ✓ la propriété relative au produit nul ;
- ✓ la propriété relative aux nombres de même carré.

Activité 1

Soient a et b deux nombres rationnels.
Dans quelle condition le produit $a \times b$ est-il égal à zéro ?

Fais le point

On admet que :
Un produit de nombres rationnels est égal à zéro lorsque l'un au moins de ses facteurs est égal à zéro.
On écrit : $ab = 0$ équivaut à $a = 0$ ou $b = 0$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

a est un nombre rationnel.
Détermine a tel que : $(a - 2)(a + 3) = 0$.

Activité 2

Soient a et b deux nombres rationnels.

- a) Si $a^2 = b^2$, démontre que $(a - b)(a + b) = 0$.
b) Dédus-en que : $a = b$ ou $a = -b$.
- Si $a = b$ ou $a = -b$, démontre que : $a^2 = b^2$.

Fais le point

Pour tous nombres rationnels a et b , on a :
 $a^2 = b^2$ équivaut à $a = b$ ou $a = -b$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Résous dans $\mathbb{Q}$ chacune des équations suivantes :
1) $x^2 = 2^2$; 2) $x^2 = 0$; 3) $x^2 = 49$; 4) $x^2 = 16$ 5) $x^2 - 5^2 = 0$.

5 Exemples d'expressions littérales

À la fin de cette séquence, tu dois être capable de connaître :

- ✓ d'identifier :
 - un polynôme ;
 - une fraction rationnelle.
- ✓ de déterminer les valeurs de la variable pour lesquelles une fraction rationnelle existe simplifier une fraction rationnelle.
- ✓ de calculer :
 - la somme, la différence, le produit, le quotient de polynômes ;
 - une valeur numérique d'une expression littérale ;
 - traiter une situation faisant appel au calcul littéral.

Activité 1

On donne les expressions suivantes : $5x^4$; $-2x^3$; x^3 ; $-3x^2$; -7 .
Écris la somme de toutes ces expressions.

Fais le point

- $5x^4$ est une expression littérale appelée monôme de variable x , de coefficient 5 et de degré 4.
- $5x^4 - 2x^3 + x^3 - 3x^2 - 7$ est la somme de plusieurs monômes, elle est appelée polynôme. L'exposant le plus élevé est 4. On dit que $5x^4 - 2x^3 + x^3 - 3x^2 - 7$ est un polynôme de degré 4.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Complète le tableau suivant.

Monôme	Coefficient	Degré
$7x^2$		
x^5		
$-\frac{2}{3}x^4$		
$-x$		

EXERCICE

2

Complète le tableau suivant.

Polynôme	Degré
$6x^2 - 3x^7 + 4$	
$4x^5 - x + 2$	
$-x^4 + x^3 + 2x^8$	

Activité 2

On considère l'expression littérale : $A = \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - x}$.

1. Factorise le numérateur et le dénominateur de l'expression A .
2. Explique pourquoi les seules valeurs de x pour lesquelles on ne peut pas calculer une valeur numérique de A sont 0 et 1.

Fais le point

- $\frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - x}$ est une fraction rationnelle.
- $x^3 + 5x^2$ est son numérateur.
- $x^2 - x$ est son dénominateur.
- Une valeur numérique d'une fraction rationnelle existe si et seulement si son dénominateur est différent de 0.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Soit la fraction rationnelle K telle que $K = \frac{x+6}{5x+2}$.

Détermine les valeurs de x pour lesquelles K existe.

Activité 3

On veut trouver une écriture plus simple de l'expression littérale : $A = \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - x}$.

Factorise le numérateur et le dénominateur de A puis simplifie par le facteur commun.

Fais le point

On dit que la fraction rationnelle A a été simplifiée par x .

Pour simplifier une fraction rationnelle on peut procéder comme suit:

- factoriser si possible le numérateur et le dénominateur;
- déterminer la condition d'existence d'une valeur numérique de la fraction rationnelle;
- simplifier la fraction rationnelle par chacun des facteurs communs figurant au numérateur et au dénominateur;
- écrire la fraction rationnelle simplifiée, précédée de la condition d'existence d'une valeur numérique de la fraction rationnelle.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

On donne la fraction rationnelle F suivante : $F = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-1)}$.

Simplifie F pour $x \neq -3$ et $x \neq 1$.

Retiens les outils essentiels

1 Égalité de deux quotients Propriété

Propriété

a, b, c et d sont des nombres rationnels tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ équivaut à } ad = bc.$$

2 Puissance à exposant entier relatif

Notation

a est un nombre rationnel différent de 0, n est un nombre entier naturel différent de 0.

L'inverse de a^n est noté a^{-n} . On a :

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n} ; a^{-n} \times a^n = 1.$$

Exemple

$$\frac{1}{2^{-5}} = 2^5 ; 2^{-5} \times 2^5 = 1.$$

Propriété

a et b sont des nombres rationnels différents de 0 ; m et n sont des nombres entiers relatifs.

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n ; a^n \times a^m = a^{n+m} ;$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n} ; \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

3 Développement, réduction et factorisation

1. Règles de suppression de parenthèses

a, b et c sont des nombres ; on a :

$$a + (b - c) = a + b - c$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$a - (b - c) = a - b + c$$

2. Développement d'un produit

Propriété

a, b, x , et y sont des nombres rationnels. On a :

$$a(x + y) = ax + ay$$

$$a(x - y) = ax - ay$$

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by$$

Égalités remarquables

a et b sont des nombres rationnels. On a :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

3. Factorisation

Méthode

Pour factoriser une expression littérale, on peut utiliser l'une des trois méthodes suivantes :

a) Mettre en évidence un facteur commun

Exemple

$$3x(2x + 1) - 17(2x + 1) = (2x + 1)(3x - 17).$$

b) Utiliser des égalités remarquables

Exemple

$$9a^2 + 24a + 16 = (3a)^2 + 2 \times 3a \times 4 + 4^2 = (3a + 4)^2.$$

c) Utiliser plusieurs techniques (combinaison des deux méthodes précédentes)

Exemple

$$9a^2 + 24a + 16 - a(3a + 4) = (3a)^2 + 2 \times 3a \times 4 + 4^2 - a(3a + 4)$$

$$= (3a + 4)^2 - a(3a + 4)$$

$$= (3a + 4)[(3a + 4) - a]$$

$$= (3a + 4)(3a + 4 - a)$$

$$= (3a + 4)(3a - a + 4)$$

$$9a^2 + 24a + 16 - a(3a + 4) = (3a + 4)(2a + 4) = 2(3a + 4)(a + 2).$$

4 Produit nul, nombres de même carré

1. Produit nul

Propriété

Un produit est égal à zéro lorsque l'un au moins de ses facteurs est égal à zéro.

Un produit est différent de zéro lorsque tous ses facteurs sont différents de zéro.

a et b sont des nombres rationnels.

- $a \times b = 0$ équivaut à $a = 0$ ou $b = 0$.
- $a \times b \neq 0$ équivaut à $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Exemple

a est un nombre rationnel.

$(a - 2)(a + 3) = 0$ équivaut à $a - 2 = 0$ ou $a + 3 = 0$.

$(a - 2)(a + 3) = 0$ équivaut à $a = 2$ ou $a = -3$.

2. Nombres de même carré

Propriété

a et b sont des nombres rationnels.

$a^2 = b^2$ équivaut à $a = b$ ou $a = -b$.

Exemple

$x^2 = 7^2$ équivaut à $x = 7$ ou $x = -7$.

Remarque

a et b sont des nombres rationnels positifs.

$a^2 = b^2$ équivaut à $a = b$.

5 Expressions littérales

1. Monôme - Polynôme

a) Monôme

Présentation

On considère l'expression littérale : $5x^2$.

C'est un **monôme** en x .

5 est le **coefficient** du monôme.

2 est le **degré** du monôme.

b) Polynôme

Présentation

On considère l'expression littérale :

$$22x^9 + 76x^6 - 5.$$

C'est un **polynôme** en x et 9 est le **degré** du polynôme.

Exemple

- $P = -x^2 + 2x + 1$ est un polynôme de degré 2.
- $Q = \sqrt{x} + 3x^2 - 1$ et $R = \frac{1}{x^2} - 6x + 9$ ne sont pas des polynômes.

2. Fractions rationnelles

Présentation

On considère l'expression littérale : $\frac{x^2 + 5x}{2x^2 - 1}$.

C'est une **fraction rationnelle**.

$x^2 + 5x$ est son **numérateur**.

$2x^2 - 1$ est son **dénominateur**.

Valeurs pour lesquelles une fraction rationnelle existe

Propriété

Soit $\frac{A}{B}$ une fraction rationnelle.

$\frac{A}{B}$ existe si et seulement si $B \neq 0$.

Exemple

On considère la fraction rationnelle K telle que

$$K = \frac{x + 6}{5x + 2}.$$

Trouvons les valeurs de x pour lesquelles K existe.

K existe si et seulement si : $5x + 2 \neq 0$.

Résolvons : l'équation $5x + 2 = 0$.

$$5x + 2 = 0 \text{ équivaut à } x = -\frac{2}{5}.$$

Donc, K existe si et seulement si : $x \neq -\frac{2}{5}$.

Simplifier une fraction rationnelle

Méthode

Pour simplifier une fraction rationnelle on peut procéder comme suit:

- factoriser si possible le numérateur et le dénominateur;
- déterminer la condition d'existence d'une valeur numérique de la fraction rationnelle;
- simplifier la fraction rationnelle par chacun des facteurs communs figurant au numérateur et au dénominateur;
- écrire la fraction rationnelle simplifiée, précédée de la condition d'existence d'une valeur numérique de la fraction rationnelle

Exemple

$$F = \frac{x^2 - 9}{(x+3)(x-1)}.$$

$$\text{On a : } x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

$$\text{Ainsi : } F = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-1)}$$

F existe si et seulement si $(x+3)(x-1) \neq 0$

Réolvons : l'équation $(x+3)(x-1) = 0$.

$$(x+3)(x-1) = 0 \text{ équivaut à } x+3 = 0 \text{ ou } x-1 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0 \text{ équivaut à } x = -3 \text{ ou } x = 1$$

Donc, F existe si et seulement si : $x \neq -3$ et $x \neq 1$

$$\text{Pour } x \neq -3 \text{ et } x \neq 1; F = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x-3}{x-1}.$$

$$\text{Conclusion : Pour } x \neq -3 \text{ et } x \neq 1; F = \frac{x-3}{x-1}.$$

Exercices commentés

Exercice 1

On donne les expressions suivantes : $U = \frac{2}{3} - \frac{5}{6} \times 2^3$ et $V = \frac{7}{2} \div \frac{4}{6}$.

1. Calcule V .
2. Justifie que $U = -6$.

Solution

1. Pour calculer V :

- J'utilise la propriété : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

$$V = \frac{7}{2} \div \frac{4}{6} = \frac{7}{2} \times \frac{6}{4} = \frac{7 \times 6}{2 \times 4} = \frac{42}{8} = \frac{21}{4}$$

2. Pour calculer U :

- La puissance est prioritaire par rapport à la multiplication ;

- La multiplication est prioritaire par rapport à l'addition et à la soustraction

$$\begin{aligned} U &= \frac{2}{3} - \frac{5}{6} \times 2^3 = \frac{2}{3} - \frac{5}{6} \times 8 = \frac{2}{3} - \frac{5 \times 8}{6} = \frac{2}{3} - \frac{40}{6} \\ &= \frac{2 \times 2}{3 \times 2} - \frac{40}{6} = \frac{4}{6} - \frac{40}{6} = \frac{4 - 40}{6} = -\frac{36}{6} \\ U &= -6 \end{aligned}$$

Exercice 2

On donne les expressions littérales suivantes :

$$M = 4x^2 - 1 - (2x - 1)(x + 3) \text{ et}$$

$$N = \frac{2x^2 - 5x + 2}{(2x - 1)(x + 1)}.$$

1. a) Justifie que la forme développée, réduite et ordonnée de M est $2x^2 - 5x + 2$.
b) Justifie que $M = (2x - 1)(x - 2)$.

2. a) Détermine les valeurs de la variable x pour lesquelles, N existe.

b) Lorsque N existe, justifie que $N = \frac{x - 2}{x + 1}$.

3. Calcule la valeur numérique de N pour $x = -2$.

Solution

1. a) Pour Justifier

- on développe $(2x - 1)(x + 3)$;
- on réduit suivant les puissances décroissantes de x

$$M = 4x^2 - 1 - (2x - 1)(x + 3)$$

$$M = 4x^2 - 1 - (2x^2 + 6x - x - 3)$$

$$M = 4x^2 - 1 - 2x^2 - 6x + x + 3$$

$$M = 2x^2 - 5x + 2$$

- b) Pour Justifier que $M = (2x - 1)(x - 2)$:

- on factorise par $2x - 1$;

$$M = 4x^2 - 1 - (2x - 1)(x + 3)$$

$$M = (2x - 1)(2x + 1) - (2x - 1)(x + 3)$$

$$M = (2x - 1)[2x + 1 - (x + 3)]$$

$$M = (2x - 1)[(2x + 1 - x - 3)]$$

$$M = (2x - 1)(x - 2)$$

2. a) Détermine les valeurs de la variable x pour lesquelles, N existe.

N existe si et seulement $(2x - 1)(x + 1) \neq 0$

$(2x - 1)(x + 1) \neq 0$ Équivaut à $2x - 1 \neq 0$ et $x + 1 \neq 0$

$x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq -1$, N existe pour $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq -1$.

- b) Lorsque N existe, justifions que $N = \frac{x - 2}{x + 1}$.

Pour $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq -1$;

$$N = \frac{2x^2 - 5x + 2}{(2x - 1)(x + 1)} = \frac{(2x - 1)(x - 2)}{(2x - 1)(x + 1)}.$$

Pour $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq -1$; $N = \frac{x - 2}{x + 1}$.

3. Calcule la valeur numérique de N pour $x = -2$.

$$\text{On a : } N = \frac{-2 - 2}{-2 + 1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

Utilisation des outils essentiels

⇒ A-Utilise plusieurs outils de la leçon pour résoudre un exercice

Exercice 1

Q est un polynôme tel que

$$Q = (3x+4)^2 - (x+4)(5x+8) + 4x.$$

1. a) Justifie que : $Q = 4x^2 - 16$.
b) Dédus-en la factorisation de Q.
2. Résous l'équation $4(x-2)(x+2) = 0$

Exercice 2

On considère la fraction rationnelle P, telle que

$$P = \frac{4x^2 - 4x + 1}{(x+1)(2x-1)}.$$

1. Trouve les valeurs de x pour lesquelles P existe.
2. a) Montre que : $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$.
b) Simplifie P pour $x \neq -1$ et $x \neq \frac{1}{2}$.
3. Calcule la valeur numérique de P pour $x = -2$.

Exercice 3

On donne les expressions littérales A et B suivantes:

$$A = (x+1)^2 - 9; \quad B = \frac{x-2}{(x+1)^2 - 9}.$$

1. Justifie que : $A = (x-2)(x+4)$.
2. a) Détermine les valeurs de x pour lesquelles B existe.
b) Simplifie B pour $x \neq 2$ et $x \neq 4$.

Exercice 4

On donne la fraction rationnelle F telle que :

$$F = \frac{(x-3)^2 + (x-3)(2x+1)}{(x-5)(3x-2)}.$$

1. Justifie que : $(x-3)^2 + (x-3)(2x+1) = (x-3)(3x-2)$.
2. a) Détermine les valeurs de x pour lesquelles F existe.
b) Justifie que pour $x \neq 5$ et $x \neq \frac{2}{3}$, $F = \frac{x-3}{x-5}$.
3. Calcule la valeur numérique de F pour $x = -3$.

Exercice 5

On donne les expressions littérales R et S suivantes :

$$R = (2x+3)^2 - 1; \quad S = 4x^2 + 4x - 8.$$

1. a) Vérifie que : $S = 4(x-1)(x+2)$.
b) Justifie que : $R = 4(x+1)(x+2)$.

2. On considère la fraction rationnelle $T = \frac{R}{S}$.

- a) Détermine les valeurs de x pour lesquelles T existe.
- b) Simplifie T, pour $x \neq 1$ et $x \neq -2$.
- c) Calcule la valeur numérique de T pour $x = \frac{1}{2}$.

Exercice 6

Développe, réduis et ordonne les expressions littérales suivantes :

$$A = 4(x-5) + 2(x+1); \quad B = 7 - (8x+3) + 2x(5x-4) - 3x^2$$

$$C = \left(\frac{3}{2}x - 5\right)^2; \quad D = (x-5)^2; \quad E = (3-2x)(3+2x)$$

$$F = (x-3)^2 + (x-3)(4x+2);$$

Exercice 7

Factorise chacune des expressions suivantes:

$$A = (3x-5)(x-1) - (2x-3)(x-1);$$

$$B = (5x-3)(2x-5) - x(5x-3)$$

$$C = x^2 + 20x + 100; \quad D = 25x^2 - 30x + 9;$$

$$E = \frac{49}{16}x^2 - 42x + 36; \quad F = \frac{25x^2}{4} - 15x + 9.$$

Exercice 8

On donne les expressions :

$$E = (x-3)(x+2) + (x^2 - 4) \text{ et}$$

$$F = \frac{(x-3)(x+2) + (x^2 - 4)}{2x(x+2)}.$$

1. Justifie que $E = (x+2)(2x-5)$.
2. Détermine les valeurs de x pour lesquelles F existe.
3. Simplifie F.
4. Calcule la valeur numérique de F pour $x = 1$.

Exercice 9

On donne les expressions suivantes :

$$U = x + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} \times 2^3 \text{ et } V = \frac{7}{2} \div \frac{4}{6}$$

1. Calcule V.
2. Justifie que $U = x - 6$.

Exercice 10

On donne l'expression littérale R suivante :

$$R = (2x + 3)^2 - 1 ;$$

1. Justifie par la factorisation que :

$$R = 4(x + 1)(x + 2).$$

2. On considère la fraction rationnelle

$$T = \frac{R}{4(x-1)(x+2)}.$$

- a) Détermine les valeurs de x pour lesquelles T existe.

- b) Lorsque T existe, simplifie T.

- c) Calcule la valeur numérique de T pour $x = \frac{1}{2}$.

Exercice 11

On pose $M = (4x^2 + 4x + 1) - (x-3)^2$.

1. Développe puis réduis M.
2. Montre que $M = (x+4)(3x-2)$.
3. Calcule la valeur numérique de M pour $x=2$.
4. Résous l'équation $(x+4)(3x-2)=0$.

Exercice 12

On pose $P = (9-x^2) + 5x(3-x)$ et

$$Q = \frac{(9-x^2) + 5x(3-x)}{(x-3)(4x-1)}.$$

1. Justifie par la factorisation que $P = 3(3-x)(1+2x)$.
2. Détermine les valeurs de x pour lesquelles Q existe.
3. Simplifie Q.

Exercice 13

On pose $A = \frac{14}{3}y + 28$, $B = \frac{20}{9}y^2 - 80$ et $R = \frac{A}{B}$.

1. Factorise A et B.
2. Détermine les valeurs de y pour lesquelles R existe.
3. Simplifie R.
4. Calcule la valeur numérique de R pour $y=1$.

Exercice 14

On considère les deux nombres A et B tels que :

$$A = \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{2}\right) : \left(\frac{1}{4} - \frac{7}{8}\right) \text{ et } B = \frac{7}{18} \times \frac{2}{7} - \left(\frac{5}{3} - 1\right)^2.$$

1. Calcule A et B (les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles)
2. Justifie que A et B sont inverses l'un de l'autre.

Exercice 15

On considère le nombre A tel que

$$A = \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{2}\right) : \left(\frac{1}{4} - \frac{7}{8}\right).$$

1. Soit X un nombre différent de zéro tel que $\frac{2}{x} = \frac{2}{3}$. Détermine X.
2. Calcule X+A.
3. Que peut-on dire des nombres A et X ?

Exercice 16

On donne $A = (2x-3)^2 + 6x(3-2x)$; $B = (2x-3)(x+5)$

1. Développe B.
2. Factorise A.
3. Montre que $A = -(2x-3)(4x+3)$.
4. $C = \frac{2x^2 + 7x - 15}{(2x-2)^2 + 6x(3-2x)}$.
 - a) Détermine les valeurs de x pour lesquelles C existe.
 - b) Simplifie C.
 - c) Calcule C pour $x = \frac{3}{4}$.

Exercice 17

On considère l'expression littérale :

$$H = \frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)^2 + (2x+1)(x-5)}.$$

1. Écris $(x-5)^2 + (2x+1)(x-5)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes de premier degré.
2. Résous dans $\mathbb{Q}$, l'équation : $(x-5)(3x-4) = 0$
3. a) Lorsque H existe, justifie que $H = \frac{x+5}{3x-4}$
b) Calcule la valeur numérique de H pour $x = 1$.

Exercice 18

On donne les expressions suivantes :

$$A = (2x-1)(x+9) \text{ et } B = (3x-5)^2 + 2(x-7).$$

1. Développe puis réduis l'expression B.
2. Résous dans $\mathbb{Q}$ $A = 0$.

Exercice 19

On donne la fraction rationnelle $F = \frac{(2x-1)^2}{(x-3)(2x-1)}$

1. Trouve les valeurs de x pour lesquelles F existe.
2. Justifie que pour $x \neq 3$ et $x \neq \frac{1}{2}$, $F = \frac{2x-1}{x-3}$.
3. Calcule la valeur numérique de F pour $x = 2$.

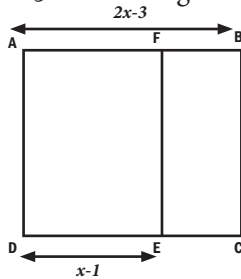
⇒ B- Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un exercice

Exercice 20

Un cultivateur partage son champ carré ABCD de côté $2x-3$ en deux parcelles ; une pour le maïs AFED et l'autre pour le manioc BCEF comme représenté sur la figure ci-dessous.

Le champ de maïs est rectangulaire de largeur $x+1$. NB : x désigne un nombre rationnel supérieur ou égal à 4.

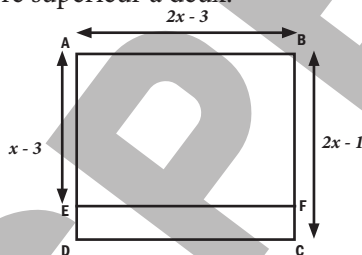
- Justifie que l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle BCEF s'exprime par la formule $\mathcal{A} = (2x-3)^2 - (2x-3)(x+1)$
- Développe et réduis $\mathcal{A}$.
- Factorise $\mathcal{A}$.
- Calcule l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle BCEF pour $x = 5$.


Exercice 21

L'unité de longueur est le centimètre.

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré et ABEF est un rectangle.

On a : $AB = BC = 2x+1$ et $AF = x+3$, où x désigne un nombre supérieur à deux.



- Exprime la longueur FD en fonction de x .
- Déduis-en que l'aire de FECD est égale à $(2x+1)(x-2)$.
- Exprime en fonction de x les aires du carré ABCD et du rectangle ABEF.
- Déduis-en que l'aire du rectangle FECD est : $(2x+1)^2 - (2x+1)(x+3)$.
- Justifie que : $(2x+1)^2 - (2x+1)(x+3) = (2x+1)(x-2)$.

Exercice 22

On considère les expressions suivantes :

$$A = 2^3 + 2^2 (2^2 \times 3 - 3^3) \text{ et } B = \frac{7^2 - 7 \times 5}{7 \times 2^{-3}}$$

- Calcule les expressions A et B.
- Déduis-en que : $A - B = 2^3$.

Exercice 23

$$\text{On donne } A = \frac{x-2}{x} - \frac{4x}{x-2}.$$

- Montre que $A = \frac{(-x-2)(3x-2)}{x(x-2)}$.
- Détermine les valeurs de x pour lesquelles A existe.
- Calcule la valeur numérique de A pour $x = 1$.

Exercice 24

Effectue le calcul ci-dessous et donne le résultat sous forme de fraction irréductible :

$$A = \frac{2}{5} \times \left[1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) \right].$$

Exercice 25

$$\text{On donne : } A = 1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) \text{ et } B = \frac{3 - \frac{5}{2}}{1 + \frac{1}{5}}.$$

- Justifie que $A = \frac{1}{12}$ et $B = \frac{5}{12}$.
- Calcule les quatre cinquièmes de $\frac{35}{8}$.

On appellera C le résultat donné sous forme de fraction irréductible.

- Justifie que la somme $A+B+C$ est un nombre entier.

⇒ C. Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un problème

Exercice 26

À l'occasion de la fête de Tabaski, une mère décide de partager une somme de 5 300 FCFA entre ses trois enfants. Pour respecter le droit d'aînesse, le partage s'effectue de la manière suivante :

- le cadet aura 300 FCFA de moins que l'aîné.
- l'aîné aura 700 FCFA de plus que le benjamin.

Le benjamin veut payer le droit de nage à la piscine qui s'élève à 1500 FCFA. Il veut savoir si sa part est suffisante pour payer son droit de nage.

Soit x la part du benjamin.

1. Exprime la part de l'aîné en fonction de x .
2. Exprime la part du cadet en fonction de x .
3. Le benjamin pourra-t-il payer le droit de nage à la piscine ? justifie ta réponse.

Exercice 27

À l'occasion de la fête du Collégien, ton professeur de mathématiques décide de partager une somme de 10 000 FCFA entre les trois premiers en mathématiques de ta classe. Pour cela, il procède de la manière suivante: le deuxième aura 1500 FCFA de moins que le premier qui aura 2000 FCFA de plus que le troisième. Le troisième veut acheter une calculatrice qui coûte 3000 FCFA. Il veut savoir s'il disposera de moyens suffisants pour réaliser son désir.

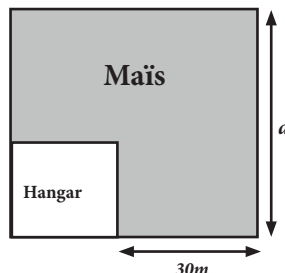
Soit x la part du troisième.

1. Exprime la part du premier en fonction de x .
2. Exprime la part du deuxième en fonction de x .
3. Le troisième pourra-t-il acheter la calculatrice ? justifie ta réponse.

Exercice 28

L'unité de longueur est le mètre (m).

Après les congés de Noël passés au village chez son oncle, un élève de quatrième présente à son voisin de classe, le schéma ci-dessous qui représente le champ de son oncle.



Ce champ est de forme carré de côté a , dans lequel se trouve un hangar de forme carré.

Cet élève demande à son voisin de l'aider à trouver l'aire A du champ de maïs.

1. Montre que $A = a^2 - (a - 30)^2$.
2. Justifie qu'après développement et réduction, $A = 60a - 900$.
3. Factorise $A = a^2 - (a - 30)^2$.
4. Quelle est l'aire de ce champ de maïs lorsque $a = 50$.

Exercice 29

Pendant les grandes vacances, un groupe d'élèves de 3ème d'un lycée décide de vendre des objets fabriqués par une petite et moyenne entreprise (PME). Cette entreprise envisage de vendre un article à 2 000 FCFA. Le coût de fabrication journalier de x objets est donné par la formule : $C = 2090x - x^2$.

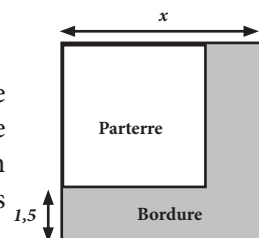
Soucieux et très prudent, le directeur de cette entreprise souhaite connaître le nombre d'articles pour lequel les dépenses et la recette s'équilibrent.

1. Exprime en fonction de x , la recette R de x objets vendus.
2. Sachant que le bénéfice est $B = R - C$, démontre que $B = x(x - 90)$.
3. Déduis-en le nombre d'articles pour lequel le bénéfice est nul.

Exercice 30

L'unité est le mètre.

Dans un jardin carré de côté x , un jardinier réalise un parterre carré de gazon en laissant sur deux côtés une bordure de 1,5m.



Le jardinier veut exprimer l'aire A_b de la bordure restante en fonction de x .

Pour cela on te demande de :

1. Exprimer l'aire A_j du jardin carré en fonction de x .
2. Montrer que l'aire A_p du parterre est $A_p = (x - 1,5)^2$.
3. Déduire que l'aire de la bordure restante est $A_b = 1,5(2x - 1,5)$.

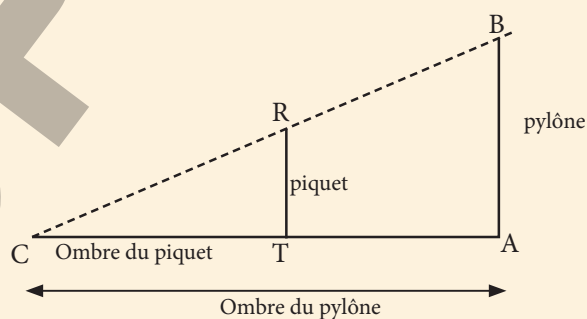
Leçon

2

PROPRIÉTÉ DE THALÈS DANS UN TRIANGLE

Situation d'apprentissage

À ton arrivée dans ton village pendant les vacances scolaires, tu constates l'implantation d'un pylône par une société de téléphonie mobile. Voulant connaître la hauteur de ce pylône, tes camarades de troisième te proposent le schéma ci-dessous.



Tes camarades t'informent que connaissant la hauteur du piquet, la longueur de l'ombre du piquet et la longueur de l'ombre du pylône, tu peux déterminer la hauteur du pylône.

Découvre de nouveaux outils

1 Propriété de Thalès dans un triangle

À la fin de cette séquence, tu dois être capable de :

- ✓ connaître la propriété de Thalès ;
- ✓ reconnaître une configuration de Thalès ;
- ✓ reconnaître deux quotients égaux dans une configuration de Thalès ;
- ✓ calculer des distances.

Activité 1

Sur les trois figures ci-dessous, ABC est un triangle.

À l'aide d'une règle graduée, compare les rapports : $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ dans chaque cas.

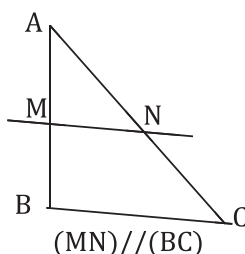


Figure 1

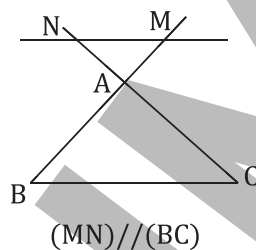


Figure 2

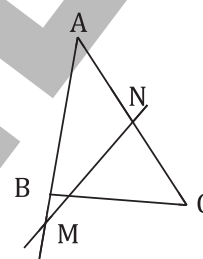


Figure 3

Fais le point

Sur les figures 1 et 2, nous avons :

- un triangle ABC ;
- deux points M et N tels que $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$;
- les droites (MN) et (BC) sont parallèles ;
- obtenu $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Sur la figure 3, nous avons :

- un triangle ABC ;
- deux points M et N tel que $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$;
- les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles ;
- obtenu $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$.

ABC est un triangle, M et N deux points du plan tels que $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$.

Si $(MN) //(BC)$, alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

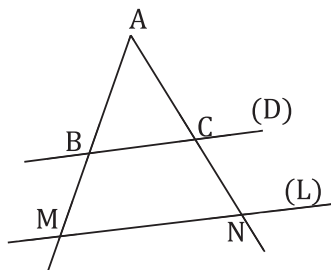
Cette propriété est nommée « Propriété de Thalès »

Les figures 1 et 2 sont des configurations de Thalès.

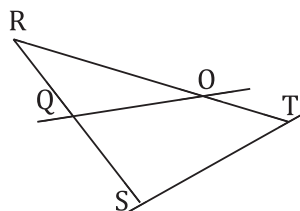
⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

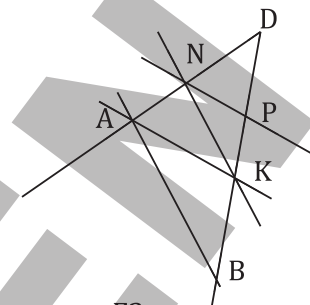
Soient les figures suivantes, cite les figures qui sont des configurations de Thalès.
Lorsque c'est le cas, écris l'égalité des quotients.



F1
(D)//(L)



F2

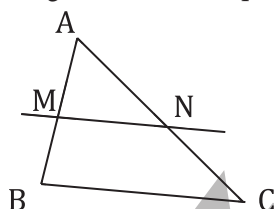


F3
(AK)//(NP)
et (AB)//(NK)

Activité 2

L'unité de longueur est le centimètre

Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en grandeur réelle, on a :



$AN = 4$; $AC = 6$; $AB = 9$ et $(MN) \parallel (BC)$

1. Énonce la propriété de Thalès relative à cette figure.
2. Calcule la longueur du segment $[AM]$.

Fais le point

On applique la propriété de Thalès : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$; puis on obtient : $AM = AB \times \frac{AN}{AC}$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

L'unité de longueur est le centimètre.

ABC est un triangle et M et N sont deux points du plan tels que $M \in [AC]$, $N \in [AB]$. On donne $AC = 5$; $AM = 3$; $AN = 9$ et $(MN) \parallel (BC)$.

Calcule la longueur du segment $[AB]$.

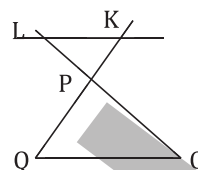
EXERCICE 2

L'unité de longueur est le centimètre.

On donne la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur.

On a : $(KL) \parallel (QO)$, $KP = 3$; $LP = 2$ et $PO = 9$.

Calcule PQ.



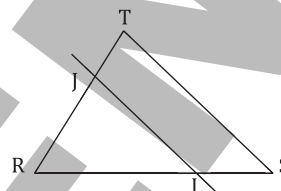
EXERCICE 3

L'unité de longueur est le centimètre.

Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en vraie grandeur, on a : $RI = 6$;

$RJ = 10$; $RS = 12$ et $(IJ) \parallel (ST)$.

Calcule RT.



2 Conséquence de la propriété de Thalès

À la fin de cette séquence, tu dois être capable de :

- ✓ connaître la conséquence de la propriété de Thalès ;
- ✓ reconnaître deux quotients égaux dans une configuration de Thalès ;
- ✓ calculer des distances.

Activité 1

Sur les trois figures ci-dessous, ABC est un triangle.

À l'aide d'une règle graduée, compare les rapports suivants : $\frac{AM}{AB}$; $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$.

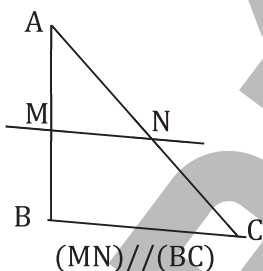


Figure 1

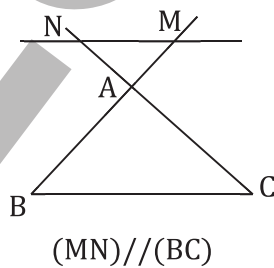


Figure 2

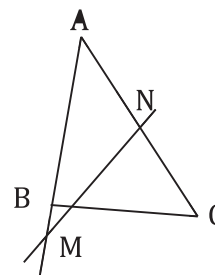


Figure 3

Fais le point

Sur les figures 1 et 2, nous avons :

- un triangle ABC ;
- deux points M et N tel que $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$;
- les droites (MN) et (BC) sont parallèles ;
- obtenu $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Sur la figure 3, nous avons :

- un triangle ABC ;
- deux points M et N tel que $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$;
- les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles ;
- obtenu $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC} \neq \frac{MN}{BC}$.

ABC un triangle M et N deux points du plan tels que $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$.

Si $(MN) \parallel (BC)$, alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Cette propriété est nommée « La conséquence de la propriété de Thalès ».

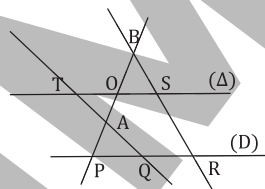
⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

On considère la figure ci-dessous. Les droites (D) et (Δ) sont parallèles.

Trouve les rapports égaux à :

1. $\frac{AO}{AP}$;
2. $\frac{OS}{PR}$.



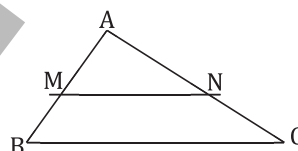
EXERCICE 2

L'unité de longueur est le centimètre.

Sur la figure ci-contre qui n'est en vraie grandeur,

$BC = 18$; $AB = 9$; $AM = 6$ et $(MN) \parallel (BC)$.

Calcule MN.



3 Propriété réciproque de la propriété de Thalès

À la fin de cette séquence, tu dois être capable de :

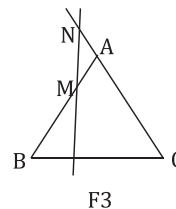
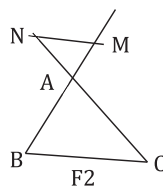
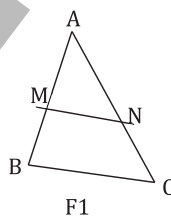
- ✓ connaître la propriété réciproque de la propriété de Thalès ;
- ✓ démontrer le parallélisme de droites.

Activité

Sur les figures ci-dessous qui ne sont en vraies grandeurs :

ABC est un triangle ; M et N sont deux points du plan tels que $M \in (AB)$, $N \in (AC)$,

- $AM = 4$,
- $AB = 12$,
- $AC = 15$ et $AN = 5$.



1. Pour chaque figure, compare les rapports suivants : $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$.
2. Pour chaque figure, à l'aide de la règle et de l'équerre, dis quelle est la position relative des droites (MN) et (BC).

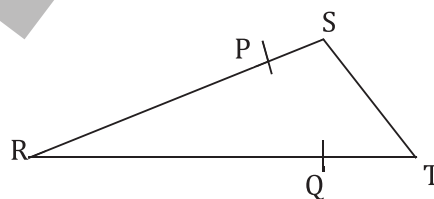
Fais le point

- Sur les trois figures, nous avons : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.
 - Sur les figures F_1 et F_2 , nous avons $(MN) \parallel (BC)$.
 - Sur la figure F_3 , (MN) n'est pas parallèle à (BC) .
 - Sur les figures F_1 et F_2 , nous remarquons que la position du point M par rapport aux points A et B est la même que celle de N par rapport à A et C.
 - Sur la figure F_3 , $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$.
- On admet la propriété suivante :
Soit ABC est un triangle, M et N sont deux points du plan tels que $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ et que la position de M par rapport aux points A et B est la même que celle de N par rapport à A et C.
- Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors $(MN) \parallel (BC)$.
- Cette propriété est nommée : « la propriété réciproque de la propriété de Thalès ».

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur.
RST est un triangle ;
 $RP = 14$; $RQ = 14$; $RS = 15$ et $RT = 21$.
Justifie que $(PQ) \parallel (ST)$.



4 Partage d'un segment en plusieurs segments de même longueur

À la fin de cette séquence, tu dois être capable de partager un segment en des segments de même longueur.

Activité

On veut partager le segment $[AB]$ ci-dessous en cinq segments de même longueur.



- Trace une demi-droite d'origine A, de support non parallèle à la droite (AB) .
- Sur cette demi-droite, place les points E, F, G, H et I tels que $AE = EF = FG = GH = HI$ (à l'aide d'une règle graduée ou d'un compas) ;
- Trace le segment $[BI]$;
- Trace des droites parallèles à la droite (BI) passant respectivement par les points E, F, G et H qui coupent (AB) respectivement en P, Q, R et S.
- Compare les longueurs des cinq segments $[AP]$, $[PQ]$, $[QR]$, $[RS]$ et $[SB]$.

Fais le point

- La propriété de Thalès permet de justifier que les cinq segments obtenus sur $[AB]$ sont de la même longueur
- Pour partager un segment en plusieurs segments de même longueur, on peut utiliser le programme de construction utilisé dans l'activité ci-dessus.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Trace un segment $[AB]$ de longueur 7 cm.
Partage ce segment en trois segments de même longueur.

EXERCICE

2

Trace un segment $[EF]$ de longueur 9 cm.
Partage ce segment en sept segments de même longueur.

Retiens les outils essentiels

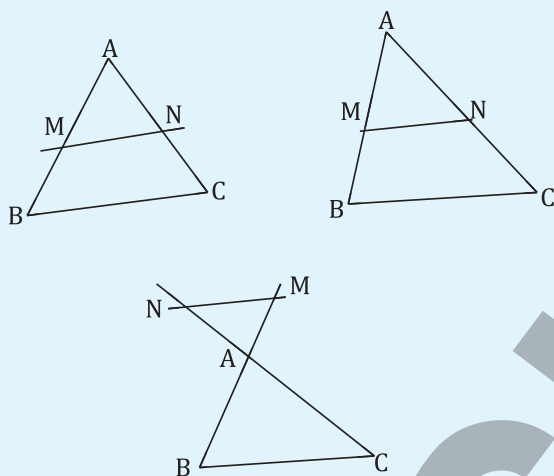
1 Propriété de Thalès dans le triangle

1. Propriété de Thalès

Propriété

ABC est un triangle. M est un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC).

Si $(MN) \parallel (BC)$, alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.



Sur les figures ci-dessus :

$M \in (AB)$, $N \in (AC)$ et les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

On dit que ces trois figures sont des « configurations de Thalès ».

2. Conséquence de la propriété de Thalès

Propriété

ABC est un triangle. M est un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC).

Si $(MN) \parallel (BC)$, alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

NB :

La propriété de Thalès et la conséquence de la propriété de Thalès permettent de calculer des distances.

2 Propriété réciproque de la propriété de Thalès

Propriété

ABC est un triangle. M est un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC) tels que la position du point M par rapport à A et B soit la même que celle de N par rapport à A et C.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors : $(MN) \parallel (BC)$.

NB :

La propriété réciproque de la propriété de Thalès permet de justifier que deux droites sont parallèles.

3 Partage d'un segment en des segments de même longueur

Méthode

Soit n un nombre entier naturel.

Pour partager un segment $[AB]$ en n segments de même longueur, on peut procéder comme suit :

- Tracer une demi-droite d'origine A différente de (AB),
- Choisir un écartement de compas et en partant du point, sur la demi-droite tracée, placer n traits de graduation ;
- Relier avec la règle le dernier trait de graduation et le point B ; puis tracer toutes les parallèles à cette droite qui passent par les différents traits de graduation.
- Ces parallèles partagent le segment $[AB]$ en n segments de même longueur.

Exercices commentés

Exercice

Soit ABC un triangle non isocèle. O est le milieu du segment [BC]. Les perpendiculaires à (AO) passant par B et C coupent (AO) respectivement en E et F.

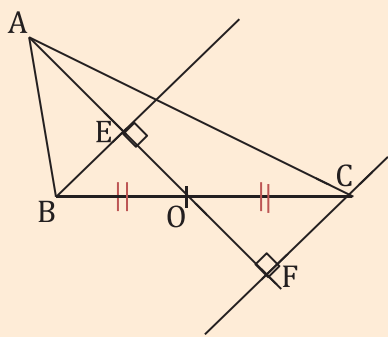
a) Fais une figure

b) Démontre que : $\frac{OB}{OC} = \frac{OE}{OF}$. Déduis-en que O est le milieu de [EF].

c) À partir de la question b), justifie que le quadrilatère BECF est un parallélogramme.

Solution

a) Voir figure



b) Démontrons que les droites (BE) et (CF) sont parallèles.

La droite (BE) est perpendiculaire à la droite (AO) et la droite (CF) est perpendiculaire à la droite (AO), donc (BE) est parallèle à (CF), car deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

Démontrons que : $\frac{OB}{OC} = \frac{OE}{OF}$.

Considérons le triangle OBE.

On a $F \in (OE)$, $C \in (OB)$ et $(BE) \parallel (CF)$, donc d'après la propriété de Thalès $\frac{OB}{OC} = \frac{OE}{OF}$.

Démontrons que O est le milieu de [EF].

O étant le milieu de [BC], $OB = OC$, alors $\frac{OB}{OC} = \frac{OE}{OF} = 1$ par conséquent $OF = OE$.

Nous pouvons donc dire que O est aussi le milieu de [EF].

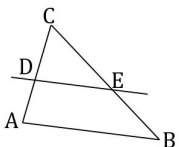
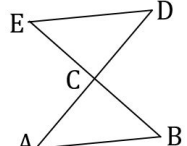
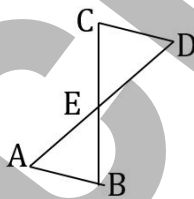
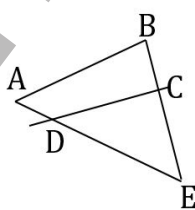
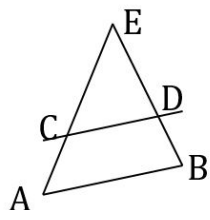
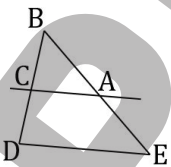
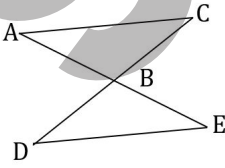
c) Considérons le quadrilatère BECF. O est le milieu de [BC] et le milieu de [EF] donc le quadrilatère BECF est un parallélogramme car un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme.

Utilisation des outils essentiels

⇒ A-Utilise plusieurs outils de la leçon pour résoudre un exercice

Exercice 1

Recopie le numéro de chaque question suivi de la lettre de la réponse correcte.

	Questions	Réponses proposées		
		A	B	C
1	Quelle est l'égalité qui est vérifiée pour la figure ci-dessous ? (AB) // (DE) 	$\frac{CE}{EB} = \frac{DE}{AB}$	$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB}$	$\frac{AB}{DE} = \frac{CE}{CB}$
2	Quelle est l'égalité qui est vérifiée pour la figure ci-dessous ? (AB) // (DE) 	$\frac{CA}{CB} = \frac{CE}{CB} = \frac{AB}{ED}$	$\frac{ED}{AB} = \frac{CD}{CA} = \frac{CB}{CE}$	$\frac{CB}{BE} = \frac{CA}{AD} = \frac{AB}{ED}$
3	Cette égalité est vraie pour quelle figure ? $\frac{AB}{CD} = \frac{EB}{EC}$	 (AB) // (CD)		 (AB) // (CD)
4	Que peut-on déduire de cette figure avec la propriété de Thalès ?  BA = 1,5 ; BC = 1 ; CD = 2 AC = 1 et (AC) // (DE)	BE = 4,5	BE = 2,5	DE = 2
5	A Que peut-on déduire de cette figure avec la propriété de Thalès ?  AC = 4 ; AB = 2,5 ; CB = 2 BD = 3 et (AC) // (DE)	BE = 3,25	BE = 3,5	DE = 6

Exercice 2

Soient A et B deux points du plan.

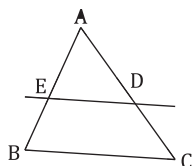
Place les points M, N et T tels que $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$;
 $\frac{AB}{AN} = 3$ et $\frac{AT}{AB} = 2$.

Exercice 3

L'unité de longueur est le centimètre.

Sur la figure suivante, on donne : $AD = 3$; $AC = 5$;
 $AE = 4$; $BC = 4$ et $(ED) \parallel (BC)$.

Calcule AB et ED.



Exercice 4

L'unité de longueur est le centimètre.

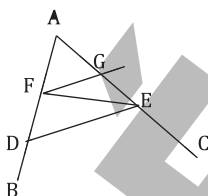
La figure ci-dessous n'est pas en vraie grandeur.

On donne les informations suivantes :

$AD = 7$; $AE = 4,2$ et $DE = 5,6$.

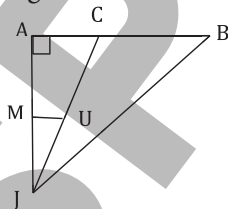
- F est le point de [AD] tel que $AF = 2,5$;
- $B \in [AD]$ et $C \in [AE]$ tels que $AB = AC = 9$;
- $(FG) \parallel (DE)$.

Calcule FG.



Exercice 5

On considère la figure ci-dessous.

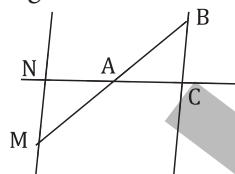


- ABJ est un triangle rectangle en A ;
- $(MU) \parallel (AB)$;
- A, M et J sont alignés ;
- C, U et J sont alignés ;
- A, C et B sont alignés.
- $AB = 7,5$; $MU = 3$; $JM = 10$; $JB = 19,5$;
 $AJ = 18$.

Justifie que $AC = 5,4$.

Exercice 6

On considère la figure ci-dessous.



$AN = 2$; $AM = 3$; $AB = 9$ et $AC = 6$.

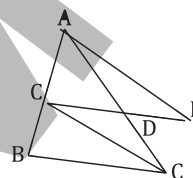
Justifie que (MN) est parallèle à (BC) .

Exercice 7

Soit ABC un triangle dans lequel on a $(ED) \parallel (BC)$,

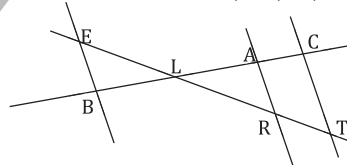
$AE = BC = 3$ et $EB = AD = 2$.

1. Calcule AC, DC et ED ;
2. F est le point de (DE) tel que $DF = 2,7$.
 Détermine si les droites (EC) et (AF) sont parallèles.



Exercice 8

Sur la figure ci-dessous, on a $(AR) \parallel (CT)$.



Les points E, L, R, T et C, A, L, B sont alignés dans l'ordre respectif.

On a également $LC = 6$; $LT = 9$; $LA = 4,8$;

$LB = 1,5$ et $LE = 3$.

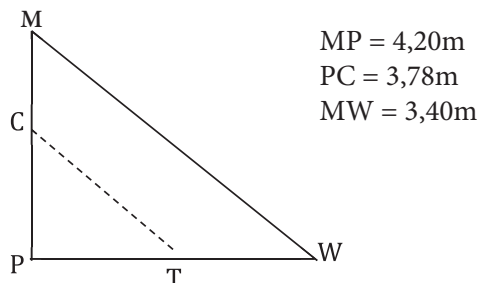
1. Calcule LR.
2. Détermine si $(EB) \parallel (CT)$.

Exercice 9

Un groupe de pêcheurs remet à un couturier de votre quartier la voile de son bateau de pêche pour réparation. La voile a la forme du triangle PMW ci-dessous.

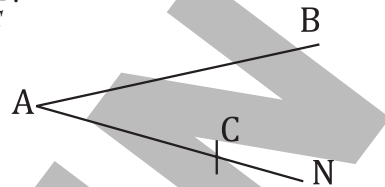
1. Le couturier doit faire une couture suivant le segment [CT].
 - a) Si (CT) est parallèle à (MW), quelle sera la longueur de cette couture ?
 - b) La quantité de fil nécessaire est le double de la longueur de la couture. Est-ce que 7 mètres de fil suffiront-ils ?

2. Une fois la couture terminée, on mesure :
 $PT = 1,88\text{m}$ et $PW = 2,30\text{m}$. La couture est-elle parallèle à (MW) ?



Exercice 10

1. Reproduis la figure ci-dessous.
2. Construis un point M de la droite (AB) tel que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

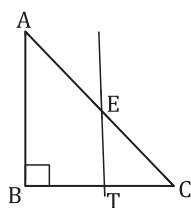


⇒ B- Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un exercice

Exercice 11

Sur la figure ci-dessous, le triangle ABC est rectangle en B. $E \in (AC)$, $T \in (BC)$ et la droite (ET) est perpendiculaire à la droite (BC) .

Justifie que $\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CT}$.



Exercice 12

Soit ABC un triangle, I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[AC]$.

Justifie que $\frac{IJ}{BC} = \frac{1}{2}$.

Exercice 13

Soit ABC un triangle. Soient R un point de (AB) et S un point de (AC) tel que : $\widehat{ARS} = \widehat{ABC}$.

1. Fais une figure.
2. Justifie que $\frac{AB}{AR} = \frac{BC}{RS}$.

Exercice 14

1. Construis un triangle ABC, quelconque. Place un point O extérieur à ce triangle.
2. Sur la demi-droite $[OA)$, place un point M tel que $OM = 2OA$.
3. Trace la parallèle à (AB) passant par M, elle coupe la droite (OB) en N.

4. Construis la parallèle à (AC) passant par M, elle coupe la droite (OC) en T. Démonstre que $ON = 2OB$ et $OT = 2OC$.

Exercice 15

Soit ABC un triangle et (D) une droite passant par B. Soient I le symétrique de A par rapport à la droite (D) et L le symétrique de C par rapport à la droite (D) .

1. Fais une figure.
2. Justifie que $BL \times BI = BA \times BC$.

Exercice 16

Dans un triangle ABC, on place un point D sur le segment $[BC]$. La parallèle à (AB) passant par D coupe (AC) en E et la parallèle à (AC) passant par D coupe $[AB]$ en F.

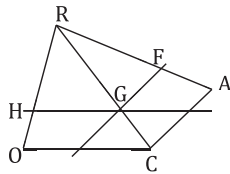
1. Démonstre que $\frac{AF}{AB} = \frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CB}$ et

$$\frac{AE}{AC} = \frac{FD}{AC} = \frac{BF}{BA}.$$

2. Justifie que si le point D est le milieu de $[BC]$ alors les droites (EF) et (BC) seront parallèles.

Exercice 17

Sur la figure ci-dessous, $(FG) \parallel (AC)$ et $(HG) \parallel (OC)$.



- Démontre que : $\frac{RF}{RA} = \frac{RG}{RC}$ et $\frac{RG}{RC} = \frac{RH}{RO}$.
- Démontre que les droites (FH) et (OA) sont parallèles.

Exercice 18

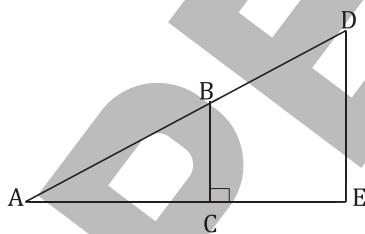
L'unité de longueur est le centimètre.

On donne un triangle ADF tel que $AD = 6,4$; $AF = 8$ et $DF = 4,8$.

- Construis le triangle ADF, puis justifie que le triangle ADF est rectangle en D.
- Place un point B sur (AD) tels que $B \in [AD]$.
- La perpendiculaire à la droite (AD) passant par B coupe la droite (AF) en C. Démontre que les droites (BC) et (DF) sont parallèles.
- Calcule les distances AC et BC.

Exercice 19

Ton papa a dessiné un plan pour réaliser la toiture de sa maison. Ce plan est représenté par la figure ci-dessous.



Les segments $[BC]$ et $[DE]$ représentent des poteaux de la toiture. L'angle $\widehat{DAC}$ a pour mesure

31° et l'angle $\widehat{ADE}$ a pour mesure 59° .

Justifie que : $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$.

Exercice 20

L'unité de longueur est le centimètre.

Construis un triangle RST tel que : $RS = 10$;

$RT = 14$ et $ST = 12$. Place un point M sur le segment $[RS]$. On pose : $RM = x$.

La parallèle à la droite (ST) passant par M coupe le segment $[RT]$ en N.

- Justifie que $RN = \frac{7}{5}x$ et $MN = \frac{6}{5}x$.
- Exprime le périmètre du triangle RMT en fonction de x .
- Exprime le périmètre du quadrilatère MSTN en fonction de x .
- Détermine la valeur de x pour que le périmètre du triangle RMT soit égal à celui du quadrilatère MSTN.

Exercice 21

Soit un triangle FDC. On place les points A et E, milieux respectifs des côtés $[FD]$ et $[DC]$.

On trace la droite (D) passant par le point A et parallèle à la droite (DC) . Cette droite coupe la droite (FC) en B et la droite (FE) en I.

- Fais une figure.
- Démontre que le point I est le milieu de $[AB]$.

Exercice 22

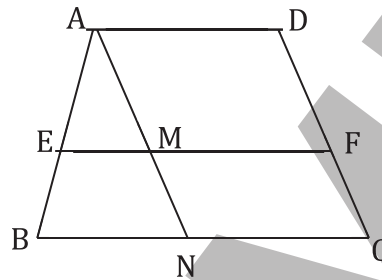
ABC est un triangle. E est un point de la droite (AB) . La droite passant par E et parallèle à la droite (BC) coupe la droite (AC) au point F. La droite passant par F et parallèle à la droite (EC) coupe la droite (AB) au point H.

- Fais une figure.
- Démontre que : $AE^2 = AH \times AB$.

⇒ C. Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un problème

Exercice 23

Le terrain de monsieur Lobé a la forme d'un trapèze tel que représenté par la figure ABCD ci-dessous. Sur cette figure, $(AD) \parallel (EF)$ et $(AD) \parallel (BC)$. Il décide de le couper suivant la ligne [EF] pour faire du maraîcher. Il souhaite donc savoir combien de mètres de grillage il doit acheter pour faire cette séparation. Il s'agit donc dans ce problème, de trouver la longueur du segment [EF]. Pour réussir cette opération, vous lui proposez de tracer une droite passant par le point A et parallèle à la droite (DC). Cette droite coupe le segment [EF] en M et le segment [BC] en N. On donne : $AE = 18\text{m}$; $EB = 12\text{m}$; $BC = 25\text{m}$ et $AD = 20\text{m}$.



1. Justifie que : $MF = 20\text{m}$ et $BN = 5\text{m}$.
2. Détermine EM.
3. Dédurre de ce qui précède la longueur de [EF].

Leçon

3

RACINES CARRÉES



Situation d'apprentissage

Dans ses recherches sur internet, l'élève TA Bi en classe de 3^e découvre une pierre des années 1800 avant notre ère. Sur cette pierre, est dessiné un carré dont l'aire vaut 2 m^2 . Émerveillé par cette découverte, l'élève TA Bi veut connaître le côté de ce carré. Arrivé en classe, il partage sa découverte avec ses camarades de classe et ils décident ensemble de calculer la longueur du côté du carré.

Découvre de nouveaux outils

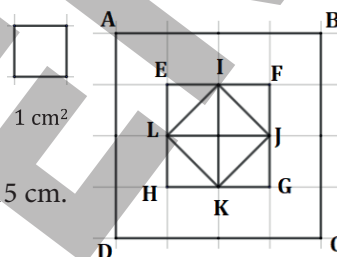
1 Racine carrée

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ d'identifier une racine carrée d'un nombre positif ;
- ✓ de noter une racine carrée.

Activité

1. On donne dans un quadrillage les carrés ABCD, EFGH et IJKL.
 - a) Donne le côté et l'aire de chacun des carrés ABCD et EFGH.
 - b) Justifie l'aire du carré IJKL vaut 2 cm^2 .
 - c) Existe-t-il un nombre positif dont le carré vaut 2 ?
2. Justifie que la longueur d'un carré dont l'aire vaut 225 cm^2 mesure 15 cm.



Fais le point

- Il existe un nombre positif dont le carré vaut 2.
- On appelle ce nombre une racine carrée de 2 ; on le note $\sqrt{2}$. Ainsi : $(\sqrt{2})^2 = 2$.
- Le côté du carré d'aire 225 cm^2 est 15 cm car $15 \times 15 = 225$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

1. Sans utiliser la touche $\sqrt{\quad}$ de ta calculatrice, écris le numéro l'égalité suivi de V si elle est vraie ou de F si elle est fausse :

N°	1	2	3	4	5	6	7
Égalité	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{12} = 6$	$\sqrt{4,9} = 0,7$	$\sqrt{8100} = 90$	$\sqrt{289} = 17$	$\sqrt{9} = -3$	$\sqrt{-25} = -5$

2. Détermine : $\sqrt{16}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt{100}$ et $\sqrt{0,04}$.

EXERCICE 2

Recopie et remplace chaque pointillé par le nombre qui convient :

$$\sqrt{\dots} = 12 ; \quad \sqrt{\dots} = 1,1 ; \quad \sqrt{\dots} = 13 ; \quad \sqrt{\dots} = 10.$$

EXERCICE 3

Recopie et remplace chaque pointillé par le nombre qui convient :

$$(\sqrt{7})^2 = \dots ; \quad (\sqrt{31})^2 = \dots ; \quad (\sqrt{2023})^2 = \dots ; \quad (\sqrt{\dots})^2 = 91.$$

2 Ensemble des nombres réels

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ d'identifier des nombres réels ;
- ✓ de noter l'ensemble des nombres réels.

Activité

On donne les nombres suivants : 0 ; -1 ; -3 ; $12,4$; $7,25$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{5}$; π ; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{5}$ et $-2,256$.

1. Parmi ces nombres , quels sont ceux qui sont rationnels ?
2. Quels sont ceux qui ne sont pas des nombres rationnels ?
3. Comment note-t-on l'ensemble des nombres rationnels ?

Fais le point

- Les nombres qui ne sont pas rationnels sont π ; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{5}$.
- On les appelle des nombres irrationnels.
- Un nombre rationnel et un nombre irrationnel sont des nombres réels.
- L'ensemble des nombres rationnels et irrationnels est l'ensemble $\mathbb{R}$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Recopie et complète par « $\in$ » ou « $\notin$ »

$0,1 \dots \mathbb{Q}$; $\frac{-11}{3} \dots \mathbb{Q}$; $-\sqrt{5} \dots \mathbb{Q}$; $\sqrt{13} \dots \mathbb{Q}$; $\sqrt{36} \dots \mathbb{Q}$; $\pi \dots \mathbb{R}$.

3 Valeur absolue

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ d'identifier la valeur absolue d'un nombre réel ;
- ✓ connaître la propriété relative à la racine carrée du carré d'un nombre ;
- ✓ noter une valeur absolue.

Activité

1. Détermine la distance à zéro de chacun des nombres (-5) ; $(-4,5)$; 7 ; 11 et 0 .
2. Calcule -2^2 et $(-2)^2$.
3. a) Recopie et remplis le tableau ci-dessous :

a	a^2	Distance à zéro de a	$\sqrt{a^2}$
3			
-2			
-5			
1			

b) Compare les résultats des deux dernières colonnes.

Fais le point

- $\sqrt{a^2}$ est égale à la distance à zéro de a .
- On appelle valeur absolue d'un nombre la distance à zéro de ce nombre.
- La valeur absolue de a se note : $|a|$.
- $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Si $a \geq 0$, alors $\sqrt{a^2} = a$.
- Si $a \leq 0$, alors $\sqrt{a^2} = -a$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

1. Donne la notation de distance à zéro de -20 et distance à zéro de 13.
2. Détermine : $|-45|$; $|\sqrt{3}|$ et $|\pi|$.

EXERCICE

2

Pour chaque affirmation, réponds par vrai ou par faux

- a) $\sqrt{(-3)^2} = -3$ b) $\sqrt{\pi^2} = \pi$ c) $\sqrt{36^2} = 6$; d) $-\sqrt{(-1)^2} = 1$; e) $\sqrt{(-4)^2} = 4$.

4 Opérations et racines carrées

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ de connaître les propriétés relatives aux racines carrées ;
- ✓ de calculer :
 - des sommes, des différences, des produits, des puissances, des quotients contenant des racines carrées ;
 - des racines carrées de puissances ;
- ✓ écrire une racine carrée sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers avec b le plus petit nombre entier naturel possible.

Activité

1

1. Calcule puis compare les produits $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{a \times b}$ dans chacun des cas ci-dessous :
 - a) $a = 4$ et $b = 25$; b) $a = 9$ et $b = 4$; c) $a = 36$ et $b = 100$.
2. a et b étant deux nombres positifs, quelle conjecture peux-tu faire de $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{a \times b}$.

Fais le point

On admet que pour tous nombres réels positifs a et b , $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1. Sans calculatrice, calcule :

$$\sqrt{36 \times 25} ; \sqrt{4 \times 9} ; \sqrt{2} \times \sqrt{8} ; \sqrt{3} \times \sqrt{12} ; \sqrt{81 \times 0,01} ; \sqrt{5} \times \sqrt{0,2}.$$

2. Recopie et remplace chaque pointillé par le nombre qui convient.

$$\sqrt{15} = \sqrt{3} \times \dots ; \sqrt{42} = \sqrt{6} \times \dots ; \sqrt{35 \times 8} = \sqrt{8} \times \dots$$

Activité 2

a et b sont deux nombres positifs avec b non nul.

1. Écris plus simplement : $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$ et $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$.

2. Dédus-en la comparaison des nombres $\sqrt{\frac{a}{b}}$ et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Fais le point

Pour tous nombres réels a et b positifs avec b non nul, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1. Sans calculatrice, écris plus simplement : $\sqrt{\frac{36}{49}}$; $\sqrt{\frac{81}{64}}$; $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{\frac{1}{36}}$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{300}}$.

2. Recopie et remplace les pointillés par les nombres qui conviennent.

$$\sqrt{\frac{\dots}{\dots}} = \frac{3}{5} ; \frac{\sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots}} = \frac{2}{5} ; \frac{\sqrt{12}}{\dots} = \sqrt{\frac{12}{7}}.$$

Activité 3

1. Recopie et complète : $\sqrt{16} + \sqrt{9} = \dots + \dots = \dots$; $\sqrt{16+9} = \sqrt{\dots} = \dots$

$$\sqrt{100} - \sqrt{64} = \dots - \dots = \dots ; \sqrt{100-64} = \sqrt{\dots} = \dots$$

2. Justifie que la proposition : "pour tous nombres réels positifs a et b , $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ " est fausse.

Fais le point

- Soient deux réels positifs a et b non nuls, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- Soient deux réels positifs a et b non nuls tels que $a > b$, $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Écris le numéro de chaque énoncé suivi de la lettre correspondant à la réponse juste.

N°	ÉNONCÉS INCOMPLETS	RÉPONSES		
		A	B	C
1	$\sqrt{16} + \sqrt{4}$ est égal à	$\sqrt{20}$	6	10
2	$\sqrt{(12-5)}$ est égal à	$\sqrt{12} - \sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	49
3	$\sqrt{5}$ est égal à	$\sqrt{2} + \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{(2+3)}$

Activité 4

- Recopie et complète : $\sqrt{2^4} = \sqrt{(2^2)^2} = \dots$; $\sqrt{2^6} = \sqrt{(2^3)^2} = \dots$; $\sqrt{2^8} = \sqrt{(2^4)^2} = \dots$.
 - a étant un nombre positif et n un nombre entier, complète : $\sqrt{2^{2n}} = \sqrt{(2^n)^2} = \dots$.
- Recopie et complète : $2^{13} = 2^{\dots} \times 2$; puis complète : $\sqrt{2^{13}} = \dots \times \sqrt{2}$.
 - De façon générale, sachant que $a^{2n+1} = a \times a^{2n}$; justifie que : $\sqrt{a^{2n+1}} = a^n \sqrt{a}$.

Fais le point

- $\sqrt{2^8} = 2^4$ et $\sqrt{2^{13}} = \sqrt{2 \times 2^{12}} = 2^6 \sqrt{2}$.
- Soient a un nombre réel positif et n un nombre entier naturel : $\sqrt{a^{2n}} = a^n$ et $\sqrt{a^{2n+1}} = a^n \sqrt{a}$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Recopie et associe chaque nombre de la colonne de gauche au nombre de la gauche de droite qui lui est égal. a étant un nombre positif.

$\sqrt{a^{12}}$	$\bullet a^{10}$
$\sqrt{a^{100}}$	$\bullet a^{50}$
$\sqrt{a^{20}}$	$\bullet a^9$
$\sqrt{a^{18}}$	$\bullet a^6$

EXERCICE

2

Écris sous la forme $a^n \sqrt{a}$ chacun des nombres suivants : $\sqrt{5^7}$; $\sqrt{2^{13}}$; $\sqrt{3^{25}}$; $\sqrt{53^{29}}$.

Activité 5

1. Écris chacun des nombres 12 ; 50 ; 63 comme produit d'un nombre et d'un carré parfait (4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 ;)
2. Déduis-en une écriture sous la forme $a\sqrt{b}$ de chacun des nombres $\sqrt{12}$; $\sqrt{50}$ et $\sqrt{63}$.

Fais le point

- $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$; $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$ et $\sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = 3\sqrt{7}$
- Ecrire une racine carrée sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers naturels avec b le plus petit possible.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1. Parmi les égalités suivantes, quelle est celle qui conduit à une écriture plus simple de $\sqrt{72}$?
 $72 = 4 \times 18$; $72 = 8 \times 9$; $72 = 3 \times 24$; $72 = 2 \times 36$.
2. Écris plus simplement $\sqrt{48}$; $\sqrt{32}$ et $\sqrt{20}$.

5 Calculs avec des racines carrées

À la fin de cette séquence, tu dois être capable d'écrire un quotient sans le symbole radical au dénominateur.

Activité

1. Soit $A = \frac{3}{\sqrt{5}}$ et $B = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$.
 - a) Multiplie le numérateur et le dénominateur de A par $\sqrt{5}$. Tu obtiens ainsi une écriture de A sans racine carrée (ou radical) au dénominateur.
 - b) Dans l'expression de B , effectue le même calcul avec $\sqrt{3}$.
2. a) On donne $E = \frac{4}{7 + 3\sqrt{5}}$.
 Multiplie le dénominateur et le numérateur de E par l'expression conjuguée du dénominateur.
 b) Procède de même pour $F = \frac{1 + \sqrt{2}}{5 - 2\sqrt{3}}$.

Fais le point

- Pour tous nombres réels a , b , et c avec c positif, l'expression conjuguée de $a + b\sqrt{c}$ est $a - b\sqrt{c}$.
- Pour tous nombres réels a , b , c et d avec b et d positifs, l'expression conjuguée de $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ est $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$.
- Pour écrire un quotient sans radical au dénominateur, on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Détermine l'expression conjuguée de chacun des nombres suivants : $3 - 2\sqrt{5}$; $2\sqrt{3} + 4\sqrt{7}$; $-11\sqrt{3} + 5\sqrt{13}$.

EXERCICE 2

1. Écris chacun des nombres suivants sans radical au dénominateur : $\frac{2}{\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$ et $\frac{-1}{\sqrt{7}}$.
2. Pour écrire $\frac{4}{3-\sqrt{5}}$ sans radical au dénominateur, voici l'entame de raisonnement de deux élèves.

$$A = \frac{4}{3-\sqrt{5}}$$

$$A = \frac{4(3+\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$$

Elève A

$$A = \frac{4}{3-\sqrt{5}}$$

$$A = \frac{4(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$$

Elève B

- a) Lequel des deux élèves a bien commencé ?
- b) Achève donc l'exercice.

3. Écris chacun des nombres sans radical au dénominateur : $B = \frac{8}{6+2\sqrt{5}}$ et $F = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

Retiens les outils essentiels

1 Racine carrée

Définition

On appelle racine carrée du nombre **positif** a , le nombre positif dont le carré vaut a .

On note : $\sqrt{a}$

On lit : racine carrée de a .

Le symbole " $\sqrt{\quad}$ " est appelé radical.

Exemple

$$\sqrt{0} = 0; \sqrt{16} = 4; \sqrt{36} = 6$$

Propriété

a et b sont des nombres réels positifs.

- $(\sqrt{a})^2 = a$
- $\sqrt{a} = b$ équivaut à $a = b^2$

Exemple

$$(\sqrt{13})^2 = 13, \sqrt{1,44} = 1,2 \text{ car } 1,2^2 = 1,44$$

2 Ensemble des nombres réels

1. Nombre irrationnel

Présentation

$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ ne sont pas des nombres rationnels : on dit qu'ils sont des nombres irrationnels.

Un nombre qui n'est pas rationnel est irrationnel.

Exemple

$$\sqrt{2} ; \sqrt{3} ; -\sqrt{6} \text{ et } \pi \text{ sont des nombres irrationnels}$$

2. Ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels est appelé ensemble des nombres réels, et noté $\mathbb{R}$.

3 Opérations et racines carrées

1. Produit et quotient

Propriété

a et b sont des nombres positifs.

- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; (b \neq 0)$

En général, a et b étant deux nombres positifs

- $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$
- $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$ avec $a > b$

Exemple

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ et}$$

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$$

$$\sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8 \text{ et}$$

$$\sqrt{100} - \sqrt{36} = 10 - 6 = 4$$

3. Racines carrées et puissances

Propriété

a est un nombre réel positif et n est un nombre entier.

- $\sqrt{a^{2n}} = a^n$
- $\sqrt{a^{2n+1}} = a^n \sqrt{a}$

Exemple

$$\text{- Exposant pair : } \sqrt{5^6} = \sqrt{5^{2 \times 3}} = 5^3$$

$$; \sqrt{2^{10}} = \sqrt{2^{2 \times 5}} = 2^5$$

$$\text{- Exposant impair :}$$

$$\sqrt{3^9} = \sqrt{3 \times 3^8} = 3^4 \sqrt{3} ;$$

$$\sqrt{2^{15}} = \sqrt{2 \times 2^{14}} = 2^7 \sqrt{2}$$

4. Ecrire plus simplement une racine carrée

Méthode

Pour écrire plus simplement la racine carrée d'un nombre entier naturel a , on peut procéder comme suit :

- On décompose a en produits de facteurs premiers ;
- Puis on applique les propriétés ci-dessus (opérations et racines carrées).

Exemple

Écrivons plus simplement $\sqrt{162}$ et $\sqrt{756}$.

$$\begin{array}{r|l} 162 & 2 \\ 81 & \end{array}$$

$$\sqrt{162} = \sqrt{2 \times 81} = 9\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r|l} 756 & 2 \\ 378 & 2 \\ 189 & 3 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$$

$$\sqrt{756} = \sqrt{2^2 \times 3^3 \times 7}$$

$$= 2 \times 3\sqrt{3} \times \sqrt{7}$$

$$= 6\sqrt{21}$$

4 Calculs avec des racines carrées

1. Expressions conjuguées

- ✓ L'expression conjuguée de $a + b\sqrt{c}$ est $a - b\sqrt{c}$ où a , b et c sont des nombres entiers avec c positif.
- ✓ L'expression conjuguée de $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$ est $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ où a , b , c et d sont des nombres entiers avec b et d positifs.

2. Écriture de quotients sans radical au dénominateur

Méthode

- ✓ Pour écrire un quotient de la forme $\frac{N}{a\sqrt{b}}$ sans radical au dénominateur, on peut multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{b}$.
- ✓ Pour écrire un quotient de la forme $\frac{N}{a+b\sqrt{c}}$ ou $\frac{N'}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}$ sans radical au dénominateur, on peut multiplier le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur.

Exemple

$$\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

$$\frac{2}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}} = \frac{2(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{(2\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{2(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{20-18}$$

$$= \frac{2(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{2}$$

$$= 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$$

5 Valeur absolue d'un nombre réel

Définition

- La valeur absolue d'un nombre réel est la distance à zéro de ce nombre.
- On note $|a|$ et on lit valeur absolue de a .

Exemple

$$|-2| = 2 ; |0| = 0 ; |-\pi| = \pi ; |\sqrt{5}| = \sqrt{5} .$$

Remarque

- La valeur absolue d'un nombre positif est égale au nombre lui-même
- La valeur absolue d'un nombre négatif est égale à l'opposé de ce nombre.

Propriété

Pour tout nombre réel a , $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exercices commentés

Exercice 1

Écris sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où a , b et c sont des nombres entiers naturels et c le plus petit possible.

$$A = 2\sqrt{45} + \sqrt{500} - 3\sqrt{80} \quad \text{et} \quad B = \sqrt{224} - 3\sqrt{56} + 2\sqrt{36}.$$

On ne décompose pas 36 car on sait que $\sqrt{36} = 6$

Solution

$$\text{On a : } A = 2\sqrt{5 \times 9} + \sqrt{5 \times 100} - 3\sqrt{5 \times 16}$$

$$A = 2 \times 3\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 3 \times 4\sqrt{5}$$

$$A = 6\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 12\sqrt{5}$$

$$A = (6 + 10 - 12)\sqrt{5}$$

$$A = 4\sqrt{5}$$

$$B = \sqrt{2^4 \times 2 \times 7} - 3\sqrt{4 \times 14} + 2 \times 6$$

$$B = 4\sqrt{14} - 3 \times 2\sqrt{14} + 12$$

$$B = 4\sqrt{14} - 6\sqrt{14} + 12$$

$$B = 12 - 2\sqrt{14}$$

Exercice 2

1. Justifie que $2 - \sqrt{2}$ et $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ sont inverses l'un de l'autre.

2. Écris les nombres suivants sans radical au dénominateur : $A = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ et $B = \frac{2 - \sqrt{7}}{5 + 2\sqrt{7}}$.

Solution

1. On rappelle que deux nombres sont inverses lorsque leur produit est égal à 1.

On a :

$$(2 - \sqrt{2}) \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 + \frac{2\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}^2}{2}$$

$$= 2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} - \frac{2}{2}$$

$$= 2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1$$

$$= 1$$

D'où $2 - \sqrt{2}$ et $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ sont inverses l'un de l'autre.

$$2. \text{ On a : } A = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$A = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$B = \frac{2 - \sqrt{7}}{5 + 2\sqrt{7}} = \frac{(2 - \sqrt{7})(5 - 2\sqrt{7})}{(5 + 2\sqrt{7})(5 - 2\sqrt{7})}$$

$$B = \frac{10 - 4\sqrt{7} - 5\sqrt{7} + 2 \times 7}{5^2 - (2\sqrt{7})^2}$$

$$B = \frac{10 - 4\sqrt{7} - 5\sqrt{7} + 14}{25 - 4 \times 7}$$

$$B = \frac{-24 + 9\sqrt{7}}{3}$$

Exercices commentés

Exercice 3

On considère les réels P et Q tels que : $P = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ et $Q = \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

1. Justifie que : $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{6}$.
2. Dédus-en que P et Q sont opposés. (On sait que $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ est positif).

Solution

1. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2$ (On a appliqué $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$)
 $= 5 - 2\sqrt{6}$

2. On a : $P = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$. Or $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{6}$, donc $P = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}$. On sait que $\sqrt{a^2} = |a|$, donc $P = |\sqrt{3} - \sqrt{2}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, car $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ est positif.

On a alors $P + Q = \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{3} = 0$, donc P et Q sont opposés.
(On rappelle que deux nombres sont opposés lorsque leur somme est égale à 0.)

Utilisation des outils essentiels

⇒ A-Utilise plusieurs outils de la leçon pour résoudre un exercice

Exercice 1

Recopie chaque égalité et complète par vrai ou par faux.

- $\sqrt{32} = 16$
- $\sqrt{2,25} = 1,5$
- $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2$
- $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$
- $\frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{5}$
- $\sqrt{25-16} = 3$
- $2\sqrt{13} = \sqrt{26}$
- $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

Exercice 2

Recopie et complète le tableau ci-dessous sans utiliser une calculatrice.

Nbres	$\sqrt{6,4 \times \sqrt{10}}$	$\sqrt{25} + \sqrt{9}$	$\sqrt{\frac{1}{5} \times \sqrt{20}}$	$\sqrt{2 \times \sqrt{13} \times \sqrt{26}}$	$\sqrt{100-64}$	$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$
Valeur exacte						

Exercice 3

Recopie et relie chaque nombre de la colonne de gauche à un nombre de la colonne de droite ou au mot impossible.

$(-\sqrt{3})^2 \bullet$	$\bullet 3$
$(\sqrt{-3})^2 \bullet$	
$\sqrt{3^2} \bullet$	$\bullet -3$
$-\sqrt{-3^2} \bullet$	
$\sqrt{(-3)^2} \bullet$	$\bullet impossible$
$\sqrt{-3^2} \bullet$	

Exercice 4

- Écris chacun des produits ci-dessous sous la forme d'un entier ou sous la forme $a\sqrt{b}$.
 $2\sqrt{6} \times 3\sqrt{6}$; $4\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$ et $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{2}$

- Écris chacun des nombres ci-dessous sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible.

$$A = 6\sqrt{12} + 2\sqrt{27} - \sqrt{300} ; B = \sqrt{80} - 3\sqrt{20} ;$$

$$C = 2\sqrt{84} + 3\sqrt{189} - \sqrt{21 \times 64}$$

Exercice 5

Relie chaque point de gauche à un seul point de droite pour avoir deux nombres égaux.

$\sqrt{7+6} \bullet$	$\bullet 5^3$
$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} \bullet$	$\bullet 4$
$\sqrt{25^9} \bullet$	$\bullet \sqrt{100-36}$
$\sqrt{100-\sqrt{36}} \bullet$	$\bullet 5^9$
	$\bullet \sqrt{13}$
	$\bullet \sqrt{7} + \sqrt{6}$

Exercice 6

- Développe et réduis :

$$a = (4 + 3\sqrt{2})^2 ; b = (4 - 2\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$$

$$c = (\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) ;$$

$$d = (2\sqrt{3} - 5)(2\sqrt{3} + 5) ;$$

$$e = \left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - 4\right)(2\sqrt{6} + 4) .$$

- Justifie que $5 - 2\sqrt{6}$ et $5 + 2\sqrt{6}$ sont inverses l'un de l'autre.

Exercice 7

Écris chacun des nombres ci-dessous sans radical au dénominateur. Simplifie si possible les résultats.

$$a = \frac{3+6\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} ; b = \frac{1}{5-2\sqrt{6}} ; c = \frac{\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}} ;$$

$$d = \frac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} ; e = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}} ; f = \frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{2}} .$$

Exercice 8

Factorise chacune des expressions ci-dessous.

- a) $x^2 - 7$; b) $(x-3)^2 - 5$; c) $4x^2 - 11$;
 d) $3x^2 - 25$; e) $2x^2 - 1$; f) $(x-1)^2 - 10$;
 g) $x^2 - 2x\sqrt{3} + 3$; h) $x^2 + 2\sqrt{7}x + 7$

Exercice 9

1. Recopie et associe chaque ensemble à sa notation.

Ensemble des nombres :	
rationnels	•
naturels	•
décimaux relatifs	•
réels	•
entiers relatifs	•

Notation
$\mathbb{N}$
$\mathbb{D}$
$\mathbb{R}$
$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$

2. Voici une liste de nombres réels :

1,2 ; $-\frac{5}{3}$; $\sqrt{7}$; $2\sqrt{36}$; π ; $\frac{2}{5}$; $\sqrt{5}$; 3,14 ;
 -3 ; 12.

- a) Quels sont ceux qui sont des nombres irrationnels ?
 b) Quels sont ceux qui sont des nombres entiers ?
 c) Quels sont ceux qui sont des nombres rationnels et qui ne sont pas des nombres décimaux.

Exercice 10

a est nombre réel quelconque. Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

- 1) $\sqrt{a^2} = a$; 2) $(\sqrt{a})^2 = a$; 3) $\sqrt{a^2} = |a|$;
 4) $\sqrt{(-a)^2} = -|a|$; 5) $\sqrt{(-a)^2} = |a|$.

Exercice 11

1. Parmi les égalités ci-dessous, recopie celles qui sont correctes.

- a) $|\sqrt{2} + \sqrt{5}| = \sqrt{2} + \sqrt{5}$; b) $|2 - \pi| = 2 - \pi$;
 c) $|\pi - 3| = \pi - 3$; d) $|- \pi| = \pi$;
 e) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = \sqrt{2} - 1$

2. On donne : $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

Écris plus simplement $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$. Justifies ta réponse.

Exercice 12

On donne : $a = 3 - \sqrt{\frac{3}{4}}$ et $b = \frac{3}{2\sqrt{3}}$.

Justifie que $a + b = 3$.

Exercice 13

Démontre que chacun des nombres ci-dessous sont des nombres entiers.

$$a = \sqrt{5 + \sqrt{16}} ; b = \sqrt{3 + \sqrt{5}} \times \sqrt{3 - \sqrt{5}} ;$$

$$c = (1 + 2\sqrt{2})^2 + (2 - \sqrt{2})^2.$$

Exercice 14

On donne $a = \frac{5}{\sqrt{3}}$ et $b = \frac{\sqrt{12}}{3}$.

Justifie que a et b sont inverses l'un de l'autre.

Exercice 15

On donne

$$A = 2\sqrt{16} + \frac{3\sqrt{14}}{\sqrt{2}} \text{ et } B = 8 + \sqrt{175} + 2\sqrt{7}.$$

1. Écris plus simplement A et B .
 2. Justifie que le produit $A \times B$ est un nombre entier.

Exercice 16

1. Sans calculatrice, calcule les nombres $a = \sqrt{5^7 \times 0,2^3}$ et $b = \sqrt{7^2 \times 5^5 \times 20^3}$.
 2. a , b et c sont des réels positifs. Écris plus simplement $\sqrt{a^{12}b^7c^2}$; $\sqrt{a^3b^4c^5}$.

Exercice 17

On considère le nombre $E = \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$

1. Justifie que : $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) = 2\sqrt{6}$
 2. Dédus-en que : $E = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.
 3. Écris alors E sans radical au dénominateur.

Exercice 18

On donne les nombres : $A = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} - \frac{6 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ et

$$B = \sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{(1 + 6)^2}}}}.$$

Justifie que A et B sont des nombres rationnels.

⇨ B- Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un exercice

Exercice 19

- a) Justifie que : $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2+\sqrt{3}$.
 b) Déduis-en $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.
- Justifie que : $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6}$.

Exercice 20

On donne : $a=3-2\sqrt{2}$ et $b=3-2\sqrt{2}$.
 Justifie que : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=34$.

Exercice 21

On donne $A=\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{(1+\sqrt{2})^2}$.

- Justifie que $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$.
- Écris A sous la forme $a+b\sqrt{2}$ où a et b sont des nombres entiers naturels.

Exercice 22

On donne $x=\sqrt{2}$ et $y=\sqrt{3}$.
 On pose $a=\frac{x+y}{2}$, $b=\sqrt{xy}$ et $h=\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$.

- Écris h sans radical au dénominateur.
- Justifie que $b^2=ah$.

Exercice 23

- n étant un nombre entier naturel, justifie que $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.
- a) Calcule : $A=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}$.
 b) Calcule alors $B=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2023}}$

Exercice 24

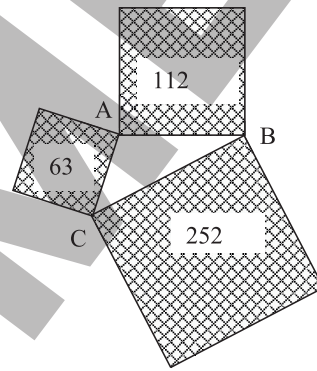
On donne le nombre réel positif

$$A=\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}.$$

- Justifie que $\sqrt{7+2\sqrt{6}}\times\sqrt{7-2\sqrt{6}}=5$.
- Démontre que $A=2$.

Exercice 25

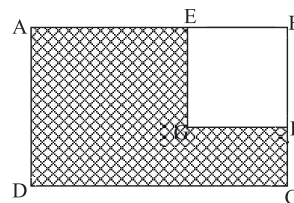
Sur la figure ci-dessous, le triangle ABC est entouré de 3 carrés d'aires respectives 112 m^2 ; 63 m^2 et 252 m^2 .



Calcule le périmètre du triangle ABC . (On écrira le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers naturels b étant le plus petit possible)

Exercice 26

Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un rectangle et $EBFG$ est un carré.



On donne $EB=2+\sqrt{5}$, $AE=\sqrt{45}$ et $AD=4$.

- Calcule l'aire du carré $EBFG$.
- a) Justifie que $AB=2+\sqrt{5}$.
 b) Calcule l'aire du rectangle $ABCD$.
- Calcule l'aire du polygone $AEGFCD$.

Exercice 27

On pose $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (φ est appelé nombre d'or)

1. Démontre que : $\varphi(\varphi - 1) = 1$ et déduis-en l'inverse de
2. Développe $\varphi(\varphi - 1)$ et déduis-en que $\varphi^2 - \varphi = 1$.
3. Deduis de la question 2 la valeur de φ^2 .
4. Calcule $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6$.

Exercice 28

1. Développe et réduis : $(2 + \sqrt{3})^2$.
2. Factorise : $(x-1)^2 - (7 + 4\sqrt{3})$.

Exercice 29

Trois points A, B et C sont tels que $AB = \sqrt{52}$; $AC = \sqrt{468}$ et $BC = \sqrt{208}$.

Justifie que les points A, B et C sont alignés

Exercice 30

Dans une association de femmes, chaque jour, chaque membre apporte un morceau de savon. On réunit tous les morceaux de savons et on donne à l'une des membres choisis au hasard. Chaque membre passe une seule fois. A la fin du passage de tous les membres, l'association a distribué en tout 900 savons.

Combien l'association a-t-elle de membres ?

Exercice 31

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, ABC est un triangle,

A, M et B sont alignés,

A, N et C sont alignés.

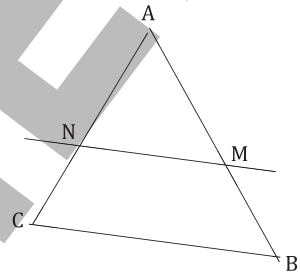
$(MN) \parallel (BC)$

On donne $AB = 3$

$MB = \sqrt{5}$

$AC = 4$.

Calcule AN. Tu écriras le résultat sous la forme $a + b\sqrt{5}$ où a et b sont des nombres réels.



⇒ C. Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un problème

Exercice 32

Le L'unité est le mètre.

Monsieur N'zi dispose d'un terrain urbain rectangulaire ABCD. Il construit sur l'espace ECFG en forme de carré un complexe hôtelier.

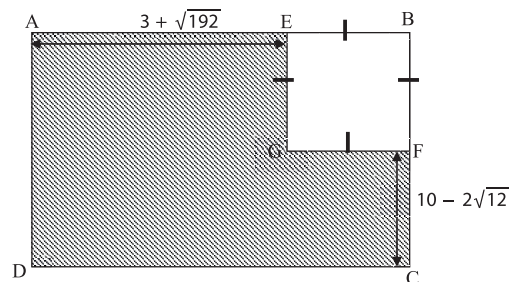
En vue de l'arrivée prochaine des touristes, Monsieur N'zi veut semer du gazon sur tout le reste du terrain (la partie hachurée de la figure). Pour cela, il dispose de 35 000 F.

Un manœuvre lui propose de piquer le mètre carré de gazon à 100 F.

Monsieur N'zi veut savoir si la somme dont il dispose est suffisante pour couvrir tout le reste du terrain du gazon.

On donne : $AE = 3 + \sqrt{192}$, $CF = 10 - 2\sqrt{12}$ et l'aire du carré ECFG est de 300 m^2 .

1. Justifie que $EB = 10\sqrt{3}$.
2. Démontre que : $AB = 3 + 18\sqrt{3}$ et $CB = 10 + 6\sqrt{3}$.
3. Justifie que la superficie totale du terrain ABCD est : $A = (354 + 198\sqrt{3}) \text{ m}^2$.
4. Explique pourquoi Monsieur N'zi ne pourra pas gazonner totalement tout le reste du terrain. (On prendra $\sqrt{3} = 1,7$).

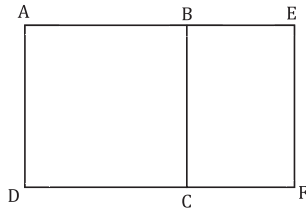


Exercice 33

M. DIBY possède un jardin potager de forme rectangulaire qu'il divise en deux parcelles dont :

- l'une est de forme carrée et a pour aire 960 m^2 , réservée à la culture de tomate représentée par le carré ABCD
- l'autre rectangulaire de périmètre $(40 + 16\sqrt{15}) \text{ m}$, réservée à la culture de salade représentée par le rectangle BEFC.

Afin d'éviter toute infiltration étrangère, M. DIBY décide de clôturer avec du grillage et le mètre d'un grillage est vendu à 5000 F CFA.



Ne connaissant pas exactement les dimensions de son jardin, il sollicite sa fille en classe de troisième de lui faire un devis. Cette dernière te demande de l'aider à trouver le coût de la clôture.

1. Justifie que $AB = 8\sqrt{15}$.
2. Justifie que la longueur de la clôture est $40 + 32\sqrt{15} \text{ m}$.
3. Réponds à la préoccupation de M. DIBY. (on prendra $\sqrt{15} \approx 3,87$)

Leçon

4

TRIANGLE RECTANGLE



Situation d'apprentissage

Pour les travaux de construction sur le chantier d'un lycée, un ouvrier doit placer une échelle à coulisse contre un mur.

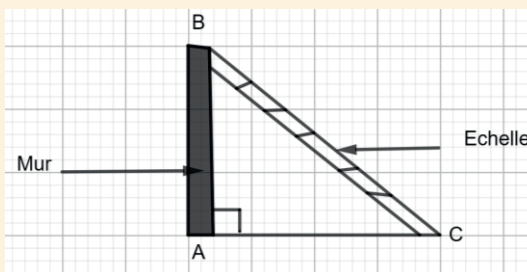
En respectant les consignes de sécurité, le pied de l'échelle doit former un angle dont la mesure doit être comprise entre 69° et 70° .

L'ouvrier dispose d'une échelle de 6,20 m pour atteindre une hauteur de 6 m sur un mur.

Très prudent, celui-ci se demande si sa sécurité est assurée.

Pour cela, il se confie à un groupe d'élèves de 3^{ème}.

Intéressés, ceux-ci décident d'approfondir leurs connaissances sur le triangle rectangle.



Découvre de nouveaux outils

1 Propriété de Pythagore

À la fin de la séquence, tu dois être capable :

- ✓ de connaître : la propriété de Pythagore ; la réciproque de la propriété de Pythagore ;
- ✓ d'utiliser : la propriété de Pythagore pour calculer différentes longueurs dans un triangle rectangle ;
- ✓ d'identifier la propriété réciproque de la propriété de Pythagore pour démontrer qu'un triangle est rectangle.

Activité 1

L'unité de longueur est le centimètre.

1. L'unité de longueur est le centimètre.
 - a) Construis un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 6$; $AC = 4,5$ et $BC = 7,5$
 - b) Nomme l'hypoténuse de ce triangle puis compare les nombres BC^2 et $AB^2 + AC^2$
2.
 - a) Construis un triangle EFG qui n'est pas rectangle tel que : $EF = 5$; $EG = 6$ et $FG = 8$.
 - b) Compare les nombres FG^2 et $EF^2 + EG^2$

Fais le point

- Le triangle ABC est rectangle et on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
- Le triangle EFG n'est pas rectangle et on a : $FG^2 \neq EF^2 + EG^2$
- On admet la propriété suivante : « si un triangle est rectangle alors le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des deux autres côtés ».
La propriété ci-dessus s'appelle la propriété de Pythagore.
- Dans le cas du triangle ABC rectangle en A, l'énoncé de la propriété de Pythagore est la suivante : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

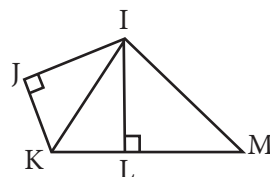
Remarque

La propriété de Pythagore permet de calculer la mesure d'un côté d'un triangle rectangle connaissant les mesures de deux côtés.

⇒ Utilise le nouvel outil

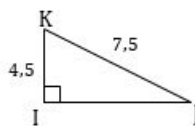
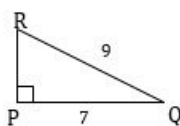
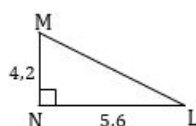
EXERCICE 1

On donne ci-contre la figure codée suivante.
Énonce la propriété de Pythagore dans chacun des trois triangles rectangles suivants : IJK, KLI et LMI.



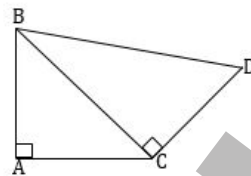
EXERCICE 2

Dans chaque cas, calcule la longueur manquante.



EXERCICE 3

On donne la figure codée ci-contre avec : $BC = \sqrt{17}$;
 $AC = 4$ et $DC = 8$.
 Calcule les longueurs AB et BD



Activité 2

L'unité de longueur est le centimètre.

1. a) Construis un triangle ABC tel que $AB = 6$; $AC = 8$ et $BC = 10$.
 b) Vérifie que $BC^2 = AB^2 + AC^2$
2. a) Construis un triangle IJK tel que $IJ = 4$; $IK = 7$ et $JK = 10$.
 b) Vérifie que $JK^2 \neq IJ^2 + IK^2$
3. Parmi les triangles ABC et IJK , lequel semble être rectangle ? (utilise tes instruments de géométrie).

Fais le point

- Le triangle ABC vérifie la relation : $BC^2 = AB^2 + AC^2$; il est rectangle.
 - Le triangle IJK vérifie la relation : $JK^2 \neq IJ^2 + IK^2$; il n'est pas rectangle.
 - On admet la propriété suivante : « si dans un triangle le carré de la mesure d'un côté est égal à la somme des carrés des mesures des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle ».
- La propriété ci-dessus s'appelle la propriété réciproque de la propriété de Pythagore.
- Dans le cas d'un triangle ABC , l'énoncé de la propriété réciproque de la propriété de Pythagore est la suivante : soit ABC un triangle. Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ABC est rectangle en A .

Remarque

La propriété réciproque de la propriété de Pythagore permet de reconnaître si un triangle est rectangle ou pas.

⇒ **Utilise le nouvel outil**

EXERCICE 1

Soit le triangle OMS tel que $MS = 8,9$; $OM = 3,9$ et $OS = 8$.
 Démontre que le triangle OMS est rectangle en O .

EXERCICE 2

L'unité est le millimètre.
 Soit PQR un triangle tel que $PQ = 65$; $QR = 25$ et $RP = 60$.
 Démontre que le triangle PQR est rectangle.

EXERCICE 3

EFG est un triangle tel que $FG = 5,8$; $EF = 4,1$ et $EG = 4,3$.
 Justifie que le triangle EFG n'est pas rectangle.

2 Construction d'un segment de longueur $\sqrt{a}$, $a > 0$

À la fin de la séquence, tu dois être capable de construire un segment de longueur $\sqrt{a}$.

Activité

L'unité de longueur est le centimètre.

1. Sachant que $5^2 + 3^2 = (\sqrt{34})^2$, on veut construire un segment [BC] de longueur $\sqrt{34}$.

Pour cela :

- ⇒ trace deux droites (D_1) et (D_2) perpendiculaires en A ;
- ⇒ place un point B sur la droite (D_1) tel que $AB = 5$;
- ⇒ place un point C sur la droite (D_2) tel que $AC = 3$;
- ⇒ Trace alors le segment [BC].

Justifie que ce segment a pour mesure $\sqrt{34}$.

2. Sachant que $6^2 - 5^2 = (\sqrt{11})^2$, on veut construire un segment [AB] de longueur $\sqrt{11}$.

Pour cela :

- ⇒ trace un segment [BC] de longueur 6 ;
- ⇒ trace un demi-cercle (C) de diamètre [BC] ;
- ⇒ place un point A sur (C) tel que $AC = 5$.
- ⇒ Trace alors le segment [AB].

Justifie que ce segment a pour mesure $\sqrt{11}$.

Fais le point

Pour construire un segment de longueur $\sqrt{a}$, $a > 0$, on peut utiliser l'un des programmes ci-dessus.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Sachant que $5^2 + 7^2 = (\sqrt{69})^2$, construis un segment [PQ] de longueur $\sqrt{69}$ cm.

EXERCICE

2

Sachant que $7^2 - 6^2 = (\sqrt{13})^2$, construis un segment [MN] de longueur $\sqrt{69}$ cm.

3 Propriété métrique déduite de l'aire d'un triangle

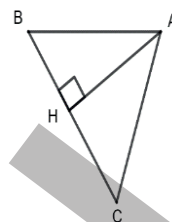
À la fin de la séquence, tu dois être capable de :

- ✓ connaître la propriété métrique déduite de l'aire ;
- ✓ utiliser la propriété métrique déduite de l'aire pour calculer des différentes longueurs dans un triangle rectangle.

Activité

Soit ABC un triangle rectangle en A et [AH] la hauteur relative au côté [BC].

1. Exprime l'aire A du triangle ABC en fonction de AH et de BC
2. Exprime l'aire A d'une autre façon
3. Dédus-en que $AH \times BC = AB \times AC$



Fais le point

Si ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A, alors
 $AH \times BC = AB \times AC$.

Remarque

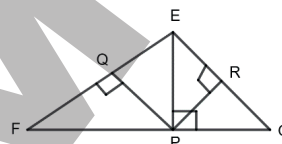
Cette propriété permet de calculer la hauteur d'un triangle rectangle relative à l'hypoténuse

Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

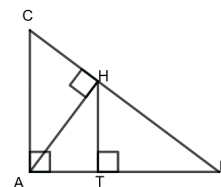
On considère la figure ci-contre.
 Ecris les égalités de la propriété métrique déduite de l'aire



EXERCICE

2

On considère la figure ci-contre.
 $AB = 8$; $AC = 6$; $BC = 10$; $HT = 3,84$.
 Calcule AH et BH en utilisant la propriété métrique déduite de l'aire.



4 Cosinus et sinus d'un angle aigu

À la fin de la séquence, tu dois être capable :

- ✓ d'identifier : le cosinus d'un angle aigu ; le sinus d'un angle aigu ;
- ✓ de connaître : la propriété relative à la somme des carrés du cosinus et du sinus ; la propriété relative au cosinus et au sinus de deux angles complémentaires ;
- ✓ de calculer le cosinus ou le sinus d'un angle aigu ;
- ✓ d'utiliser le cosinus ou le sinus d'un angle aigu pour calculer différentes longueurs dans un triangle rectangle.

Activité

1

Soit IJK un triangle rectangle en J tel que $JK = 14$; $JI = 10,5$ et $IK = 17,5$ (fais une figure à main levée au brouillon).

1. Considérons l'angle aigu $\widehat{JKI}$. Le côté [KJ] est appelé le côté adjacent à cet angle.

Calcule le nombre réel c défini par : $c = \frac{\text{mesure du côté adjacent}}{\text{mesure de l'hypoténuse}}$ (donne les résultats sous forme décimale)

2. Calcule le nombre réel c défini ci-dessus pour l'angle aigu $\widehat{KIJ}$.

Fais le point

Le nombre réel c défini ci-dessus, est appelé le cosinus d'un angle aigu.

On note $\cos \widehat{JKI}$ le cosinus de l'angle aigu $\widehat{JKI}$ ou $\cos(\widehat{K})$ s'il n'y a pas de confusion.

Remarque

Si a est la mesure d'un angle aigu quelconque $\widehat{JKI}$ alors on a : $\cos(\widehat{JKI}) = \cos(a)$

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Soit MNP un triangle rectangle en M tel que $MP = 4\sqrt{2}$; $MN = 7$ et $PN = 9$.

1. Calcule $\cos(\widehat{MNP})$

2. Calcule $\cos(\widehat{MPN})$

(Donne la troncature d'ordre deux de chaque résultat)

EXERCICE

2

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $AB = 10$ et $\cos \hat{A} = 0,89$.
Détermine la mesure du côté [AC].

EXERCICE

3

ABC est un triangle rectangle en B, tel que $AB = 10$ et $AC = 26$.

Calcule le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$.

EXERCICE

4

EFG est un triangle rectangle en E, tel que $EF = 9$ et $\cos \widehat{EFG} = \frac{3}{8}$.
Calcule la longueur FG.

Activité

2

Soit IJK un triangle rectangle en J tel que $JK = 14$; $JI = 10,5$ et $IK = 17,5$ (fais une figure à main levée au brouillon).

1. Considérons l'angle aigu $\widehat{JKI}$.

Le côté [IJ] est appelé le côté opposé à cet angle.

Calcule le nombre réel s définis par : $s = \frac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure de l'hypoténuse}}$ (donne les résultats sous forme décimale)

2. Calcule le nombre réel s définis ci-dessus pour l'angle aigu $\widehat{KIJ}$.

Fais le point

Le nombre réel s défini ci-dessus, est appelé le sinus d'un angle aigu.

On note $\sin \widehat{JKI}$ le sinus de l'angle aigu $\widehat{JKI}$ ou $\sin(\widehat{K})$ s'il n'y a pas de confusion.

Remarque

Si a est la mesure d'un angle aigu quelconque $\widehat{JKI}$ alors on a : $\sin(\widehat{JKI}) = \sin(a)$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Soit MNP un triangle rectangle en M tel que $MP = 4\sqrt{2}$; $MN = 7$ et $PN = 9$.

1) Calcule $\sin(\widehat{MNP})$.

2) Calcule $\sin(\widehat{MPN})$.

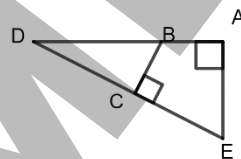
(Donne la troncature d'ordre deux de chaque résultat)

EXERCICE 2

On considère la figure ci-contre.

Recopie et complète les égalités suivantes :

a) $\sin \widehat{ADE} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$; b) $\sin \dots = \frac{AD}{DE}$; c) $\sin \dots = \frac{DC}{BD}$



EXERCICE 3

ABC est un triangle rectangle en C, tel que $AC = 7,2$ et $AB = 12,8$.

Calcule le sinus de l'angle $\widehat{ABC}$.

EXERCICE 4

DEF est un triangle rectangle en F, tel que $\sin \widehat{DEF} = \frac{1}{2}$ et $DF = 3$.

Calcule la longueur DE.

Activité 3

Soit ABC un triangle rectangle en A.

1. Énonce la propriété de Pythagore.

2. En utilisant la définition du cosinus et du sinus d'un angle aigu, démontre que

$$(\cos \widehat{ABC})^2 + (\sin \widehat{ABC})^2 = 1$$

3. Dédus-en que : $0 < \cos \widehat{ABC} < 1$ et $0 < \sin \widehat{ABC} < 1$.

Fais le point

Pour tout angle aigu de mesure a , on a :

- $0 < \cos a < 1$;
- $0 < \sin a < 1$;
- $(\cos a)^2 + (\sin a)^2 = 1$ ou $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Soit x la mesure d'un angle aigu. Parmi les égalités suivantes, indique celles qui permettent de déterminer x .

a) $\cos x = \frac{7}{10}$; b) $\sin x = \frac{208}{200}$; c) $\cos x = 0,3$ et $\sin x = 0,7$; d) $\cos x = \frac{12}{13}$ et $\sin x = \frac{5}{13}$.

EXERCICE 2

Soit x la mesure d'un angle aigu tel que $\cos x = \frac{4}{5}$.
Calcule la valeur exacte de $\sin x$.

Activité 4

Soit ABC un triangle rectangle en A.

1. Justifie que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont complémentaires
2. En utilisant la définition du cosinus et du sinus d'un angle aigu, démontre que
 - a) $\cos \widehat{ABC} = \sin \widehat{ACB}$
 - b) $\sin \widehat{ABC} = \cos \widehat{ACB}$

Fais le point

- Lorsque deux angles sont complémentaires le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.
- $\cos(90^\circ - a) = \sin a$ et $\sin(90^\circ - a) = \cos a$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

EFG est un triangle rectangle en E tel que $\cos \widehat{EFG} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Détermine $\sin \widehat{EGF}$.

EXERCICE 2

Recopie et complète les égalités suivantes :
a) $\cos 25^\circ = \sin \dots$; b) $\sin 33^\circ = \cos \dots$; c) $\cos a = \sin \dots$

5 Tangente d'un angle aigu

À la fin de la séquence, tu dois être capable :

- ✓ d'identifier la tangente d'un angle aigu ;
- ✓ de calculer la tangente d'un angle aigu ;
- ✓ d'utiliser la tangente d'un angle aigu pour calculer différentes longueurs dans un triangle rectangle.

Activité 1

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 4,5$; $AC = 6$ et $IK = 7,5$ (fais une figure à main levée au brouillon).

- 1) Considérons l'angle aigu $\widehat{BCA}$. Le côté [AC] est appelé le côté adjacent à cet angle et le côté [AB] est appelé le côté opposé à cet angle.

Calcule le nombre réel T défini par : $T = \frac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure du côté adjacent}}$ (donne les résultats sous forme décimale).

- 2) Calcule le nombre réel T défini ci-dessus pour l'angle aigu $\widehat{CBA}$.

Fais le point

Le nombre réel T défini ci-dessus, est appelé la tangente d'un angle aigu.

On note $\tan \widehat{JKI}$ la tangente d'un angle aigu $\widehat{JKI}$ ou $\tan(\widehat{K})$ s'il n'y a pas de confusion.

Remarque

Si a est la mesure d'un angle aigu quelconque $\widehat{JKI}$, alors on a : $\tan(\widehat{JKI}) = \tan(a)$

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

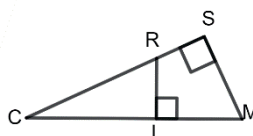
RST est un triangle rectangle en S tel que : $RS = 3$ et $ST = 4,5$.

Calcule $\tan \widehat{SRT}$.

EXERCICE 2

On considère la figure ci-contre.

Exprime $\tan \widehat{MCS}$ de deux façons différentes.



EXERCICE 3

KLM est un triangle rectangle en L tel que : $\tan \widehat{LMK} = \frac{2}{5}$ et $KL = 2,5$.

Calcule la longueur LM.

Activité 2

Soit ABC un triangle rectangle en B.

1. Exprime $\sin \widehat{BAC}$; $\cos \widehat{BAC}$ et $\tan \widehat{BAC}$ en fonction des longueurs du triangle ABC.
2. Dédus-en les égalités suivantes :

$$\text{a) } \frac{\sin \widehat{BAC}}{\cos \widehat{BAC}} = \frac{BC}{AB} ; \text{ b) } \tan \widehat{BAC} = \frac{\sin \widehat{BAC}}{\cos \widehat{BAC}}.$$

Fais le point

Pour tout angle aiguë de mesure a , on a : $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Réponds par vrai ou par faux.

a) $\tan 20^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 3^\circ}$; b) $\tan 55^\circ = \frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ}$; c) $\tan 70^\circ = \frac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ}$.

EXERCICE 2

Soit x la mesure d'un angle aigu telle que : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = \frac{1}{2}$.
Calcule la valeur exacte de $\tan x$.

6 Utilisation de la calculatrice ou de la table trigonométrique

À la fin de la séquence, tu dois être capable :

- ✓ d'encadrer : la mesure d'un angle aigu connaissant son cosinus ou son sinus ; la tangente d'un angle aigu ;
- ✓ d'utiliser : une table trigonométrique ou une calculatrice pour donner la valeur exacte, une valeur approchée ou un encadrement de la mesure d'un angle aigu connaissant son cosinus ou son sinus ; une table trigonométrique ou une calculatrice pour donner la valeur exacte, une valeur approchée ou un encadrement de la mesure d'un angle aigu connaissant sa tangente ;
- ✓ de traiter une situation faisant appel au triangle rectangle.

Activité

1. Recopie et complète le tableau ci-dessous, en donnant la valeur exacte ou une valeur arrondie à l'ordre 3 en utilisant une calculatrice.

a°	10	30	50	70
$\cos a^\circ$				
$\sin a^\circ$				
$\tan a^\circ$				

2. Compare ces valeurs obtenues dans le tableau avec celles de la table trigonométrique ci-dessous.

degrés	sin	cos	tan		
9	0,156	0,988	0,158	6,314	81
10	0,174	0,985	0,176	5,671	80
...	...	...	...		...
...	...	...			...
30	0,500	0,866	0,577	1,732	60
...	...	...	...	...	...
39	0,629	0,777	0,810	1,235	51
40	0,643	0,766	0,839	1,192	50
...	...	...	...	...	...
	cos	sin		tan	degrés

3. Utilise l'extrait de la table trigonométrique ci-dessus pour déterminer la mesure de l'angle A dans chacun des cas.
a) $\cos A = 0,5$; b) $\sin A = 0,5$; c) $\tan A = 1,235$.
4. Détermine un encadrement de la mesure de l'angle B par deux nombres entiers naturels consécutifs, dans chacun des cas suivants :
a) $\cos B = 0,640$; b) $\sin B = 0,160$; c) $\tan B = \frac{70}{57}$.
5. Détermine une valeur approchée de la mesure de l'angle X tel que $\sin X = 0,560$

Fais le point

- On peut se servir de la calculatrice ou de la table trigonométrique pour déterminer le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu connaissant la mesure de cet angle ;
- On peut se servir de la calculatrice ou de la table trigonométrique pour déterminer la valeur approchée ou un encadrement de la mesure de l'angle connaissant son cosinus, son sinus ou sa tangente.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

ABC est un triangle rectangle en A tel que $\sin \widehat{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Détermine à l'aide d'une calculatrice la mesure exacte de l'angle $\widehat{ABC}$.

Retiens les outils essentiels

1 Propriété de Pythagore

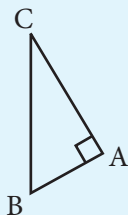
1. Propriété de Pythagore

Propriété

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Exemple

Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.



2. Réciproque de la propriété de Pythagore

Propriété

Si dans un triangle le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Exemple

ABC est un triangle.
Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A.

2 Construction d'un segment de longueur $\sqrt{a}$, $a > 0$

On peut construire un triangle rectangle dont un des côtés a pour longueur $\sqrt{a}$.
Pour cela, il faut se référer aux programmes de construction de l'activité 3.

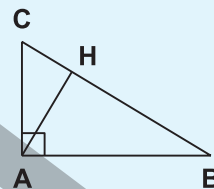
3 Propriété métrique déduite de l'aire

Propriété

Dans un triangle rectangle, le produit des longueurs des côtés de l'angle droit est égal au produit de la longueur de l'hypoténuse par la longueur de la hauteur issue du sommet de l'angle droit.

Exemple

Si ABC est un triangle rectangle en A de hauteur [AH], alors $AH \times BC = AB \times AC$.



4 Cosinus et sinus d'un angle aigu

Définition

- Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse
- Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.

Exemple

Dans le triangle ABC rectangle en B, $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$

Dans le triangle ABC rectangle en B, $\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC}$

Propriété Cosinus et sinus d'un angle aigu

Pour tout angle aigu de mesure a , on a :

- $0 < \cos a < 1$ et $0 < \sin a < 1$;
- $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.

Propriété Cosinus et sinus de deux angles complémentaires

Lorsque deux angles sont complémentaires le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

Exemple

- ABC est un triangle rectangle en B, on a :
 $\cos \widehat{BAC} = \sin \widehat{ACB}$ et $\cos \widehat{ACB} = \sin \widehat{BAC}$
- $\cos(90^\circ - a) = \sin a$ et $\sin(90^\circ - a) = \cos a$.

5 Tangente d'un angle aigu

Définition

Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de son côté adjacent.

Exemple

Dans le triangle rectangle ABC rectangle en B,

$$\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}.$$

Propriété Tangente d'un angle aigu

Pour tout angle aigu de mesure a , on a :

- $\tan a > 0$;
- $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}.$

6 Utilisation d'une table trigonométrique ou de la calculatrice

- On peut se servir de la calculatrice ou de la table trigonométrique pour déterminer le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu connaissant la mesure de cet angle ;
- On peut se servir de la calculatrice ou de la table trigonométrique pour déterminer la valeur approchée ou un encadrement de la mesure de l'angle connaissant son cosinus, son sinus ou sa tangente.

Exercices commentés

Exercice 1

Soit MNP un triangle tel que $MP = 3\sqrt{3}$; $NP = 3$ et $MN = 6$.

1. Démontre que le triangle MNP est rectangle.
2. Dédus-en le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle MNP
3. Détermine les mesures des angles aigus du triangle MNP.

Solution

1. Démontrons que le triangle MNP est rectangle.

On connaît les longueurs des côtés du triangle MNP, donc on applique la réciproque de la propriété de Pythagore.

$$\text{On a : } MP^2 + NP^2 = (3\sqrt{3})^2 + 3^2 = 27 + 9 = 36 \text{ et } MN^2 = 6^2 = 36$$

$$\text{Donc : } MP^2 + NP^2 = MN^2$$

D'où d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle MNP est rectangle en P.

2. Dédusons le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle MNP.

Le triangle MNP est rectangle en P, donc il est inscrit dans le cercle de diamètre [MN].

D'où ce cercle a pour centre le milieu du segment [MN] et pour rayon $\frac{1}{2}MN = \frac{6}{2} = 3$.

3. Déterminons les mesures des angles aigus du triangle MNP.

Connaissant les longueurs des côtés du triangle rectangle MNP, on calcule l'un des rapports trigonométriques cosinus, sinus ou tangente d'un angle aigu et on déduit la mesure de l'angle aigu.

- Déterminons la mesure de l'angle aigu $\widehat{\cos NMP}$.

$$\text{Dans le triangle rectangle } \widehat{\cos NMP} \text{ rectangle en P, on a : } \widehat{\cos NMP} = \frac{MP}{MN} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Or : } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ donc : } \text{mes } \widehat{\cos NMP} = 30^\circ.$$

- Déterminons la mesure de l'angle aigu $\widehat{\cos NMP}$.

On sait qu'un triangle rectangle admet deux angles complémentaires.

$$\text{Comme } \text{mes } \widehat{\cos NMP} = 30^\circ, \text{ donc } \text{mes } \widehat{\cos NMP} = 90^\circ - \text{mes } \widehat{\cos NMP} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

Exercices commentés

Exercice 2

L'unité de longueur est le centimètre.

Soit un triangle ABC rectangle en B tel que $AB = 5$ et $BC = 12$.

Soit H le pied de la hauteur relative au côté [AC].

1. Détermine une valeur approchée de la mesure de l'angle BCA.
2. Démontre que $AC = 13$
3. Dédus-en la valeur exacte de la longueur BH.

Solution

1. Déterminons une valeur approchée de la mesure de l'angle BCA.

Connaissant le côté opposé et le côté adjacent de l'angle BCA, pour déterminer une valeur approchée de la mesure de l'angle BCA, on calcule la tangente de cet angle et on encadre la mesure de cet angle pour déduire cette mesure.

Dans le triangle rectangle ABC, $\tan \widehat{BCA} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{12}$.

Or : $0,404 < \frac{5}{12} < 0,424$; donc : $\tan 22^\circ < \tan \widehat{BCA} < \tan 23^\circ$; d'où : $22^\circ < \text{mes } \widehat{BCA} < 23^\circ$.

Ainsi une valeur approchée de la mesure de l'angle BCA est 22° ou 23° .

2. Démontrons que $AC=13$

Connaissant les longueurs de deux côtés du triangle rectangle ABC, pour déterminer la longueur manquante, on applique la propriété de Pythagore.

Le triangle est rectangle en B. D'après la propriété de Pythagore, on a :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

$$AC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 ; \text{ donc : } AC = \sqrt{169} = 13.$$

2. Dédusons la valeur exacte de la longueur BH.

Connaissant les longueurs des côtés du triangle rectangle ABC, pour déterminer la longueur de la hauteur [BH], on applique la métrique déduite de l'aire.

Le triangle ABC est rectangle en B de hauteur [BH]. D'après la propriété métrique déduite de l'aire, on a : $BH \times AC = AB \times BC$.

$$\text{Donc : } BH = \frac{AB \times BC}{AC} = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13}.$$

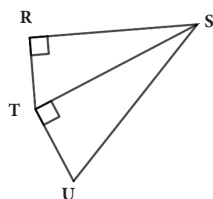
Utilisation des outils essentiels

⇒ A-Utilise plusieurs outils de la leçon pour résoudre un exercice

Exercice 1

Sur la figure ci-contre :

- RST et STU sont des triangles rectangles ;
- $RS = 7$; $RT = 4$; $US = 9$

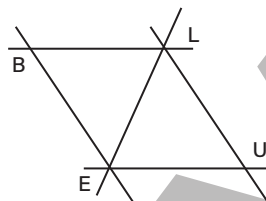


1. Démontre que $ST = \sqrt{65}$
2. Calcule la longueur TU

Exercice 2

On considère la figure ci-contre :

- $BL = 25$; $BE = 15$;
 $EL = 20$;
- $UE = 29$; $UL = 21$.

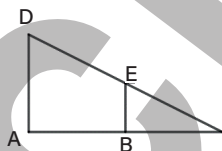


1. Démontre que les triangles BEL et LUE sont rectangles
2. Dédus-en que les droites (BE) et (LU) sont parallèles

Exercice 3

Sur la figure ci-contre :

- $(DA) \parallel (EB)$;
- $BC = 3,6$; $BE = 2,7$; $EC = 4,5$.



Démontre que les droites (DA) et (AC) sont parallèles.

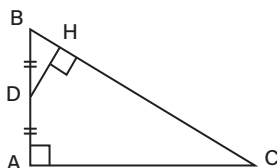
Exercice 4

On considère la figure ci-dessous :

- D est le milieu du segment du segment [AB] ;
- BDH et ABC sont des triangles rectangles.

1. a) Exprime :

- AC^2 en fonction de DA et DC
- DC^2 en fonction de DH et HC
- BD^2 en fonction de DH et HB



b) Utilise les trois égalités précédentes pour démontrer que $AC^2 = HC^2 - HB^2$.

2. Sachant que $AC = 8$ cm et $HC = 8,2$ cm, calcule BH.

Exercice 5

1. a) Trace un cercle (C) de centre O de rayon 5 cm et un diamètre [BC] de ce cercle.
b) Place sur (C) un point A tel que $AB = 6$ cm. La perpendiculaire à (BC) passant par A coupe [BC] en H.
2. a) Justifie que le triangle ABC est rectangle
b) Calcule $\cos \widehat{ABC}$
c) Exprime $\cos \widehat{ABC}$ à l'aide des longueurs du triangle ABH.
d) Dédus la valeur exacte de HB, puis celle de HC.

Exercice 6

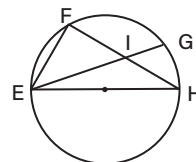
Soit ABC un triangle rectangle en C.

1. Justifie que : $\cos \widehat{BAC} = \sin \widehat{ABC}$
2. Démontre que :
a) $\sin^2(\widehat{BAC}) + \sin^2(\widehat{ABC}) = 1$
b) $\frac{\cos \widehat{BAC}}{\cos \widehat{ABC}} = \tan \widehat{ABC}$.

Exercice 7

Soit (C) un cercle de diamètre [EH] ;

Soient F et G deux points de ce cercle et I le point d'intersection des segments [FH] et [GE].



Justifie que les triangles IFE et IGH sont rectangles.

Exercice 8

Soit ABC un triangle rectangle en A.

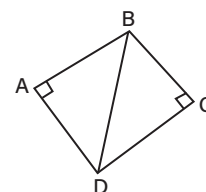
On donne $BC = 4$ et $\sin \widehat{ACB} = \frac{1}{4}$.

Calcule AB ; AC ; $\cos \widehat{ACB}$ et $\sin \widehat{ABC}$.

Exercice 9

Sur la figure ci-contre :

- Les triangles ABD et DBC sont rectangles ;
- $AB = 5$; $BD = 6,2$;
 $DC = 3,4$.



Détermine un encadrement de la mesure de chacun des angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{DBC}$ par deux nombres entiers

naturels consécutifs.

Exercice 10

1. Construis un triangle équilatéral ABC. On note a la longueur AB en centimètres. Place le point H, milieu du segment [BC].
2. a) Justifie que : $(AH) \perp (BC)$
b) Justifie que $\cos \widehat{ABC} = \frac{1}{2}$
c) Déduis-en que $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
3. Justifie que $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
4. a) Sachant que $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, calcule la valeur exacte de $\sin 60^\circ$.
b) Déduis-en la valeur exacte de $\tan 60^\circ$.

Exercice 11

1. Construis un carré EFGH. On note a la longueur EF en centimètres.
2. a) Calcule la valeur exacte de $\tan \widehat{FEG}$
b) Déduis-en la valeur exacte de $\tan 45^\circ$
3. a) Calcule en fonction de a la longueur EG
b) Calcule la valeur exacte de $\cos 45^\circ$

Exercice 12

Sachant que $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, démontre que $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

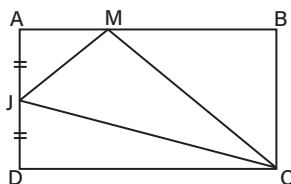
Exercice 13

Les diagonales d'un carré ABCD mesurent 4 cm.

1. Détermine la mesure de l'angle BAC.
2. Déduis-en la longueur des côtés de ce carré.

Exercice 14

- ABCD est un rectangle tel que $AB = 8$; $BC = 5$;
- J est le milieu du segment [AD] ;
- M est un point du segment [AB] et $AM = 2$.



1. Calcule les longueurs MJ, MC et JC.
2. Détermine si le triangle MJC est rectangle.

Exercice 15

Soit un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 6$ et $AC = 8$.

On trace la hauteur (AH), H est le pied de la hauteur issue de A sur le segment [BC].

1. Calcule la longueur BC, puis $\sin \widehat{ABC}$ et $\cos \widehat{ABC}$.
2. Calcule les longueurs AH, BH et CH.

Exercice 16

On trace un triangle ABC rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A sur le segment [BC].

Soit a la mesure de l'angle BAH.

1. Démontre que a est aussi la mesure de l'angle ACH.
2. Détermine de trois façons différentes $\sin a$ puis $\cos a$
3. Déduis-en les égalités suivantes :
a) $AB \times AC = AH \times BC$
b) $AB^2 = BH \times BC$
c) $AC^2 = HC \times BC$
4. a) Démontre que $\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{HC}$ et $\frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AH}$.
b) Déduis-en l'égalité $AH^2 = BH \times HC$.

Exercice 17

Détermine s'il existe un angle aigu de mesure a tel que l'on ait :

$$\cos a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{10}} \text{ et } \sin a = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{10}}.$$

Exercice 18

Soit a la mesure d'un angle aigu. Calcule de deux manières différentes $\cos a$ sachant que

$$\sin a = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ et } \tan a = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

⇒ B- Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un exercice

Exercice 19

Construis le triangle indiqué sans utiliser ni de calculatrice, ni de rapport de rapport.

1. ABC est un triangle rectangle en C tel que $\sin \widehat{ABC} = \frac{2}{5}$;
2. GHI est un triangle rectangle en C tel que $\tan \widehat{ABC} = \frac{4}{7}$.

Exercice 20

Soit a la mesure d'un angle aigu. Simplifie les expressions suivantes :

$$A = \frac{\sin^2 a - \sin^4 a}{\cos^2 a - \cos^4 a} ;$$

$$B = (1 - \sin a)(1 + \sin a)(1 + \tan^2 a)$$

Exercice 21

a et b sont les mesures respectives de deux angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ qui vérifient les conditions :

$$5\cos a + \frac{3\cos a + 2}{4} = 2 \text{ et } \frac{23\sin b - 4}{2} = 1.$$

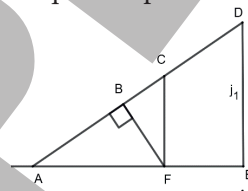
Démontre que les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont complémentaires.

Exercice 22

L'unité de longueur est le centimètre.

On considère la figure ci-contre qui n'est pas en grandeurs réelles.

- Le triangle ABF est rectangle en B ;
- $\widehat{BAF} = 60^\circ$;
- $AB = 3$;
- Les points A, F et E sont alignés et $AE = 7$;
- Les points A, B et C sont alignés et $AC = 9$;
- La parallèle à la droite (FC) passant par le point E coupe la droite (AC) en D.



1. Démontre que $AF = 6$
2. Calcule les longueurs BF et AD.

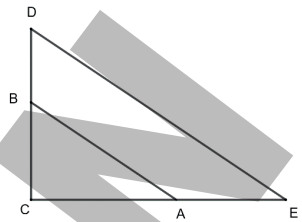
Exercice 23

L'unité de longueur est le centimètre.

Sur la figure qui n'est pas en vraie grandeur.

Dans le triangle CDE :

- A est un point du segment [CE] ;
- B est un point du segment [CD] ;
- $AC = 8$; $CE = 20$;
 $BC = 6$; $CD = 15$;
 $DE = 25$.

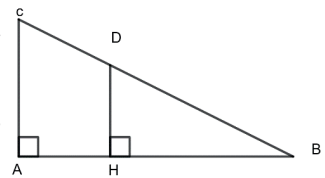


1. Démontre que le triangle CDE est rectangle en C.
2. Détermine un encadrement de la mesure de l'angle $\widehat{CDE}$ par deux nombres entiers naturels consécutifs.
3. Justifie que $AB = 10$
4. a) Justifie que $\cos \widehat{CDE} = \cos \widehat{ABC}$
b) Dédus-en que les droites (AB) et (DE) sont parallèles

Exercice 24

Un cycliste se trouve sur un chemin [CB].

On donne : $AH = 100$ m ;
 $BH = 400$ m et
 $\widehat{ABC} = 10^\circ$.

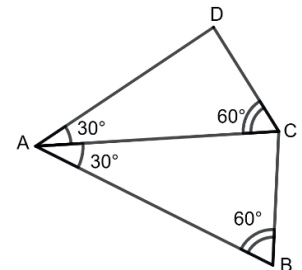


1. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$
2. Calcule le dénivelé AC arrondi au mètre
3. Calcule la longueur BC arrondie au mètre
4. Le cycliste est arrêté au point D sur le chemin. Calcule la distance BD qui reste à parcourir.

Exercice 25

Soit le quadrilatère ABCD ci-contre.

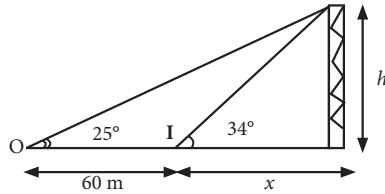
$AB = 1$ dm.



1. Calcule les valeurs exactes de BD, AC, CD et AD.
2. Calcule le périmètre $\mathcal{P}$ et l'aire $\mathcal{A}$ de ce quadrilatère.

Exercice 26

On souhaite déterminer la hauteur h de la falaise représentée ci-contre.



Pour cela, on se place en O puis en I et on effectue des mesures d'angles ; on mesure la longueur OI.

Voir figure.

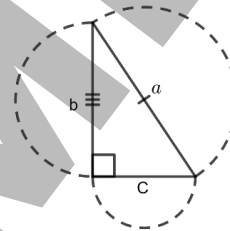
1. a) Exprime $\tan 34^\circ$ en fonction de h et de x .
b) Exprime $\tan 25^\circ$ en fonction de h et de x .
2. a) Déduis-en que $x = \frac{60 \tan 25^\circ}{\tan 34^\circ - \tan 25^\circ}$
b) En prenant $\tan 34^\circ = 0,67$ et $\tan 25^\circ = 0,47$, détermine la valeur de x puis la hauteur h de la falaise arrondie au mètre.

Exercice 27

- a) On note x le diamètre d'un disque. Exprime l'aire de ce disque en fonction de son diamètre x .
- b) Déduis-en que l'aire d'un demi-disque de diamètre x peut s'écrire : $\frac{\pi}{8} x^2$.

Soit un triangle rectangle. On note a la longueur de son hypoténuse, b et c les longueurs des côtés de l'angle droit.

A l'extérieur du triangle, on trace les demi-disques ayant chacun pour diamètre un côté du triangle. Démontre que l'aire du demi-disque construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des demi-disques construits sur les côtés de l'angle droit.



⇒ C. Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un problème

Exercice 28

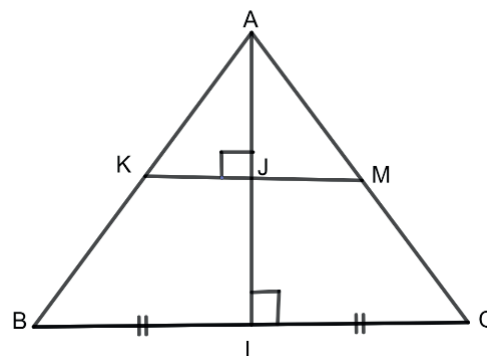
Un jeune fonctionnaire vient d'être propriétaire d'une maison.

Après l'avoir visitée, il souhaite savoir s'il pourra se déplacer debout sous sa charpente sans se cogner la tête sur une des poutres représentées par le segment [KM], sachant qu'il a une taille de 1,75 m.

Pour cela, il te sollicite.

- ABC est un triangle isocèle en A ;
- I est le milieu du segment [BC] ;
- AI = 4 m ; KM = 2 m ;
- $\widehat{\text{BAC}} = 84^\circ$.

1. Justifie que $\widehat{\text{JAK}} = 42^\circ$
2. Démontre que $AJ = \frac{1}{\tan 42^\circ}$
3. Réponds à la préoccupation du jeune fonctionnaire en justifiant ta réponse.



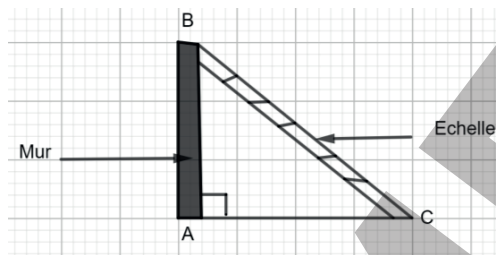
Exercice 29

Pour des travaux de construction sur le chantier d'un lycée, un ouvrier doit placer une échelle à coulisse contre un mur.

En respectant les consignes de sécurité, le pied de l'échelle doit former avec le sol un angle dont la mesure doit être comprise entre 69° et 70° .

Pour atteindre une hauteur de 6 m sur un mur, cet ouvrier dispose d'une échelle de 6,40 m.

Il se demande si sa sécurité est assurée et souhaite connaître la distance séparant le pied de l'échelle et le mur. Pour cela, il te sollicite.



1. Démontre que $\sin \widehat{ACB} = \frac{15}{16}$.
2. Déduis-en un encadrement de la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ par deux nombres entiers naturels consécutifs.
3. Dis si la sécurité de l'ouvrier est assurée et justifie ta réponse.
4. Calcule la distance, arrondie au mètre, entre le pied de l'échelle et le mur.

Leçon

5

CALCUL NUMÉRIQUE

Situation d'apprentissage

Un groupe d'élèves de 3ème découvrent dans une revue de science l'information suivante :
« La consommation journalière d'une chaudière au gaz est donnée en fonction de la température extérieure, selon les formules :

- $T < 5$; $y = -0,15t + 2,25$;
- $5 \leq t \leq 12$; $y = 1,5$;
- $t \geq 12$; $y = -0,25t + 4,5$.

(y est la consommation journalière exprimée en m^3 et t est la température extérieure en degrés Celsius) ».

Impressionnés par cette découverte, ils souhaitent connaître les valeurs entre lesquelles est comprise la consommation journalière lorsque la température extérieure varie entre 3° et 27° .

Pour cela, ils décident d'étudier avec leurs camarades de classe la leçon « CALCUL NUMERIQUE ».

Découvre de nouveaux outils

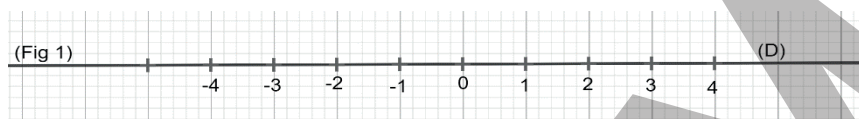
1 Notion d'intervalle

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ d'identifier : un intervalle, l'amplitude d'un intervalle et le centre d'un intervalle ;
- ✓ de noter un intervalle ;
- ✓ de lire un intervalle ;
- ✓ de traduire : un intervalle à l'aide d'inégalités, une inégalité à l'aide d'un intervalle ;
- ✓ de représenter un intervalle sur une droite graduée ;
- ✓ de déterminer : le centre d'un intervalle, l'amplitude d'un intervalle.

Activité 1

La droite (D) ci-dessous représente l'ensemble des nombres réels.



1. Reproduis la figure.
2. Trace :
 - a) en rouge l'ensemble des points de (D) dont l'abscisse est supérieure ou égale à 1.
 - b) en bleu l'ensemble des points de (D) dont l'abscisse est inférieure à -2.
 - c) en vert l'ensemble des points de (D) non coloriés en rouge ni en bleu.
3. Associe chaque ensemble de la question 2) à chacune des inégalités suivantes :
 - a) (I_1) : $-2 \leq x < 1$; b) (I^2) : $x < -2$; c) (I_3) : $x \geq 1$.

Fais le point

On admet que les différents ensembles tracés sur la droite (D) peuvent être représentés à l'aide d'intervalles.

- L'ensemble des points dont l'abscisse est supérieure ou égale à 1 se note : $[1; \rightarrow[$;
- $[1; \rightarrow[$ se lit l'intervalle des nombres réels supérieurs ou égaux à 1 ;
- L'ensemble des points dont l'abscisse est inférieure à -2 se note : $]\leftarrow; -2[$;
- $]\leftarrow; -2[$ se lit l'intervalle des nombres réels inférieurs à -2 ;
- L'ensemble des points de (D) dont l'abscisse est coloriée en vert se note : $[-2; 1[$;
- $[-2; 1[$ se lit l'intervalle -2;1, fermé en -2 et ouvert en 1 ;
- Les nombres -2 et 1 sont les bornes de l'intervalle $[-2; 1[$;
- On peut traduire : un intervalle sous forme d'inégalités et une inégalité sous forme d'intervalle.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Recopie et associe chaque inégalité à l'intervalle correspondant.

- | | | |
|-----------------|---|------------------------|
| $x > -3$ | • | • $] -3; 2]$ |
| $-3 \leq x < 2$ | • | • $] -3; \rightarrow[$ |
| $-3 < x \leq 2$ | • | • $[-3; 2[$ |
| $x \leq -3$ | • | • $] \leftarrow; -3]$ |

EXERCICE

2

Traduis chaque intervalle sous forme d'inégalités

- a) $[-7; -2]$; b) $[-3; 4[$; c) $] \leftarrow; -5[$; d) $[8; \rightarrow[$; e) $] 0; 2]$

EXERCICE

3

Recopie et associe les points afin d'obtenir des phrases vraies.

- | | | |
|---------------------|---|---|
| $[-3; 4]$ | • | • est l'intervalle des nombres inférieurs ou égaux à -3 |
| $] -3; 4[$ | • | • est l'intervalle -3 ; 4, fermé en -3 et ouvert en 4 |
| $[-3; 4[$ | • | • est l'intervalle fermé -3 ; 4 |
| $] \leftarrow; -3]$ | • | • est l'intervalle ouvert -3 ; 4 |

EXERCICE

4

Représente graphiquement chacun des intervalles ci-dessous :

- $[-3; 2[$; $[-3; 2]$; $] -3; 2[$; $] \leftarrow; 2]$

Activité 2

1. Écris tous les intervalles dont les bornes sont -1 et 5.
2. Calcule $5 - (-1)$
3. Calcule la demi-somme des deux nombres -1 et 5.

Fais le point

- $5 - (-1)$ est l'amplitude des intervalles $[-1; 5]$; $[-1; 5[$; $] -1; 5]$ et $] -1; 5[$
- $\frac{-1 + 5}{2}$ est le centre de chacun des intervalles de bornes -1 et 5 ;
- Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
- Tout intervalle de bornes a et b a pour centre $\frac{a + b}{2}$ et pour amplitude $b - a$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Réponds par vrai ou par faux.

1. L'amplitude de l'intervalle $] -2; 2[$ est égale à 0
2. Le centre de l'intervalle $[8; 20[$ est égal à 14
3. L'amplitude d'un intervalle est toujours un nombre positif.

EXERCICE

2

Détermine le centre, puis l'amplitude de chacun des intervalles suivants :

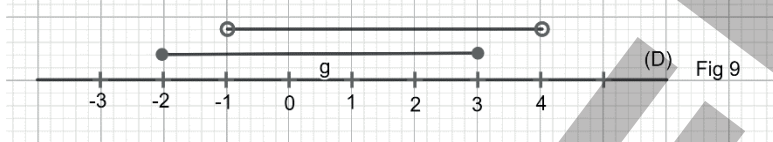
- $[-6; -2[$; b) $[3 - \sqrt{2} ; 3 + \sqrt{2}]$; c) $\left] \frac{2}{5}; \frac{1}{2} \right]$

2 Intersection et réunion d'intervalles

À la fin de la séquence, tu dois être capable de représenter l'intersection ou la réunion de deux intervalles sur une droite graduée.

Activité 1

On considère la droite (D) sur laquelle les intervalles $[-2;3]$ et $] -1;4[$ sont représentés.



1. Cite les nombres entiers relatifs qui appartiennent à la fois à l'intervalle $[-2;3]$ et à l'intervalle $] -1;4[$.
2. Reproduis la figure ci-dessus et colorie en rouge l'ensemble des nombres réels qui appartiennent aux intervalles $[-2;3]$ et $] -1;4[$.
3. Écris l'intervalle correspondant à l'ensemble des nombres coloriés en rouge.

Fais le point

- L'ensemble des nombres réels appartenant à la fois aux intervalles $[-2;3]$ et $] -1;4[$ est l'intersection des intervalles $[-2;3]$ et $] -1;4[$.
- On note : $[-2;3] \cap] -1;4[$
- Le symbole $\cap$ se lit « inter »

Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

1. L'intersection de deux intervalles est toujours un intervalle
2. $] -\infty;2] \cap]2;5[= \emptyset$
3. $\mathbb{D} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{D}$

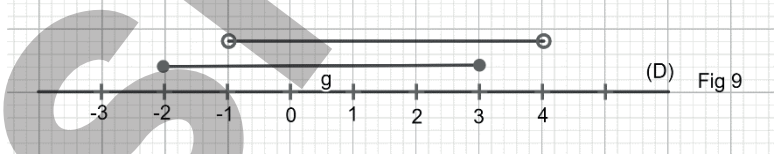
EXERCICE 2

Représente sur une droite graduée, puis détermine l'intersection des intervalles I et J dans chacun des cas suivants :

1. $I = [-3;5]$ et $J = [1;10]$
2. $I =]2;4[$ et $J = [-1;6[$
3. $] -\infty;3]$ et $J = [-2;5[$

Activité 2

On considère la droite (D) sur laquelle les intervalles $[-2;3]$ et $] -1;4[$ sont représentés.



1. Cite les nombres entiers relatifs qui appartiennent à la fois à l'intervalle $[-2;3]$ ou à l'intervalle $] -1;4[$.
2. Reproduis la figure ci-dessus et colorie en bleu l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à l'intervalle $[-2;3]$ ou à l'intervalle $] -1;4[$.
3. Écris l'intervalle correspondant à l'ensemble des nombres coloriés en bleu.

Fais le point

- L'ensemble des nombres réels appartenant à $[-2;3]$ ou à $] -1;4[$ est la réunion des intervalles $[-2;3]$ et $] -1;4[$.
- On note : $[-2;3] \cup] -1;4[$
- Le symbole $\cup$ se lit « union ».

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

1. La réunion de deux intervalles n'est jamais vide
2. La réunion de deux intervalles est toujours un intervalle
3. $\emptyset \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$

EXERCICE

2

En utilisant une droite graduée, détermine la réunion des intervalles I et J dans chacun des cas suivants :

1. $I = [-3 ; 5]$ et $J = [1 ; 10]$
2. $I =]2 ; 4[$ et $J = [-1 ; 6[$
3. $] < ; 3]$ et $J = [-2 ; 5[$

3 Inégalités et opérations

À la fin de la séquence, tu dois être capable de connaître les propriétés relatives aux inégalités et opérations.

Activité 1

Soient quatre nombres réels x, y, a et b tels que $x < a$ et $y < b$.

1. Justifie les inégalités suivantes : a) $x + y < a + b$; b) $y + a < a + b$
2. Dédus-en la comparaison des nombres $x + y$ et $a + b$.
3. Énonce une propriété concernant la somme membre à membre de deux inégalités de même sens.

Fais le point

- $x + y < a + b$
- Lorsqu'on ajoute membre à membre deux inégalités de même sens, on obtient une nouvelle inégalité de même sens.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

1. Parmi les inégalités suivantes, cite celles qui sont vraies.
2. $(I_1): a + 4 < b + 6$; $(I_2): b > a - 1$; $(I_3): a + 2 > b + 1$; $(I_4): a - 2024 < b - 2023$

EXERCICE 2

- On sait que : $\sqrt{2} < 1,5$ et $\sqrt{3} < 1,8$
- Complète avec le symbole : $<$ ou $>$
- $\sqrt{2} + \sqrt{3} \dots 1,5 + 1,8$; b) $1,8 - \sqrt{2} \dots \sqrt{3} - 1,5$

Activité 2

Soient a, b, c et d quatre nombres réels strictement positifs tel que $a < b$ et $c < d$.

- Justifie les inégalités suivantes : $ac < bc$ et $bc < bd$
- Déduis-en la comparaison de ac et bd .
- Énonce une propriété concernant la multiplication membre à membre de deux inégalités de même sens, entre nombres strictement positifs.

Fais le point

- $ac < bd$
- Lorsqu'on multiplie membre à membre deux inégalités de même sens, entre nombres strictement positifs, on obtient une nouvelle inégalité de même sens.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Soient u et v deux nombres réels tels que $0 < u < v$. Parmi les inégalités suivantes, cite celles qui sont vraies.

- (I₁) : $50u < 101v$; (I₂) : $\pi u > 2v$; (I₃) : $\frac{v}{2} > \frac{u}{3}$;
(I₄) : $-2\pi u > -3\pi v$

EXERCICE 2

On sait que : $\sqrt{2} < 1,5$ et $\sqrt{3} < 1,8$.
Complète avec le symbole : $<$ ou $>$

- a) $\sqrt{6} \dots 1,5 \times 1,8$; b) $6 \dots 3\sqrt{2}$;
c) $4\sqrt{3} \dots 1,8 \times 5$

4 Comparaison de deux nombres réels

À la fin de la séquence, tu dois être capable de comparer :

- ✓ deux nombres réels en cherchant le signe de leur différence ;
- ✓ deux nombres réels strictement positifs en comparant leurs carrés ;
- ✓ deux nombres réels strictement positifs en comparant leurs inverses.

Activité 1

Soient a et b deux nombres réels.

- Justifie que si $a < b$, alors $a - b < 0$.
- Justifie que si $a - b < 0$, alors $a < b$.
- Énonce la propriété ainsi démontrée.

Fais le point

Soient a et b deux nombres réels.
 $a < b$ équivaut à $a - b < 0$

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

- On sait que : $\sqrt{2} < \pi$ et $\sqrt{5} < 3$.
- Indique le signe de chacun des nombres $\sqrt{2} - \pi$ et $3 - \sqrt{5}$.

EXERCICE 2

a, b, x et y sont quatre nombres tels que : $a - b = -2$ et $x - y = \sqrt{13}$.
Complète avec le symbole : $<$ ou $>$.
a) $a \dots b$; b) $x \dots y$.

EXERCICE 3

Dans chacun des cas suivants, compare a et b en utilisant le signe de leur différence.

- $a = \frac{2}{13}$ et $b = \frac{1}{7}$.
- $a = 21 + 2\sqrt{17}$ et $b = 25 + 2\sqrt{17}$.

Activité 2

- a et b sont deux nombres réels. On rappelle que $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
a) Si a et b sont positifs, tels que $a < b$; justifie que $(a-b)(a+b) < 0$.
b) Dédus-en que : $a^2 < b^2$.
c) Énonce la propriété ainsi démontrée.
- a) Démontre que si a et b sont des nombres réels positifs tels que : $a^2 < b^2$, alors $a < b$.
b) Énonce la propriété ainsi démontrée.

Fais le point

Soient a et b deux nombres réels positifs.
 $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Réponds par vrai ou par faux.

- $(\pi+2)^2 < (\pi-1)^2$.
- Les nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.
- a est un nombre réel. Si $a^2 > 4$ alors $a > 2$.

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, compare a et b .

- $a = 3\sqrt{7}$ et $b = 6\sqrt{2}$.
- $a = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ et $b = \sqrt{7 + 2\sqrt{15}}$.

Activité 3

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a \leq b$.

1. Démontre que : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$
2. Déduis-en que : $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.
3. Énonce la propriété ainsi démontrée.

Fais le point

Des nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Réponds par vrai ou par faux.

1. $\sqrt{1965} < \sqrt{1967}$
2. Soient p et q deux nombres positifs.
Si $\sqrt{p} > \sqrt{q}$ alors $p > q$.

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, compare a et b .

1. $a = \sqrt{50,24}$ et $b = \sqrt{50,2}$
2. $a = 4\sqrt{3}$ et $b = 6$

Activité 4

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a \leq b$

1. Démontre que : $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$.
2. Déduis-en que $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.
3. Énonce la propriété ainsi démontrée.

Fais le point

Des nombres réels strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Réponds par vrai ou par faux

1. $\frac{1}{89} > \frac{1}{90}$.
2. $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{1,9}}$.
3. a est un nombre non nul.
Si $\frac{1}{a^2+1} < \frac{1}{a^2}$ alors $a^2 < a^2 + 1$.

EXERCICE 2

Compare a et b dans chacun des cas suivants.

1. $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
2. $a = \frac{1}{6\sqrt{2}}$ et $b = \frac{1}{5\sqrt{3}}$.

5 Encadrement

À la fin de la séquence, tu dois être capable :

- ✓ d'encadrer :
 - un nombre réel par deux nombres entiers relatifs ;
 - l'opposé d'un nombre ;
 - l'inverse d'un nombre non nul ;
 - la somme, la différence de deux nombres ;
 - le produit et le quotient de deux nombres positifs ;
 - un nombre réel par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1 ; 2 ou 3 à l'aide de la table des carrés ou d'une calculatrice ;
- ✓ de déterminer l'arrondi d'ordre 1, 2 ou 3 de la racine carrée d'un nombre réel positif.

Activité 1

On donne $a = 2,6457$ et $b = -5,385164$

1. a) Quel est le nombre entier immédiatement inférieur à a ?
 b) Quel est le nombre entier immédiatement supérieur à a ?
 c- Dédus des deux questions ci-dessus, un encadrement de a par deux nombres entiers consécutifs.
2. a) Quel est le nombre entier immédiatement inférieur à b ?
 b) Quel est le nombre entier immédiatement supérieur à b ?
 c) Dédus des deux questions ci-dessus, un encadrement de b par deux nombres entiers consécutifs.

Fais le point

- On a encadré chacun des nombres a et b par deux nombre entiers relatifs consécutifs.
- On admet que tout nombre réel peut-être encadré par deux nombres entier relatifs consécutifs.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Encadre chacun des nombres m et n suivants par deux nombres entiers consécutifs.

$$m = 7,348\ 46 \text{ et } n = -\frac{90}{11}$$

Activité 2

On donne les nombres réels a , b et x tel que $a < x < b$

1. Compare $(-x)$ et $(-a)$; puis $(-x)$ et $(-b)$.
2. Dédus-en un encadrement de $(-x)$.

Fais le point

- On a déduit un encadrement de $(-x)$ à partir d'un encadrement de x .
- Les nombres réels a , b et x étant donnés
 $a < x < b$ équivaut à $-b < -x < -a$

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

On donne $2,64 < a < 2,65$ et $b = -5,385\ 164$

1. Donne un encadrement de $(-a)$ par deux décimaux consécutif d'ordre 2.
2. Détermine un encadrement de $(-b)$ par deux décimaux consécutif d'ordre 3.

Activité 3

On donne : $3,60 < \sqrt{13} < 3,61$ et $3,14 < \frac{22}{7} < 3,15$.

Encadre chacun des nombres ci-dessous par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1.

a) $\sqrt{13} + \frac{22}{7}$; b) $\sqrt{13} - \frac{22}{7}$.

Fais le point

Soient a, b, c, d, x et y des nombres réels.

- si $a \leq x \leq b$ et $c < y < d$ alors $a + c \leq x + y \leq b + d$
- si $a \leq x \leq b$ et $c < y < d$ alors $a - d \leq x - y \leq b - c$

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

On donne : $1,2 < a < 1,5$ et $2 < b < 4$

Détermine un encadrement de $a + b$ et de $a - b$.

Activité 4

On donne deux nombres réels m , et n tels que :

$$\frac{2}{3} < m < \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad -7 < n < -6$$

1. Justifie que $\frac{4}{3} < \frac{1}{m} < \frac{3}{2}$

2. a) Donne un encadrement de $-n$.

b) Dédus en un encadrement de $-\frac{1}{n}$, puis de $\frac{1}{n}$

Fais le point

- On a $\frac{4}{3} < \frac{1}{m} < \frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{6} < \frac{1}{n} < -\frac{1}{7}$
- On admet que deux nombres non nuls qui ont le même signe sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

On donne $5 < x < 8$ et $-\frac{10}{9} < y < -\frac{8}{7}$

1. Donne un encadrement de $\frac{1}{x}$.
2. Détermine un encadrement de $\frac{1}{y}$.

Activité 5

On donne : $3,60 < \sqrt{13} < 3,61$ et $3,14 < \frac{22}{7} < 3,15$.

Encadre chacun des nombres ci-dessous par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1.

- a) $\frac{22}{7} \sqrt{13}$; b) $\frac{22}{7\sqrt{13}}$.

Fais le point

- Soient a, b, c, d, x et y des nombres réels positifs.
Si $a \leq x \leq b$ et $c < y < d$ alors $ac \leq xy \leq bd$.
- Soient a, b, c, d, x et y des nombres réels strictement positifs.
Si $a \leq x \leq b$ et $c < y < d$ alors $\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1. On donne : $1,2 < a < 1,5$ et $2 < b < 4$
2. Détermine un encadrement de ab et de $\frac{a}{b}$.

Activité 6

On donne : $A = \sqrt{17,765}$.

En utilisant une calculatrice, détermine l'arrondi d'ordres 0, 1, 2 et 3 de A.

Fais le point

Pour déterminer l'arrondi de la racine carrée d'un nombre réel positif à un ordre donné, on applique la règle sur l'arrondi vue en classe de 4^{ème}.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

On donne : $B = \sqrt{2024}$

En utilisant une calculatrice, détermine l'arrondi d'ordres 0, 1, 2 et 3 de A.

Retiens les outils essentiels

1

Intervalles

1. Intervalles et inégalités

Encadrement	Intervalles	Lecture	Représentation
$a \leq x \leq b$	$[a;b]$	Intervalle fermé a, b	
$a < x < b$	$]a;b[$	Intervalle ouvert $a ; b$	
$a \leq x < b$	$[a;b[$	Intervalle $a ; b$, fermé en a et ouvert en b	
$a < x \leq b$	$]a;b]$	Intervalle $a ; b$ ouvert en a et fermé en b	
$x \leq b$	$] \leftarrow ; b]$	Intervalle des nombres inférieurs ou égaux à b	
$x > a$	$]a; \rightarrow[$	Intervalle des nombres supérieurs à a	
$x < b$	$] \leftarrow ; b[$	Intervalle des nombres inférieurs à b	
$x \geq b$	$[b; \rightarrow[$	Intervalle des nombres supérieurs ou égaux à b	

2. Amplitude et centre d'un intervalle

Les intervalles $[a;b]$; $]a;b]$; $[a;b[$ et $]a;b[$ sont dits intervalles bornés. Ils ont pour :

- bornes : a et b .
- amplitude : $b - a$.
- centre : $\frac{a+b}{2}$.

Exemple

L'intervalle $[-2 ; 4[$ a pour amplitude : $4 - (-2) = 6$ et pour centre : $\frac{-2+4}{2} = 1$.

Exemple

$$[-7 ; 5] \cap]-2 ; 8[=]-2 ; 5]$$

Remarque

L'intersection de deux intervalles n'ayant aucun nombre en commun est l'ensemble vide, noté $\emptyset$ ou $\{ \}$.

Exemple

$$[-2 ; 3[\cap [3 ; 5[= \emptyset$$

2

Réunion et intersection d'intervalles

1. Intersection de deux intervalles

Définition

L'intersection de deux intervalles I et J est l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à la fois à I et à J . On le note $I \cap J$.

Autrement dit : $x \in I \cap J$ signifie que $x \in I$ et $x \in J$.

2. Réunion de deux intervalles

Définition

La réunion de deux intervalles I et J est l'ensemble des nombres qui appartiennent à I ou à J . On le note $I \cup J$.

Autrement dit : $x \in I \cup J$ signifie que $x \in I$ ou $x \in J$.

Exemple

$$[-7 ; 5] \cup]-2 ; 8[= [-7 ; 8[$$

3 Inégalités et opérations

1. Inégalités et addition

Propriété

a, b, c et d sont des nombres réels.

- Si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$
- Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$

Exemple

$\sqrt{7} < 3$ et $\pi < 3,2$, donc : $\sqrt{7} + \pi < 3 + 3,2$;
soit : $\sqrt{7} + \pi < 6,2$.

2. Inégalités et multiplication

Propriété

a, b, c et d sont des nombres réels positifs.

- Si $a < b$ et $c < d$ alors $ac < bd$
- Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $ac \leq bd$

Exemple

$\sqrt{7} < 3$ et $\pi < 3,2$, donc : $\pi \sqrt{7} < 3 \times 3,2$;
soit : $\pi \sqrt{7} < 9,6$.

4 Comparaison de nombres réels

1. Comparaison et différence

Propriété

a et b sont deux nombres réels

- $a < b$ équivaut à $a - b < 0$
- $a \leq b$ équivaut à $a - b \leq 0$

Exemple

- $\sqrt{\pi} < 2$, donc : $\sqrt{\pi} - 2 < 0$; d'où $\sqrt{\pi} - 2$ est négatif.
- $\frac{3}{7} - \frac{2}{5} = \frac{1}{35}$ et $\frac{1}{35} > 0$, donc : $\frac{3}{7} > \frac{2}{5}$

2. Comparaison et carrées

Propriété 1

- ✓ a et b sont deux nombres réels positifs
 - $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$;
 - $a \leq b$ équivaut à $a^2 \leq b^2$.
- ✓ a et b sont deux nombres réels négatifs.
 - $a < b$ équivaut à $a^2 > b^2$;
 - $a \leq b$ équivaut à $a^2 \geq b^2$.

Exemple

- $5 < 7$; donc : $5^2 < 7^2$.
- $-6 < -2$; donc : $(-6)^2 > (-2)^2$

Propriété 2

a et b sont deux nombres réels positifs.

- $a < b$ équivaut à $\sqrt{a} < \sqrt{b}$;
- $a \leq b$ équivaut à $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Exemple

$25 < 48$; donc : $\sqrt{25} < \sqrt{48}$; d'où : $5 < 4\sqrt{3}$

Propriété 3

a et b sont deux nombres réels non nuls et de même signe.

- $a < b$ équivaut à $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;
- $a \leq b$ équivaut à $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Exemple

$-2 < -3$, donc : $-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$

5 Encadrement

1. Encadrement d'une somme

Propriété

a, b, c, d, x et y sont des nombres réels.

- Si $a < x < b$ et $c < y < d$ alors $a + c < x + y < b + d$;
- Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors $a + c \leq x + y \leq b + d$;

Exemple

$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ et $3,6 < \sqrt{13} < 3,7$,
donc : $1,4 + 3,6 < \sqrt{2} + \sqrt{13} < 1,5 + 3,7$,
soit : $5 < \sqrt{2} + \sqrt{13} < 5,2$

2. Encadrement d'une différence

Méthode

Pour encadrer une différence $a - b$, connaissant un encadrement de a et un encadrement de b , on peut encadrer $(-b)$ d'abord puis encadrer par suite $a + (-b)$.

Exemple

$$3,1 < \pi < 3,2 \text{ et } 1,7 < \frac{12}{7} < 1,8 ; -1,8 < -\frac{12}{7} < -1,7 ;$$

$$\text{donc : } 3,1 - 1,8 < \pi - \frac{12}{7} < 3,2 - 1,7 ;$$

$$\text{d'où : } 1,3 < \pi - \frac{12}{7} < 1,5$$

3. Encadrement d'un produit

Propriété

a, b, c, d, x et y sont des nombres réels positifs.

- Si $a < x < b$ et $c < y < d$ alors $ac < xy < bd$;
- Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors $ac \leq xy \leq bd$;

Exemple

$$3,1 < \pi < 3,2 \text{ et } 2,2 < \sqrt{5} < 2,3,$$

$$\text{donc : } 3,1 \times 2,2 < \pi \times \sqrt{5} < 3,2 \times 2,3,$$

$$\text{d'où : } 6,82 < \pi \sqrt{5} < 7,36$$

4. Encadrement d'un inverse

Propriété

a, b et u sont des nombres réels non nuls de même signe.

- Si $a < u < b$ alors $\frac{1}{b} > \frac{1}{u} > \frac{1}{a}$;
- Si $a \leq u \leq b$ alors $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{u} \geq \frac{1}{a}$.

Exemple

$$\sqrt{5} < \sqrt{7}, \text{ donc : } \frac{1}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\sqrt{7}}$$

5. Encadrement d'un quotient

Méthode

Pour encadrer un quotient $\frac{a}{b}$, connaissant un encadrement de a et un encadrement de b , on peut encadrer d'abord $\frac{1}{b}$, puis encadrer par la suite $a \times \frac{1}{b}$.

Exemple

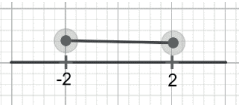
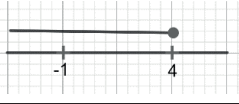
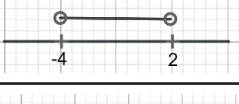
$$2 < a < 5 \text{ et } 4 < b < 8, \frac{1}{8} < \frac{1}{b} < \frac{1}{4},$$

$$\text{donc : } 2 \times \frac{1}{8} < a \times \frac{1}{b} < 5 \times \frac{1}{4} ; \text{ d'où : } 0,25 < \frac{a}{b} < 1,25.$$

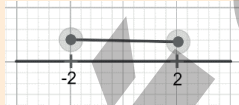
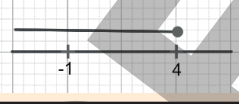
Exercices commentés

Exercice 1

Recopie et complète les cases vides.

	Sur une droite graduée	Avec des inégalités	Par un intervalle
a-			
b-			
c-			$x \in]-4; 2[$
d-		$-1 \leq x < 5$	

Solution

	Sur une droite graduée	Avec des inégalités	Par un intervalle
a-		$-2 \leq x \leq 2$	$x \in [-2; 2]$
b-		$x \leq 4$	$x \in]\leftarrow ; -4]$
c-		$-4 < x < 2$	$x \in]-4; 2[$
d-		$-1 \leq x < 5$	$x \in [-1; 5[$

Exercices commentés

Exercice 1

On sait que : $2,65 < m < 2,75$ et $1,2 < p < 1,4$

Détermine un encadrement de : a) $5m + 2p$; b) $5m - 2p$; c) $\frac{m}{p}$.

Solution

a) $2,65 < m < 2,75$, donc : $5 \times 2,65 < 5m < 5 \times 2,75$; soit : $13,25 < 5m < 13,75$ et $1,2 < p < 1,4$, donc : $2,4 < 2p < 2,8$.

Des inégalités : $13,25 < 5m < 13,75$ et $2,4 < 2p < 2,8$, on effectue la somme membre à membre, on obtient : $13,25 + 2,4 < 5m + 2p < 13,75 + 2,8$.

D'où : $15,65 < 5m + 2p < 16,55$.

b) $2,4 < 2p < 2,8$, donc : $-2,8 < -2p < -2,4$.

Des inégalités : $13,25 < 5m < 13,75$ et $-2,8 < -2p < -2,4$, on effectue la somme membre à membre, on obtient : $13,25 - 2,8 < 5m + 2p < 13,75 - 2,4$. D'où : $10,45 < 5m + 2p < 11,35$.

c) $1,2 < p < 1,4$, donc : $\frac{1}{1,4} < \frac{1}{p} < \frac{1}{1,2}$.

Des inégalités : $2,65 < m < 2,75$ et $\frac{1}{1,4} < \frac{1}{p} < \frac{1}{1,2}$, on effectue le produit membre à membre,

on obtient : $2,65 \times \frac{1}{1,4} < \frac{m}{p} < 2,75 \times \frac{1}{1,2}$.

D'où : $\frac{53}{70} < \frac{m}{p} < \frac{55}{24}$.

Utilisation des outils essentiels

⇒ A-Utilise plusieurs outils de la leçon pour résoudre un exercice

Exercice 1

Détermine la valeur des nombres réels a et b dans les cas suivants :

1. L'intervalle $[a;2]$ a pour amplitude 3.
2. L'intervalle $]-3;b[$ a pour centre -1.

Exercice 2

Un point B a pour abscisse le nombre x qui vérifie les trois conditions suivantes :

$$1 \leq x \leq 5 ; 2 \leq x \leq 3,6 ; 2,5 \leq x \leq 4,2.$$

1. Représente sur une droite graduée, chacun des intervalles correspondants à ces conditions.
2. Donne trois valeurs possibles de x
3. Détermine l'intervalle correspondant à toutes les valeurs possibles de x .

Exercice 3

A et B sont deux nombres réels positifs non nuls tels que $A < B$.

Dis si pour chacune des inégalités ci-dessous si elle est vraie ou fausse.

- a) $A \leq B$; b) $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$; c) $2A - 8 < 2B - 8$;
d) $-5A + 125 > -5B + 125$; e) $\sqrt{A} + 2 > \sqrt{B} + 2$;
f) $\frac{1}{\sqrt{A}+6} > \frac{1}{\sqrt{B}+6}$; i) $-6A^2 + 1 > -6B^2 + 1$.

Exercice 4

Compare :

1. $\sqrt{5} - 2$ et $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

2. $\sqrt{5} - 3$ et $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$

Exercice 5

On donne : $a = 2\sqrt{13} - 5\sqrt{2}$ et $b = 4 - 3\sqrt{3}$.

Détermine le signe de chacun des nombres a et b .

Exercice 6

On donne : $A = 7 - 5\sqrt{3}$ et $B = 5 - 3\sqrt{3}$.

1. Justifie que $1 < \sqrt{3}$
2. Calcule A-B
3. Dédus-en la comparaison de A et B

Exercice 7

Soit $5-x$ compris entre -1 et 7.

1. Détermine un encadrement de x
2. Dédus-en l'intervalle auquel appartient $\frac{x}{2} - 3$.

Exercice 8

On considère le nombre : $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Détermine un encadrement de a sachant que $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$.
2. Détermine un autre encadrement de $\sqrt{5}$ sachant que : $1,618 < a < 1,619$.

Exercice 9

Sachant que : $1 < \sqrt{3} < 2$ et $2 < \sqrt{5} < 3$.

Compare les nombres ci-dessous :

$5 + \sqrt{3}$ et 7 ; b) $9\sqrt{5} + 2$ et 20 ;

c) $49 - 10\sqrt{3}$ et $30\sqrt{5} - 7\sqrt{3}$.

Exercice 10

On donne : $2 \leq u \leq 4$.

Détermine un encadrement de :

a) $\frac{1}{u}$; b) $-3u^2$; c) $5\sqrt{u} - 3$

Exercice 11

Les nombres réels x et y sont tels que : $1 < x < 3$ et $-2 < y < -1$.

Détermine un encadrement de :

a) $x + y$; b) $x - y$; c) xy ; d) $\frac{x}{y}$

⇒ B- Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un exercice

Exercice 12

Les nombres a , b et c sont tels que : $b < a < c < 0$.
Détermine le signe de $X = c(a^2 - b^2)$.

Exercice 13

En mesurant une pièce de métal rectangulaire, un ouvrier trouve 3,4 cm pour la largeur et 8,2 cm pour la longueur. Chaque mesure est effectuée à plus ou moins un millimètre près.

- Détermine un encadrement de la largeur, puis de la longueur.
- Déduis-en la valeur entière du périmètre de ce rectangle.

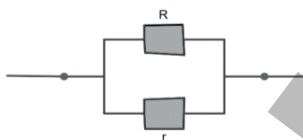
Exercice 14

La résistance équivalente à deux résistances en parallèle R et r mesure une valeur x telle que :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}.$$

Sachant que, après une mesure (en Ω), on a obtenu : $10,2 < R < 10,3$ et $8,4 < r < 8,6$.

- Détermine un encadrement de $\frac{1}{R}$, de $\frac{1}{r}$ et de $\frac{1}{x}$.
- Déduis-en un encadrement de x .


Exercice 15

- On sait que $\frac{2}{3} < \frac{5}{4}$. Vérifie que le nombre rationnel $\frac{2+5}{3+4}$ est compris entre les deux nombres $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{4}$.
- Démontre que, Pour des nombres strictement positifs a , b , c et d , si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ alors on a $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

- Cette propriété permet d'intercaler une fraction entre deux autres. Intercale trois fractions trois fractions entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$.

Exercice 16

Les nombres réels a et b sont négatifs tels que $a < b$.
On donne : $A = 4a^2 - 5$ et $B = 4ab - 5$.
Compare A et B .

Exercice 17

Un triangle ABC, isocèle et rectangle en A est tel que : $14 < AB < 15$.
Détermine un encadrement de la longueur BC.

Exercice 18

On donne : $u = \frac{\sqrt{15}-3}{\sqrt{6}}$ et $v = \frac{\sqrt{15}+3}{\sqrt{6}}$.

- Démontre que $uv = 1$
 - Donne une interprétation du résultat obtenu concernant les nombres u et v .
- Justifie que $u = \frac{1}{2}(\sqrt{10} - \sqrt{6})$.
 - Sachant que : $3,162 < \sqrt{10} < 3,163$ et $2,449 < \sqrt{6} < 2,450$, détermine un encadrement de u par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2
- Déduis-en la valeur approchée par défaut d'ordre 2 de v .

Exercice 19

On donne : $p = 3+2\sqrt{2}$ et $q = \frac{1}{2\sqrt{2}-3}$.

- Démontre que p et q sont opposés.
- Sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$, justifie que $5,582 < p < 5,83$.
- Déduis-en un encadrement de q par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1.

Exercice 20

Soient les nombres : $x = 1 + 10^{-n}$ et $y = \frac{1}{1-10^{-n}}$, où n est un nombre entier naturel non nul.

- Soit z un nombre tel que $0 < z < 1$, démontre les inégalités suivantes : $0 < 1-z < 1$; b) $1+z < \frac{1}{1-z}$

2. Dédus-en la comparaison de x et y .

Exercice 21

On donne : $A = |2\sqrt{3} - 5| - |3 - \sqrt{3}|$

- Justifie les inégalités suivantes : a) $2\sqrt{3} < 5$;
b) $3 - \sqrt{3} > 0$
- Écris A sous la forme $a + b\sqrt{3}$, où a et b sont des nombres entiers relatifs.

Exercice 22

On donne : $B = \frac{\sqrt{(7 - 4\sqrt{3})^2}}{(4\sqrt{3} - 7)^2} - 2\sqrt{12}$.

- Justifie que $7 - 4\sqrt{3}$ est positif
- Démontre que B est un nombre entier.

Exercice 23

Compare les nombres suivants en utilisant la méthode de ton choix.

- $\frac{n+2}{n+3}$ et $\frac{n+3}{n}$, ($n \in \mathbb{N}$).

- $\frac{a+b}{2}$ et $\sqrt{ab}$

(a et b sont des nombres réels positifs).

Exercice 24

Une ménagère veut acheter des tomates, il lui en faut plus de 1,5kg et moins de 2kg pour sa fête.

Le kilogramme de tomate coûte de 875 FCFA à 1350 FCFA selon la variété. Elle va donc acheter x kg de tomates à p FCFA/kg.

Détermine un encadrement de la dépense de cette ménagère.

Exercice 25

Soient $A = 3x - 5$ et $B = 2x + 7$.

- Justifie que $A - B = x - 12$
- Compare A et B pour $x = 11,79$ et pour $x = 12,53$
- Détermine x dans chacun des cas suivants de sorte que : a) $A < B$; b) $A = B$; c) $A > B$.

Exercice 26

- Démontre que : si $x > 4$ alors $2x - 3 > 1$
- Dis si l'on peut affirmer que : si $2x - 3 > 1$ est vraie, alors l'inégalité $x \geq 4$ est vraie.

⇒ C. Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un problème

Exercice 27

Un groupe d'élèves de 3ème découvrent dans une revue de science l'information suivante :

« La consommation journalière d'une chaudière au gaz est donnée en fonction de la température extérieure, selon les formules :

- $t < 5$; $y = -0,15t + 2,25$;
- $5 \leq t \leq 12$; $y = 1,5$;
- $t \geq 12$; $y = -0,25t + 4,5$.

(y est la consommation journalière exprimée en m^3 et t est la température extérieure en degrés Celsius).

Impressionnés par cette découverte, ils souhaitent connaître la consommation journalière la plus économique lorsque la température extérieure varie entre -10° et -1° , puis entre 12° et 17° .

Pour cela, ils te sollicitent à les aider.

- a) Traduis les inégalités suivantes sous forme d'intervalle : $t < 5$; b) $5 \leq t \leq 12$; c) $t > 12$
b) Détermine $]\leftarrow ; 5[\cup [5;12] \cup]12;\rightarrow[$
- Détermine un encadrement de la consommation journalière pour la température extérieure :
a) $t \in [-10;-1]$, b) $t \in]12;17]$.
- Dédus-en la consommation la plus avantageuse parmi les intervalles $[-10;-1]$ et $]12;17]$. Justifie ta réponse.

Exercice 28

Deux élèves de 3ème de ton établissement sont arrivés ex-aequo en tête après un concours organisé par un club de mathématiques.

Pour les départager, le jury leur demande démontrer que $S = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ est un nombre entier relatif.

L'un d'entre eux affirme que $S = 4$ et le second affirme que $S = -4$.

Impatients, les spectateurs souhaitent connaître lequel des deux est le gagnant dudit concours.

Pour cela, ils te sollicitent.

On pose : $a = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$; $b = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ et $S = a - b$

1. Justifie que $ab = 1$
2. Démontre que $a < b$
3. Démontre que $S^2 = 16$
4. Réponds à la préoccupation des spectateurs en justifiant ta réponse.

Leçon

6

ANGLES INSCRITS



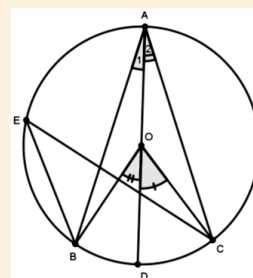
Situation d'apprentissage

Le Proviseur d'un établissement a fait une commande de médailles chez un bijoutier pour récompenser ses meilleurs élèves. Celui-ci doit faire la réplique de la médaille ci-contre.

Mais le bijoutier se dit que s'il pouvait connaître les mesures des angles qui y figurent, la reproduction serait parfaite.

Son fils en classe de 3^{ème} lui propose de l'aider.

Ensemble, ils décident de déterminer les mesures de ces angles.



Découvre de nouveaux outils

1 Angle inscrit-angle au centre associé

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ d'identifier un angle inscrit dans un cercle.
- ✓ de reconnaître :
 - l'arc intercepté par un angle au centre ou un angle inscrit donné.
 - un angle inscrit et un angle au centre associé.

Activité

1. a) Construis un cercle de centre O.
 b) Place les points A, B et C sur ce cercle puis trace l'angle $\widehat{BAC}$.
 c) Colorie l'arc de cercle d'extrémités A et B ne contenant pas le point C.
2. Identifie l'arc de cercle interceptée par les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BOC}$.

Fais le point

- L'angle $\widehat{BAC}$ a son sommet sur le cercle et ses côtés coupent le cercle, on dit que l'angle $\widehat{BAC}$ est un **angle inscrit dans un cercle**.
- L'angle $\widehat{BOC}$ est un **angle au centre**, il intercepte le même arc $\widehat{BC}$ que l'angle inscrit $\widehat{BAC}$. On dit que l'angle au centre $\widehat{BOC}$ est **associé** à l'angle inscrit $\widehat{BAC}$.

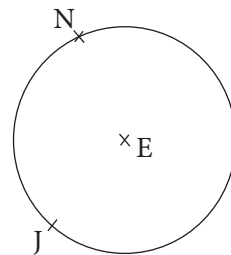
⇒ Utilise les nouveaux outils

EXERCICE

1

On donne la figure ci-contre, qui représente un cercle de centre E, les points N et J appartiennent au cercle.

1. Nomme un angle au centre.
2. Place un point L tel que $\widehat{NLJ}$ soit un angle inscrit dans le cercle (C).



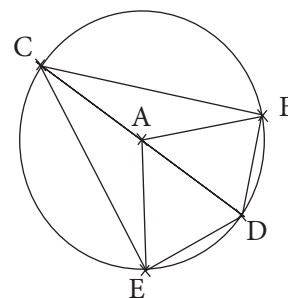
EXERCICE

2

Observe la figure ci-contre puis complète le tableau suivant, où les points B, C, D et E appartiennent au cercle.

Recopie et complète le tableau ci-dessous.

Angle inscrit	$\widehat{CEB}$	$\widehat{DBC}$		$\widehat{DCB}$
Angle au centre associé			$\widehat{EAD}$	



2 Propriétés

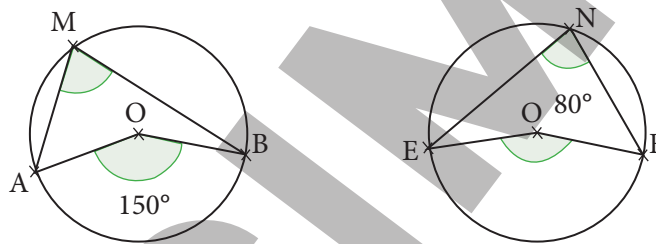
À la fin de cette séquence, tu dois être capable de :

- ✓ connaître :
 - la propriété relative à un angle inscrit et un angle au centre associé.
 - la propriété relative aux mesures de deux angles inscrits interceptant le même arc.
- ✓ reconnaître des angles inscrits qui interceptent le même arc.
- ✓ déterminer la mesure d'un angle.
- ✓ justifier une égalité de mesure d'angles.

Activité 1

On considère les figures ci-dessous où sont construits un angle inscrit et l'angle au centre associé.

1. À l'aide de ton rapporteur, mesure l'angle dont la mesure n'est pas donnée.
2. Trouve dans chaque cas une relation entre la mesure de l'angle inscrit et celle de l'angle au centre associé.



Fais le point

Un angle aigu inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de celle de l'angle au centre associé.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Parmi les formulations ci-dessous, identifie celle qui correspond à la propriété relative à la mesure d'un angle inscrit et celle d'un angle au centre associé.

Formulation 1 :

Dans un cercle, l'angle au centre mesure le tiers de l'angle inscrit associé.

Formulation 2 :

Dans un cercle, l'angle au centre mesure la moitié de l'angle inscrit associé.

Formulation 3 :

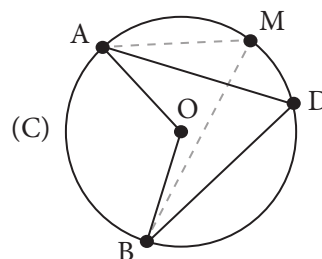
Dans un cercle, l'angle au centre mesure le double de l'angle inscrit associé.

EXERCICE 2

(C) est un cercle de centre O.

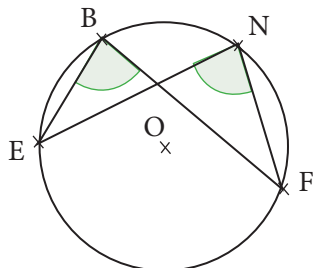
A, B et M sont trois points de (C) tels que le triangle ABD soit équilatéral.

1. Justifie que : $\widehat{AOB} = 120^\circ$.
2. Calcule $\widehat{AMB}$.



Activité 2

Sur la figure ci-dessous, les angles $\widehat{EBF}$ et $\widehat{ENF}$ sont deux angles inscrits dans le cercle qui interceptent le même arc.



- Justifie que $\text{mes}\widehat{ENF} = \frac{1}{2} \text{mes}\widehat{EOF}$
 - Justifie que $\text{mes}\widehat{EBF} = \frac{1}{2} \text{mes}\widehat{EOF}$
- Déduis de la question 1 une relation entre $\text{mes}\widehat{ENF}$ et $\text{mes}\widehat{EBF}$.
- Donne une propriété entre deux angles inscrits dans un même cercle qui interceptent le même arc.

Fais le point

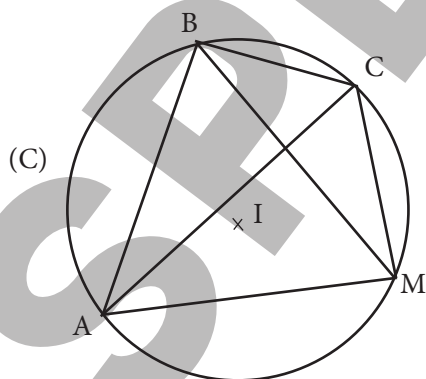
Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Sur la figure ci-dessous, (C) est un cercle de centre I ; A, B, C et M sont des points de (C).
On donne $\text{mes}\widehat{BAC} = 30^\circ$ et $\text{mes}\widehat{BCA} = 50^\circ$.



- Détermine $\text{mes}\widehat{BMC}$ et $\text{mes}\widehat{BMA}$.
- Justifie que $\text{mes}\widehat{CAM} = \text{mes}\widehat{CBM}$

Retiens les outils essentiels

1 Angle inscrit

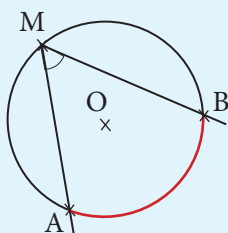
Définition

Un angle inscrit dans un cercle est un angle dont le sommet est un point du cercle et les côtés coupent le cercle.

Exemple

L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé angle inscrit dans le cercle.

L'angle $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\widehat{AB}$.



2 Angle inscrit et angle au centre associé

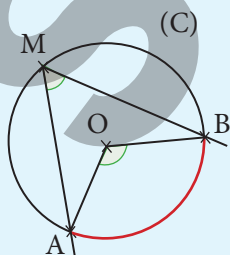
Définition

Un angle inscrit dans un cercle et un angle au centre de ce cercle sont dits associés lorsqu'ils interceptent le même arc.

Exemple

L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ sont associés

car ils interceptent le même arc $\widehat{AB}$.



3 Propriétés

1. Mesure d'un angle aigu inscrit et de l'angle au centre associé

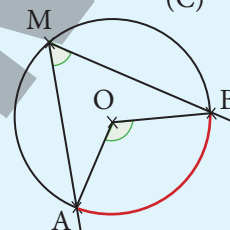
Propriété

Un angle aigu inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de celle de l'angle au centre associé.

Exemple

$\widehat{AMB}$ est un angle inscrit ayant pour angle au centre associé l'angle $\widehat{AOB}$.

$$\text{Donc } \text{mes } \widehat{AMB} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{AOB}.$$



2. Angles inscrits interceptant le même arc

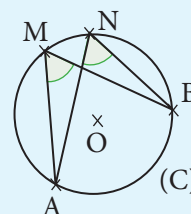
Propriété

Si dans un cercle, deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.

Exemple

(C) est un cercle de centre O.

Les angles aigus inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc $\widehat{AB}$, donc $\text{mes } \widehat{AMB} = \text{mes } \widehat{ANB}$.



Exercices commentés

Exercice 1

Soit un cercle (C) de centre O. A et B deux points de (C) et J un point n'appartenant pas à l'arc $\widehat{AB}$ tel que $\text{mes } \widehat{AJB} = 40^\circ$.

On donne : $\text{mes } \widehat{AOB} = 80^\circ$.

Détermine la mesure de l'angle $\widehat{AJB}$.

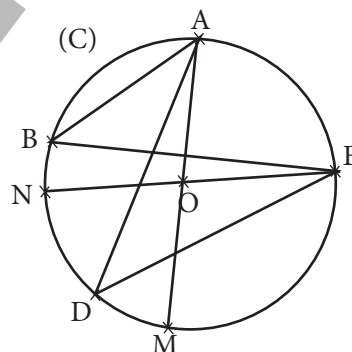
Solution

Je sais que, dans le cercle (C), l'angle au centre $\widehat{AOB}$ est associé à l'angle inscrit $\widehat{AJB}$.
Or dans un cercle, la mesure de l'angle inscrit aigu est égale à la moitié de celle de l'angle au centre associé ; donc : $\text{mes } \widehat{AJB} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{AOB}$. D'où $\text{mes } \widehat{AOB} = 2 \text{mes } \widehat{AJB} = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$.

Exercice 2

On considère la figure ci-contre, où (C) est un cercle de centre O, [AM] et [EN] sont de diamètre de (C). Les points B et D appartiennent au cercle. On donne $\text{mes } \widehat{MON} = 38^\circ$.

1. Justifie que les angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{ADE}$ ont la même mesure.
2. Calcule $\text{mes } \widehat{ABE}$.



Solution

1. Les angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{ADE}$ interceptent le même arc $\widehat{AC}$. Donc ils ont la même mesure.
2. Les angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{AOE}$ sont associés car ils interceptent le même arc $\widehat{AC}$. Donc $\text{mes } \widehat{ABE} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{AOE}$. $\text{mes } \widehat{MON} = 38^\circ$, or les angles $\widehat{AOE}$ et $\widehat{MON}$ sont opposés par leur sommet O. Donc $\text{mes } \widehat{AOE} = 38^\circ$.
Donc $\text{mes } \widehat{ABE} = \frac{1}{2} \times 38^\circ = 19^\circ$.

Utilisation des outils essentiels

⇒ A - Utilise plusieurs outils de la leçon pour résoudre un exercice

Exercice 1

Observe la figure ci-dessous. Les points A, B, C et D appartiennent au cercle (C) de centre O.

Écris sur les pointillés l'un des mots ou groupe de mots qui convient :

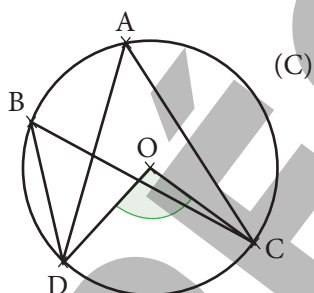
égale ; angle inscrit ; l'arc ; angle au centre ; la moitié.

L'angle $\widehat{DAC}$ est un dans le cercle (C).

Il intercepte $\widehat{DC}$. L'angle $\widehat{DOC}$ est un associé à l'..... $\widehat{DBC}$.

La mesure de l'angle $\widehat{DAC}$ est à de la mesure de l'angle $\widehat{DOC}$.

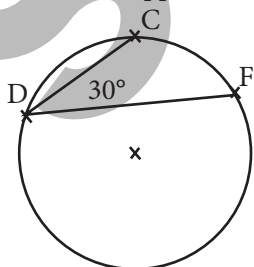
La mesure de l'angle $\widehat{DBC}$ est à la mesure de l'angle $\widehat{DAC}$.



Exercice 2

En utilisant les renseignements fournis par le dessin, trace deux angles inscrits de mesure 30° .

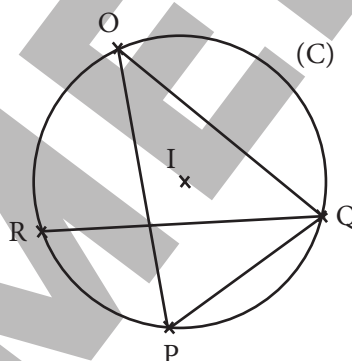
(Les points C, D et F appartiennent au cercle).



Exercice 3

(C) est un cercle de centre I. O, P, Q et R sont des points de (C).

Construis les angles au centre associés aux angles inscrits $\widehat{OPQ}$, $\widehat{PQR}$ et $\widehat{POQ}$.



Exercice 4

1. Trace un cercle (C) de centre O et de rayon 3 cm. Place sur ce cercle deux points A et B ; puis un point C tel que : $\text{mes } \widehat{BOC} = 75^\circ$.

2. a- Colorie l'arc de cercle intercepté par l'angle $\widehat{BAC}$.

b- Trace l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{BAC}$.

3. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 5

1. Trace un cercle (C) de centre O et de rayon 4 cm. Place sur ce cercle les points A, B et C tels que : $\text{mes } \widehat{ACB} = 50^\circ$.

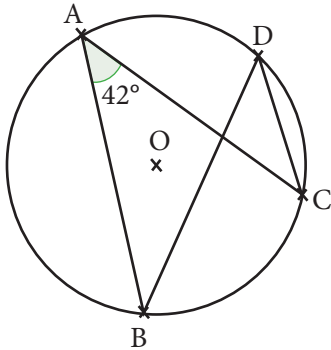
2. Trace l'angle inscrit $\widehat{ACB}$ et l'angle au centre qui lui est associé.

3. Détermine la mesure de l'angle au centre qui est associé à l'angle $\widehat{ACB}$.

Exercice 6

Dans la figure ci-dessous, les points A, B, C et D sont sur le cercle de centre O.

Détermine la mesure de l'angle $\widehat{BDC}$ puis celle de l'angle $\widehat{BOC}$.



Exercice 7

Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

1. La mesure d'un angle au centre vaut le double de celle de l'angle inscrit associé.
2. Deux angles inscrits dans un cercle ont la même mesure.
3. Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, mets en ordre les groupes de mots pour obtenir une propriété correcte.

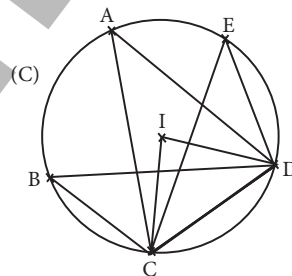
1. la même mesure / interceptent le même arc / alors ils ont / si deux angles inscrits / dans un cercle.
2. de la mesure de l'angle / inscrit dans un cercle / a pour mesure la moitié / un angle aigu / au centre associé.

Exercice 9

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, I est le centre du cercle (C). A, B, C, D et E sont des points de (C).

On donne : $\text{mes } \widehat{CID} = 70^\circ$.

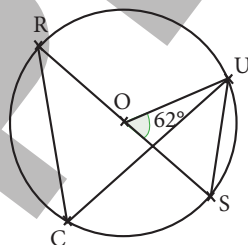
1. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{CED}$.
2. Nomme deux angles inscrits qui ont la même mesure que l'angle $\widehat{CED}$, en justifiant ta réponse.



⇒ B- Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un exercice

Exercice 10

Sur la figure ci-contre, les points R, C, S et U sont sur le même cercle de centre O et de diamètre [SR]. On sait que $\text{mes } \widehat{UOS} = 62^\circ$.



1. Calcule :
a) $\text{mes } \widehat{UOR}$.
b) $\text{mes } \widehat{UCR}$.
2. Justifie que $\text{mes } \widehat{USR} = \text{mes } \widehat{UCR}$.
3. Calcule $\text{mes } \widehat{URS}$.

Exercice 11

(C) est un cercle de centre O, le segment [AB] une corde ne passant pas par O et E un point n'appartenant pas à l'arc $\widehat{AB}$.

La bissectrice de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ coupe l'arc $\widehat{AB}$ au point F.

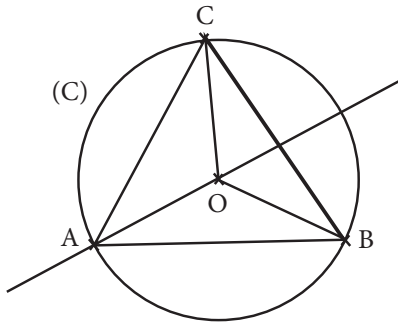
1. Fais une figure.
2. Compare $\text{mes } \widehat{AOF}$ et $\text{mes } \widehat{AEB}$.

Exercice 12

Sur la figure ci-après, ABC est un triangle équilatéral inscrit dans le cercle (C) de centre O.

1. Justifie que : $\text{mes } \widehat{BCA} = 60^\circ$.

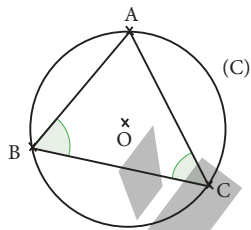
- Détermine mes $\widehat{BOC}$.
- Justifie que la droite (AO) est la médiatrice du segment [BC].



Exercice 13

Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en vraie grandeur, A, B et C appartiennent au cercle (C) de centre O.

On donne : mes $\widehat{ABC} = 85^\circ$ et mes $\widehat{BCA} = 50^\circ$.
Calcule mes $\widehat{AOB}$; mes $\widehat{AOC}$; mes $\widehat{BOC}$.

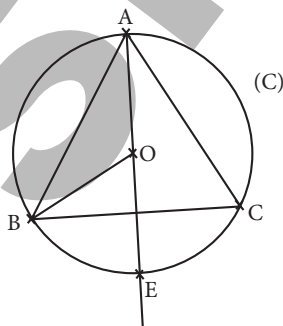


Exercice 14

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle équilatéral inscrit dans le cercle (C) de centre O.

La bissectrice (D) de l'angle $\widehat{A}$ recoupe (C) en E.

Détermine mes $\widehat{BOE}$.

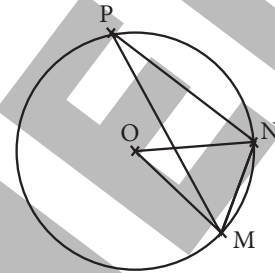


Exercice 15

Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en vraie grandeur, O est le centre du cercle. M, N et P sont des points de ce cercle.

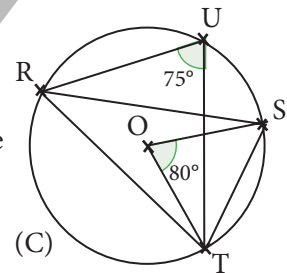
On donne : mes $\widehat{MNO} = 65^\circ$.

Détermine mes $\widehat{MPN}$.



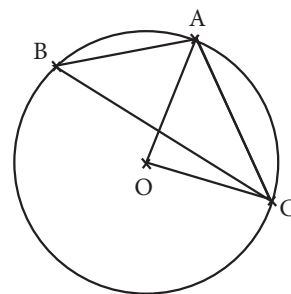
Exercice 16

Utilise les données de la figure ci-contre pour déterminer la mesure de chacun des angles du triangle RST.



Exercice 17

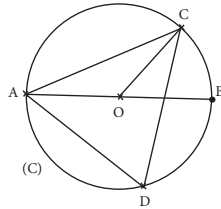
Sur la figure ci-dessous, les points A, B et C sont sur le cercle de centre O et mes $\widehat{OAC} = 36^\circ$.



- Indique la nature du triangle OAC. Justifie ta réponse.
- Détermine la mesure des angles suivants : $\widehat{OCA}$; $\widehat{AOC}$; $\widehat{ABC}$.

Exercice 18

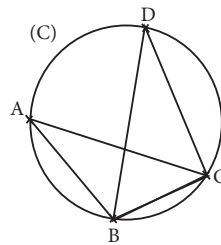
Sur la figure ci-contre, le segment $[AB]$ est un diamètre du cercle (C) de centre O et $\widehat{COB} = 30^\circ$.



Quelle est la mesure de chacun des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ADC}$?

Exercice 19

Les points A, B, C et D appartiennent au cercle (C) et vérifient : $\widehat{ABC} = 40^\circ$; $\widehat{ACD} = 50^\circ$.

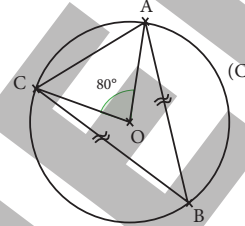


Démontrez que le triangle ABC est rectangle en B.

Exercice 20

(C) est un cercle de centre O tel que les points A, B et C appartiennent au cercle (C) et $\widehat{AOC} = 80^\circ$.

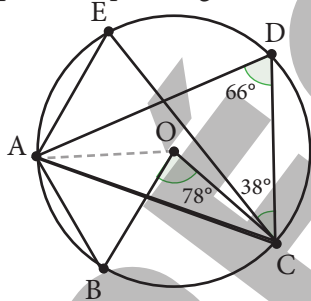
1. Démontrez que $\widehat{ABC} = 40^\circ$.
2. Justifiez que $\widehat{BAC} = 70^\circ$.
3. Déterminez $\widehat{AOB}$.



⇒ C. Utilisez des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un problème

Exercice 21

Un artisan d'Adzopé a reçu d'un client, une commande de nappe de table circulaire avec les contraintes précisées par la figure ci-dessous.



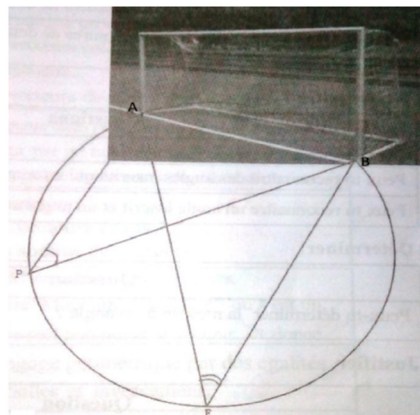
Il devra réaliser une toile circulaire de diamètre 3 m. La mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ doit être plus petite que 60° . Seulement, après analyse du schéma fourni, il se demande s'il est possible de satisfaire le client vu que la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ n'est pas donnée. L'artisan te sollicite pour l'aider à déterminer cette mesure pour une reproduction parfaite. Réponds aux préoccupations de l'artisan.

Exercice 22

A quelques jours de la finale OISSU un professeur d'EPS du Lycée moderne de Cocody, entraîneur de l'équipe du Lycée veut former spécialement deux

élèves KPAN et FLAN aux tirs au but. Il trace un cercle de centre O qui passe par les deux pieds A et B des buts. Kpan place le ballon sur le cercle et sur l'axe médian des buts au point F pour effectuer ses tirs. Quand à Flan, il le place sur le cercle mais vers un point de corner en P comme l'indique la figure ci-dessous. Après trois tirs chacun, Kpan a marqué 3 buts tandis que Flan n'en a marqué que 1. Flan déclare que son échec est dû au fait que son angle de tir est plus fermé que celui de Kpan. Kpan affirme quant à lui que c'est la même ouverture d'angle. Une chaude discussion pouvant aboutir à une bagarre s'engage entre les deux joueurs.

1. Comparez $\widehat{APB}$ et $\widehat{AFB}$.
2. Dis lequel des deux élèves a raison. Justifie ta réponse.



Leçon

7

VECTEURS

Situation d'apprentissage

En vue de prendre part à l'opération "école propre" initiée par la DRENA, des élèves en classe de 3^e ont la lourde tâche d'abattre un grand arbre situé devant leur salle de classe. Pour éviter que cet arbre tombe sur un bâtiment, ils se répartissent en trois groupes et chaque groupe tire sur une corde attachée au même endroit sur l'arbre. Pour prendre des précautions, ils souhaitent connaître la direction que cet arbre suivra lors de sa chute.

Découvre de nouveaux outils

1 Caractérisation de vecteurs, somme de vecteurs

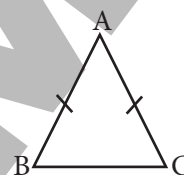
À la fin de cette séquence, tu dois être capable de :

- ✓ représenter :
 - un vecteur ;
 - des vecteurs égaux ;
 - vecteurs opposés ;
 - une somme de vecteurs.
- ✓ réduire :
 - des sommes de vecteurs.
- ✓ identifier
 - la différence de deux vecteurs.
- ✓ construire
 - une différence de deux vecteurs.

Activité 1

On donne ABC un triangle isocèle en A.

1. Trace les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$.
2. Donne le sens de chacun des deux vecteurs.
3. Justifie que les deux vecteurs ont la même longueur.
4. Détermine la direction de chacun des deux vecteurs.



Fais le point

- Le sens du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est de A vers B et celui de $\overrightarrow{CA}$ de C vers A.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$ ont même longueur car $AB = CA$.
- La direction de $\overrightarrow{AB}$ est celle de la droite (AB) et la direction de $\overrightarrow{CA}$ est celle de (AC).

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

1. Trace un vecteur $\overrightarrow{KF}$ de longueur 3 cm.
2. Trace une droite (D) puis trace un vecteur $\overrightarrow{ET}$ qui a même direction que la droite (D)

EXERCICE 2

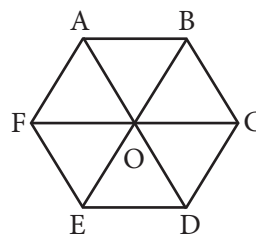
ABCDEF est un hexagone régulier de centre O.

Complète par un vecteur de la figure :

$\overrightarrow{AB}$ et ... ont la même longueur.

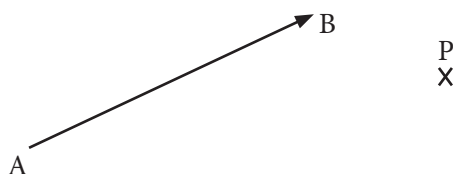
$\overrightarrow{BO}$ et ... ont la même direction

$\overrightarrow{BE}$ et ... ont le même sens .



Activité 2

Sur la figure ci-dessous, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur et P un point du plan.



1. Trace la droite (D) passant par le point P et parallèle à (AB).
2. A l'aide du compas, place un point R sur la droite (D) tel $PR = AB$.
3. Combien y-a-t-il de possibilités ? Décris les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PR}$ dans chaque cas (direction, sens et longueur).

Fais le point

Cas 1

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PR}$ ont la même direction, le même sens et la même longueur.

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont égaux. On note $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AB}$

Cas 2

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PR}$ ont la même direction, la même longueur mais de sens contraires.

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont opposés. On note $\overrightarrow{PR} = -\overrightarrow{AB}$

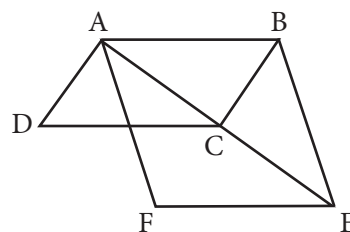
Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Sur la figure ci-contre, Les quadrilatères ABCD et ABEF sont des parallélogrammes.. C est le milieu de [AE] .

Réponds par vrai ou faux.

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
2. $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont deux vecteurs opposés
3. $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EC}$
4. $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont opposés



EXERCICE 2

Construis trois points A , B et C non alignés.

Construis les points T et K tels que :

1. Le point T tel que $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient deux vecteurs égaux.
2. Le point K tel que $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient deux vecteurs opposés.

Activité 3

1. Rappelle l'égalité de Chasles
2. Réduis $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$
3. Réduis $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{GF}$

Fais le point

Pour tous points A, B et C

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ c'est la relation de Chasles.
- $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$
- Pour réduire une somme de plusieurs vecteurs, on peut déplacer et regrouper certains vecteurs.

⇒ Utilise le nouvel outil

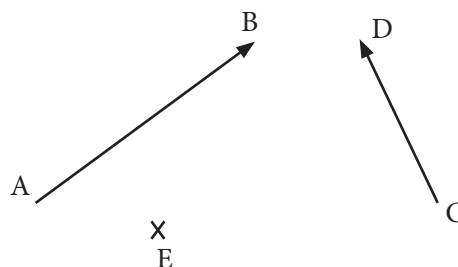
EXERCICE

1. Réponds par vrai ou faux
 - a) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{FG}$
 - b) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$
 - c) $\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{KT} = \overrightarrow{RK}$
 - d) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PN}$
2. Réduis : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CE}$

Activité 4

Sur la figure ci-contre :

1. Construis le point F tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.
2. Construis le point G tel que $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{CD}$.
3. a) Justifie que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$.
 b) Réduis $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$.
 c) Construis alors un représentant de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.



Fais le point

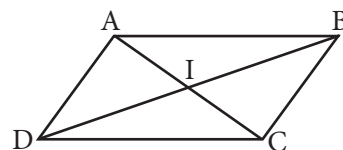
- Pour construire le point F tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$, connaissant les points A, B, et non alignés on peut construire le parallélogramme BAEF.
- Pour construire un représentant de la somme de deux vecteurs, on peut utiliser la relation de Chasles.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

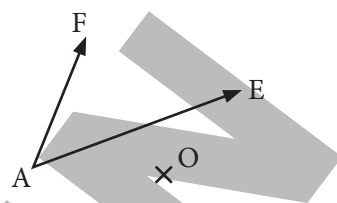
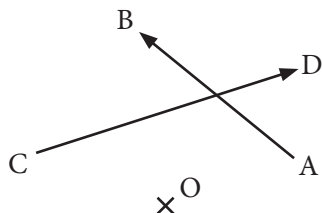
ABCD est un parallélogramme de centre I.
Détermine un représentant de chacune des sommes de vecteurs ci-contre :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \quad ; \quad \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{IA} \quad ; \quad \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{IB} \quad ; \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \quad ; \quad \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{IC}$$

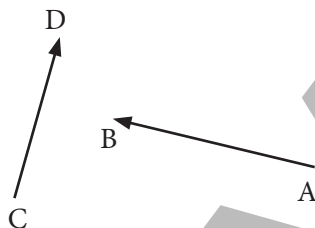


EXERCICE 2

1. Construis le point P tel que $\overrightarrow{OP}$ soit somme des vecteurs tracés dans chacun des cas suivants :



2. Construis un représentant de $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$.

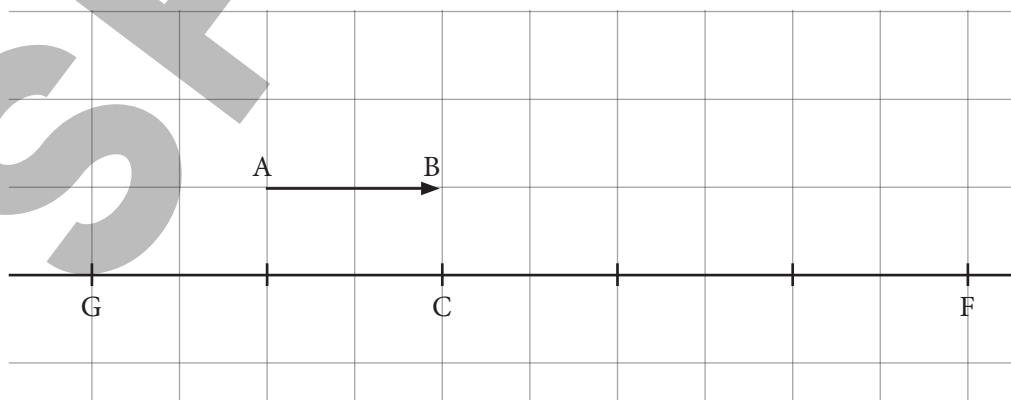


2 Produit d'un vecteur par un nombre réel

À la fin de cette séquence, tu dois être capable de :

- ✓ identifier ;
 - le produit d'un vecteur par un nombre réel ;
 - des vecteurs colinéaires.
- ✓ connaître ;
 - les propriétés relatives au produit d'un vecteur par un nombre réel
- ✓ construire :
 - le point M tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ où k est un réel non nul et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ donné.
- ✓ démontrer
 - la colinéarité de deux vecteurs.

Activité 1



1. Compare les directions des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF}$ d'une part et d'autre part celles $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG}$.
2. a) Compare les sens de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF}$.
b) Exprime la distance CF en fonction de la distance AB.
3. a) Compare les sens de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG}$.
b) Exprime la distance CG en fonction de la distance AB.

Fais le point

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF}$ ont la même direction, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF}$ ont le même sens et $CF = 3 AB$. On dit que $\overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG}$ ont la même direction, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont de sens contraires et $CG = 2 AB$. On dit que $\overrightarrow{CG} = -2\overrightarrow{AB}$.
- On dit que les vecteurs $3\overrightarrow{AB}$ et $-2\overrightarrow{AB}$ sont des produits du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par 3 et -2.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1. Les droites (IJ) et (AB) sont parallèles et $IJ = 6$ et $AB = 2$.
Exprime $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.



2. ABC est un triangle. Construis E et F tels que $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC}$.

Activité 2

1. Construis un segment [AB] de longueur 9 cm.
2. Partage [AB] en 7 parties égales.
3. a) Place le point C sur le segment [AB] tel que $AC = \frac{3}{7}AB$.
b) Exprime $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
4. Construis le point F tel que $\overrightarrow{AF} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$.

Fais le point

- $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$
- Pour construire le point C sur la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$, on partage le segment [AB] en 7 parties égales et on place le point C sur le 3ème trait à partir du point A dans le sens de A vers B.
- On place le point F sur le 2ème trait à partir du point A dans le sens contraire de A vers B.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1. Construis un triangle ABC et construis les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$$

2. Reproduis la figure ci-dessous .



Construis les points C , E et F tels que : $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AE} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Activité 3

1. Construis un vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis place deux points distincts E et J n'appartenant pas à la droite (AB).
2. Construis le point G tel que $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{AB}$.
3. Construis le point H tel que $\overrightarrow{JH} = -3\overrightarrow{AB}$.

Fais le point

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EG}$ ont la même direction et le même sens. Les deux vecteurs sont colinéaires.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{JH}$ ont la même direction mais de sens contraires. Les deux vecteurs sont colinéaires.
- Deux vecteurs colinéaires sont deux vecteurs qui ont la même direction.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

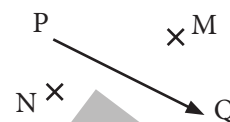
Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{TU}$ sont tels que : $\overrightarrow{MN} = -7\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{TU}$.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1. Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{RS}$ sont colinéaires de sens contraires.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{TU}$ et $\overrightarrow{RS}$ sont colinéaires de sens contraires.
3. Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{TU}$ sont colinéaires de même sens.
4. Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{TU}$ ne sont pas colinéaires.
5. $\overrightarrow{MN} = -7 \times \overrightarrow{RS}$.

EXERCICE 2

Sur la figure ci-dessous, construis le point A tel que les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{AN}$ soient colinéaires de même sens et le point F tel que les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{MF}$ soient colinéaires de sens contraires.



Activité 4

Soit A et B deux points donnés tels que $AB = 3\text{cm}$

- Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $-2\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
- Donne la longueur du vecteur $-2\overrightarrow{AB}$.

Fais le point

On admet que :

- pour tout nombre réel k les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $k\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ;
- la longueur du vecteur $k\overrightarrow{AB}$ est $|k| \times AB$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Écris le numéro de chaque phrase suivi de Vrai si la phrase est vraie ou Faux si la phrase est fausse.

1	Tout vecteur est colinéaire au vecteur nul.
2	Si ABC est un triangle, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ sont colinéaires
3	A, B et C sont trois points distincts du plan. Si $AB = 3AC$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
4	$3\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{AB}$ sont des vecteurs colinéaires

Activité 5

On donne A et B deux points du plan.

- Construis $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
 - Construis $\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{MN}$.
 - A l'aide des éléments caractéristiques d'un vecteur (direction, sens et longueur) justifie que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$
- Soit I, J et K trois points non alignés.
 - Construis le vecteur $2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{IK}$
 - A l'aide de la règle et du compas, compare $2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{IK}$ et $2(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IK})$

Fais le point

On admet que :

Pour tous x et y deux nombres réels et tous vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$.

- $x(y\overrightarrow{MN}) = xy\overrightarrow{MN}$
- $x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MN} = (x + y)\overrightarrow{MN}$
- $x\overrightarrow{MN} + x\overrightarrow{PQ} = x(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ})$

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

A, B ; C et D sont des points du plan. Simplifie les écritures suivantes.

$$2\overrightarrow{AB} + \left(-\frac{2}{5}\right)\overrightarrow{AB} ; 3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AB} ; \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} ; -3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + 9\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$$

EXERCICE 2

A, B et C sont trois points non alignés.

On donne $\overrightarrow{CD} = 2(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - (5\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$.

1. Réduis $\overrightarrow{CD}$.
2. Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires.

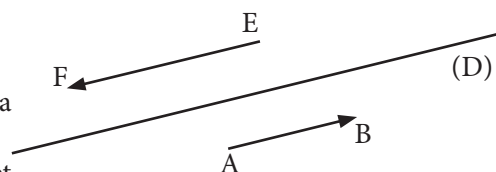
3 Vecteurs directeurs d'une droite – vecteurs orthogonaux

À la fin de cette séquence, tu dois être capable d'identifier :

- des vecteurs directeurs d'une droite ;
- des vecteurs orthogonaux.

Activité 1

1. Sur la figure ci-contre les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la même direction, celle de la droite (D).
2. Donne la position relative des droite (D), (EF) et (AB).



Fais le point

- (AB), (D) et (EF) sont parallèles.
- On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont vecteurs directeurs de la droite (D)

⇒ Utilise le nouvel outil

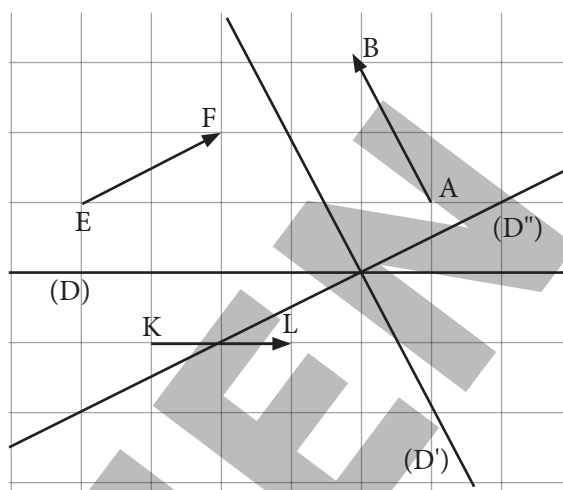
EXERCICE 1

Observe la figure ci-contre.
Recopie et associe chaque droite à un de ses vecteurs directeurs

(D) • • $\overrightarrow{AB}$

(D') • • $\overrightarrow{EF}$

(D'') • • $\overrightarrow{KJ}$



EXERCICE 2

Trace une droite (D).
Construis trois vecteurs directeurs de la droite (D).

Activité 2

- Trace (D) et (Δ) deux droites perpendiculaires.
- Marque deux points A et B sur (D) et deux points E et F sur (Δ).
- Justifie que les droites (EF) et (AB) sont perpendiculaires.
- Cite un vecteur directeur de la droite (D) et un vecteur directeur de la droite (Δ).

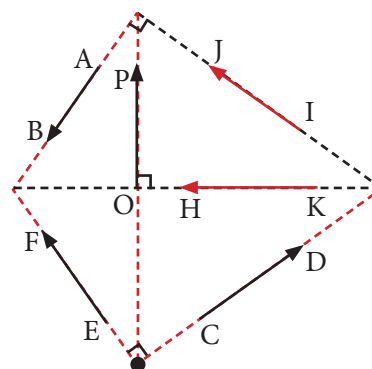
Fais le point

- Les droites (EF) et (AB) sont perpendiculaires. On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont orthogonaux.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

On considère la figure codée ci-contre.
Parmi les couples de vecteurs ci-dessous,
Entoure ceux qui sont composés de vecteurs
Orthogonaux :
 $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{EF})$; $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{IJ})$; $(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{CD})$; $(\overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{CD})$; $(\overrightarrow{OP}; \overrightarrow{HK})$;
 $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$ et $(\overrightarrow{HK}; \overrightarrow{CD})$



EXERCICE 2

ABC est un triangle quelconque. On donne deux points M et N extérieurs au triangle ABC.
Construis les points R et S tels que :
a) les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{RM}$ soient orthogonaux.
b) les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{NS}$ soient orthogonaux.

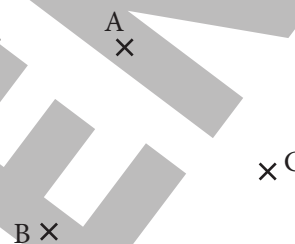
3 Langage géométrique-langage vectoriel

À la fin de cette séquence, tu dois être capable de démontrer :

- l'alignement de deux points ;
- le parallélisme de droites.

Activité

1. Sur la figure ci-contre les trois points A, B et C non alignés du plan.
2. Construis le point D tel que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$.
3. Construis le point E tel que $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB}$.
4. Donne la position relative des droites (AB) et (CD).
5. Donne la position relative des points A, B et E.



Fais le point

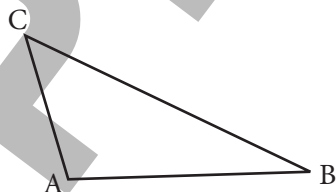
- Pour démontrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles, il faut et il suffit de trouver un nombre réel k non nul tel $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.
- Pour démontrer que trois points M, N et P sont alignés, il faut et il suffit de trouver un nombre réel k non nul tel $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{MP}$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Sur la figure ci-dessous ABC est un triangle.

1. Construis les points P et Q tels que $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{AC}$.
2. Justifie que les points A, P et B sont alignés.
3. Justifie que les droites (BQ) et (AC) sont parallèles.



EXERCICE 2

A, B et C sont trois points non alignés. (on ne demande pas de faire la figure)
On donne les points G, E et F tels que : $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{GF} = 2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$.
Justifie que les points E, F et G sont alignés

Retiens les outils essentiels

1 Caractérisation de vecteurs, somme de vecteurs

1. Caractéristiques d'un vecteur

Définition

Un vecteur est caractérisé par sa direction, son sens et sa longueur.

Exemple

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour :

Direction : la droite (AB)

Sens : de A vers B

Longueur : la longueur AB du segment [AB].



2. Vecteurs égaux

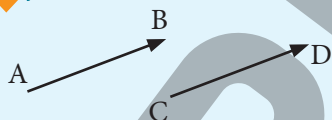
Définition

A, B, C et D sont des points.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils ont :

- La même direction,
- Le même sens,
- La même longueur.

Exemple



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ car :

(AB) // (CD), AB = CD et les couple de points (A ; B) et (C ; D) ont le même sens



E, F, G et H sont alignés, (E ; F) et (G ; H) ont le même sens,

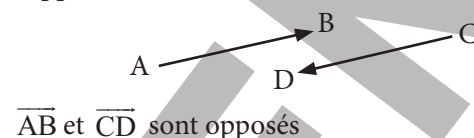
EF = GH donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$

3. Vecteurs opposés

Définition

Deux vecteurs sont dits opposés lorsqu'ils ont la même direction, la même longueur mais de sens contraires.

L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est noté $-\overrightarrow{AB}$.



Remarque

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

4. Somme de vecteurs

a) Egalité de Chasles

Propriété

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Exemple

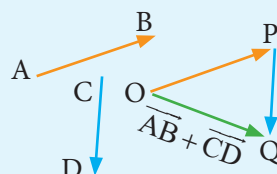
$$\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IT} = \overrightarrow{PT} ; \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MK}$$

b) Construction du représentant de la somme de deux vecteurs

Méthode

Pour construire le représentant du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ d'origine un point O donné, on peut procéder comme suit :

- Construire le représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'origine O, soit : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$;
- Construire le représentant du vecteur $\overrightarrow{CD}$ d'origine P, soit : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{CD}$;
- Le vecteur $\overrightarrow{OQ}$ est égal à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

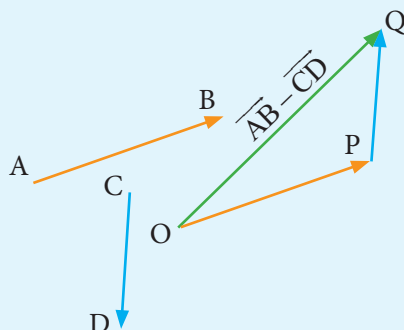


5. Différence de deux vecteurs

Définition

A, B, C et D sont quatre points du plan.
La différence des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$



2. Produit d'un vecteur par un réel

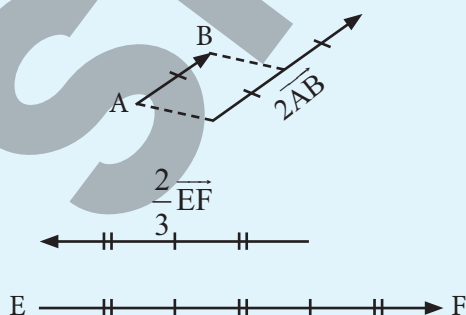
1. Définition

Définition

A et B sont deux points distincts du plan. k est un réel non nul. On appelle le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le nombre réel k le vecteur $k\overrightarrow{AB}$ tel que :

- $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont même direction
- $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens si $k > 0$
- $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraire si $k < 0$
- $MN = |k|AB$

Exemple



2. Propriétés

Propriété

A, B, C et D sont 4 points du plan x et y sont deux réels.

- $x(y\overrightarrow{AB}) = xy\overrightarrow{AB}$
- $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AB} = (x + y)\overrightarrow{AB}$
- $x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{CD}$
- $1\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$
- $0\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

3. Vecteurs colinéaires

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits colinéaires lorsqu'ils ont la même direction ou lorsque l'un au moins des deux est le vecteur nul.

Propriété

A, B, C et D sont quatre points distincts du plan.
 $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si on peut trouver un nombre réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$

3. Vecteurs directeurs d'une droite vecteurs orthogonaux

Définition

- On dit que le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (D) lorsque les droites (AB) et (D) sont parallèles.
- On dit que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux lorsqu'ils sont vecteurs directeurs de deux droites perpendiculaires.

Notation

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont perpendiculaires se note :
 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.

4 Langage géométrique – langage vectoriel

	Langage géométrique	Langage vectoriel
Milieu d'un segment	I est le milieu de [AB]	• $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ • $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ • $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ • $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
Points alignés	A,B et M sont alignés	On peut trouver un nombre réel k non nul tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$
Droites parallèles	$(AB) // (CD)$	On peut trouver un nombre réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$
Parallélogramme	ABCD est un parallélogramme	• $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ • $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Exercices commentés

Exercice 1

ABC est un triangle.

1. Construis le point M tel que : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
2. Démontre que les points B, M et C sont alignés.

Solution

1. Construction de M : On choisit un point S tel que

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SM}$$

donc on pose alors : $\overrightarrow{AS} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{SM} = -2\overrightarrow{AC}$.

On construit alors successivement S et M.

2. On va exprimer $\overrightarrow{BM}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

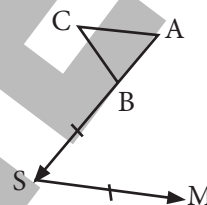
on a : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$ puis en remplaçant $\overrightarrow{AM}$ par son expression dans l'énoncé, on a $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + (3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC})$ soit

$$\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} + (3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$$

On factorise alors par 2 ainsi on a

$$\overrightarrow{BM} = 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) = 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$$

d'où $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}$ alors BM et CB sont colinéaires donc les points B, M et C sont alignés.



Exercice 2

ABC est un triangle

Construis les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$.

2. Justifie que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AE}$.
3. Justifie que les droites (BF) et (EC) sont parallèles

Solution

1. Pour construire le point E, on partage [AB] en 3 segments de même

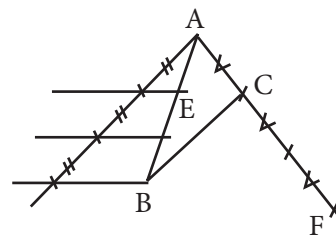
longueur et comme $\frac{1}{3}$ étant positif, on place E sur le segment [AB] dans le sens de A vers B à partir de A et le point F.

$$2) \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ donc } \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AE}$$

3. On va exprimer $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{EC}$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -3\overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{AC} = 3(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}) = 3\overrightarrow{EC}$$

$\overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{EC}$ donc $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires d'où (BF) // (EC).



Exercices commentés

Exercice 3

A, B, C et D sont quatre points du plan.

On donne les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

Démontrez que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$

Solution

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}) \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

Remarque : En appliquant l'égalité de Chasles, il faut toujours faire intervenir les points qui donnent des vecteurs donnés dans l'énoncé.

Utilisation des outils essentiels

⇒ A- Utilise plusieurs outils de la leçon pour résoudre un exercice

Exercice 1

ABCD est un parallélogramme de centre I.
Réponds par VRAI ou par FAUX à chacune des affirmations suivantes :

1. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AI}$
2. A, I et C sont trois points alignés.
3. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$
4. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$
5. $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IC}$

Exercice 3

Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, une seule affirmation est vraie. Ecris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre de la bonne réponse.

N°	AFFIRMATIONS	A	B	C	D
1	$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} =$	$3 \overrightarrow{CD}$	$\overrightarrow{CD}$	$\vec{0}$	$3 \overrightarrow{DC}$
2	Un quadrilatère ABCD est un parallélogramme si et seulement si	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$	$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$
3	Le point I est le milieu [AB] si et seulement si	$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$	$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$	$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$	$\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{AB}$

Exercice 4

A et B sont des points du plan. Écris plus simplement

- a. $2(-3\overrightarrow{AB})$
- b. $3(6\overrightarrow{AB})$
- c. $-3\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\right)$
- d. $\frac{5}{2}(4\overrightarrow{AB})$
- e. $\overrightarrow{AB} + \frac{4}{2}\overrightarrow{AB}$
- f. $\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Exercice 2

Recopie et complète le tableau ci-dessous

Langage géométrique	Langage vectoriel
A est le milieu du segment [IJ]	
.....	$5\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$
.....	$\overrightarrow{EF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$
PAIX est un parallélogramme	

Exercice 5

Recopie et complète les pointillés par le vecteur manquant pour obtenir une égalité vraie.

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \dots$
2. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \dots$
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = \dots$
4. $\dots + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE}$

Exercice 6

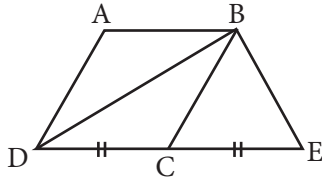
A, B et C sont trois points non alignés. Dans chacun des cas, construis le point M tel que :

- a. $\overrightarrow{CM} = 2(-3\overrightarrow{AB})$
- b. $\overrightarrow{CM} = 2\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)$

c. $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

d. $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$

Exercice 7



- ABCD est un parallélogramme,
- C est le milieu de [DE]

Ceci est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chacune des questions, une seule des trois réponses est exacte. En observant la figure ci-dessus note sur ta copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

		a	b	c
1	$\overrightarrow{DE}$ est égal à	$\overrightarrow{AB}$	$2\overrightarrow{AB}$	$2\overrightarrow{CD}$
2	$\overrightarrow{AB}$ est égal à	$-\overrightarrow{DE}$	$-\overrightarrow{CE}$	$-\overrightarrow{CD}$
3	$2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ est égal à	$2\overrightarrow{AD}$	$\overrightarrow{BE}$	$\overrightarrow{BC}$

Exercice 8

A, B et C sont trois points non alignés.

1. Construis les points E et F tels que $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

2. Exprime $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 9

RFPQ est un parallélogramme.

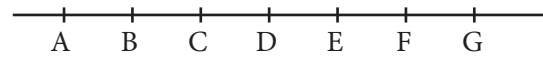
Démontre que $\overrightarrow{RF} - \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{FR} - \overrightarrow{FQ}$.

Exercice 10

ABC est un triangle. I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].

Démontre que $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$

Exercice 11



Sur la figure ci-dessus,

$AB = BC = CD = DE = EF = FG$.

Complète par un nombre entier ou une fraction irréductible :

$\overrightarrow{AD} = \dots \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CF} = \dots \overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{AG} = \dots \overrightarrow{AC}$;

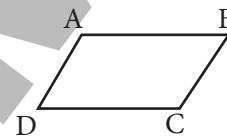
$\overrightarrow{AF} = \dots \overrightarrow{EG}$; $\overrightarrow{AC} = \dots \overrightarrow{FD}$

Exercice 12

ABC est un triangle. E et F sont deux points tels que $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AC}$. Fais une figure.

1. Justifie que $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{CB}$.
2. Démontre que les droites (EF) et (BC) sont parallèles

Exercice 13



ABCD est un parallélogramme. Justifie que :

- $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$.
- $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DB}$

Exercice 14

- ABC est un triangle tel que $BC = 6$ cm
- I est le milieu de [BC].

1. Construis D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BI}$.
2. Justifie que CIAD est un parallélogramme.

Exercice 15

ABC est un triangle.

1. Construis P et Q tels que $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AC}$.
2. Démontre que C est le milieu de [PQ]

Exercice 16

A, B et C sont trois points non alignés.

On donne $\overrightarrow{CD} = 2(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - (5\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA})$.

1. Réduis $\overrightarrow{CD}$.
2. Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires.

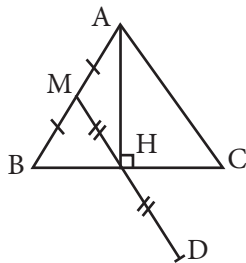
3. Construis alors D.

Exercice 17

ABC est un triangle.

1. Construis R et T tels que : $\overrightarrow{AT} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AS} = -2\overrightarrow{AC}$
2. a) Écris $\overrightarrow{ST}$ comme somme de deux vecteurs de la figure.
b) Démontre que les droites (BC) et (TS) sont parallèles.

Exercice 18



Sur la figure ci-dessus :

ABC est un triangle isocèle en A ;
H est le projeté orthogonal de A sur (BC) ;
M est le milieu du segment [AB] ;

D est le symétrique de M par rapport à H ;

1. Justifie que le quadrilatère BMCD est un parallélogramme.
2. Justifie que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{MD}$

Exercice 19

ABC est un triangle.

A est le milieu de [CD], $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD}$

1. Fais une figure.
2. Justifie que $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$.
3. De tout ce qui précède, justifie que E est le milieu de [DF]

⇒ B. Utilise plusieurs outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un exercice

Exercice 20

ABCD est un quadrilatère quelconque.

On considère M, N, O et P tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
 $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

Justifie que le quadrilatère MNPO est un parallélogramme.

Exercice 21

On considère les points A, B, C, D et F du plan tels que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$.
Justifie que les points C, D et F sont alignés.

Exercice 22

On donne $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

1. Exprime $2\overrightarrow{OH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. a) Démontre que $2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{GH} = \vec{0}$
b) Déduis-en que les points G, H et O sont alignés

Exercice 23

Quatre points non alignés A, B, C et D sont tels que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Soit I le milieu de [BC] et E un point n'appartenant pas à la droite (AB).

On désigne par F le symétrique de E par rapport à I.
Justifie que le quadrilatère AEDF est un parallélogramme.

Exercice 24

On donne les points A et B tels que AB = 7 cm.
Construis le point C tel que $3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Exercice 25

ABC est un triangle.

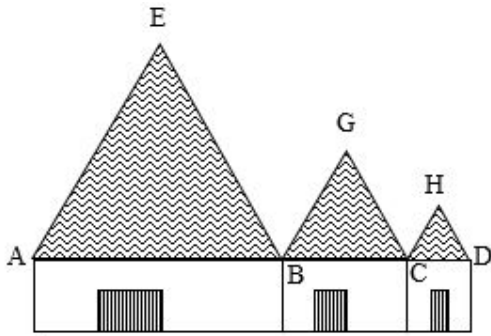
1. Construis le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
2. Construis le point F tel que $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$
3. Justifie que les points A, E et F sont alignés.

Exercice 27

(D) et (D') sont deux droites sécantes et O un point n'appartenant ni à (D), ni à (D').
Construis un point M sur (D) et un point N sur (D') tels que $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$

⇒ C- Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un problème

Exercice 28

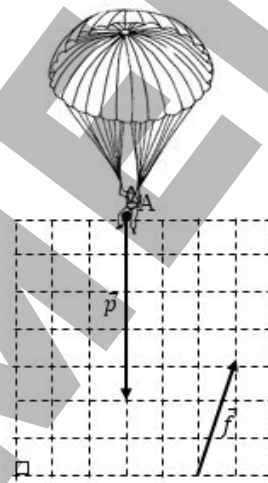


Lors d'une sortie détente du club mathématique d'un lycée de Bingerville sur un site touristique à Adiaké, les membres du dit club ont été émerveillés particulièrement par trois cases construites sur pilotis. L'élève Yozan membre, en classe de 2^{nde} C prend note auprès des guides et réalise un plan de vue de face avec les données comme indiqué sur la figure ci-dessus. De retour en classe, elle présente son dessin à son professeur de mathématiques qui affirme que les sommets des trois cases sont alignés. Tous les élèves de la classe veulent alors justifier cette affirmation du professeur.

- ABE, BCG et CDH sont des triangles équilatéraux
- $AB = 2 BC$ et $BC = 2 CD$
- Les points A, B, C et D sont alignés.
- Les droites (AE), (BG) et (CH) sont parallèles
- Les droites (BE), (CG) et (DH) sont parallèles.

1. Justifie que : $\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{CH}$
2. Exprime chacun des vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{GH}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CG}$.
3. Justifie que les sommets des trois cases sont alignés.

Exercice 29



Un parachutiste doit quitter le point A pour descendre au sol à un point B.

Il est dirigé par son vecteur poids $\vec{p}$. En même temps le vent le pousse vers le haut selon le vecteur force représenté par $\vec{f}$. Yabré élève en classe de 3^{ème} est curieuse de savoir comment le parachutiste pourra descendre au sol et à quel endroit exactement. Elle explique la situation à son professeur de physiques et chimie qui lui apprend que la trajectoire du parachutiste a la même direction que celle du vecteur force résultant du parachutiste qui est la somme de son poids et de la force exercée par le vent.

1. Reproduis les vecteurs poids et le vecteur force du vent.
2. Construis la trajectoire du parachutiste pour atterrir au sol.

Leçon

8

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

Situation d'apprentissage

Pour la réception de ses amis le jour du nouvel an, monsieur Kouamé qui ne dispose que de vingt mille francs décide de se rendre en ville pour acheter des pommes de terre. Sa femme l'informe que le kilogramme de pomme coûte mille francs au supermarché. Son transport aller-retour lui revient à deux mille.

Monsieur Kouamé voudrait bien savoir le nombre de kilogramme de pommes de terre il pourrait acheter après avoir déduits son transport. Il demande à sa fille en classe de 3^e de lui proposer la solution à sa préoccupation. Cette dernière, une fois en classe, s'associe ces camarades de classe pour déterminer cette solution.

Découvre de nouveaux outils

1 Résolution d'équations

À la fin de cette séquence, tu dois être capable de résoudre des équations du type :

- ✓ $ax + b = 0$
- ✓ $ax + b = cx + d$
- ✓ $(ax+b)(cx+d) = 0$

Activité 1

1. Rappelle la résolution d'une équation du type : $ax = b$ avec $a \neq 0$.
2. Dédus-en la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $8x + 6 = 0$.

Fais le point

Pour résoudre une équation de type $ax + b = 0$, (avec a non nul) on peut procéder comme suit :

- On ajoute à chaque membre, l'opposé de b ;
- Puis on multiplie les nombres de chaque membre par l'inverse de a .

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $5x + 7 = 0$

EXERCICE 2

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3x - 7 = -10$

EXERCICE 3

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{5}{7}x + 9 = 0$

EXERCICE 4

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-\frac{2}{3}x - 3 = \frac{5}{6}$

Activité 2

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation
 $7x - 7 = 5x + 2$

Fais le point

Pour résoudre une équation de type $ax + b = cx + d$, on peut procéder comme suit :

- regrouper les expressions contenant l'inconnue dans un même membre ;
- procéder comme la résolution des équations de type : $ax + b = 0$.

Découvre de nouveaux outils

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $3x + 2 = 2x + 5$;
2. $5x - 1 = x - 7$

EXERCICE

2

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $-3x + 7 = -5x - 4$;
2. $\frac{3}{2}x - 5,5 = \frac{5}{2}x + 7,3$

EXERCICE

3

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $-7,5x = 3 - 2,5x$
2. $-\frac{3}{4}x + 2 = 5,5x$

Activité

3

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
 $(2x+3)(5x+2) = 0$

Fais le point

Pour résoudre une équation de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$;

- Il faut poser que $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$
- Ensuite on résout deux équations du type $ax + b = 0$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
 $(14x-5)(8-7x) = 0$

EXERCICE

2

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{4}x - \frac{2}{7}\right) = 0$$

EXERCICE

3

Équations du type $x^2 = a$ avec $(a \geq 0)$

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1. $k^2 = 81$
2. $(x-6)^2 = 0$;
3. $t^2 - 15 = 0$.

2 Résolution d'inéquations

À la fin de cette séquence, tu dois être capable de résoudre des inéquations des types :

- ✓ $ax + b \geq 0$; $ax + b \leq 0$;
- ✓ $ax + b > 0$; $ax + b < 0$;
- ✓ $ax + b \geq cx + d$;
- ✓ $ax + b < cx + d$.

Activité

1. Rappelle la résolution dans $\mathbb{R}$ d'une inéquation du type $ax \geq b$, où a est un nombre réel non nul.
2. Dédus-en la résolution dans $\mathbb{R}$ d'une inéquation du type $ax + b \geq 0$, où a est un nombre réel non nul.
3. Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-3x + 7 \geq 0$.

Fais le point

- Si $a > 0$, alors $ax + b \geq 0$ équivaut à $x \geq \frac{-b}{a}$.

Donc l'ensemble des solutions est : $S = \left[\frac{-b}{a} ; +\infty \right[$.

- Si $a < 0$, alors $ax + b \geq 0$ équivaut à $x \leq \frac{-b}{a}$.

Donc l'ensemble des solutions est : $S = \left] -\infty ; \frac{-b}{a} \right]$.

- Les autres types d'inéquations annoncées ci-dessus se résolvent de la même manière ou s'y ramène en tenant compte du signe du coefficient de x .

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

On donne les nombres réels suivants : 5 ; $-\frac{2}{3}$; $\frac{17}{2}$; 6 et 0 .

Cite parmi ces nombres ceux qui sont solutions de l'inéquation : $-3 + 2x \leq 7$.

EXERCICE

2

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$2x + 5 \leq 0.$$

EXERCICE

3

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$-3x + 7 > 0.$$

EXERCICE

4

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$5x - 12 \leq 8x + 3.$$

EXERCICE

5

Relie chaque inéquation à son ensemble solution en utilisant les chiffres et les lettres.

Exemple : 7-h.

INÉQUATIONS
1. $5x - 2 \leq 0$
2. $3x + 2 < 0$
3. $\frac{x}{2} + \frac{1}{5} > 0$
4. $3 - 7x < 0$
5. $-4x + \frac{7}{3} > 0$
6. $3x - 5 \geq 0$

ENSEMBLES SOLUTIONS
a. $\left] \frac{3}{7}; \rightarrow \right[$
b. $\left] \leftarrow; \frac{2}{5} \right]$
c. $\left[\frac{5}{3}; \rightarrow \right[$
d. $\left] \leftarrow; \frac{-2}{3} \right[$
e. $\left] \leftarrow; \frac{7}{12} \right[$
f. $\left] -\frac{2}{5}; \rightarrow \right[$

EXERCICE

6

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante et représente sa solution sur une droite graduée.

$$2x + 5 > x - 1.$$

3 Résolution d'un système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$

À la fin de cette séquence, tu dois être capable de résoudre un système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$.

Activité

Résolution dans $\mathbb{R}$ du système d'inéquations
$$\begin{cases} -2x + 3 < 13 \\ 3x + 4 < 25 \end{cases}$$

1. Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-2x + 3 < 13$. Note S_1 l'ensemble des solutions.
2. Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x + 4 < 25$. Note S_2 l'ensemble des solutions.
3. L'ensemble des solutions du système d'inéquations est S tel que : $S = S_1 \cap S_2$. Détermine S .

Fais le point

Pour résoudre un système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$, on peut procéder comme suit :

- on résout séparément chaque inéquation ;
- on obtient alors l'ensemble des solutions du système en prenant l'intersection des ensembles de solutions de deux inéquations.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

1. Résous dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquations
$$\begin{cases} 2x \geq -10 \\ -4x > -28 \end{cases}$$
2. Représente l'ensemble des solutions du système sur une droite graduée.

EXERCICE

2

Résous dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquations
$$\begin{cases} 3x + 7 > 4x \\ -x + 1 \leq 5x - 12 \end{cases}$$

Retiens les outils essentiels

1 Équations du premier degré dans $\mathbb{R}$

Propriétés

- Soient a et b deux nombres réels tel que a est non nul ($a \neq 0$).
 - L'équation du type $ax+b=0$ équivaut à est $x = -\frac{b}{a}$
 - L'ensemble solution de cette équation est $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$
- Soient a, b, c et d des nombres réels tels que a et c sont non nuls ($a \neq 0, c \neq 0$) et $a \neq c$.
 - L'équation du type $ax+b=cx+d$ équivaut à $x = \frac{d-b}{a-c}$
 - L'ensemble solution de cette équation est $\left\{\frac{d-b}{a-c}\right\}$.
 - L'équation du type: $(ax+b)(cx+d)=0$ équivaut à $ax+b=0$ ou $cx+d=0$.
 - L'ensemble solution de cette équation est $\left\{-\frac{b}{a}; -\frac{d}{c}\right\}$.
- Soit a un nombre réel positif
 - L'équation du type $x^2=a$ équivaut à $(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$
 - L'ensemble solution de cette équation est $\{\sqrt{a}; -\sqrt{a}\}$.

2 Inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}$

Méthode

- Soient a et b deux nombres réels tels que a est non nul ($a \neq 0$). La résolution de l'inéquation du type $ax+b \geq 0$ se fait de la manière suivante.

- Si a est positif, on a : $ax \geq -b$ alors $x \geq -\frac{b}{a}$

Donc l'ensemble solution de cette inéquation

est $\left[-\frac{b}{a}; +\infty\right[$

- Si a est négatif

On a : $ax \geq -b$ alors $x \leq -\frac{b}{a}$.

Donc l'ensemble solution de cette inéquation

est $\left]-\infty; -\frac{b}{a}\right]$.

Remarque

Les inéquations des types $ax+b \leq 0$; $ax+b < 0$ et $ax+b > 0$ se résolvent de manière semblable.

Propriété

- Soient a, b, c et d des nombres réels :

L'inéquation $ax+b \leq cx+d$ équivaut à :

$$(a-c)x \leq d-b$$

- Si $a-c > 0$, alors $x \leq \frac{d-b}{a-c}$

L'ensemble solution de cette inéquation est

$\left]-\infty; \frac{d-b}{a-c}\right]$

- Si $a-c < 0$, alors $x \leq \frac{d-b}{a-c}$

L'ensemble solution de cette inéquation est

$$\left[\frac{d-b}{a-c}; \rightarrow \right[$$

Remarque

Les inéquations du type $ax + b \geq cx + d$;
 $ax + b < cx + d$ et $ax + b > cx + d$ se résolvent
 de manière semblable.

3

Système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}$

Méthode

- Soient a, b, c et d des nombres réels tels que $a \neq 0$ et $c \neq 0$.

Pour résoudre un système de deux inéquations

tel que
$$\begin{cases} ax + b > 0 \\ cx + d < 0 \end{cases}$$

- On résout chacune des inéquations ;
- L'ensemble solution du système est l'intersection des ensembles solutions des deux inéquations.
- L'ensemble solution d'un système de deux inéquations est noté sous forme d'intervalle.

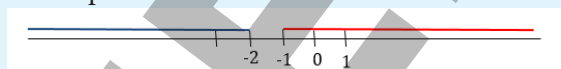
Remarque

Si les deux ensembles de solution n'ont aucun élément commun, alors l'ensemble solution du système est vide et se note : $S = \emptyset$.

Exemple

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases}$$

Sur la droite graduée, l'ensemble solution de $x + 1 > 0$ est représenté en rouge et celui de $x + 2 < 0$ est représenté en bleu.



L'ensemble solution de ce système est : $S = \emptyset$

Remarque

Il ne faut pas confondre, trouver une solution d'une inéquation (équation) et résoudre une inéquation (équation).

- *Trouver une solution d'une inéquation (équation) : c'est trouver un nombre qui vérifie cette inéquation (équation)*
- *Résoudre une inéquation (équation) : c'est trouver l'ensemble des solutions de cette inéquation (équation).*

Exercices commentés

Exercice

Un de tes camarades de classe te propose de déterminer son âge et celui de son père. Pour cela il te donne les informations suivantes.

Aujourd'hui, mon père a 20ans de plus que moi. Dans six ans, il aura deux fois mon âge. Quel est mon âge et celui de mon père aujourd'hui ?

Solution

- Pour résoudre ce problème, je vais choisir x comme l'âge de mon ami aujourd'hui. Par conséquent l'âge de son père aujourd'hui est $x + 20$
- Dans six ans mon ami aura $x + 6$ et son père aura $x + 20 + 6 = x + 26$

Nous savons que dans six ans son père aura le double de son âge, donc cela peut se traduire par l'équation suivante : $x + 26 = 2(x + 6)$.

Déterminons leur âge en résolvant cette équation.

$$x + 26 = 2(x + 6) \Leftrightarrow x + 26 = 2x + 12$$

$$\Leftrightarrow x - 2x = 12 - 26$$

$$\Leftrightarrow x = -14$$

$$\Leftrightarrow x = 14$$

Donc aujourd'hui mon ami a 14 ans et son père en a $14 + 20 = 34$ ans et dans six ans il aura 20ans et son père en aura 40.

Utilisation des outils essentiels

⇒ A. Utilise plusieurs outils de la leçon pour résoudre un exercice

Exercice 1

Reproduis le diagramme ci-dessous, puis relie chaque équation de la colonne de gauche à sa solution dans la colonne de droite.

ÉQUATIONS	ENSEMBLE SOLUTION
$-x + 2 = 0$	$\left\{\frac{7}{5}\right\}$
$\frac{3}{4}x = 4$	$\{-3 ; 3\}$
$7 - 2x = 3x$	$\{-\sqrt{3} ; \sqrt{3}\}$
$(x-3)(x+3) = 0$	$\left\{\frac{16}{3}\right\}$
$x^2 = 4$	$\{2\}$
$x^2 - 3 = 0$	$\{-2 ; 2\}$

Exercice 2

Dans le tableau ci-dessous, pour chaque équation, trois nombres sont proposés dont un seul est solution de l'équation. Écris le numéro de l'équation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	ÉQUATIONS	A	B	C
1	$4x^2 + 20x + 25 = 0$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{2}{5}$
2	$-8(x+5) = 0$	-8	5	-5
3	$x^2 + 3x - 10 = 0$	2	-2	1
4	$3(x+1)^2 - 2x^2 + 2 = 0$	-1	0	5
5	$(x-1)^2 = 4$	-3	4	3
6	$\frac{x-3}{2} = 1$	1	-1	5

Exercice 3

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $5x - 3 = 0$; b) $\frac{3}{5}x + 2 = 0$; c) $\frac{3}{2} = 3x$; d) $\frac{7}{5}x - \frac{3}{2} = 0$

Exercice 4

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $2x - 4 = x + 2$; b) $3 + x = -2x - 5$; c) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = x + \frac{5}{3}$

Exercice 5

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $(x-2)(2x+1) = 0$; b) $(x-\sqrt{5})(\sqrt{3}x+2) = 0$;
c) $\left(\frac{1}{3}x-3\right)\left(2x+\frac{4}{3}\right) = 0$.

Exercice 6

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $x^2 - 4 = 0$; b) $x^2 - 3 = 0$; c) $x^2 = 12$;
d) $(x+2)^2 = 0$

Exercice 7

On donne l'inéquation suivante :

(I) : $4x \leq 2x - 3$

Parmi les nombres suivants, cite ceux qui sont solution de cette inéquation. 0 ; $-\frac{3}{2}$; $\frac{3}{2}$; 5 ; -2 ; -1

Exercice 8

Remplace les pointillés suivants par « > » ou par « < » pour que le nombre indiqué dans la case soit solution de l'inéquation.

a) $3x - 1 \dots 2x + 1$ 3
b) $x - 1 \dots 1 - 2x$ 0
c) $4 - 3x \dots 5x - 3$ -1

Exercice 9

Résous les inéquations suivantes :

a) $3x \leq 2$; b) $\frac{1}{3}y \geq \frac{1}{2}$; c) $\frac{2}{3}z \geq 0$.

Exercice 10

Résous les inéquations suivantes et représente les ensembles solutions sur une droite graduée.

a) $4x - 5 < 0$; b) $5x - 2 \geq 4x + 7$; c) $-3x > 0$.

Exercice 11

Dans le tableau ci-dessous, pour chaque inéquation, trois nombres sont proposés dont un seul est un élément de l'ensemble solution de l'inéquation. Écris le numéro de l'inéquation suivi de la lettre

correspondant à la bonne réponse.

N°	ÉQUATIONS	A	B	C
1	$x > -3x + 2$	-1	0	5
2	$2x \leq 0$	0	$\frac{2}{3}$	$\sqrt{5}$
3	$-\frac{3}{2}x - 1 < x + 7$	-2	4	3
4	$4x - 1 \leq 3$	2	1	2,5
5	$0 \leq x - \frac{3}{4}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0

Exercice 12

1. Représente chacun des intervalles suivants sur une droite graduée.

$] -2 ; \rightarrow[;] \leftarrow ; -2[;] 0 ; 5[;] -3 ; 2[;] 2 ; \rightarrow[$

2. Détermine les intersections des intervalles suivants :

a) $] -2 ; \rightarrow[$ et $] -3 ; 2[$;

b) $] 0 ; 5[$ et $] -3 ; 2[$;

c) $] -3 ; 2[$ et $[\frac{7}{2} ; \rightarrow[$.

Exercice 13

Sur une droite graduée, représente :

- En rouge, l'ensemble des solutions de l'inéquation : $2x + 1 \geq 0$.
- En bleu, l'ensemble des solutions de l'inéquation : $3x - 5 \geq 0$.

Déduis-en l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ 3x - 5 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 14

Résous dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'inéquations suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} 4x - 6 < 3 \\ 3x + 2 \geq -7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x > 0 \\ x < -1 \end{cases}$$

Exercice 15

Résous dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'inéquations suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2 > x + 2 \\ 3x - 1 \geq 2x - 1 \end{cases} ; \text{ b) } \begin{cases} -8x + 1 > x - 2 \\ 3x - 4 \geq -5x - 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x - \frac{3}{4} \leq -4x + 1 \\ \frac{1}{2}x + 3 < \frac{2}{3} + 4 \end{cases}$$

⇒ B- Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un exercice

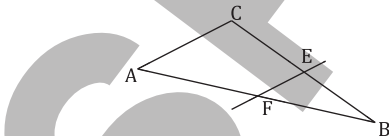
Exercice 16

Sur la figure ci-dessous :

ABC est un triangle (EF) // (AC) ; BE = x - 3 ;

AC = 9 ; EF = 3 et CB = x.

Calcule x.



Exercice 17

Pour conserver sa bourse scolaire, un élève de seconde doit avoir au moins douze de moyenne annuelle. Blahoua en classe de seconde dans ton établissement a obtenu 9,85 et 11,20 de moyenne respectivement au

premier et au deuxième trimestre.

Avant de commencer le troisième trimestre, il souhaite savoir combien doit-il avoir comme moyenne pour espérer conserver sa bourse. Il dispose des informations suivantes :

- La moyenne annuelle se calcule à l'aide de la formule suivante :

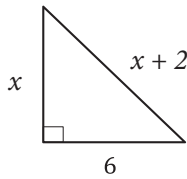
$$\frac{1^{\text{er}} \text{ trimestre} + 2 \times 2^{\text{ème}} \text{ trimestre} + 2 \times 3^{\text{ème}} \text{ trimestre}}{5}$$

- La moyenne de classe est inférieure ou égale à 20.

Donne un encadrement de la moyenne que doit obtenir Blahoua pour conserver sa bourse scolaire.

Exercice 18

On considère le triangle rectangle suivant. En utilisant la propriété de Pythagore, détermine la valeur de x .


Exercice 19

Votre grand père a laissé comme héritage une parcelle carrée de maraîcher dont la superficie est de 2500m^2 . Détermine la longueur des côtés de cette parcelle.

Exercice 20

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $(x^2 - 9)(1 - 4x) = 0$; b) $(2x-3)(x-4)^2 = 4(2x - 3)$;
c) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

Exercice 21

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

H : $(x-3)(x+3)(2x+\sqrt{3}) = 0$

I : $49x^2 + 16 = 56x$

Exercice 22

Résous dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'inéquations suivantes

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 < (x-1)(x+1) \\ x^2 - 3x > x(x-1) + 4 \end{cases}, \begin{cases} x+1 > 0 \\ x < 4 \\ 2x \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 23

- Trouve trois nombres entiers naturels consécutifs dont la somme est 129.
- Trouve trois nombres entiers naturels pairs consécutifs dont la somme est 144.
- Trouve trois nombres entiers naturels impairs dont la somme est 633.

Exercice 24

Un camion à vide pèse 2 tonnes. Il doit passer sur un pont limité à 6 tonnes. Combien de caisses de 118 kg l'une peut-il transporter ?

Exercice 25

Un motard poursuit une voiture sur une autoroute. La voiture est à 150 km de la voiture et roule à 120 km/h.

Le motard roule à 130 km/h et se situe x km derrière la voiture.

Pour quelles valeurs de x le motard rattrape-t-il la voiture avant la sortie.

⇒ C. Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un problème
Exercice 26

Monsieur Koré un planteur, se rend au marché pour acheter des machettes pour ses manœuvres. Il décide de dépenser plus que 39000F mais moins de 54000F. Le commerçant lui fait savoir qu'une machette coûte 3000F.

Monsieur Koré se demande alors combien de machettes il peut acheter. Pour cela il te fait appel.

- Traduis par une expression mathématique le problème posé.
- Sachant que le nombre de machettes est un nombre entier, détermine tous les nombres possibles de machettes que peut acheter monsieur Koré.

Exercice 27

Trois électriciens ont effectué les installations électriques dans les différents appartements d'un immeuble. Le premier a travaillé sur deux cinquièmes du nombre total d'appartements, le second a travaillé sur un cinquième du nombre total d'appartements

plus 8 appartements, le dernier a travaillé sur les 16 appartements restants.

Le propriétaire de l'immeuble veut savoir le nombre d'appartement sur lequel chaque électricien a travaillé. Il te sollicite

- Calcule le nombre d'appartements de l'immeuble.
- Détermine pour chaque électricien, le nombre d'appartement sur lequel il a travaillé.

Exercice 28

On propose à un représentant deux offres d'emploi.

La société A lui propose un salaire mensuel de 100 000F avec un intéressement de 15% sur le montant des ventes effectuées. La société B lui propose un salaire de 60 000F avec un intéressement de 25%. Le représentant hésite puis se décide pour la société B.

Il te sollicite pour savoir quel montant minimum de ventes à réaliser par mois pour que son choix lui soit bénéfique.

Aide-le.

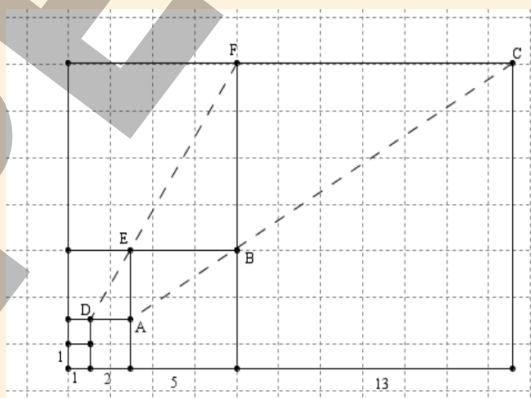
Leçon

9

COORDONNÉES DE VECTEURS

Situation d'apprentissage

Lors d'un contrôle de radar sur l'autoroute, un agent de sécurité a photographié à un moment de la journée les positions de six véhicules A, B, C, D, E et F (schéma ci-dessous).



Il souhaite savoir si trois de ces véhicules sont alignés. Pour ce faire, il se confie à son fils en classe de 3^e. Ce dernier, à son tour informe ses camarades de classe.

Curieux, ceux-ci décident d'étudier la leçon « Coordonnées de vecteurs » afin de répondre à la préoccupation de l'agent.

Découvre de nouveaux outils

1 Coordonnées d'un vecteur

À la fin de la séquence, tu dois être capable :

- ✓ d'identifier les différents repères d'un repère d'un plan ;
- ✓ d'identifier les coordonnées d'un vecteur ;
- ✓ de lire le couple de coordonnées d'un vecteur ;
- ✓ d'identifier l'égalité de deux vecteurs à partir de leurs couples de coordonnées.

Activité 1

On considère les figures ci-dessous.



Dans chacun des cas de figures ci-dessus, indique la nature du triangle OIJ

Fais le point

On admet qu'un triplet de points non alignés (O, I, J) est un repère du plan.

- Le repère (O, I, J) est un **repère quelconque** lorsque le triangle OIJ est quelconque ;
- Le repère (O, I, J) est un **repère normé** lorsque le triangle OIJ est isocèle en O ;
- Le repère (O, I, J) est un **repère orthogonal** lorsque le triangle OIJ est rectangle en O ;
- Le repère (O, I, J) est un **repère orthonormé** lorsque le triangle OIJ est rectangle et isocèle en O.
- Pour tous ces repères le point O est appelé l'origine ; la droite (OI) est l'axe des abscisses et la droite (OJ) est l'axe des ordonnées.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

On considère un carré ABCD de centre O.

Écris : un repère quelconque d'origine A, un repère orthonormé d'origine A.

EXERCICE 2

On considère un rectangle ABCD de centre O.

Écris : un repère orthogonal d'origine B, un repère normé d'origine O.

EXERCICE 3

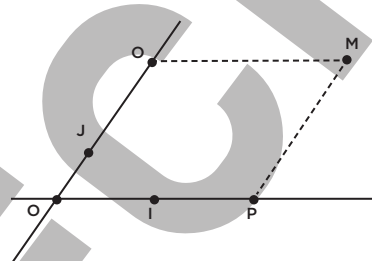
Le plan est muni d'un repère orthonormé (E, F, G).

Identifie l'origine, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées de ce repère.

Activité 2

On donne la figure ci-dessous où (O, I, J) est un repère quelconque du plan et M est un point du plan placé dans le repère (O, I, J).

On a : $(OP) \parallel (QM)$; $(OQ) \parallel (PM)$; $OP = xOI$ et $OQ = yOJ$ (avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$).



1. Justifie que le quadrilatère OPMQ est un parallélogramme.
2. Justifie : que $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OQ}$.
3. Exprime $\overrightarrow{OP}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OQ}$ en fonction de $\overrightarrow{OJ}$.
4. Sachant que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$, exprime le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

Fais le point

- $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$: on dit que le couple (x, y) est le couple de coordonnées du point M ou bien x et y sont les coordonnées du point M dans le repère (O, I, J).
- On écrit $M(x, y)$
- x est l'abscisse du point M et y est l'ordonnée du point M dans le repère (O, I, J).

Remarque

Pour lire les coordonnées d'un point A dans un repère (O, I, J), on peut procéder comme suit :

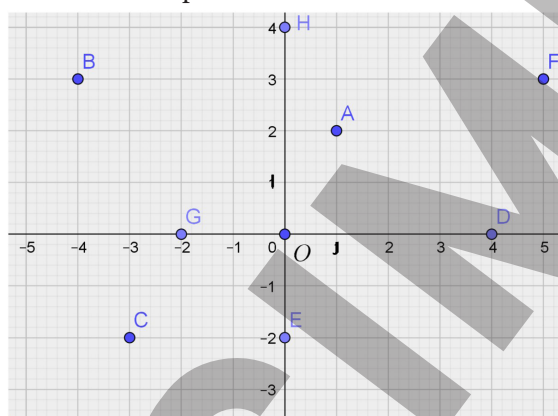
- Tracer la droite parallèle à (OJ) passant par A qui coupe (OI) en K et la droite parallèle à (OI) passant par A qui coupe (OJ) en L
- L'abscisse a du point K sur la droite graduée (OI) par est l'abscisse du point A
- L'ordonnée b du point L sur la droite graduée (OJ) par est l'ordonnée du point A

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

On donne la figure ci-dessous.

Écris les coordonnées de chacun des points A, B, C, D, E, F, G et H dans le repère (O, I, J).



Activité 3

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne A(-3 ; 2) et B(2 ; 4) deux points du plan.

1. Place les points A et B dans le repère (O, I, J).
2. En remarquant que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, exprime le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

Fais le point

Le plan est muni d'un repère (O, I, J),

Si $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour couple de coordonnées (x,y).

On note : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{AB} (x ; y)$

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Dans chaque cas, identifie le couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

a) $\overrightarrow{AB} = \sqrt{6} \overrightarrow{OI} + \sqrt{2} \overrightarrow{OJ}$; b) $\overrightarrow{AB} = -3 \overrightarrow{OJ}$; c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OI}$.

EXERCICE 2

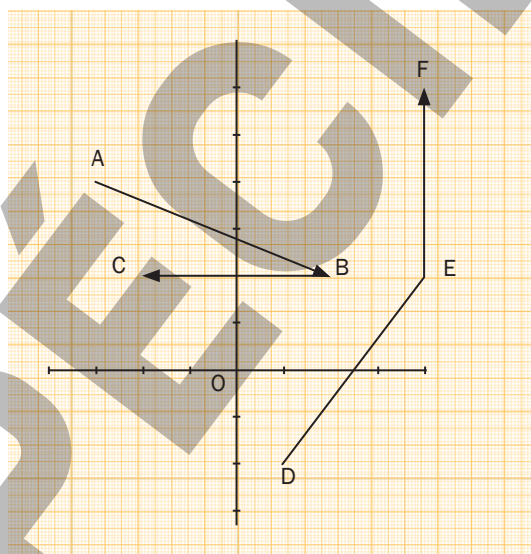
Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Dans chacun des cas suivants, exprime le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$; b) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; c) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$; d) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, où x et y désignent des nombres réels.

EXERCICE 3

Écris les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{EF}$ dans le repère (O, I, J).



Activité 4

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Place les points A et B tels que : $\overrightarrow{OA} = -3\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OB} = -3\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont-ils égaux ?

Fais le point

Soient $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On admet que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

On considère un parallélogramme ABCD de centre O.

On donne $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Indique les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DO}$.

EXERCICE 2

Choisis la bonne réponse.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ x+1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3x \\ 2 \end{pmatrix}$ sont égaux si : a) $x = 1$; b) $x = -1$; c) $x = -2$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \end{pmatrix}$ est nul si : a) $x = 2$; b) $x = 2$ et $y = -3$; c) $y = -3$.

EXERCICE 3

Dans chacun des cas suivants, détermine les nombres réels x et y de sorte que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient égaux.

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x+1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -3 \\ y-1 \end{pmatrix}$;
2. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x-2 \\ 2y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -7 \\ y \end{pmatrix}$

2 Coordonnées de la somme de vecteurs

À la fin de la séquence, tu dois être capable d'identifier les coordonnées d'une somme de deux vecteurs.

Activité

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soient les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

1. Exprime chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
2. Exprime le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
3. Dédus-en les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

Fais le point

Si $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Recopie et complète le tableau suivant :

$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CD}$	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$
$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}$	...
$\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$	...
$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -11 \end{pmatrix}$	...

EXERCICE

2

On donne les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$.

3

Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel

À la fin de la séquence, tu dois être capable d'identifier les coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel.

Activité

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Exprime le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
2. Exprime le vecteur $k \cdot \overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
3. Déduis-en les coordonnées du vecteur $k \overrightarrow{AB}$.

Fais le point

A et B sont des points et k un nombre réel.

Si $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $(k \overrightarrow{AB}) \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Recopie et complète le tableau suivant :

$\overrightarrow{AB}$	k	$k \cdot \overrightarrow{AB}$
$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\sqrt{2}$	...
$\begin{pmatrix} 35 \\ -15 \end{pmatrix}$	$\frac{2}{5}$	...
$\begin{pmatrix} -0,2 \\ -1,5 \end{pmatrix}$	-5	...

EXERCICE

2

On considère les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Calcule les coordonnées des vecteurs : $\sqrt{2} \overrightarrow{AB}$; $-\overrightarrow{CD}$; $-\frac{2}{5} \overrightarrow{CD}$.

4 Vecteurs colinéaires

À la fin de la séquence, tu dois être capable de :

- ✓ connaître la propriété relative à la colinéarité de deux vecteurs ;
- ✓ démontrer que deux vecteurs sont colinéaires ;
- ✓ démontrer que deux droites sont parallèles ;
- ✓ démontrer que des points sont alignés.

Activité

Soient $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs tels que les nombres réels x, y, x', y' sont non tous nuls.

On suppose qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{CD} = k \overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

1. Justifie que $k = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$
2. Déduis-en que $x'y - xy' = 0$

Fais le point

On admet les deux propositions suivantes :

Soient $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, deux vecteurs quelconques.

- Si $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, alors $x'y - xy' = 0$.
- Si $x'y - xy' = 0$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

On donne les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 5 \\ 7,5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Détermine les paires de vecteurs colinéaires.

EXERCICE

2

Dans chaque cas, détermine la valeur du nombre réel x de sorte que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient colinéaires.

- 1) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$; 2) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -x \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

EXERCICE 3

Dans chacun des cas suivants, démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

$$1) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; 2) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 4

Détermine si les droites (AB) et (CD) sont parallèles dans chacun des cas suivants :

$$1) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}; 2) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \sqrt{3}-\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3}-\sqrt{2} \end{pmatrix}; 3) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 5

Dans chacun des cas suivants, démontre que les points A, B et C sont alignés.

$$1) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}; 2) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

5 Vecteurs orthogonaux

À la fin de la séquence, tu dois être capable de :

- ✓ connaître la propriété relative à l'orthogonalité de deux vecteurs ;
- ✓ démontrer que deux vecteurs sont orthogonaux ;
- ✓ démontrer que deux droites sont perpendiculaires.

Activité

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. a) Place les points A(-1 ; -1), B(3 ; 1), C(1 ; 1) et D(-1 ; 5) dans ce repère
 b) Vérifie à l'aide de ton équerre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.
 c) On admet que $\overrightarrow{AB} (4 ; 2)$ et $\overrightarrow{CD} (-2 ; 4)$
 Effectue le calcul suivant : $4 \times (-2) + 2 \times 4$
2. a) Place les points E(-1 ; 1), F(2 ; 1), G(1 ; 2) et H(-1 ; 1) dans ce repère
 b) Vérifie à l'aide de ton équerre que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ ne sont pas orthogonaux
 c) On admet que $\overrightarrow{EF} (3 ; 0)$ et $\overrightarrow{GH} (-2 ; -1)$
 Effectue le calcul suivant : $3 \times (-2) + 0 \times (-1)$

Fais le point

On admet que :

dans un repère orthonormé.

- Si $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux, alors $xx' + yy' = 0$
- Si $xx' + yy' = 0$, alors les vecteurs $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Dans un repère du plan on donne les vecteurs $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{TV} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$

Dans le tableau ci-dessous recopie la bonne réponse.

$\overrightarrow{TV} \perp \overrightarrow{MN}$ équivaut à	$aa' - bb' = 0$	$ba + ab = 0$	$ba - ab = 0$	$aa' + bb' = 0$

EXERCICE

2

Réponds par vrai ou par faux.

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
2. $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \\ -\frac{2}{2} \end{pmatrix}$ sont orthogonaux
3. $\overrightarrow{RS} \begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} a-1 \\ a \end{pmatrix}$ sont orthogonaux pour tout nombre réel a .

EXERCICE

3

Dans chacun des cas suivants, détermine le nombre réel x pour que les droites (AB) et (CD) soient perpendiculaires.

1) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ x \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$; 2) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ x \end{pmatrix}$.

6 Calcul des coordonnées d'un vecteur

À la fin de la séquence, tu dois être capable de calculer les coordonnées d'un vecteur.

Activité

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.

1. Vérifie que : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
2. Exprime chacun des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
3. Exprime le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
4. Dédus-en les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Fais le point

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{AB} (x_B - x_A; y_B - y_A)$

Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

On donne les points $A(a; b)$ et $B(c; d)$ dans un repère du plan.

Recopie la bonne réponse.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

- a) $\begin{pmatrix} a - c \\ b - d \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a - d \\ b - c \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} c - a \\ d - b \end{pmatrix}$.

EXERCICE

2

On donne les points $A(2; 1)$; $B(3; 4)$ et $C(-2; 7)$ dans un repère du plan.

Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

EXERCICE

3

On donne les points $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $A(-2; 1)$ dans un repère du plan.

Calcule les coordonnées du point B.

EXERCICE

4

Dans les deux cas suivants, démontre que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

1. $A(1; 4)$; $B(-1; 1)$; $C(1; 2)$ et $D(-3; -4)$.
2. $A(-2; 3)$; $B(3; 4)$; $C(10; 0)$ et $D(0; -2)$.

EXERCICE 5

Dans chacun des cas suivants, détermine si les points sont alignés ou non.

1. $A(1; 2)$; $B(4; 4)$ et $C(5,5; 5)$.
2. $E(1; 4)$; $F(4; 2)$ et $G(6; 1)$.
3. $R(1; 4)$; $S(4;4)$ et $T(1,5; 4)$.

EXERCICE 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Dans les deux cas suivants, démontre que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

1. $A(-3; -2)$; $B(-2; 2)$ et $C(-7; -1)$.
2. $A(1; 2)$; $B(0; 6)$ et $C(-3; 1)$.

7 Calcul des coordonnées du milieu d'un segment

À la fin de la séquence, tu dois être capable :

- ✓ d'identifier les coordonnées du milieu d'un segment ;
- ✓ de calculer les coordonnées du milieu d'un segment.

Activité

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.

1. Justifie que si le point K est le milieu du segment $[AB]$, alors $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.
2. Exprime chacun des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
3. Exprime le vecteur $\overrightarrow{OK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
4. Déduis-en les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OK}$, puis celles du point K .

Fais le point

Soit K le milieu du segment $[AB]$.

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors $K\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

⇒ **Utilise le nouvel outil**

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

1. Soit $A(3; -1)$; $B(-7; 3)$ et $C(-2; 1)$. Le point C est-il le milieu du segment $[AB]$?
2. Soit $A(1,5; 2)$; $B(-5; -2)$ et $C(8; 6)$. Le point A est-il le milieu du segment $[BC]$?

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, calcule les coordonnées du milieu K du segment $[AB]$.

1) $A(-8 ; 1)$ et $B(4 ; -5)$; 2) $A(6 ; 7)$ et $B(-2 ; 3)$.

EXERCICE 3

On donne $A(-3 ; 2)$ et $K(-1 ; -1)$.

Soit K le milieu du segment $[AB]$. Calcule les coordonnées du point B .

8 Distance de deux points

À la fin de la séquence, tu dois être capable de :

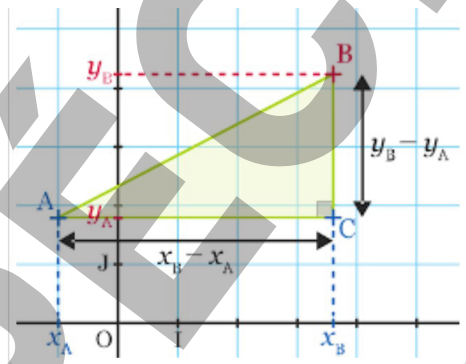
- ✓ connaître la propriété relative à la distance de deux points ;
- ✓ calculer la distance de deux points.

Activité

Dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan, on donne les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$.

La parallèle à la droite (OI) passant par le point A et la parallèle à la droite (OJ) passant par le point B se coupent en C .

- a. Justifie que le triangle ABC est rectangle en C .
- b. Calcule la distance AB en fonction de $(x_B - x_A)^2$ et $(y_B - y_A)^2$.



Fais le point

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . A et B deux points du plan.

Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Réponds par vrai ou par faux à chaque affirmation.

1. Si $A(u; v)$ et $B(r; t)$ alors, $AB = \sqrt{(r-u)^2 + (t-v)^2}$.
2. Si $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. Si $A(1; -3)$ et $B(-2; 1)$, alors $AB = 7$.
4. Si $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$, alors $EF = 10$.

EXERCICE 2

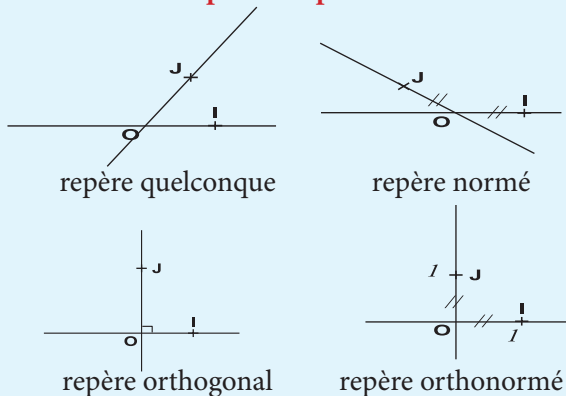
Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Dans chacun des deux cas suivants, calcule la distance AB .

1. $A(10; -1)$ et $B(-2; 4)$.
2. $A(-6; -3)$ et $B(2; 7)$.

Retiens les outils essentiels

1 Coordonnées d'un vecteur

1. Repères du plan



2. Coordonnées d'un vecteur

Définition

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
 A et B sont des points du plan.
 On appelle couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$,
 le couple de nombre réels (x ; y) tels que :

$$\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}. \text{ On note : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ou } \overrightarrow{AB}(x; y)$$

Exemple

- Si $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$, alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- Si $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{OI} - 5\overrightarrow{OJ}$.

3. Vecteurs égaux- Vecteur nul

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J).
 A, B, C et D sont des points du plan, tels que :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$
- Le vecteur nul a pour couple de coordonnées (0 ; 0).

2 Coordonnées d'une somme de vecteurs

Propriété

Le plan est muni d'un repère. A, B, C et D sont des points du plan.

$$\text{Si } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ alors } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}.$$

Exemple

$$\text{Si } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \sqrt{7} \\ -8 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ alors}$$

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \begin{pmatrix} \sqrt{7} - 1 \\ -8 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3 Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel

Propriété

Le plan est muni d'un repère. A et B sont des points du plan, k est un nombre réel.

$$\text{Si } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ alors } k \cdot \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}.$$

Exemple

$$\text{Si } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ alors } \sqrt{5} \cdot \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

4 Vecteurs colinéaires et coordonnées

Propriété

Le plan est muni d'un repère. A, B, C et D sont des points du plan tels que : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires équivaut à } xy' - yx' = 0.$$

Exemple

$$\text{Les vecteurs } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires équivaut à } 7x - y = 0.$$

5

Vecteurs orthogonaux et coordonnées

Propriété

Le plan, est muni d'un repère orthonormé. A, B, C et D sont des points du plan, tels que : (AB)

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux équivaut à $xx' + yy' = 0$

Exemple

Le plan muni d'un repère orthonormé.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux équivaut à $x - 2y = 0$.

6

Calcul des coordonnées d'un vecteur

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). A et B sont des points du plan.

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Exemple

Si $A(-2; 1)$ et $B(5; -2)$ alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 - (-2) \\ -2 - 1 \end{pmatrix}$.

Donc : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

7

Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). A et B sont des points du plan. K est le milieu du segment [AB]. Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors

$$K \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

Exemple

Soient $A(-3; 7)$ et $B(5; -4)$ deux points du plan muni d'un repère.

Le milieu K du segment [AB] a pour coordonnées

$$\left(\frac{-3+5}{2}; \frac{7-4}{2} \right). \text{ Donc } K \left(1; \frac{3}{2} \right).$$

8

Distance de deux points

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). A et B sont des points du plan. A et B sont des points du plan. Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exemple

Soient $A(-2; 1)$ et $B(5; -2)$ deux points du plan muni d'un repère.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(5 - (-2))^2 + (-2 - 1)^2} \\ &= \sqrt{7^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{58} \end{aligned}$$

Exercices commentés

Exercice 1

Soit ABCD un parallélogramme. I et J sont les points tels que $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. On considère le repère (A, B, D).

1. a) Justifie que : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
b) Déduis-en les coordonnées des points A, B, D, C, I et J.
2. Démontre que les droites (IJ) et (BD) sont parallèles.

Solution

a) On utilise l'égalité de Chasles et l'égalité vectorielle dans un parallélogramme pour exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IB}; 2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{IB}; 2(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AI}) = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB}; 3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC};$$

$$3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}); 3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DC}; 3\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}.$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.$$

De même, on exprime le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{DJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

b) Dans le repère (A, B, D), on a : A(0 ; 0) ; B(1 ; 0) ; D(0 ; 1) ; C(1 ; 1) ; I(1 ; $\frac{2}{3}$) et J($\frac{2}{3}$; 1).

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BD}$, on obtient : $\overrightarrow{IJ} (\frac{2}{3} - 1 ; 1 - \frac{2}{3})$.

et $\overrightarrow{BD} (0 - 1 ; 1 - 0)$; d'où $\overrightarrow{IJ} (-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3})$ et $\overrightarrow{BD} (-1 - 1)$.

On a : $-\frac{1}{3} \times 1 - \frac{1}{3} \times (-1) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$, donc les droites (IJ) et (BD) sont parallèles.

Exercices commentés

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

Soient les points $A(-3 ; 2)$; $B(1 ; 3)$ et $C(2 ; -1)$.

1. a) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
b) Démontre que le triangle ABC est rectangle en B.
2. Calcule les distances AB et BC.
3. Déduis-en la nature exacte du triangle ABC.

Solution

1. a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

b) $4 \times 1 + 1 \times (-4) = 4 - 4 = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, d'où $(AB) \perp (BC)$.
On en déduit que le triangle ABC est rectangle en B.

$$AB = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \text{ et } BC = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}.$$

Le triangle ABC est rectangle en B. De plus, $AB = BC$, donc il est rectangle et isocèle en B.

Utilisation des outils essentiels

⇒ A - Utilise plusieurs outils de la leçon pour résoudre un exercice

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soient A(2 ; -3) et B(1 ; 4) deux points du plan.

Détermine les coordonnées des points C et D vérifiant : 1) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}$; 2) $3\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne les points A(2 ; 3), B(0 ; -3) et C(3 ; 0).

Soient les points E et F tels que : $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OF}$.

1. Justifie que les points E et F ont pour coordonnées respectives (1 ; -6) et (0 ; -9).
2. Démontre que les points C, E et F sont alignés.

Exercice 3

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on considère les points A(6 ; 3) ; B(-3 ; 0) ; C(5 ; 4) et D(-1 ; 1).

1. Démontre que les droites (OA) et (BC) sont parallèles.
2. Démontre que les points B, C et D sont alignés.
3. Détermine le nombre réel y de sorte que le point M(25 ; y) appartienne à la droite (AB).

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soient A(-4 ; -3) ; B(4 ; 5) ; C(0 ; 7) et M(-2 ; -1) quatre points du plan.

1. Démontre que le point M appartient à la droite (AB).
2. On considère les points P et Q définis par : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.
3. Justifie que les points P et Q ont pour coordonnées respectives $(-3 ; -\frac{1}{2})$ et $(1 ; \frac{13}{2})$.
4. Démontre que les droites (MP) et (BC) d'une part (MQ) et (AC) d'autre part et les droites sont parallèles.

Exercice 5

Dans un repère (O, I, J), on considère les points A(6 ; 2) ; E(4 ; -2) et F(-2 ; -1).

1. Fais une figure que tu complèteras au fur et à mesure des questions.

2. a) Calcule les coordonnées du milieu C du segment [AF].

b) Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$.

c) Calcule les coordonnées du point G pour que le quadrilatère EFGA soit un parallélogramme.

3. Soit N un point d'abscisse 2.

Détermine l'ordonnée de N pour que les points E, N et F soient alignés.

Exercice 6

Dans un repère, on considère les points B(-2 ; 5) ; D(6 ; 3) et E(10 ; 2).

1. Démontre que : $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BD}$.
2. Dédus-en que les points E, B et D sont alignés.

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne les points A(2 ; 3) ; B(-1 ; 2) et C(4 ; -3) du plan.

1. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Dédus-en que le triangle ABC est rectangle.
3. Calcule les longueurs des côtés du triangle ABC.

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Soient les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.
2. a) Écris une relation entre les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de sorte qu'il soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
b) Écris une relation entre les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de sorte qu'il soit orthogonal au vecteur $\overrightarrow{CD}$.
3. Dédus-en une relation entre les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ pour qu'il soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et orthogonal à $\overrightarrow{CD}$.

Utilisation des outils essentiels

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soient $A(4; 7)$; $B(6; 4)$ et $C(3; y)$ trois points du plan où y est un nombre réel y .

Détermine le nombre y pour que le triangle ABC soit rectangle en A.

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

Soient $A\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1. Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont orthogonaux.
2. Justifie que : $IA = IB = 1$.
3. Dédus-en la nature du triangle AIB.

Exercice 11

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . On donne les points $A(-3; 5)$ et $B(-1; -5)$.

La droite (AB) coupe les axes (OI) et (OJ) respectivement en C et D.

Détermine les coordonnées des points C et D.

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . On considère les points $A(2; 1)$, $B(3; 2)$ et $C(1; 3)$.

Soit le point D tel que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

1. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Démontre que la droite (AD) est parallèle à l'axe des ordonnées.
3. Calcule les coordonnées du point D.

⇒ B- Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un exercice

Exercice 13

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(-1; -3)$, $B(2; 2)$ et $C(3; -2)$.

1. Justifie que le triangle ABC est rectangle en C.
2. Détermine les coordonnées du centre E et le rayon r du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 14

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

On considère le cercle (C) de centre $K(-2; -1)$ et rayon de 5.

Démontre que les points $M(-5; 3)$ et $N(1; -5)$ sont diamétralement opposés sur C.

Exercice 15

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On considère les points $A(6; -3)$ et $B(-2; 5)$.

1. Le point $E(-3; 3)$ appartient-il à la médiatrice du segment [AB]? Justifie.
2. Détermine le nombre réel t pour que le point $G(t; -2)$ appartienne à la médiatrice du segment [AB].

Exercice 16

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Soient les points $A(2; 5)$, $B(-4; -7)$ et $C(6; 3)$ du plan.

1. Démontre que le triangle ABC est rectangle.
2. Calcule les longueurs des côtés du triangle ABC.
3. Détermine un encadrement de la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ par deux nombres entiers naturels consécutifs.

Exercice 17

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On considère le cercle (C) de rayon 5, de centre le point $E(-2; 2)$ et les points $B(2; 5)$ et $D(5; 1)$.

1. Justifie que le point B appartient au cercle (C).
2. Démontre que la droite (BD) est tangente au cercle (C).

Exercice 18

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Soient les points $A(-2; 4)$; $B(4; 2)$; $C(2; -4)$ et $D(-4; -2)$.

1. Démontre que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
2. Démontre que le parallélogramme ABCD est un carré.

Exercice 19

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On considère les points $A(4; 5)$; $B(-3; 3)$ et $C(2; -2)$.

1. Justifie que le triangle ABC est isocèle en A.
2. Calcule les coordonnées du milieu M du segment [BC].
3. a) Détermine les coordonnées du point D, symétrique du point A par rapport au point M.
b) Dédus-en la nature exacte du quadrilatère ABCD.

Exercice 20

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Soient $A(1; 1)$ et $B(-2; 3)$ deux points du plan.

1. Démontre que le point $H(4; -1)$ est le pied de la perpendiculaire sur la droite (AB) passant par le point $E(-2; -10)$.
2. Dédus-en la distance du point E à la droite (AB).

Exercice 21

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Soient $A(-2; -2)$; $B(-4; 4)$; $C(2; 6)$ et $D(4; 0)$ quatre points du plan.

1. Démontre que le triangle ABD est rectangle et isocèle en A.
2. Démontre que le quadrilatère ABCD est un carré
3. Détermine les coordonnées du point d'intersection E des diagonales du carré ABCD.
4. Par la translation de vecteur $\overrightarrow{RT}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$, le point F est l'image du point A.

Détermine les coordonnées du point F.

Exercice 22

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

On donne $A(1; 2)$; $B(\frac{9}{2}; \frac{5}{2})$; $C(4; -1)$ et $D(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2})$ quatre points du plan.

1. Démontre que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

2. Démontre les trois propriétés suivantes :

- a) les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux ;
- b) ABCD est un losange ;
- c) la droite (BD) est la médiatrice du segment [AC].

Exercice 23

Dans un repère (O, I, J) , on considère les points $A(-2; 0)$, $B(0; 4)$ et $C(5; 2)$ du plan.

1. Détermine les coordonnées du point M défini par : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
2. Détermine les coordonnées des milieux respectifs L et K des segments [AC] et [AB].
3. a) Démontre que le point M appartient à la médiatrice du segment (CK).
b) Les points O, M et L sont-ils alignés ?

Exercice 24

ABCD est un parallélogramme.

- I est le milieu du segment [AB];
- M est un point quelconque du segment [CD];
- G est le centre de gravité du triangle MAB.

1. On pose $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DC}$. Détermine les valeurs possibles du nombre réel x .
2. On considère le repère (A, B, D). Exprime en fonction de x les coordonnées des points M et G.
3. Démontre que, lorsque M décrit le segment [DC], G décrit un segment dont le support est parallèle à (DC). Tu préciseras ses extrémités.

Exercice 25

Soit ABC un triangle. On définit deux points M et N par : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB}$.

Détermine les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (MN) dans le repère (A,B,C).

Exercice 26

Soit ABC un triangle quelconque et I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [BC].

On considère un point M quelconque du plan.

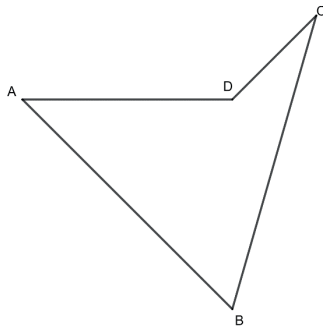
Soit P et Q les images respectives du point M dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et dans la symétrie centrale de centre I.

Démontre que J est le milieu du segment [PQ], en utilisant le repère (A, B, C).

Exercice 27

Le quadrilatère ABCD a été dessiné dans un repère (O, I, J) qui a disparu.

Retrouve le repère à partir des coordonnées des points : A(-4; 2) ; B(1; -6) ; C(3; 6) et D(1; 2).



Exercice 28

Dans le plan muni d'un repère, on considère les points A(-1 ; 5) ; B(3 ; 7) ; C(7 ; 5) et D(-3 ; 0).

1. Fais une figure puis complète-la au fur et à mesure.
2. Démontre que le quadrilatère ABCD est un trapèze.
3. Soit E le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}; \frac{25}{3}\right)$.

Démontre que les droites (AD) et (BC) sont sécantes en E.

4. Soient K le milieu du segment [AB] et L le milieu du segment [CD]. Justifie que les points E, K et L sont alignés.

Leçon

10

ÉQUATIONS DE DROITES

Situation d'apprentissage

En examinant les bords lointains d'une route, on a l'impression que ceux-ci se croisent à l'horizon (effet d'optique).

En assimilant les bords d'une route à des droites, on peut étudier leurs positions relatives dans un repère à l'aide d'équations.

Des élèves de 3^e ayant constaté ce phénomène d'effet d'optique décident d'étudier les positions relatives de droites à l'aide d'équations.

Découvre de nouveaux outils

1 Équations de droites

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ d'identifier une équation d'une droite
- ✓ de déterminer :
 - une équation d'une droite passant par deux points
 - une équation d'une droite passant par un point et parallèle à une droite donnée
 - une équation d'une droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée dans un repère orthonormé
 - une équation d'une droite passant par un point et de vecteur directeur donné
- ✓ de construire une droite dont on connaît une équation

Activité 1

On désigne par F l'équation suivante. $F : 2x + y - 4 = 0$

- a) Parmi les couples suivants, quels sont ceux qui sont solutions de l'équation F ?
(1 ; 3), (1 ; 2), (0 ; 4), (-2 ; 2), (5 ; 3), (3 ; -2) et (-2 ; 6).
- b) Place les points suivants dans un repère. $A(1 ; 2)$, $B(0 ; 4)$, $C(-1 ; 6)$ et $D(3 ; -2)$.
- c) Que peut-on dire des points A , B , C et D ?

Fais le point

- Pour reconnaître qu'un couple $(r ; s)$ est solution d'une équation de la forme $ax + by + c = 0$, il faut remplacer x et y respectivement par r et s et vérifier que cette égalité est vraie.
- Tous les points dont les couples de coordonnées vérifient l'équation $2x + y - 4 = 0$ sont alignés.
- On dit que l'équation $2x + y - 4 = 0$ est une équation de droite.
- Toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est une équation de droite.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

On donne l'équation suivante : $2x - 3y + 6 = 0$

Parmi les couples ci-dessous, indique ceux qui sont solutions de cette équation

$(2 ; 3)$; $(-1 ; 2)$; $(0 ; 2)$; $(-3 ; 0)$; $(0 ; 0)$; $\left(1 ; \frac{8}{3}\right)$

EXERCICE

2

Parmi les équations suivantes, indique celles qui sont des équations de droites.

$2xy + y - 6 = 0$; $x = 5$; $3x - 4y = 0$; $x + 2y = 5$; $x^2 + 3y - 2 = 0$; $y = -3$; $y = 2x + 1$

Activité 2

Dans un repère (O, I, J), on donne les points $A(2 ; 3)$, $B(-3 ; 5)$ et $M(x ; y)$.

- Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$.
- Écris en fonction de x et y une relation qui exprime que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
- Que représente l'expression obtenue pour la droite (AB) ?

Fais le point

Pour déterminer une équation d'une droite passant par deux points A et B dont on connaît les coordonnées :

- On choisit un point $M(x ; y)$ quelconque de la droite (AB)
- Puis on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$
- On utilise enfin, la propriété de colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ (deux vecteurs $\overrightarrow{RS} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut à $xy' - x'y = 0$) pour déterminer une équation de (AB).

Remarque

a est un nombre réel.

- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme : $x = a$
- Toute droite parallèle à l'axe des abscisses a une équation de la forme : $y = a$

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Dans un repère (O, I, J), on donne les points $A(3 ; 2)$ et $B(5 ; 3)$.
Détermine une équation de la droite (AB).

Activité 3

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne les points suivants : $A(-4 ; 3)$, $B(1 ; 1)$ et $G(-3 ; -1)$.
On veut déterminer une équation de la droite (D) passant par le point G et parallèle à la droite (AB).

- Soit $M(x ; y)$ un point quelconque de la droite (D). Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GM}$.
- Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GM}$ sont colinéaires.
- Déduis de la question 2, une équation de la droite (D).

Fais le point

Pour déterminer une équation d'une droite (D) passant par un point G parallèle à une droite (AB), les coordonnées des points A et B étant données :

- On choisit un point $M(x ; y)$ quelconque de la droite (D).
- Puis on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GM}$.

- On utilise enfin, la propriété de colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GM}$ (deux vecteurs $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut à $xy' - x'y = 0$) pour déterminer une équation de (D).

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Le plan est muni du repère (O, I, J).

On donne les points $E\left(\frac{3}{2}; 2\right)$, $F(2; 0)$ et $H(2; -2)$.

Détermine une équation de la droite (D) passant par H et parallèle à (EF).

Activité 4

Le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On donne les points suivants : $A(3; 2)$; $B(-2; 6)$ et $H(-2; 2)$.

On veut déterminer une équation de la droite (D) passant par le point H et perpendiculaire à la droite (AB).

- Soit $M(x; y)$ un point quelconque de la droite (D). Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{AB}$.
- Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
- Déduis de la question 2, une équation de la droite (D).

Fais le point

Pour déterminer une équation d'une droite (D) passant par un point H perpendiculaire à une droite (AB), les coordonnées des points A et B étant données :

- On choisit un point $M(x; y)$ quelconque de la droite (D).
- Puis on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HM}$.
- On utilise enfin, la propriété d'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HM}$ (deux vecteurs $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux équivaut à $xx' + yy' = 0$) pour déterminer une équation de (D).

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On donne les points $P(3; 4)$, $Q(-2; 0)$ et $E\left(-\frac{2}{3}; -7\right)$.

Détermine une équation de la droite (Δ) passant par E et perpendiculaire à la droite (PQ).

Activité 5

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , on donne le point $P(3 ; 2)$.

On veut déterminer une équation de la droite (D) passant par P et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Soit $M(x ; y)$ un point quelconque de la droite (D) .
Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{PM}$.
2. Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
3. Dédus de la question 2, une équation de la droite (D) .

Fais le point

Pour déterminer une équation d'une droite (D) passant par un point P et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ donné :

- On choisit un point $M(x ; y)$ quelconque de la droite (D) .
- Puis on calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{PM}$.
- On utilise enfin, la propriété de colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PM}$ (deux vecteurs $\overrightarrow{RS} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut à $xy' - x'y = 0$) pour déterminer une équation de (D) .

Remarque

Un vecteur directeur d'une droite (D) est colinéaire à tout vecteur directeur d'une droite quelconque qui est parallèle à la droite (D) .

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Dans le plan est muni d'un repère (O, I, J) , on donne $\overrightarrow{RS} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $G(3 ; -5)$.

Détermine une équation de la droite (Δ) passant par G et de vecteur directeur $\overrightarrow{RS}$.

Activité 6

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

On veut construire la droites (D) d'équation : $2x - 3y + 4 = 0$

1. Calcule :
 - a) L'ordonnée du point A d'abscisse (-2) de la droite (D) .
 - b) L'abscisse du point B d'ordonnée 2 de la droite (D) .
2. Place les points A et B dans le repère et trace la droite (AB) .
3. Que peux-tu dire des droites (AB) et (D) ?
4. Dédus des questions précédentes une méthode de construction d'une droite dont on connaît une équation.

Fais le point

Pour construire une droite dont on connaît une équation $ax + by + c = 0$, on détermine à partir de cette équation les coordonnées deux points de la droite.

On donne une valeur judicieusement choisie à x et on détermine y ou bien on donne une valeur judicieusement choisie à y et on détermine x .

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

On donne les droites suivantes :

$$(D) : -2x + y + 1 = 0$$

$$(\Delta) : x + 2y - 3 = 0$$

Construis ces deux droites dans le repère (O, I, J) .

2 Équations de droites et coefficient directeur

À la fin de cette séquence, tu dois être capable

- ✓ d'identifier :
 - l'équation réduite d'une droite
 - le coefficient directeur d'une droite
- ✓ de déterminer le coefficient directeur d'une droite
- ✓ de calculer le coefficient directeur d'une droite passant par deux points et non parallèle à l'axe des ordonnées
- ✓ de construire une droite connaissant un de ses points et son coefficient directeur
- ✓ de lire graphiquement le coefficient directeur d'une droite dans un quadrillage

Activité 1

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , on donne la droite suivante: $(D) : 2x + 3y - 4 = 0$.

1. Vérifie que les points $E(2 ; 0)$ et $F(-1 ; 2)$ appartiennent à la droite (D) .

2. Calcule le nombre réel m tel que : $m = \frac{y_E - y_F}{x_E - x_F}$.

3. Dans l'équation de la droite (D) , exprime y en fonction de x .
Donne le coefficient de x dans cette nouvelle équation.

4. Compare le nombre m au coefficient de x trouvé ci-dessus.

5. Calcule la valeur de y pour $x = 0$

Fais le point

- L'expression de y en fonction de x est appelée équation réduite de la droite (D) .
- Le coefficient de x dans l'équation réduite est appelé coefficient directeur de la droite (D) .
- $-\frac{2}{3}$ est appelé ordonnée à l'origine de la droite (D) .

- Si une équation d'une droite est de la forme $y = mx + p$, alors le nombre m est appelé coefficient directeur de cette droite et le nombre p est appelé ordonnée à l'origine de cette droite.
- Si le coefficient directeur d'une droite est m alors une équation de cette droite est de la forme : $y = mx + p$.
- Connaissant les coordonnées de deux points A et B le coefficient directeur de la droite (AB) est égal au quotient $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.

Méthode

- Pour déterminer une équation réduite d'une droite donnée, non parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $ax + by + c = 0$, on exprime y en fonction de x dans cette équation.
- Pour déterminer le coefficient directeur d'une droite donnée, on peut :
 - chercher l'équation réduite de la droite, ainsi le coefficient directeur est le coefficient de x .
 - trouver les coordonnées de deux points de la droite et faire le quotient de la différence des ordonnées par la différence des abscisses.
- Pour obtenir l'ordonnée à l'origine, on remplace x par 0 et on calcule la valeur de y .

Remarque

- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées n'admet pas de coefficient directeur
- Toute droite parallèle à l'axe des abscisses a pour coefficient directeur 0.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Parmi les équations suivantes, cite celles qui sont les équations réduites de droite.

a) $y = -3x + 2$, b) $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{3}$, c) $x = 5y + 2$, d) $y = 3x$, e) $y = 2x^2 - 3$

EXERCICE

2

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

On donne la droite (Δ) d'équation : $\frac{3}{5}x - y + 3 = 0$.

1. Détermine l'équation réduite de la droite (Δ).
2. Donne le coefficient directeur de la droite (Δ).
3. Quelle est l'ordonnée à l'origine de la droite (Δ)?

EXERCICE

3

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les points P(-2 ; -3) et Q(5 ; 7).
Détermine le coefficient directeur de la droite (PQ).

Activité 2

Le plan est muni du repère (O, I, J).

On veut déterminer une équation de la droite (D) passant par le point A(2 ; 3) et de coefficient directeur 3.

1. Justifie que (D) a une équation de la forme $y = 3x + b$.
2. Détermine b sachant que le point A appartient à la droite (D).
3. Donne une équation de (D).

Fais le point

Pour déterminer une équation d'une droite connaissant son coefficient directeur m et $M(a ; b)$ un de ses points :

- On écrit son équation réduite $y = mx + n$
- Puis on détermine n en remplaçant x par l'abscisse a de M et y par l'ordonnée b de M

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Le plan est muni du repère (O, I, J).

Détermine une équation de la droite (Δ) passant par M(-2 ; 1) et de coefficient directeur (-3).

Activité 3

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

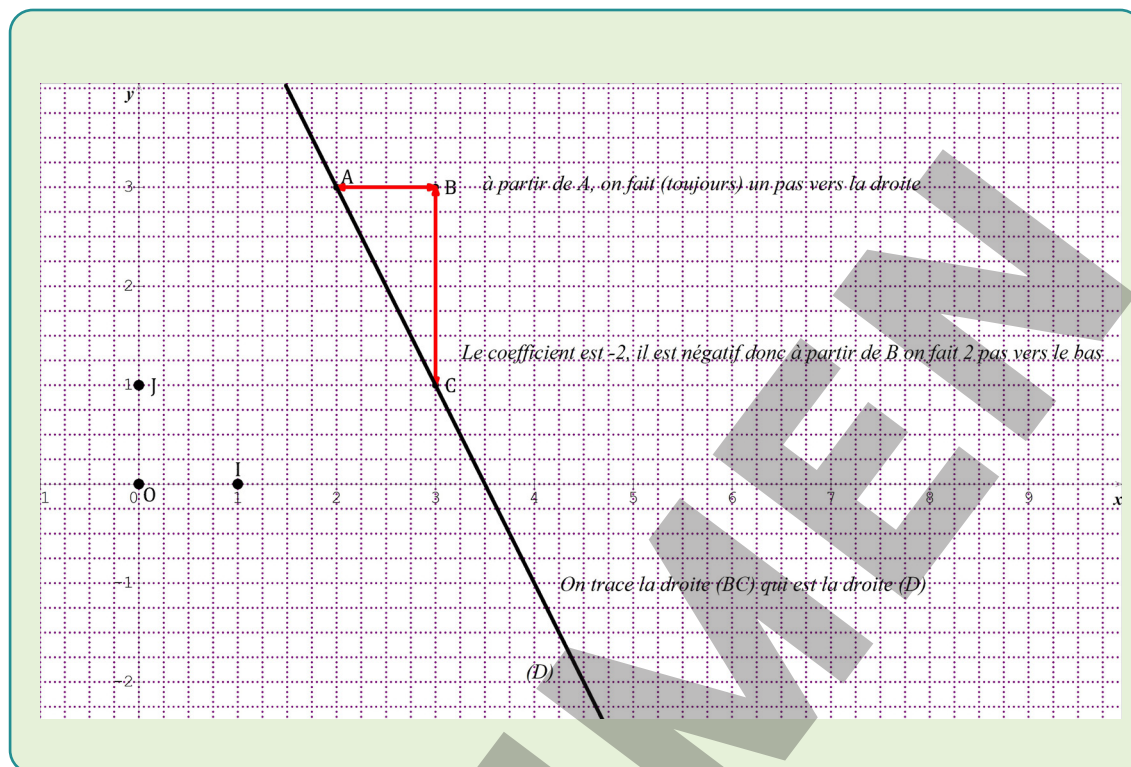
On considère la droite (D) passant par le point A(2 ; 3) et de coefficient directeur (-2).

Construis la droite (D) uniquement à l'aide du point A et du coefficient directeur (sans recours à une équation).

Fais le point

Toute droite de coefficient directeur m admet le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

Donc pour construire une droite passant par un point et dont connaît le coefficient directeur, on peut procéder comme dans l'exemple ci-dessous.



Remarque

- Si le coefficient directeur est positif, alors à partir du point B on ferait le ou les pas vers le « haut ».
- Si le coefficient directeur est négatif, alors à partir du point B on ferait le ou les pas vers le « bas ».
- Le pas correspond à l'unité de graduation.

⇒ **Utilise le nouvel outil**

EXERCICE

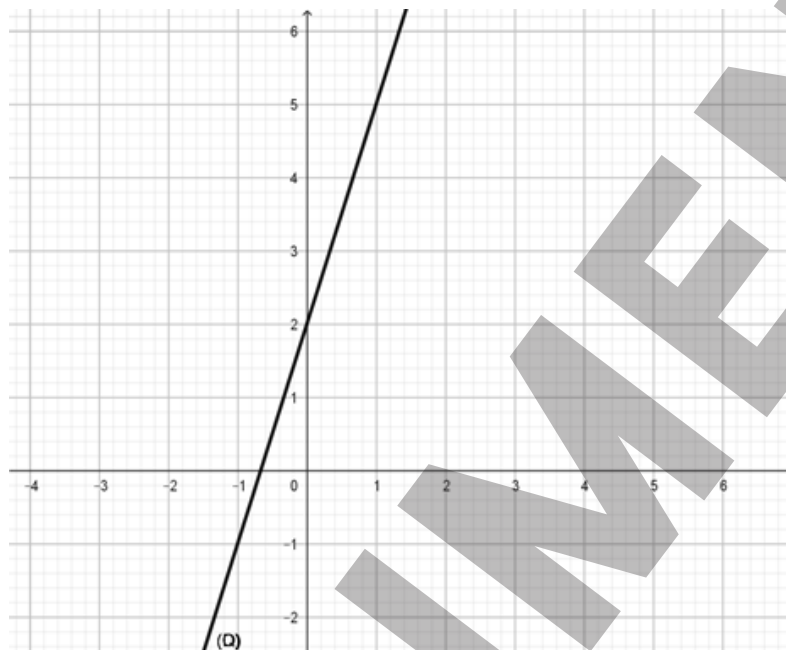
Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

On considère la droite (L) passant par le point A(1 ; 4) et de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

Construis la droite (L).

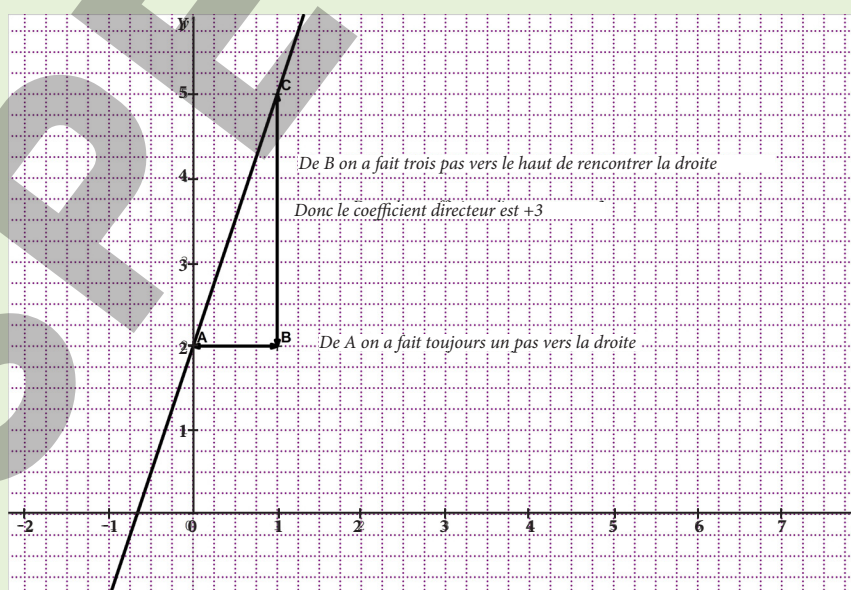
Activité 4

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , on donne la figure ci-dessous.
Détermine par lecture graphique le coefficient directeur de la droite (D) .



Fais le point

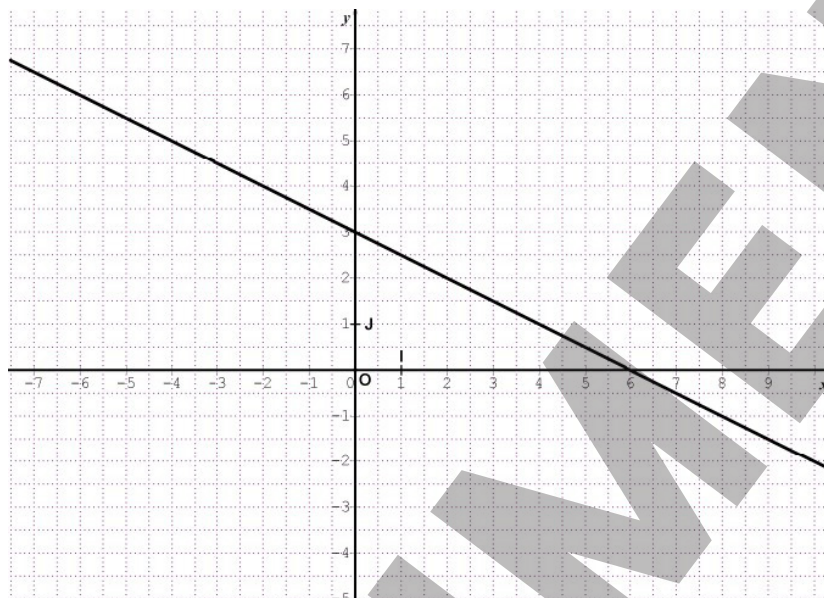
Toute droite non parallèle à la droite des ordonnées admet un coefficient directeur.
Pour déterminer graphiquement le coefficient directeur d'une droite déjà tracée on peut procéder comme dans l'exemple ci-dessous.



EXERCICE

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les points ci-dessous la représentation graphique d'une droite (D).

Détermine graphiquement le coefficient directeur de cette droite.



3 Positions relatives de deux droites

À la fin de cette séquence, tu dois être capable de :

- ✓ connaître les propriétés relatives à la perpendicularité ou au parallélisme de deux droites
- ✓ justifier :
 - que deux droites sont parallèles
 - que deux droites sont perpendiculaires

Activité 1

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

1. On donne les points A(1 ; 0), B(2 ; -3) ; C(1 ; -1) ; D(0 ; 2).
 - a) Démontre que : $\overline{AB} = -\overline{CD}$. Déduis-en que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
 - b) Justifie que les droites (AB) et (CD) ont le même coefficient directeur.
2. Soient quatre points E(2 ; -4), F(0 ; 6), G(0 ; -4) et H(-1 ; -1).
 - a) Justifie que les droites (EF) et (GH) ont le même coefficient directeur.
 - b) Démontre que : $\overline{EF} = 2\overline{GH}$.
 - c) Déduis-en que les droites (EF) et (GH) sont parallèles.

Fais le point

On admet les deux propositions suivantes :

- Si deux droites sont parallèles, alors elles ont le même coefficient directeur.
- Si deux droites ont le même coefficient directeur alors elles sont parallèles.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Justifie que la droite (D_1) d'équation $y = 2x - 5$ et la droite (D_2) d'équation $y = 2x + \frac{2}{3}$ sont parallèles.

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Relie chaque droite du tableau A à la droite qui lui est parallèle dans le tableau B à l'aide des chiffres et des lettres. Exemple : 6.h.

A
1. $(D_1) : y = -3x + 5$
2. $(D_2) : y = -5x + 4$
3. $(D_3) : y = x$
4. $(D_4) : y = 7x - 1$
5. $(D_5) : y = 2x$

B
a. $(D_6) : -x + y + 2 = 0$
b. $(D_7) : y = 2x + 3$
c. $(D_8) : y = 7x$
d. $(D_9) : 5x + y = 0$
e. $(D_{10}) : y = -3x + 8$

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

- On donne les points A(1 ; 0), B(2 ; 3) ; C(0 ; -4) ; D(3 ; -5).
 - Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux. Déduis-en que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
 - Justifie que le produit des coefficients directeurs des droites (AB) et (CD) est égale à -1.
- Soient deux (D) et (L) d'équations respectives : $y = \frac{1}{2}x + 2$ et $y = -2x - 3$.
 - Calcule le produit des coefficients directeurs de (D) et (L).
 - Justifie que les points E(0 ; 2) et F(2 ; 1) appartiennent à la droite (D).
 - Justifie que les points G(0 ; -3) et H(-4 ; 5) appartiennent à la droite (L).
 - Démontre les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont orthogonaux. Déduis-en que les droites (D) et (L) sont perpendiculaires.

Fais le point

On admet les deux propositions suivantes :

- Si deux droites sont perpendiculaires, alors leurs coefficients directeurs sont inverses.
- Si les coefficients directeurs de deux droites sont inverses, alors ces deux droites sont perpendiculaires.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Justifie que la droite (D₁) d'équation $y = 0,75x - 5$ et la droite (D₂) d'équation $y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ sont perpendiculaires.

EXERCICE

2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Relie chaque droite du tableau A à la droite qui lui est perpendiculaire dans le tableau B en utilisant les chiffres et les lettres. Exemple : 6.g.

A
1. (D ₁) : $y = -3x + 5$
2. (D ₂) : $y = 5x + 1$
3. (D ₃) : $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - 10$
4. (D ₄) : $x + y + 3 = 0$
5. (D ₅) : $y = 2x + 3\sqrt{5}$

B
a. (D ₆) : $y = -\sqrt{2}x - 1$
b. (D ₇) : $y = x + 20$
c. (D ₈) : $3x + 6y - 1 = 0$
d. (D ₉) : $y = \frac{1}{3}x$
e. (D ₁₀) : $y = -\frac{1}{5}x - 3 = 0$

Retiens les outils essentiels

1 Equations d'une droite

Propriété

Le plan est muni d'un repère.

Soient a , b et c trois nombres réels tels que a et b sont non nuls ($a \neq 0$ et $b \neq 0$).

Toute droite a une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

Toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ est une équation de droite.

Exemple

$3x - 2y + 4 = 0$; $-2y + x + 1 = 0$; $y = 3$; $3x + 2 = 0$
et $\frac{3}{4}x + 2y - \frac{2}{3} = 0$ sont des équations de droite.

Remarque

Le plan est muni d'un repère.

Soient A et B deux points distincts d'une droite (D). Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (D).

Une droite a une infinité de vecteurs directeurs.

Propriété

Dans le plan muni d'un repère.

Un point appartient à une droite lorsque les coordonnées de ce point vérifient une équation de cette droite. *Autrement dit :* un point $A(r ; s)$ appartient à une droite d'équation $ax + by + c = 0$ équivaut à $ar + bs + c = 0$

Exemple

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

(D) est la droite d'équation $\frac{1}{2}x + 3y - 4 = 0$

Le point $A(8 ; 0)$ appartient à (D) car

$$\frac{1}{2} \times 8 + 3 \times 0 - 4 = 4 - 4 = 0$$

Le point $B(-2 ; 1)$ n'appartient à (D) car

$$\frac{1}{2} \times (-2) + 3 \times 1 - 4 = -1 + 3 - 4 = -2 \neq 0.$$

Construction d'une droite dont on connaît une équation

Méthode

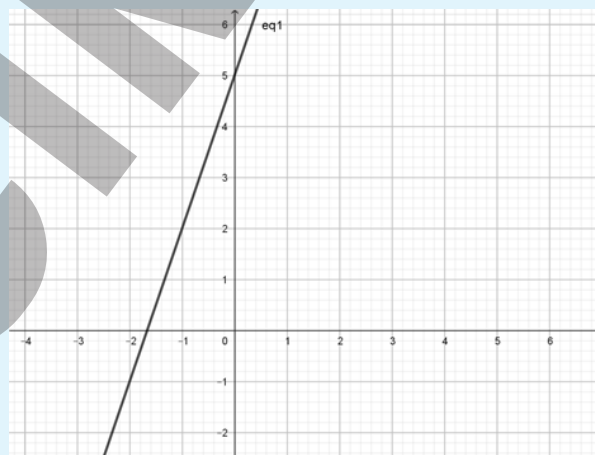
Pour construire une droite dont on connaît une équation; on peut :

- déterminer les coordonnées de deux points de cette droite ;
- placer ces deux points dans le repère donné.

Exemple

Construis la droite (D) d'équation : $3x - y + 5 = 0$.

Point	A	B
Abscisse	0	-1
Ordonnée	5	-2



2 Équations de droites et coefficient directeur

Définition

Le plan est muni d'un repère.

Une équation d'une droite (D) de la forme $y = ax + b$ ou $x = k$ (a, b et k sont des nombres réels) est appelée équation réduite de cette droite.

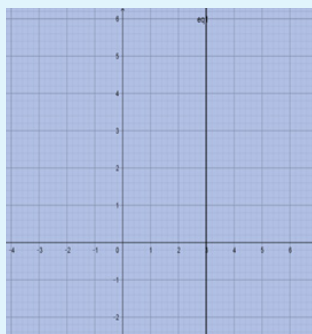
- a est appelé le **coefficient directeur ou pente** de la droite (D)
- b est appelé **ordonnée à l'origine** de la droite (D).

Propriété

Le plan est muni d'un repère.

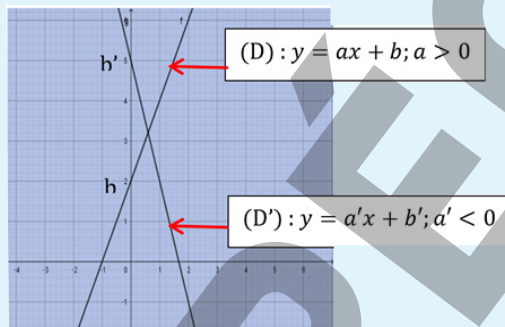
a , b et k sont deux nombres réels.

- Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme : $y = ax + b$.
- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $x = k$. Une telle droite n'a pas de coefficient directeur.



Droite d'équation $x = c$

- Cette droite est parallèle à l'axe des ordonnées
- Une telle droite n'a ni coefficient directeur ni ordonnée à l'origine.
- l'axe des ordonnées a pour équation : $x = 0$.



Droite d'équation $y = ax + b$

- Si $a = 0$, alors la droite a pour équation $y = b$. Cette droite est parallèle à l'axe des abscisses.
- l'axe des abscisses a pour équation $y = 0$

Remarque

- Dans un repère, une droite d'équation réduite $y = ax + b$ a pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ ou tout autre vecteur, non nul, colinéaire à ce vecteur.
- Une droite possède une infinité d'équations, mais une seule équation réduite.

3. Calcul du coefficient directeur d'une droite

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

A et B sont des points du plan tels que : $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ avec $x_A \neq x_B$.

Le coefficient directeur de la droite passant par A et

$$B \text{ est : } \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

4. Déterminer une équation d'une droite connaissant le coefficient directeur et un de ces points

Méthode

Pour déterminer une équation d'une droite connaissant le coefficient directeur a et un point donné, on écrit une équation réduite de cette droite sous la forme $y = ax + b$ puis on détermine b en remplaçant les coordonnées du point donné dans l'équation.

3

Positions relatives de deux droites

1. Droites parallèles

Propriété

Dans le plan muni d'un repère, (D) et (D') sont deux droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.
(D) // (D') équivaut à : $a = a'$.

Remarque

A, B, et C trois points distincts sont alignés si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont parallèles donc si elles ont le même coefficient directeur.

2. Droites perpendiculaires

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, (D) et (D') sont deux droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.
(D) $\perp$ (D') équivaut à : $a \times a' = -1$.

Exercice commenté

Exercice

La maman de Koné va au marché avec la somme de 5 000 F. Elle veut acheter de la viande et du poisson. Le kilogramme de viande coûte 2 000 F et celui de poisson coûte 1 000 F. Elle veut dépenser exactement ses 5 000 F. Elle souhaite donc savoir combien de kilogrammes de viandes et de poissons elle peut acheter avec cette somme pour cela elle vous sollicite, toi et tes amis.

Posons x le nombre de kilogrammes de viandes et y le nombre de kilogrammes de poissons qu'elle peut acheter.

- Traduis ce texte par une équation.
- Vérifie que les couples $(2 ; 1)$, $(\frac{3}{2} ; 2)$ et $(1 ; 3)$ sont solutions de l'équation obtenue
- Cite quelques exemples d'achats que peut effectuer la maman de Koné.

Solution

a. Le coût de la viande est noté: $2000x$. Le coût du poisson est noté : $1000y$

Donc le texte sera traduit par l'équation suivante : $2000x + 1000y = 5000$

b. Simplifions l'équation $2000x + 1000y = 5000$ par 1000, on obtient $2x + y = 5$.

– Vérifions que $(2 ; 1)$ est solution de l'équation. $2 \times 2 + 1 = 5$, donc ce couple est une solution.

– Vérifions que $(\frac{3}{2} ; 2)$ est solution de

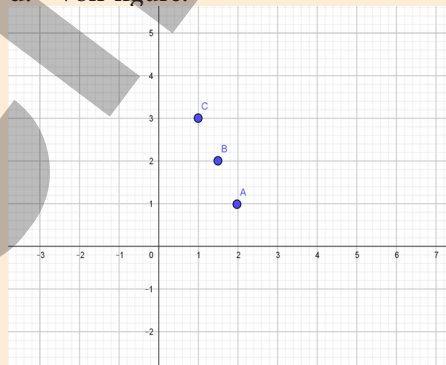
l'équation. $2 \times \frac{3}{2} + 2 = 3 + 2 = 5$, donc ce couple est une solution.

– Vérifions que $(1 ; 3)$ est solution de l'équation. $2 \times 1 + 3 = 5$, donc ce couple est une solution.

c. Au vu de ce qui précède, la maman de

Koné peut acheter 2kg de viande et 1kg de poisson ou 1kg de viande et 3kg de poisson ou encore 1,5kg de viande et 2kg de poisson etc...

d. Voir figure.



e. On constate que les trois points sont alignés.

Remarque

- Ce problème se traduit par une équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Les solutions de cette équation sont des couples
- Pour 2 kg de viande achetées la maman de Koné ne peut acheter que 1 kg de poisson d'où le couple $(2 ; 1)$. Pour 1,5 kg de viande, elle ne peut acheter que 2 kg de poisson d'où le couple $(\frac{3}{2} ; 2)$ et pour 1 kg de viande, elle ne peut acheter que 3 kg de poisson d'où le couple $(1 ; 3)$, etc.
- Dans un repère, ces couples sont les coordonnées de points alignés.

Utilisation des outils essentiels

⇒ A - Utilise plusieurs outils de la leçon pour résoudre un exercice

Exercice 1

Parmi les équations suivantes, quelles sont celles qui sont des équations de droites.

$$2x - 3y + 7 = 0, xy + 2y - 5 = 0, x = -3,$$

$$\sqrt{3}x + 2y - 2 = 0, y = 3x - 1 \text{ et } y = 2$$

Exercice 2

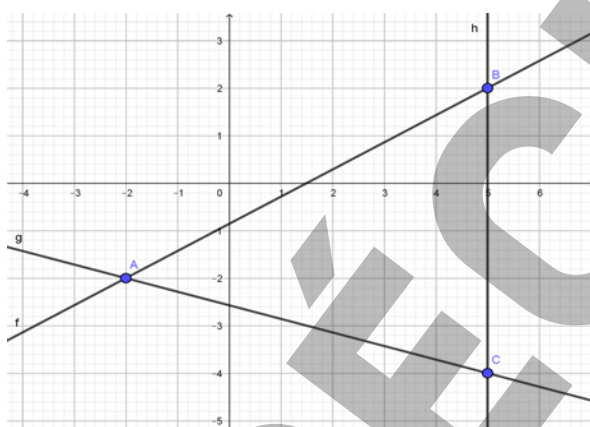
Dans le plan muni d'un repère. Parmi les équations suivantes : $2x - 4y - 6 = 0$, $4x - y - 3 = 0$,

$-x + 2y - 3 = 0$ et $x - 2y + 3 = 0$ quelles sont celles qui représentent la même droite ?

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

On considère la figure ci-dessous.



Détermine une équation des droites (AB), (BC) et (AC).

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

On donne les points A(2 ; -2), B(3 ; 1) et C(4 ; 5).

Détermine une équation des droites (AB), (AC) et (BC).

Exercice 5

Dans le plan muni d'un repère, on considère la droite (D) d'équation $y = 3x - 5$ et les points A(0 ; -5),

B(1 ; 2), C(3 ; 4), D(-2 ; 0) et E(- $\frac{2}{3}$; -7).

Indique parmi ces points ceux qui appartiennent à (D).

Exercice 6

Parmi les équations suivantes, indique celles qui sont des équations réduites d'une droite.

$$y = x^2 + 3, y = -3x + 5, y = 2yx - 3, y = -8,$$

$$x = \frac{3}{2}, 2x + y - 3 = 0$$

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère.

On donne les droites (D) : $x - 2y + 4 = 0$, (L) : $(\sqrt{3} - 2)x - y = 0$ et (Δ) : $6x - 2y + 2 = 0$.

Pour chacune des droites, détermine l'équation réduite.

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère.

Détermine l'équation de la droite (L) passant par le point C(4 ; -2) et de coefficient directeur (-3).

Exercice 9

Dans le plan muni d'un repère.

On considère les points I(2 ; 5) et J(-1 ; 3).

a. Détermine le coefficient directeur de la droite (IJ).

b. En déduire l'équation réduite de la droite (IJ).

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère.

Détermine le coefficient directeur de la droite (Δ) d'équation : $-5x + 3y - 15 = 0$

Exercice 11

Le plan est muni d'un repère.

Dans chacun des cas suivants, les droites données sont-elles parallèles ?

$$(D_1) : 2x - 3y + 5 = 0 \text{ et } (D_2) : \frac{2}{3}x - y - 2 = 0 ;$$

$$(L_1) : y = 3 \text{ et } (L_2) : x = -4 ;$$

$$(\Delta_1) : y = -2x \text{ et } (\Delta_2) : 4x + 2y - 5 = 0.$$

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère.

Dans chacun des cas suivants, les droites données sont-elles perpendiculaires ?

$$(D_1) : -2x - 3y + 5 = 0 \text{ et } (D_2) : 3x - y - 2 = 0 ;$$

$$(L_1) : y = 3 \text{ et } (L_2) : x = -4 ;$$

$$(\Delta_1) : y = -2x \text{ et } (\Delta_2) : -2x + 4y - 5 = 0.$$

Exercice 13

Le plan est muni d'un repère.

Dans les cas suivants, calcule le coefficient directeur de la droite passant par les points donnés.

a. $A(3 ; 5)$ et $B(6 ; 5)$;

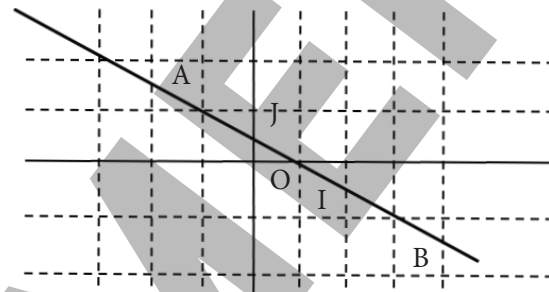
b. $E(-3 ; 7)$ et $F(1 ; 4)$;

c. $G(\frac{3}{2} ; 4)$ et $H(-2 ; -4)$.

Exercice 14

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

Sur la figure ci-dessous, détermine les coordonnées des point A et B.


Exercice 15

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

Construis les droites (D) et (L) d'équations respectives : $y = -2x + 5$ et $-3x + 2y - 7 = 0$.

⇒ B- Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un exercice
Exercice 16

Le plan est muni d'un repère.

Soit (D) la droite d'équation $2x + y - 3 = 0$.

Calcule les nombres a , b , n et m sachant que les points $A(a ; -2)$, $B(3 ; -b)$, $C(n + 2 ; 3n)$ et

$D(-m ; 2m + 1)$ appartiennent à la droite (D) .

Exercice 17

Le plan est muni d'un repère.

On donne les points $A(2 ; 2)$ et $B(4 ; 5)$.

Détermine une équation réduite de la droite (AB) .

Exercice 18

Dans un repère (O, I, J) , on considère la droite (Δ) d'équation : $3x - y + 4 = 0$.

Détermine l'ordonnée du point A de (Δ) sachant que son abscisse est 0.

Détermine l'abscisse du point B de (Δ) sachant que son ordonnée est 0.

Exercice 19

Le plan est muni d'un repère.

Vérifie que les points $A(1 ; -1)$, $B(3 ; 5)$ et $C(4 ; 8)$ sont alignés.

Exercice 20

Le plan est muni d'un repère.

On donne les droites suivantes :

$$(D_1) : 3x + 2y - 6 = 0, (D_2) : 3y - 5 = 0 \text{ et}$$

$$(D_3) : x + \frac{5}{4} = 0.$$

Trouve un vecteur directeur de chacune des droites.

Exercice 21

Le plan est muni d'un repère (O, I, J)

On donne la droite (L) d'équation $y = 2x - 3$ et les points $A(1; 3)$, $B(-4; 2)$, $C(-2; -3)$.

1. Détermine une équation de la droite (D) perpendiculaire à la droite (L) passant par A .
2. Détermine une équation de la droite (Δ) perpendiculaire à (AB) passant par C .

Exercice 22

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , on donne les points $A(0; 1)$, $C(2; -1)$ et $M\left(\frac{6}{5}; -\frac{7}{5}\right)$.

Démontre que le triangle AMC est rectangle en M .

Exercice 23

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

On considère les droites suivantes :

(D_1) de coefficient directeur $\frac{1}{3}$ et d'ordonnée à l'origine (-2) .

(D_2) passant par $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ et de vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(D_3) passant $B(5; 1)$ et $C(1; 3)$.

Place les points A , B et C dans le repère et trace les droites (D_1) , (D_2) et (D_3) .

Détermine une équation de (D_1) , (D_2) et (D_3) .

(D_1) est-elle parallèle à (D_3) ?

(D_2) est-elle perpendiculaire à (D_3) ?

Exercice 24

(Caractérisation d'un segment)

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) . On donne la droite (D) d'équation : $2x - 3y + 6 = 0$.

1. Place sur (D) les points A et B d'abscisses (-2) et 3 .
2. Calcule les coordonnées de chaque point.
3. Hachure en rouge l'ensemble H des points dont les abscisses x vérifient $-2 \leq x \leq 3$.
4. Quelle est l'intersection de l'ensemble H et la droite (D) ?

Exercice 25

Le plan est muni d'un repère.

On donne les droites (D) et (Δ) d'équations respectives : $3x + 2y - 6 = 0$ et $x - 2y + 6 = 0$.

Justifie que ces deux droites sont sécantes.

Exercice 26

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

On considère les points $A(2; 1)$, $B(3; 0)$ et $C(2; 2)$ ainsi que la droite (D) d'équation : $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

Démontre que les droites (OA) , (BC) et (D) sont concourantes.

Exercice 27

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) .

On donne les points $A(2; 9)$, $B(-3; -2)$ et $C(8; 1)$.

1. Détermine l'équation réduite de la droite (BC) .
2. I est le milieu du segment $[AB]$. Calcule les coordonnées de I .
3. Détermine l'équation réduite de la droite (D) passant par I et parallèle à (BC) .

Utilisation des outils essentiels

4. J est le milieu de [AC]. Calcule les coordonnées de J et vérifie que J appartient à la droite (D).

Exercice 28

Le plan est muni d'un repère (O, I, J)

On donne la droite (D) d'équation : $y = \frac{3}{2}x + 2$

1. a) Trace la droite (D)
b) Donne les coordonnées d'un vecteur directeur de (D).
2. Parmi les points A(2 ; 5), B(-2 ; -1) et C(-3 ; -3), quels sont ceux qui appartiennent à la droite (D) ?
3. Construis la droite (Δ) passant par D(3 ; 0) et de vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$.
4. Démontre que les droites (D) et (Δ) sont parallèles.
5. a) Détermine algébriquement les coordonnées du point I milieu du segment [AD].
b) Construis le point E symétrique de B par rapport à I et détermine algébriquement ses coordonnées.
6. Démontre que les droites (BD) et (AE) sont parallèles.
7. Soit (D') la droite d'équation : $y = -\frac{2}{3}x + \frac{32}{3}$.
a) (D) et (D') sont-elles perpendiculaires ?
b) Détermine les coordonnées du point d'intersection des droites (D) et (D').

⇒ C. Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un problème

Exercice 29

Yapo a décidé d'inviter au restaurant, certains de ses amis qui viennent d'obtenir le BAC.
Il veut dépenser entièrement 50 000 FCFA pour le repas.

Au restaurant :

- Un plat de frite de pomme de terre au poulet coûte 6000 FCFA.
- Un plat de poisson braisé à l'attiéké coûte 4000 FCFA.

Yapo veut connaître les possibilités de commande de chaque type de plat, pour prévoir le nombre de personnes à inviter ; mais il éprouve des difficultés.

Aide-le.

Soit x le nombre de plats de frite de pomme de terre au poulet et y le nombre de plats de poisson braisé à l'attiéké, x et y étant des nombres entiers naturels.

1. Justifie que : $3x + 2y = 25$.
2. Trace la droite d'équation $3x + 2y = 25$ dans un repère orthonormé du plan.
3. Détermine graphiquement toutes les possibilités qui s'offrent à Yapo.

Leçon

11

STATISTIQUE

Situation d'apprentissage

Pour les épreuves physiques et sportives de l'examen du BEPC, un infirmier a fait passer des examens médicaux aux 350 élèves des classes de 3^e d'un collège de proximité.

Après les examens, l'infirmier a fait un traitement des données concernant le rythme cardiaque de ces élèves.

Il a découvert que pour ces élèves:

- Le rythme cardiaque moyen est de 72 bpm (battements/minute).
- Le rythme cardiaque moyen des filles est de 70 bpm et celui des garçons est de 75 bpm.

En préparant son compte rendu à son médecin chef, il se rend compte qu'il a oublié le nombre des élèves par genre. Inquiet, il se demande comment faire pour retrouver ces chiffres.

Sa nièce, elle aussi en classe de 3^e et ses camarades de classe décident de faire des recherches en statistique pour pouvoir l'aider.

Découvre de nouveaux outils

1 Effectifs cumulés croissants et fréquences cumulées croissantes

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ de connaître la définition
 - d'un effectif cumulé croissant ;
 - d'une fréquence cumulée croissante ;
- ✓ de dresser le tableau
 - des effectifs cumulés croissants ;
 - des fréquences cumulées croissantes.

Activité 1

Le tableau ci-dessous donne les notes obtenues par les 25 élèves d'une classe de Tle C au cours d'un devoir surveillé noté sur 20.

Note	5	8	12	15	17	18
Effectif	2	5	3	7	5	3

1. Calcule le nombre x d'élèves ayant obtenu une note inférieure ou égale à 12.
2. Calcule le nombre y d'élèves ayant obtenu une note inférieure ou égale à 17.
3. Recopie et complète le tableau suivant en écrivant en dessous de chaque modalité la somme de son effectif et des effectifs des modalités qui lui sont inférieures ou égales.

Note	5	8	12	15	17	18
Effectif	2	5	3	7	5	3

Fais le point

- $x = 10$ et $y = 22$
On dit que x est l'effectif cumulé croissant de 12 ; et y est l'effectif cumulé croissant de 17.
- Pour une série statistique à caractère quantitatif, lorsque les modalités sont rangées dans l'ordre croissant, l'effectif cumulé croissant d'une modalité est la somme des effectifs des modalités inférieures ou égales à cette modalité.
- Un tableau avec les effectifs et les effectifs cumulés croissants est appelé tableau des effectifs cumulés croissants.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

On a relevé le nombre de frères et sœurs de chacun des 25 élèves d'une classe de 3^e. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4	5
Nombre d'élèves	4	6	9	2	3	1

1. Calcule l'effectif cumulé croissant de 2.
2. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants

Activité 2

Reprenons le tableau de l'activité 1 :

Note	5	8	12	15	17	18
Effectif	2	5	3	7	5	3

1. Dresse le tableau des fréquences.
2. a) Calcule le pourcentage p_1 d'élèves ayant obtenu une note inférieure ou égale à 12.
b) Calcule le pourcentage p_2 d'élèves ayant obtenu une note inférieure ou égale à 17.
3. Recopie et complète le tableau des fréquences en notant en dessous de chaque modalité la somme de sa fréquence et des fréquences des modalités qui lui sont inférieures ou égales.

Note	5	8	12	15	17	18
Effectif	2	5	3	7	5	3

Fais le point

- $p_1 = 40 \%$ et $p_2 = 88 \%$
On dit que p_1 est la fréquence cumulée croissante de 12 ; et p_2 est la fréquence cumulée croissante de 17.
- Pour une série statistique à caractère quantitatif, lorsque les modalités sont rangées dans l'ordre croissant, la fréquence cumulée croissante d'une modalité est la somme des fréquences des modalités inférieures ou égales à cette modalité.
- Un tableau avec les effectifs et les fréquences cumulées croissantes est appelé tableau des fréquences cumulées croissantes.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

On a relevé le nombre de frères et sœurs de chacun des 25 élèves d'une classe de 3^e. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4	5
Nombre d'élèves	4	6	9	2	3	1

1. Dresse le tableau des fréquences.
2. Dresse le tableau des fréquences cumulées croissantes

2 Médiane d'une série statistique

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ d'identifier la médiane d'une série statistique à caractère discret ;
- ✓ de déterminer la médiane d'une série statistique à caractère discret ;
- ✓ d'interpréter la médiane d'une série statistique à caractère discret.

Activité 1

On donne ci-dessous les notes, en Maths et en SVT, de Koigni élève en classe de 3^e.

⇒ Maths : 11 ; 14 ; 10 ; 12 ; 8 ; 17 ; 17

⇒ SVT : 18 ; 11 ; 12 ; 10 ; 17 ; 10

1. i- Combien Koigni a-t-il de notes en Maths ?
 ii- Classe les notes de maths de Koigni dans l'ordre croissant.
 iii- Détermine la note m_1 de Koigni qui a autant de notes qui lui sont inférieures que de notes qui lui sont supérieures.
2. a) Combien Koigni a-t-il de notes en SVT ?
 b) Classe les notes de Koigni dans l'ordre croissant.
 c) Détermine les deux notes x et y qui sont tels qu'il y a autant de notes qui leur sont inférieures que de notes qui leur sont supérieures.
 d) Calcule : $m_2 = \frac{x+y}{2}$
 e) Compare le nombre de notes inférieures à m_2 et le nombre de notes supérieures à m_2 .

Fais le point

- $m_1 = 12$ et $m_2 = 11,5$,
 En maths : il y a autant de notes supérieures à 12 que de notes inférieures à 12
 En SVT : il y a autant de notes supérieures à 11,5 que de notes inférieures à 11,5.
- On dit que 12 est la note médiane de Koigni en Maths et 11,5 est sa note médiane en SVT.
- On appelle médiane d'une série statistique dont les modalités sont ordonnées, tout nombre qui partage cette série en deux groupes de même effectif.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Complète par "Vrai" ou par "Faux" à chaque affirmation selon qu'elle est vraie ou qu'elle est fausse.

N°	Affirmations
1	La moitié de l'effectif total d'une série statistique a une valeur inférieure ou égale à la médiane.
2	La médiane d'une série statistique est un nombre.
3	La médiane d'une série statistique est la moitié de l'effectif total.
4	La médiane d'une série statistique partage cette série en deux séries de même effectif.
5	La médiane d'une série statistique est toujours une modalité de cette série.

Activité 2

En t'inspirant de l'activité 1 ci-dessus, dis comment détermine-t-on la médiane d'une série statistique à caractère quantitatif (avec un nombre fini de modalités) :

1. dont l'effectif total est un nombre pair ?
2. dont l'effectif total est un nombre impair ?

Fais le point

- Si l'effectif total T de la série est un nombre impair ($T = 2n + 1$), alors la médiane est la $(n+1)$ -ième modalité.
- Si l'effectif total T de la série est un nombre pair ($T = 2n$), alors la médiane est la demi-somme de la n -ième et de la $(n+1)$ -ième modalité.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Détermine la médiane de la série statistique suivante :

123 ; 78 ; 125 ; 89 ; 121 ; 56 ; 78 ; 125

EXERCICE

2

Lors d'un devoir de Mathématiques les élèves d'une classe de 3^e ont obtenu les notes suivantes :

7 ; 8 ; 4 ; 13 ; 13 ; 10 ; 4 ; 17 ; 3 ; 11 ; 15 ; 10 ; 19.

1. Détermine la médiane de cette série statistique.
2. Que signifie cette note médiane ?

3 Regroupement en classes de même amplitude

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ de regrouper les données d'une série statistique en classes de même amplitude ;
- ✓ d'identifier des classes de même amplitude ;
- ✓ de connaître :
 - la définition d'une classe modale ;
 - la formule de la moyenne d'une série statistique à caractère continu ;
- ✓ déterminer la classe modale d'une série statistique ;
- ✓ calculer :
 - la moyenne d'une série statistique à caractère continu ;
 - la médiane d'une série statistique à caractère continu.

Activité 1

On donne ci-dessous la consommation journalière moyenne (en litres) d'essence pour leurs voitures des cadres d'une entreprise pour 100 km.

7,7	9,8	11,6	15,1	9,3	6,3	16	8,9	17,9	9	10,2	14,7	7	12
-----	-----	------	------	-----	-----	----	-----	------	---	------	------	---	----

On considère que la consommation c en litres d'essence d'une voiture est :

- ⇒ Bonne lorsque $6 \leq c < 9$
- ⇒ Limite lorsque $9 \leq c < 12$
- ⇒ Excessive lorsque $12 \leq c < 15$
- ⇒ Mauvaise lorsque $15 \leq c < 18$

1. Quel est le nombre de voitures dont la consommation est Limite ?
2. Quel est le nombre de voitures dont la consommation est Excessive ?
3. Recopie et complète le tableau des effectifs suivant :

Consommation d'essence en litres	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 18[
Effectif de voiture				

4. Quel est l'amplitude de chacun des intervalles du tableau ?
5. Quel est l'intervalle qui a le plus grand effectif ?

Fais le point

- Il y a 5 voitures de consommation Limite et 3 voitures de consommation Excessive. Les intervalles dans le tableau ont tous la même amplitude. L'intervalle [9 ; 12[est celui qui a le plus grand effectif.
- Chaque intervalle dans le tableau ci-dessus est appelé classe de la série statistique. On dit qu'on a regroupé les données en classes de même amplitude.
- La classe qui a le plus grand effectif est appelée classe modale de la série statistique

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Un jour, une infirmière a relevé le rythme cardiaque en bpm (battement par minute) de 36 patients. Elle a obtenu les résultats suivants :

80	68	82	74	86	66	73	71	74	81	78	64	68	67	70	65	74	77
67	77	76	87	75	68	73	70	72	76	60	89	73	71	72	67	83	66

1. Dresse le tableau des effectifs en regroupant ces données en classe d'amplitude 5.
2. Quel est la classe modale ?

Activité 2

Un jour une infirmière a relevé le rythme cardiaque en bpm (battement par minute) des patients pendant 3 heures avant de prendre sa pause. Elle a regroupé les résultats dans le tableau ci dessous suivants :

Rythme cardiaque	[60 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 90[
Effectif	15	21	14

1. Calcule l'effectif total des patients.
2. Recopie et complète le tableau suivant :

Rythme cardiaque	[60 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 90[
Effectif	15	21	14
Centre de la classe			
Produit de l'effectif par le centre de la classe			

3. Calcule le nombre M qui est la somme des nombres de la 4^e ligne divisée par l'effectif total.

Fais le point

- L'effectif total est 70.
- On dit que M est la moyenne de la série statistique représentée par le tableau.

$$M = 74,8$$

- La moyenne M d'une série statistique regroupée en classe est :

$$M = \frac{(n_1 \times c_1) + (n_2 \times c_2) + \dots + (n_p \times c_p)}{n} \quad \text{où } n \text{ est l'effectif total, } p \text{ le nombre de classes,}$$

$c_1, c_2, \dots$ et c_p les centres respectifs des classes et $n_1, n_2, \dots$ et n_p les effectifs respectifs des classes.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Dans une entreprise, les salaires, en milliers de francs CFA, des employés se répartissent comme suit :

Classe	[100 ; 120[	[120 ; 140[	[140 ; 160[	[160 ; 180[	[180 ; 200[	[200 ; 220[
Effectif	12	20	40	18	6	4

1. Calcule l'effectif total des employés de cette entreprise.
2. Calcule le salaire moyen des employés de cette entreprise.

Activité 3

Dans une entreprise, les salaires, en milliers de francs CFA, des employés se répartissent comme suit :

Classe	[100 ; 120[	[120 ; 140[	[140 ; 160[	[160 ; 180[	[180 ; 200[	[200 ; 220[
Effectif	12	20	40	18	6	4

1. Calcule l'effectif total des employés de cette entreprise.
2. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants de la série statistique représentée par le tableau.
3. Dans quel intervalle se situe la médiane x de cette série ? Justifie ta réponse.
4. Résous l'équation : $\frac{x-140}{50-32} = \frac{160-140}{72-32}$.
5. De tout ce qui précède, détermine une méthode de calcul de la médiane d'une série statistique regroupée en classe.

Fais le point

- $x = 149$
- Pour déterminer la médiane d'une série statistique regroupée en classes, on peut procéder comme suit :
 - On calcule de l'effectif total n ;
 - On dresse le tableau des effectifs cumulés croissants ;
 - On identifie la classe $[a ; b[$ qui a un effectif supérieur ou égal à la moitié de l'effectif total ;
 - On résout l'équation : $\frac{m_e - a}{\frac{n}{2} - ECC_a} = \frac{b - a}{ECC_b - ECC_a}$ où ECC_a et ECC_b sont les effectifs cumulés croissants respectifs de a et b ;
 - La solution m_e de l'équation est la médiane de la série statistique.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

On a relevé les hauteurs de pluie d'un mois de juin dans certaines villes de Côte d'Ivoire. Les résultats exprimés en millimètres sont regroupés par classes dans le tableau ci-dessous.

Hauteurs de pluie (en mm)	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[
Nombre de villes	13	24	17	11	5

1. Calcule l'effectif total des villes.
2. Détermine la médiane de la série statistique définie par le tableau ci-dessus.
3. Que signifie cette médiane ?

4 Polygone des effectifs cumulés croissants

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ de construire le polygone des effectifs cumulés croissants d'une série statistique à caractère continu ;
- ✓ de déterminer la médiane d'une série statistique à caractère continu par lecture graphique.

Activité 1

Le tableau ci-dessous donne la répartition des 150 employés d'une entreprise selon leurs âges.

Âges	[24 ; 28[	[28 ; 32[	[32 ; 36[	[36 ; 40[
Effectif	42	45	36	27

1. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants de cette série statistique.
2. Dans un repère orthogonal :
 - ⇒ place le point de coordonnées (24 ; 0) à l'intersection des axes.
 - ⇒ place les points dont les coordonnées sont de la forme :
(borne supérieure de la classe ; effectif cumulé croissant de la classe).
3. Trace les segments reliant, dans l'ordre, les différents points obtenus.

Fais le point

- Le graphique ci-dessus est appelé polygone des effectifs cumulés croissants.
- Pour construire le polygone des effectifs cumulés croissants d'une série statistique à caractère continu :
 - ✓ on dresse le tableau des effectifs cumulés croissants ;
 - ✓ on place dans un repère orthogonal le point de coordonnées (borne inférieure de la 1^{ère} classe ; 0), puis les points dont les coordonnées sont de la forme : (borne supérieure de la classe ; effectif cumulé croissant de la classe) ;
 - ✓ on relie les points, dans l'ordre, par des segments ;
 - ✓ la ligne brisée obtenue est le polygone des effectifs cumulés croissants.

⇒ Utilise le nouvel outil

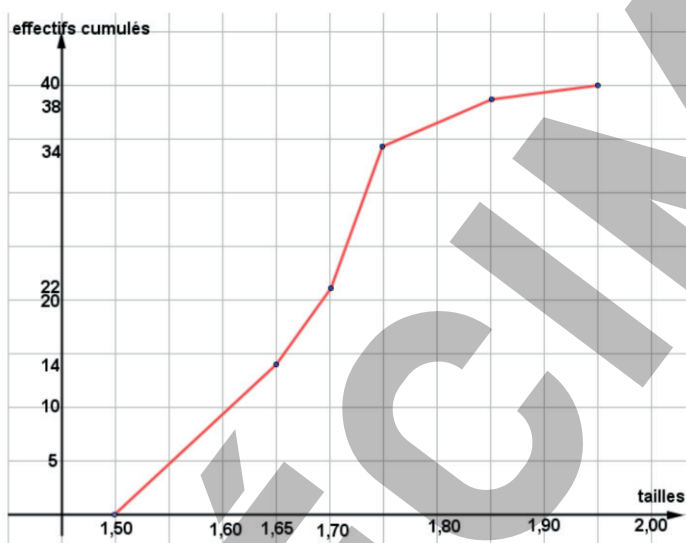
EXERCICE

On donne la série statistique suivante :

Classe	[10 ; 12[	[12 ; 14[	[14 ; 16[	[16 ; 18[	[18 ; 20[
Effectif	12	20	40	18	10

Construis le polygone des effectifs cumulés croissants de cette série statistique.

Activité 2



Le graphique ci-dessus est le polygone des effectifs cumulés d'une série statistique qui étudie la taille en mètre des étudiant d'une classe de 3^e.

1. Quel est l'effectif total de cette classe ?
2. La droite (Δ) passant par le point de coordonnées (0 ; 20) et parallèle à l'axe des abscisses coupe le polygone en M. Lis l'abscisse du point M.
3. Que représente l'abscisse du point M, pour la série statistique ?
4. Donne une méthode de détermination graphique de la médiane d'une série statistique regroupé en classe, à partir du polygone des effectifs cumulés croissants.

Fais le point

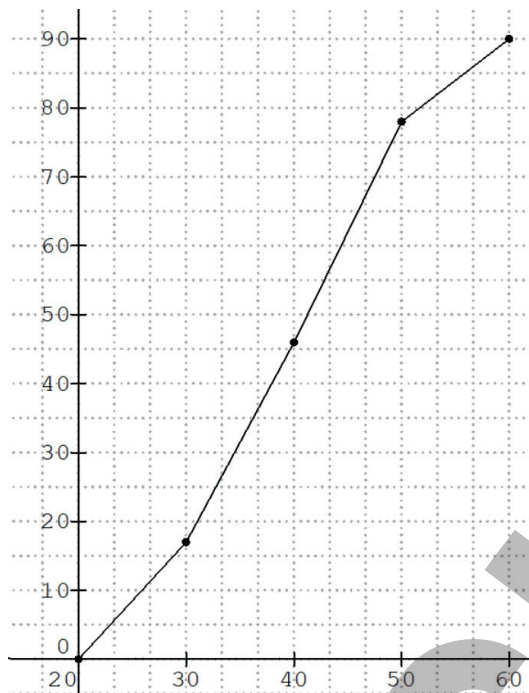
Pour déterminer la médiane d'une série statistique regroupée en classes et d'effectif total n , à partir du polygone des effectifs cumulés croissants :

- On trace la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées $\left(0; \frac{n}{2}\right)$.
- On lit l'abscisse du point d'intersection de cette droite et du polygone
- Cette abscisse est la médiane de la série statistique.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Le graphique ci-dessous est le polygone des effectifs cumulés d'une série statistique. Détermine sa médiane.

**5 Diagramme circulaire**

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ de construire un diagramme circulaire ;
- ✓ d'interpréter un diagramme circulaire ;
- ✓ de dresser le tableau des effectifs cumulés ou des fréquences cumulées à partir d'un diagramme circulaire.

Activité**1**

Le tableau ci-dessous donne la répartition des 150 employés d'une entreprise selon leurs âges.

Âges	[24 ; 28[	[28 ; 32[	[32 ; 36[	[36 ; 40[
Effectif	42	45	36	27

1. Recopie et complète le tableau suivant sachant que les mesures des angles sont proportionnelles aux effectifs des classes.

Âges	[24 ; 28[	[28 ; 32[	[32 ; 36[	[36 ; 40[	Total
Effectif	42	45	36	27	
Mesure de l'angle					360°

2. Construis un cercle de centre I et de rayon 3 cm.
3. Construis, dans le cercle, les secteurs angulaires de sommet I, dont les mesures correspondent à chaque classe du tableau, les uns à la suite des autres.
4. Colorie les secteurs angulaires en des couleurs différentes.

Fais le point

- Le cercle avec les secteurs angulaires coloriés ci-dessus est le diagramme circulaire représentant la série statistique définie par le tableau.
- Pour construire le diagramme circulaire correspondant à une série statistique d'effectif total n :
 - ✓ On calcule la mesure a° du secteur angulaire correspondant à chaque modalité avec la formule : $a = \frac{360}{n} \times \text{effectif de la modalité}$
 - ✓ On dessine ensuite les secteurs angulaires de même sommet correspondants dans un cercle ; le sommets des angles étant le centre de ce cercle.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

On a demandé à des élèves d'une classe de 3^e leur couleur préférée ; les résultats sont rangés dans le tableau suivant :

Couleur	Jaune	Vert	Bleu	Rouge
Effectif	18	8	27	7

Construis le diagramme circulaire représentant ces résultats.

EXERCICE 2

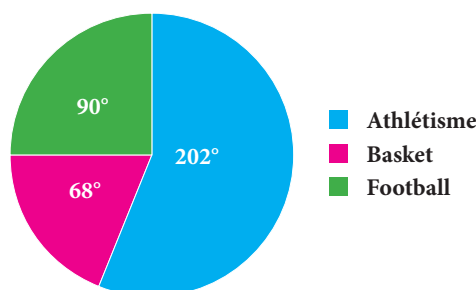
On donne la série statistique suivante :

Classe	[10 ; 12[	[12 ; 14[	[14 ; 16[	[16 ; 18[	[18 ; 20[
Effectif	12	20	40	18	10

Construis le diagramme circulaire représentant cette série.

Activité 2

Une enquête a été menée auprès de 450 jeunes d'une commune, pour connaître le sport qu'ils pratique. Les résultats ont été représentés par le diagramme circulaire ci-contre.



1. Quel est le sport le plus pratiqué par ces jeunes ? Justifie ta réponse.
2. Recopie et complète le tableau ci-dessous :

Sport	Athlétisme	Basket	Football	Total
Mesures d'angles				
Effectifs				
Fréquences				

3. Quels sont les tableaux que l'on peut dresser à partir d'un diagramme circulaire ?
4. Comment procède-t-on pour avoir ces tableaux ?

Fais le point

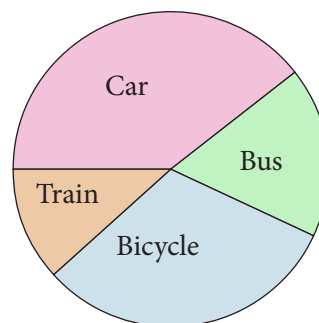
- À partir d'un diagramme circulaire représentant une série statistique on peut dresser le tableau des effectifs et le tableau des fréquences de cette série.
- Pour cela :
 - on mesure le secteur angulaire correspondant à chaque modalité ;
 - on calcule l'effectif de chaque modalité avec la formule :

$$\text{effectif de la modalité} = a \times \frac{n}{360}$$
 où a est la mesure du secteur angulaire correspondant à la modalité et n l'effectif total ;
 - on calcule la fréquence de chaque modalité, si on dresse un tableau des fréquences ;
 - on dresse le tableau demandé.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

On donne le diagramme circulaire ci-contre qui donne les différents types de transports utilisés par les 200 employés d'une entreprise pour se rendre à leur travail.
Dresse le tableau des effectifs et celui des fréquences de cette série statistique.



Retiens les outils essentiels

1 Effectifs cumulés croissants et fréquence cumulées croissantes

Définition

Étant donnée une série statistique à caractère quantitatif discret (le caractère prend un nombre fini de valeurs) dont les modalités sont rangées dans l'ordre croissant :

- **L'effectif cumulé** croissant d'une modalité est la somme des effectifs des modalités inférieures ou égales à cette modalité.
- **La fréquence** cumulée croissante d'une modalité est la somme des fréquences des modalités inférieures ou égales à cette modalité.

Exemple

Le tableau ci-dessous donne la répartition des 150 employés d'une entreprise selon leurs âges.

Âges	26	30	35	43
Effectif	42	45	36	27
Fréquence en %	28	30	24	18

- Effectif cumulé croissant :
 - ✓ L'effectif cumulé croissant de 35 est : $42 + 45 + 36$ soit 123
 - ✓ Le tableau des fréquences cumulées croissantes est :

Âges	26	30	35	43
Effectif	42	45	36	27
Effectif cumulé croissant	42	87	123	150

- Fréquence cumulée croissante :
 - ✓ La fréquence cumulée croissante de 35 est : $28 + 30 + 24$ soit 82
 - ✓ Le tableau des fréquences cumulées croissantes est :

Âges	26	30	35	43
Fréquence	28	30	24	18
Fréquence cumulée croissante	28	58	82	100

2 Médiane d'une série statistique

1. Définition de la médiane d'une série statistique

Définition

La médiane m d'une série statistique à caractère quantitatif est le nombre qui partage la série en deux groupes de même effectif.

- ✓ Un groupe dont la valeur du caractère est inférieure ou égale à m .
- ✓ Un groupe dont la valeur du caractère est supérieure ou égale à m .

2. Détermination de la médiane d'une série statistique à caractère discret

Méthode

- Si l'effectif total N de la série est un nombre impair ($N=2n+1$), alors la médiane est la $(n+1)$ -ième modalité.
- Si l'effectif total N de la série est un nombre pair ($N=2n$) alors la médiane est la demi-somme de la n -ième et de la $(n+1)$ -ième modalité.

Exemple

Voici ci-dessous les notes obtenues au 1^{er} trimestre par Kauphi et Oufouet, deux élèves en classe de 3^e.
Les notes de Kauphi : 14 - 12 - 11 - 18 - 7 - 7 - 13.
Les notes de Oufouet : 12 - 17 - 11 - 18 - 10 - 8 - 13 - 19.

Déterminons la note médiane chacun de ces élèves pour ce 1^{er} trimestre.

Il faut d'abord ranger les notes par ordre croissant.

- Pour Kauphi: 7 - 7 - 11 - 12 - 13 - 14 - 18.

Il a 7 notes.

7 est impaire et $7 = 2 \times 3 + 1$

La médiane est la 4^e note qui est 12.

La note médiane de Kauphi est 12.

- Pour Oufouet : 8 - 10 - 11 - 12 - 13 - 17 - 18 - 19.

Il a 8 notes.

8 est paire et $8 = 2 \times 4$

La médiane est la demi-somme de la 4^e et la 5^e notes qui sont 12 et 13.

$(12+13) \div 2 = 12,5$

La note médiane de Oufouet est 12,5.

3 Regroupement en classes d'une série statistique

1. Présentation

Lorsque les données d'une série statistique à caractère quantitatif sont en très grand nombres ou qu'elles peuvent avoir des valeurs approximatives, on peut les regrouper en plusieurs intervalles.

Ces intervalles sont appelés classes de la série statistique.

L'amplitude de chaque intervalle est l'amplitude de la classe.

2. Classe modale et centre d'une classe

Définition

- ✓ Une classe modale d'une série statistique regroupée en classe de même amplitude est une classe qui a le plus grand effectif.
- ✓ Le centre d'une classe $[a ; b[$ d'une série statistique regroupée en classes est égale à la demi-somme des extrémités de cette classe, c'est-à-dire $\frac{a+b}{2}$.

Exemple

Le tableau ci-dessous donne la répartition des 150 employés d'une entreprise selon leurs âges.

Âges	[24 ; 28[	[28 ; 32[	[32 ; 36[	[36 ; 40[
Effectif	42	45	36	27

- ✓ La classe modale de cette série statistique est $[28 ; 32[$ car son effectif 45 est le plus grand des effectifs.

- ✓ Le centre de $[32 ; 36[$ est $\frac{32+36}{2}$ soit 34.

3. Moyenne d'une série statistique regroupée en classes

Méthode de calcul

On donne dans le tableau ci-dessous une série statistique d'effectif total n .

Modalités	x_1	x_2		x_p
Effectifs	n_1	n_2		n_p
Centres des classes	c_1	c_2		c_p

La moyenne m de la série statistique ci-dessus

$$\text{est : } m = \frac{(n_1 \times c_1) + (n_2 \times c_2) + \dots + (n_p \times c_p)}{n}$$

Exemple

Âges	[24 ; 28[	[28 ; 32[	[32 ; 36[	[36 ; 40[
Effectif	42	45	36	27
Centre de la classe	26	30	34	38

La moyenne m de la série statistique ci-dessus est :

$$M = \frac{42 \times 26 + 45 \times 30 + 36 \times 34 + 27 \times 38}{150} = 31,28$$

4 Polygone des effectifs cumulés croissants d'une série statistique à caractère continu

Méthode

Pour construire, dans un repère orthogonal, le polygone des effectifs cumulés croissants :

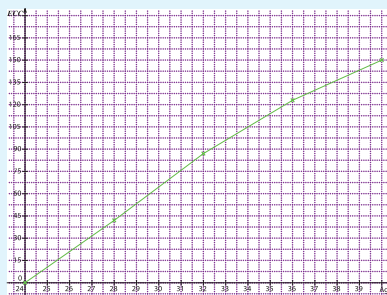
- On place le point de coordonnées (borne inférieure de la 1ère classe ; 0).
- Pour chaque classe on place le point dont les coordonnées sont de la forme : (borne supérieure de la classe ; effectif cumulé croissant de la classe)
- On relie ensuite successivement les différents points par des segments.

Exemple

On donne la série statistique définie par le tableau ci-dessous :

Âges	[24 ; 28[	[28 ; 32[	[32 ; 36[	[36 ; 40[
Effectif	42	45	36	27
Effectif cumulé croissant	42	87	123	150

Construisons le polygone des effectifs cumulés croissants de cette série.



Remarque : Ici on a commencé la graduation de l'axe des abscisses par 24.

5 Diagramme circulaire

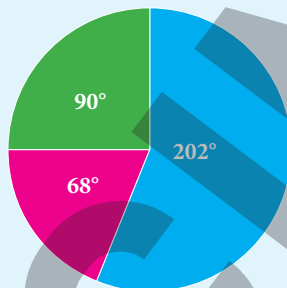
Définition

Le diagramme circulaire d'une série statistique est un disque partagé en secteurs angulaires dont les mesures sont proportionnelles aux effectifs des modalités.

Exemple

On donne tableau ci-contre qui donne les différents types de transport utilisés par les 200 employés d'une entreprise pour se rendre à leur travail.

Moyen de transport	Bus	Bicyclette	Car	Train	Total
Nombre d'employés	40	60	80	20	200
Mesure de l'angle	72°	108°	144°	36°	360°



Méthode

Pour calculer la mesure en degré a de l'angle correspondant à une modalité on utilise la formule :

$$a = \frac{360}{n} \times \text{effectif de la modalité où } n \text{ est l'effectif total de la série.}$$

Exercices commentés

Exercice 1

On a relevé la taille en centimètres (cm) de 100 plants de teck, puis on a résumé les résultats dans le tableau ci-dessous.

Taille	[13 ; 14[	[14 ; 15[	[15 ; 16[	[16 ; 17[
Nombre de plants	35	15	30	20

- Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.
- Construis le polygone des effectifs cumulés croissants.
 - Détermine graphiquement la taille médiane m_e de ces plants de teck.
 - Interprète cette médiane.
- Vérifie le résultat de la question 2.b) par le calcul.

Solution

1. Tableau des effectifs cumulés croissants

Taille	[13 ; 14[	[14 ; 15[	[15 ; 16[	[16 ; 17[
Nombre de plants	35	15	30	20
Effectif cumulé croissant	35	50	80	100

2. a) Construction

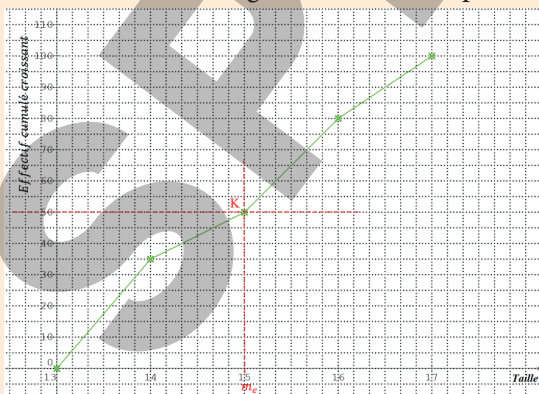
Je choisis une échelle pour chaque axe du repère orthogonal :

- Pour l'axe des abscisses (les tailles) : 3 cm pour 1
- Pour l'axe des ordonnées (les effectifs) : 1 cm pour 10

Ici, il est bon de commencer la graduation de l'axe des abscisses par 13 au lieu de 0.

Je marque les points de coordonnées : (13 ; 0) ; (14 ; 35) ; (15 ; 50) ; (16 ; 80) et (17 ; 100).

Je trace ensuite les segments reliant ces points.



b) L'effectif total est 100, donc la moitié de l'effectif total est 50.

Je trace la droite passant par le point de coordonnées (0 ; 50) et parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe le polygone en K.

L'abscisse du point K est 15.

Donc la taille médiane m_e est égale à 15 cm.

c) Interprétation :

Il y a autant de plants ayant moins de 15 cm que de plants ayant plus de 15 cm.

3. La moitié de l'effectif total est 50 et 50 est l'effectif cumulé croissant correspondant à la classe [14 ; 15[donc :

$$\frac{m_e - 14}{50 - ECC_{14}} = \frac{15 - 14}{ECC_{15} - ECC_{14}}$$

$$\text{donc } \frac{m_e - 14}{50 - 35} = \frac{15 - 14}{50 - 35}$$

$$\text{d'où } \frac{m_e - 14}{15} = \frac{1}{15}$$

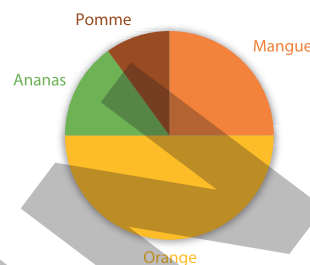
c'est-à-dire $m_e - 14 = 1$ et donc $m_e = 15$

Exercices commentés

Exercice 2

On a demandé aux 900 élèves de 3^e d'un collège de donner le nom du fruit qu'il aime le plus. Les réponses ont donné une série statistique représentée par le diagramme circulaire ci-contre.

1. Quel est le fruit le plus cité ? justifie ta réponse.
2. Dresse le tableau des effectifs.



Solution

1. Le fruit le plus cité est l'orange, car il est représenté par la plus grande portion du diagramme.
2. Il faut mesurer les angles (ici on peut deviner aisément la mesure de l'angle représentant les oranges et celui de l'angle représentant les mangues).

L'effectif est trouver en appliquant la formule : effectif de la modalité = $a \times \frac{900}{360}$ où a est la mesure du secteur angulaire correspondant à la modalité et n l'effectif total.

On multiplie donc chaque mesure d'angle par 2,5 (car $\frac{900}{360} = 2,5$).

Fruit	Manguue	Orange	Ananas	Pomme
Mesure de l'angle correspondant (en degré)	90	180	54	36
Effectif	225	450	135	90

Utilisation des outils essentiels

⇒ A - Utilise plusieurs outils de la leçon pour résoudre un exercice

Exercice 1

On a relevé la taille, en mètres, de douze personnes et cela a donné les résultats suivants :

1,51 – 1,81 – 1,75 – 1,84 – 1,61 – 1,71 – 1,61 – 1,59 – 1,49 – 1,85 – 1,77 – 1,73.

1. Calcule la taille moyenne de ces personnes.
2. Calcule la taille médiane de ces personnes et donne sa signification.

Exercice 2

On a relevé la résistance en Ohm (Ω) de 11 conducteurs et obtenu les résultats suivants :

43,5 – 46,3 – 45,2 – 43,7 – 45,2 – 46,4 – 45,1 – 44,9 – 44,8 – 45,1 – 44,8.

1. Calcule la résistance moyenne de ces conducteurs.
2. Calcule la médiane de la série de la série définie par ces données.

Exercice 3

Le tableau suivant donne la répartition des notes à l'oral d'anglais du BEPC de 26 candidats libres.

Note	7	8	9	10	13	14	15	16	17
Effectifs	2	1	1	5	2	6	1	3	5
Effectif cumulé croissant									

1. Recopie et complète le tableau ci-dessus.
2. Calcule la moyenne à l'oral d'anglais, à l'unité près, de ces candidats.
3. Détermine la note médiane de ces candidats. Que signifie cette note ?
4. Calcule le pourcentage, au dixième près, des candidats ayant eu une note inférieure ou égale 13.

Exercice 4

Le tableau suivant définit une série statistique dont les données sont regroupé en classes.

Masses des œufs (en g)	[35 ; 45[	[45 ; 55[	[55 ; 65[	[65 ; 75[
Nombre d'œufs	55	70	35	40
Centre de la classe				
ECC				

1. Recopie et complète le tableau ci-dessus.
2. Calcule et donne la signification de :
 - a) la moyenne de cette série;
 - b) la médiane de cette série.

Exercice 5

Une coopérative agricole vend ses pastèques en fonction du diamètre.

Elle a relevé ci-dessous, le diamètre des premières pastèques de chacun de ses 30 membres.

Voici les résultats :

49 – 52 – 59 – 57 – 51 – 55 – 50 – 56 – 49 – 48
58 – 49 – 52 – 51 – 53 – 56 – 49 – 56 – 55 – 50
52 – 56 – 57 – 54 – 53 – 49 – 51 – 55 – 56 – 59

1. Recopie et complète le tableau suivant :

Diamètre	[48 ; 51[	[51 ; 54[	[54 ; 57[	[57 ; 60[
Effectif				
Centre de la classe				

2. Calcule à l'unité près :
 - a) le diamètre moyen de ces pastèques ;
 - b) le diamètre médian de ces pastèques et interprète-le.

Exercice 6

On donne ci-dessous les résultats lors d'un concours de lancer de javelot. Les longueurs sont données en mètres (m).

36 42 37 43 38 44 32 40 44 36 46 39 40
40 41 41 45 37 43 43 46 39 44 47 48

1. On veut regrouper ces données dans un tableau des effectifs dont les modalités sont des classes d'amplitude 3, les valeurs étant comprises entre 30 et 50.
 - a) Combien y-a-t-il de modalités ?
 - b) Dresse le tableau des effectifs.
2. a) Quel est l'effectif des concurrents ayant fait un lancer de moins de 40 m ?
b) Déduis-en le pourcentage de concurrents ayant fait un lancer de plus de 40 m.

Exercice 7

Lors d'un sondage, on a demandé à des personnes le temps passé par jour devant la télévision. Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus.

Utilisation des outils essentiels

Nombre d'heures	0	1	2	3	4	5	6
Effectif	25	65	95	125	95	70	25

1. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.
2. Calcule le pourcentage de personnes passant au plus 3 heures devant leur télévision.
3. Calcule la moyenne de la série définie par le tableau. Que signifie cette moyenne ?
4. Calcule la médiane et interprète-le.

Exercice 8

Le tableau suivant classe les employés d'une entreprise suivant leur ancienneté dans l'entreprise.

Ancienneté	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30[
Effectif	5	24	11	10	12	21

1. Que signifie « Kocoti appartient à la classe » [15 ; 20[?
2. Dresse le tableau des fréquences et des fréquences cumulés croissantes.
3. Calcule le pourcentage d'employés ayant strictement moins de 15 ans d'ancienneté.
4. Calcule le pourcentage d'employés ayant une ancienneté de 15 ans et plus.

Exercice 9

Un professeur a présenté dans le tableau ci-dessous les résultats des élèves de 3^e au QCM de 5 questions, donné lors du brevet blanc.

Nombre de bonnes réponses	0	1	2	3	4	5
Fréquence (en %)	3,5	8,5	12,5	38,5	26	?

1. Calcule le pourcentage des élèves qui ont réussi un sans-faute au QCM.
2. Calcule le nombre moyen de bonnes réponses obtenues au QCM.
3. Détermine le nombre médian de bonnes réponses et interprète-le.

Exercice 10

Le tableau suivant a été obtenu après avoir relevé la vitesse de 70 véhicules.

Vitesse en km/h	[60 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 90[	[90 ; 100[	[100 ; 110[
Effectif cumulé croissant	15	36	46	64	70

1. Construis le polygone des effectifs cumulés croissants.
2. Détermine graphiquement une valeur approchée de la médiane.
3. Vérifie le résultat de la question précédente par un calcul.

Exercice 11

On donne le tableau statistique ci-dessous :

Modalité	10	25	40	55	60
Effectif					
Effectif Cumulé Croissant	15	24	30	41	55

1. Recopie et complète le tableau ci-dessus.
2. Calcule la moyenne de cette série statistique au 100^e près.
3. Détermine la médiane de cette série.

Exercice 12

Le tableau suivant a été obtenu après avoir relevé la vitesse de 70 véhicules sur une autoroute, en une journée.

Vitesse en km/h	[60 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 90[	[90 ; 100[	[100 ; 110[
Effectif					
Effectif cumulé croissant	15	36	46	64	70

1. Recopie et complète le tableau ;
2. Calcule la vitesse moyenne à laquelle roulent ces véhicules.

Exercice 13

On donne ci-dessous le polygone des effectifs cumulés croissants d'une série statistique à caractère continu.



1. Quel est l'effectif total de cette série statistique ?

- Détermine graphiquement la médiane de cette série.
- À partir du polygone, dresse le tableau des effectifs cumulés croissants de cette série.
- Sachant que l'effectif de $[50 ; 55[$ est 70, dresse le tableau des effectifs de cette série.

Exercice 14

Voici une série de données, l'une est manquante et est appelée a .

18 ; 13 ; 17 ; 16 ; 9 ; 15 ; 12 ; 11 ; 18 ; 16 ; 17 ;
13 ; 12 ; 11 ; 14 ; 15 ; 16 ; 12 ; 10 ; 18 ; a .

Quelles valeurs peut prendre a pour que la médiane soit 14 ?

Exercice 15

Le tableau ci-dessous donne la répartition des notes obtenues par les élèves d'une classe de 6^e lors d'une interrogation notée sur 10.

Modalité	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10]
Effectif	7	10	15	8

- Calcule la moyenne de la classe pour cette interrogation.
- Construis le polygone des effectifs cumulés croissants.
- Construis le diagramme circulaire représentant cette répartition des notes.

Exercice 16

Dans un lycée on a fait une enquête sur le loisir préféré des 60 élèves de la 3^e. Les résultats ont été regroupé dans le tableau ci-dessous :

Sport préféré	Lecture	Sport	Télévision	Jeux vidéo
Effectif	10	30	15	5
Mesure de l'angle correspondant (en degré)				

- Recopie et complète le tableau.
- Construis le diagramme circulaire représentant la série statistique définie par le tableau.

Exercice 17

On a relevé la nationalité des vainqueurs des 85 tours de France cyclistes entre 1903 et 1998.

Le tableau ci-dessous donne le nombre de victoires par nationalité.

	Belgique	Espagne	France	Italie	Autres	Total
Nombre de victoires	Belgique	Espagne	France	Italie	Autres	Total
Fréquence	18	9	36	9	13	
Mesure de l'angle (°)						

- Recopie et complète le tableau.
- Construis le diagramme circulaire représentant cette répartition

Exercice 18

On a demandé à 30 personnes, le temps qu'ils passent dans les transports, chaque matin, pour arriver à leur lieu de travail.

Les réponses sont résumées dans le tableau ci-après.

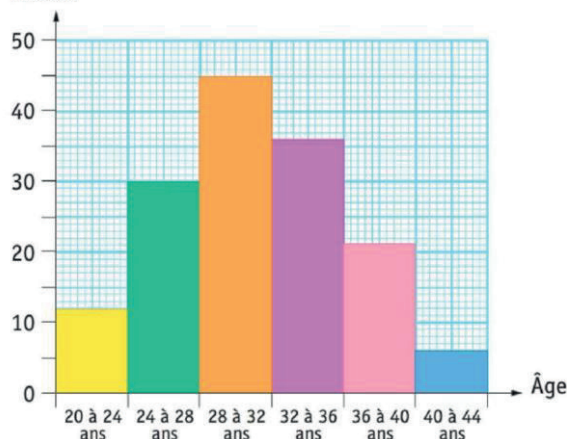
Temps mis (en min)	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[
Effectif	4	12	8	6

- Calcule le temps que ces personnes passent en moyenne dans les transports chaque matin.
- Peut-on dire que la moitié de ces personnes passent au moins 20 minutes dans les transports ? Justifie ta réponse.

B- Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un exercice

Exercice 19

Le diagramme ci-dessous donne la répartition des 150 professeurs d'un lycée selon leur âge. ;
Effectif



1. Dresse le tableau des effectifs.
2. Calcule l'âge moyen des professeurs de ce lycée.
3. Construis le diagramme circulaire représentant ces données.

Exercice 20

On a demandé aux élèves de deux classes de 3^e d'un collège le nombre livres que chacun d'eux a lu pendant l'année scolaire précédente. Les résultats ont été communiqués au chef de l'établissement de façon différente par chaque classe.

3^e A : 1 - 2 - 2 - 2 - 2 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 - 7 - 7 - 7.

3^e B : Effectif total : 25 // Moyenne : 4 // Médiane : 5 // Étendue : 8

Remarque : l'étendue d'une série statistique à caractère quantitatif est la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs prises par cette série.

1. Compare les nombres moyens de livres empruntés dans chaque classe.
2. Un « grand lecteur » est un élève qui a lu plus de 5 livres. Détermine dans quelle classe il y a le plus grand nombre de « grands lecteurs ».
3. Dans quelle classe se trouve l'élève ayant lu le plus de livres ? Justifie ta réponse.

Exercice 21

Lors d'un concours comportant trois épreuves un candidat a obtenu les notes suivantes :

Epreuve	Coefficient	Notes
Mathématiques	3	m
Français	2	8
Culture général	3	13

Sachant que ce candidat a eu une moyenne de 13, calcule sa note m à l'épreuve de « Mathématiques ».

Exercice 22

Le tableau ci-dessous donne la répartition des employés d'une entreprise en cinq catégories.

Catégorie	Effectif	Salaire (en francs cfa)
Ouvrier simple	53	78 750
Ouvrier qualifié	23	106 500
Cadre moyen	12	238 750
Cadre supérieur	10	400 000
Cadre dirigeant	2	975 000

1. Calcule le pourcentage de cadres dans cette entreprise.
2. Calcule le salaire moyen des employés dans cette entreprise.
3. Le PDG décide d'augmenter de 8 % le salaire d'un ouvrier simple.
4. Calcule le nouveau salaire d'un ouvrier simple
5. Calcule le taux d'augmentation du salaire moyen dans cette entreprise.

Exercice 23

Un médecin a noté les températures en degré de six patients.

37,2 39,4 38 38,2 39 38,6

1. Pour cette série, calcule et interprète
 - a) La moyenne M ;
 - b) La médiane m.
2. Un autre patient arrive et le médecin prend sa température et la note parmi les six premières températures relevées. La moyenne devient 39° et la médiane ne change pas.
 - a) Justifie que la température du nouveau patient est supérieure à m.
 - b) Détermine la température de ce dernier patient.

⇒ C. Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un problème

Exercice 24

Pour un spectacle de musique, les tarifs en FCFA sont les suivants :

- Normal : 10 100 ;
- VIP : 25 100 ;
- Enfant (entre 12 et 15 ans) : 3500 ;
- Étudiant : 5000.

L'organisation a coûté 3 127 850 .

À la fin du spectacle, le promoteur du spectacle demande à son comptable de lui faire le point avec :

- Le diagramme circulaire des ventes de tickets ;
- Le nombre de jeune ayant assisté au spectacle ;
- Le bénéfice

Ce dernier lui transmet les documents suivants ou malheureusement l'encre du tirage a taché une case du 1^{er} tableau.

Document 1				
Tarif	Normal	VIP	Jeunes	Étudiant
Fréquence (en %)	58	5	20	17

Document 2
1200 spectateurs
375 000 F de bénéfice

Ayant pris connaissance de ces documents, il pense que le le bénéfice signalé par le comptable est inexact et exige le diagramme.

Le comptable ne sachant pas le faire, le promoteur te propose de faire le diagramme et de vérifier si le bénéfice annoncé est exact.

1. Détermine le nombre de jeunes ayant participé au spectacle.
2. Recopie et complète le tableau suivant :

Tarif	Normal	VIP	Jeune	Étudiant	Total
Fréquence (en %)	58	5		17	
Effectif					1200
Mesure d'angle (en degré)					360

3. Calcule la recette totale de la vente des tickets.
4. Réponds aux préoccupations du promoteur.

Exercice 25

L'entreprise « Akolegéné » fabrique des pacemakers depuis 20 ans.

Elle veut évaluer la qualité de sa production en vue de renouveler sa chaîne de production si nécessaire.

Pour cela elle fait une enquête portant sur la durée de vie de ses pacemakers auprès de ses clients. L'enquête a porté sur un échantillon de 5000 pacemakers vendus, et les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Durée de vie en années	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[
Nombre de pacemakers	300	2345	1905	450

Le PDG dit qu'il renouvellera la chaîne de production si :

- Plus de 60 % des pacemakers durent moins de 8 ans ;
- La durée de vie moyenne des pacemakers est inférieure à 8 ans ;
- La durée de vie médiane des pacemakers est inférieure ou égale à 8 ans.

Sramblé, le chef du service maintenance, veut savoir s'il y aura un renouvellement de la chaîne de production pour pouvoir prévoir ses commandes de machines et de pièces de rechange.

Il ne sait malheureusement pas comment exploiter ce tableau pour avoir la réponse à sa préoccupation.

Aide-le.

1. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.
2. Calcule la durée moyenne des pacemakers.
3. Calcule la durée médiane de vie des pacemakers.
4. Réponds à la préoccupation de Sramblé.

Leçon

12

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Situation d'apprentissage

Koffi est élève en classe de 3^e et il adore le rugby. Un jour, il a lu dans une revue sportive, l'information suivante :

« Lors de ce match au sommet, les éléphants (section rugby), ont marqué plus de 7 essais dont certains ont été transformés et d'autres non, et 2 pénalités pour un total inférieur à 51 points ».

Curieux, Koffi veut connaître toutes les possibilités concernant les différents types d'essais que les éléphants rugbymen ont pu inscrire au cours de ce match, sachant qu'au rugby, un essai transformé rapporte 7 points, un essai non transformé 5 points et une pénalité 3 points. Pour cela il sollicite les autres élèves de sa classe ils décident ensemble de faire des recherches sur les équations et inéquations à deux inconnues pour répondre à ces préoccupations.

Découvre de nouveaux outils

1 Notion d'équation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ de connaître la définition d'une équation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- ✓ de vérifier qu'un couple de nombres réels donné est solution ou non d'une équation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- ✓ de déterminer des couples de nombres réels solutions d'une équation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Activité 1

Dans une boulangerie, Bakan a acheté des croissants et des pains au chocolat à 2 130 FCFA.

On sait qu'un croissant coûte 480 FCFA et un pain au chocolat 390 FCFA.

On désigne par x le nombre de croissants et par y le nombre de pains au chocolat achetés par Bakan.

1. Écris :

- le prix des croissants en fonction de x ;
- le prix des pains au chocolat en fonction de y .

2. Traduis par une égalité la somme que Bakan a donné en utilisant les réponses de la 1^{ère} question.

3. Vérifie que pour $x = 2$ et $y = 3$, l'égalité trouvée à la question 2 est vraie.

4. Vérifie que pour $x = 4$ et $y = 1$, l'égalité trouvée à la question 2 n'est pas vraie.

Fais le point

- L'égalité $480x + 390y = 2130$ est appelée équation de 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Pour $x = 2$ et $y = 3$ l'égalité est vraie :

On dit que le couple $(2 ; 3)$ est une solution de l'équation $480x + 390y = 2130$.

- Une équation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est une équation de la forme $ax + by = c$, où a , b et c sont des nombres réels donnés ; le couple $(x ; y)$ étant l'inconnue.
- Tout couple $(t ; r)$ vérifiant l'égalité $at + br = c$ est une solution de l'équation $ax + by = c$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Parmi les égalités ci-dessous, recopie celle qui sont des équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

égalité 1

$$x - y^2 = 4$$

égalité 2

$$3x + x^3 = 9$$

égalité 3

$$5x - 7y = -1$$

égalité 4

$$3x + 6\sqrt{y} = 2$$

égalité 5

$$\pi x - \sqrt{3}y = 5,8$$

EXERCICE

2

On donne l'équation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivante :

$$(E) : x + 3y = 17.$$

Parmi les couples ci-dessous recopie ceux qui sont solutions de l'équation (E).

$$(-1 ; 6) ; (4 ; 5) ; (2 ; 5) ; (-4 ; 7) ; (17 ; 1) ; \left(0 ; \frac{17}{3}\right).$$

EXERCICE

3

L'égalité $11x - 7y + 9 = 0$ est-elle une équation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$? Justifie ta réponse.

Activité

2

On donne l'équation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivante : (e) : $7x - 2y = 4$.

1. Détermine le nombre réel x tel que le couple $(x ; 5)$ est une solution de l'équation (e).
2. Détermine le nombre réel y tel que le couple $(0 ; y)$ est une solution de l'équation (e).
3. Donne une méthode pour déterminer une solution d'une équation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
4. Quel est le nombre de solutions possibles d'une équation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

Fais le point

- Pour trouver un couple $(x ; y)$ solution d'une équation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la forme $ax + by = c$ on, peut :
 - donner une valeur arbitraire à x (ou bien y)
 - puis calculer y en fonction de la valeur de x (ou de y)
- Une équation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a une infinité de solutions

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

On donne l'équation suivante : $3x - 5y + 2 = 0$

1. Détermine m pour que le couple $(m ; -2)$ soit solution de l'équation.
2. Détermine n pour que le couple $(-1 ; n)$ soit solution de l'équation.

EXERCICE

2

Détermine 2 solutions pour chacune des équations suivantes :

$(e_1) : 2x - 3y = 4$; $(e_2) : x - 5y = -3$; $(e_3) : -3x + 7y = 1$.

2

Notion système d'équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ de reconnaître un système d'équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- ✓ de vérifier qu'un couple de nombres réels donné est solution ou non d'un système d'équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Activité

Un théâtre propose deux types de billets : les uns à 1000 FCFA et les autres à 2500 FCFA.

On sait que 110 spectateurs ont assisté à une représentation théâtrale et que la recette totale s'élève à 170000 FCFA.

On veut calculer le nombre de billets vendus pour chaque type.

- 1) On note x le nombre de billets de 1000 FCFA et y celui de 2500 FCFA.
 - a) Écris en fonction de x et de y l'égalité qui traduit le nombre total de billets vendus.
 - b) Écris en fonction de x et de y l'égalité qui traduit la recette totale.
- 2) Combien a-t-on d'équations ?
- 3) Vérifie que le couple $(70 ; 40)$ est solution de chacune de ces équations.

Fais le point

- Les deux équations $x + y = 110$ et $1000x + 2500y = 170000$ donnent un système de deux équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- On le note :
$$\begin{cases} x + y = 110 \\ 1000x + 2500y = 170000 \end{cases}$$
- Le couple $(70 ; 40)$ qui est solution de chacune de ces équations est solution du système.
- Un système de deux équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un système de la forme :
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$
 où le couple $(x ; y)$ est l'inconnu et a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels donnés.
- La solution d'un système de deux équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est le couple de nombres réels qui vérifient à la fois les deux équations.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Parmi les systèmes d'équations suivants, recopie ceux qui sont des systèmes d'équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

système 1

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x - 7y = 9 \end{cases}$$

système 2

$$\begin{cases} x + 3 = -1 \\ x + y^3 = 3 \end{cases}$$

système 3

$$\begin{cases} y - 2 = 9 \\ y + 3 = 6 \end{cases}$$

système 4

$$\begin{cases} x - 2 = 7,5 \\ y - 8 = 5,4 \end{cases}$$

système 5

$$\begin{cases} 6x - 2,3y = 5 \\ 3y = -15 \end{cases}$$

EXERCICE

2

On donne le système d'équations suivant :
$$\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 5x + 4y = 12 \end{cases}$$

Parmi les couples suivants, cite celui qui est la solution du système ci-dessus : $(-1 ; 0)$, $(2 ; 0,5)$ et $(0 ; 3)$

3 Résolution d'un système de deux équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

À la fin de cette séquence, tu dois être capable de résoudre un système de deux d'équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

- ✓ par substitution ;
- ✓ par combinaison ;
- ✓ graphiquement.

Activité 1

On donne le système suivant : $(s) \begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

1. Réécris le système (s) en écrivant y en fonction de x dans la 2^e équation.
2. Remplace y par son expression en fonction de x dans la 1^{re} équation.
3. Détermine la valeur de x avec l'équation que tu viens de trouver à la question 2.
4. Détermine la valeur de y en remplaçant x par sa valeur dans l'écriture de y en fonction de x .
5. Vérifie que les nombres x et y que tu viens de trouver forment le couple $(x; y)$ solution du système (S)

Fais le point

- La méthode utilisée dans l'activité 1 ci-dessus, pour trouver la solution est appelée : **méthode par substitution**.
- Pour résoudre un système de deux équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par substitution :
 - On exprime une des deux inconnues en fonction de l'autre avec l'une des équations.
 - On la remplace (substitue) par cette expression dans l'autre équation pour obtenir une équation à une inconnue.
 - On résout l'équation ainsi obtenue pour trouver la valeur de l'inconnue.
 - On remplace celle-ci par sa valeur dans la première expression.
 - On détermine la valeur de la seconde inconnue.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Résous chacun des systèmes suivants par substitution :

$$(s_1) \begin{cases} x - 2y = 3 \\ -4x + 3y = 3 \end{cases}$$

$$(s_2) \begin{cases} 3x + 5y = 21 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$(s_3) \begin{cases} 4x - y = 18 \\ x + 9y = -14 \end{cases}$$

Activité 2

On donne le système suivant : $(t) \begin{cases} 3x + 7y = 3 \\ 5x + 6y = -12 \end{cases}$

1. a) Réécris le système (t) en multipliant chaque membre de la 1^{re} équation par 5 et chaque membre de la 2^e équation par -3 .
 b) Additionne membre à membre les deux équations et résous l'équation ainsi obtenue pour déterminer la valeur de y .
 c) Réécris le système (t) en multipliant chaque membre de la 1^{re} équation par 6 et chaque membre de la 2^e équation par -7 .
 d) Additionne membre à membre les deux équations et résous l'équation ainsi obtenue pour déterminer la valeur de x .
2. Vérifie que les nombres x et y que tu viens de trouver forment le couple $(x; y)$ solution du système (t) .

Fais le point

- La méthode utilisée dans l'activité 2 ci-dessus, pour trouver la solution est appelée : **méthode par combinaison**.
- Pour résoudre un système de deux équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par combinaison :
 - on multiplie les équations par des nombres choisis de manière à obtenir des coefficients opposés dans chacune des deux équations pour l'une des deux inconnues ;
 - on additionne membre à membre les deux équations du système afin d'obtenir une équation à une seule inconnue ;
 - on détermine alors cette inconnue en résolvant l'équation obtenue ;
 - on procède de la même façon pour déterminer l'autre inconnue.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Résous chacun des systèmes suivants par substitution :

$$(t_1) \begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ 7x + 5y = 17 \end{cases} \quad (t_2) \begin{cases} 7x - 4y = 1 \\ -5x + 2y = -1 \end{cases} \quad (t_3) \begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ 6x + 7y = 4 \end{cases}$$

Activité 3

1. On donne le système (S_1) suivant : $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -3x + 2y = 4 \end{cases}$
 - a) Écris chaque équation sous la forme : $ax + by + c = 0$.
 - b) On donne la droite (D) d'équation $2x - y - 1 = 0$ et la droite (Δ) d'équation $-3x + 2y - 4 = 0$, dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Trace les droites (D) et (Δ) .
 - c) Quelle est la position relative des deux droites ?
 Donne, par lecture graphique, les coordonnées du point d'intersection des deux droites.
 - d) Vérifie que le couple trouvé ci-dessus est solution du système.
 - e) Donne la solution du système.

- 2) On donne le système suivant (S_2) : $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ -6x + 4y = 3 \end{cases}$
- a) Dans chaque équation, écris y en fonction de x
- b) On donne la droite (Δ_1) d'équation $y = \frac{3}{2}x + 1$ et (Δ_2) d'équation $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$.
Quelle est la position relative des deux droites ? Justifie ta réponse.
- c) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) trace les droites (Δ_1) et (Δ_2) .
Donne la solution du système et justifie ta réponse.
- 3) On donne le système suivant (S_3) : $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ -4x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$
- a) Dans chaque équation, écris y en fonction de x .
- b) Donne la position relative des deux droites dont les équations composent le système (S_3) .
Justifie ta réponse.
- c) Le système a combien de solutions ? Détermine deux de ces solutions.

Fais le point

- L'activité 3 donne une méthode pour résoudre **graphiquement** un système de deux équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Pour résoudre graphiquement un système de deux équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il y a trois étapes :

1 ^{re} étape	Réécrire le système sous la forme $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$
2 ^e étape	Dans le plan muni d'un repère tracer la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ et la droite (Δ) d'équation $a'x + b'y + c' = 0$
3 ^e étape	Identifier la position relative des droites (D) et (Δ) $\Rightarrow$ Si (D) et (Δ) sont sécantes en un point $M(m;n)$ alors le système a une solution qui est le couple $(m;n)$ $\Rightarrow$ Si (D) et (Δ) sont parallèles, alors le système n'a pas de solution $\Rightarrow$ Si (D) et (Δ) sont confondues alors le système a une infinité de solutions (le couple de coordonnées de chaque point de la droite (D) est solution du système)

$\Rightarrow$ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Résous graphiquement chacun des systèmes suivants :

$$(t_1) \begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}; (t_2) \begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x - \frac{4}{3}y = 2 \end{cases}; (t_3) \begin{cases} -3x + y = 1 \\ 6x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

4 Notion d'inéquation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ de reconnaître une inéquation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- ✓ de vérifier qu'un couple de nombres réels donné est solution ou non d'une inéquation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- ✓ déterminer des couples de nombres réels solutions d'une inéquation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Activité

Pour ce mois Arthur dispose de 6000 FCFA pour acheter ses savons. Son savon de lessive coûte 525 FCFA le morceau et son savon de toilette coûte 950 FCFA le morceau.

Il veut savoir combien de morceaux de chaque type de savon il peut acheter pour ne pas dépasser son budget de 6000 FCFA.

On désigne par x le nombre de savons de lessive et par y le nombre de savons de toilette.

1. Écris le coût des savons de lessive en fonction de x et celui des savons de toilette en fonction de y .
2. Écris l'inégalité qui traduit la préoccupation d'Arthur.
3. Peut-il acheter :
 - a) 4 savons de lessive et 3 savons de toilette ?
 - b) 6 savons de lessive et 5 savons de toilette ?
 - c) 5 savons de lessive et 6 savons de toilette ?
4. S'il achète 6 savons de toilette, combien peut-il acheter de savons de lessive ?
5. S'il achète 7 savons de lessive, combien peut-il acheter de savons de toilette ?
6. Combien peut-on trouver de couples de nombres réels vérifiant l'inégalité de la question 2 ?

Fais le point

- L'inégalité $525x + 950y \leq 6000$ est appelée inéquation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- On peut trouver une infinité de couple de nombres réels vérifiant cette inégalité.
- Toute inégalité de l'une des formes :
 $ax + by \leq c$; $ax + by < c$; $ax + by \geq c$; ou $ax + by > c$,
 où a , b et c sont des nombres réels donnés, est appelée inéquation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; le couple $(x ; y)$ étant l'inconnue.
- Tout couple $(m ; n)$ vérifiant l'une des inégalités ci-dessus est une solution de l'inéquation correspondante.
- Une inéquation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ admet une infinité de solutions.
- Pour trouver un couple $(x ; y)$ solution d'une inéquation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on peut :
 - donner une valeur arbitraire à x (ou bien y) ;
 - puis déterminer une valeur de y (ou de x) pour laquelle l'inégalité trouvée est vraie (cela revient à résoudre l'inéquation à une seule inconnue trouvée).

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Parmi les égalités ci-dessous, recopie celles qui sont des inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

inégalité 1	inégalité 2	inégalité 3	inégalité 4	inégalité 5
$x - y^2 \leq 4$	$3x + x^3 > 9$	$5x - 7y < -1$	$3x + 6\sqrt{y} \geq 2$	$\pi x - \sqrt{3}y \geq 5,8$

EXERCICE 2

On donne l'inéquation suivante : $3x - 5y > -2$.

Détermine une valeur de m pour que le couple $(m ; -2)$ soit solution de cette inéquation.

Détermine une valeur de n pour que le couple $(-1 ; n)$ est solution de l'équation.

EXERCICE 3

On considère l'inéquation (i) : $2x - 3y < 4$

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

- a) $(2 ; 6)$ est une solution de l'inéquation (i)
- b) $(-1 ; -3)$ est une solution de l'inéquation (i)
- c) $(0 ; 0)$ est une solution de l'inéquation (i)
- d) $(0 ; -\sqrt{17})$ est une solution de l'inéquation (i)

EXERCICE 4

Détermine 2 solutions pour chacune des équations suivantes :

(i₁) : $x - 5y \geq -3$ (i₂) : $-3x + 7y \leq 1$

5 Représentation graphique de l'ensemble des solutions d'une inéquation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

À la fin de cette séquence, tu dois être capable de représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'une inéquation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Activité

On donne l'inéquation (i) : $-2x + y < -1$

1. Écris l'inéquation (i) sous la forme $ax + by + c < 0$.
2. Dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan, trace la droite (Δ) d'équation $-2x + y + 1 = 0$.
3. La droite (Δ) partage le plan en combien de parties ?
4. Hachure le demi-plan P_1 de bord (Δ) ne contenant pas le point O(0 ; 0).
5. a) Place les points A(3 ; 2) ; B(-3 ; 1) et E(2 ; 3) dans le repère.
b) Lequel de ces trois points appartient au demi-plan P_1 ?
c) Vérifie que le couple de coordonnées du point qui appartient au demi-plan P_1 est une solution de l'inéquation (i).

- d) Vérifie que les couples de coordonnées des autres points ne sont pas solutions de l'inéquation (i).
- e) Choisis un point du demi-plan P_1 et vérifie que son couple de coordonnées est solution l'inéquation (i).
- f) Laquelle des trois parties du plans déterminées par la droite (Δ) représente l'ensemble des solutions de l'inéquation (i).

Fais le point

- La droite (Δ) partage le plan en trois parties :
 - le demi-plan de bord (Δ) contenant le point $O(0 ; 0)$;
 - le demi-plan de bord (Δ) ne contenant pas le point $O(0 ; 0)$;
 - la droite (Δ).
- Le demi-plan P_1 représente l'ensemble des solutions de l'inéquation (i).
- Pour représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'une inéquation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la forme $x + by + c < 0$, on peut procéder comme suit :
 - tracer la droite (D) d'équation $x + by + c = 0$;
 - choisir un point M du plan n'appartenant pas à (D) et on lit ses coordonnées ;
 - si le couple de coordonnées de M est solution de l'inéquation alors l'ensemble des solutions de l'inéquation est le demi-plan de bord (D) contenant M ;
 - si le couple de coordonnées de M n'est pas solution de l'inéquation alors l'ensemble des solutions de l'inéquation est le demi-plan de bord (D) ne contenant pas M.

NB : si l'équation est de la forme $x + by + c \leq 0$, alors la droite (D) fait partie de la représentation de l'ensemble de solutions.

Généralement, on utilise le point $O(0 ; 0)$ à la place de M.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

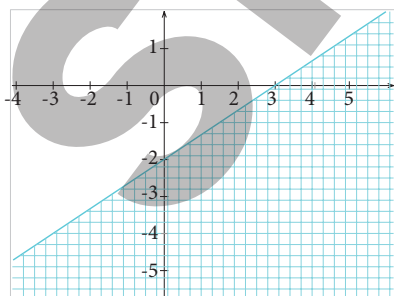
1

Les parties hachurées des graphiques ci-dessous sont les propositions de réponse de deux élèves à la question suivantes :

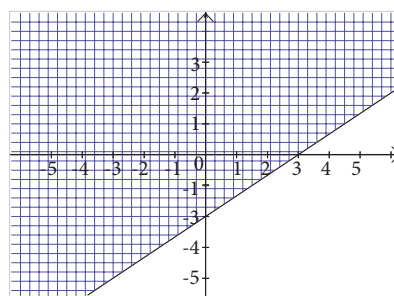
« Représente graphiquement dans un repère orthonormé l'ensemble des solutions de l'inéquation $2x - 3y - 6 \geq 0$ »

Dis, en justifiant tes réponses, lequel des élèves a bien répondu et lequel s'est trompé.

Élève 1



Élève 2



EXERCICE

2

Dans le plan muni d'un repère, représente graphiquement l'ensemble des solutions de chacune des inéquations suivantes :

(i) : $x + 2y - 10 \leq 0$ (j) : $3x + 2y - 5 > 0$

6 Notion de système d'inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ de reconnaître un système d'inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- ✓ de vérifier qu'un couple de nombres réels donné est solution ou non d'un système d'inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Activité

Le prix du ticket d'entrée à la kermesse d'un collège est de 150 FCFA pour les élèves du collège et de 225 FCFA pour les élèves des autres établissements de la ville.

Pour avoir des bénéfices, les organisateurs veulent vendre au moins 600 tickets pour une recette supérieure à 120 500 FCFA.

Combien de tickets de chaque catégorie doivent-ils vendre pour atteindre ces objectifs ?

On note a le nombre de ticket de 150 FCFA et b le nombre de tickets de 225 FCFA.

1. Écris l'inégalité qui traduit « au moins 600 tickets ».
2. Écris l'inégalité qui traduit « une recette supérieure à 120 500 FCFA ».
3. Vérifie que le couple (275 ; 400) satisfait aux préoccupations des organisateurs.
4. Le couple (302 ; 300) satisfait-il aux préoccupations des organisateurs ? Justifie ta réponse.

Fais le point

- Les deux inéquations $a + b \geq 600$ et $150a + 225b > 120\,500$ donnent un système de deux inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
On le note $\begin{cases} a + b \geq 600 \\ 150a + 225b > 120\,500 \end{cases}$
- Le couple (275 ; 400) est une solution de ce système.
- Un système de deux inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un système formé de deux inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Une solution d'un système de deux inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un couple de nombres réels qui vérifient à la fois les deux inéquations.

Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Parmi les systèmes d'inéquations suivants recopie ceux qui sont des systèmes d'inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Système 1	Système 2	Système 3	Système 4	Système 5
$\begin{cases} x - 2y > 5 \\ 3x - 7y \leq 9 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 3 \geq 1 \\ x + y^3 \leq 3 \end{cases}$	$\begin{cases} y - 2 < 9 \\ y + 3 > 6 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 2 = 7,5 \\ y - 8 < 5,4 \end{cases}$	$\begin{cases} 6x - 2,3y > 5 \\ 3y \geq -15 \end{cases}$

EXERCICE

2

On donne le système d'équations suivant : $(S) \begin{cases} 3x - y > -3 \\ 5x + 4y \leq 12 \end{cases}$

Pour chacun des couples, suivants dis, en justifiant ta réponse, s'il est ou non solution du système (S) : $(-3 ; -2)$, $(2 ; 4)$ et $(2 ; -3)$

7 Représentation graphique de l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

À la fin de cette séquence, tu dois être capable de représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Activité

On donne le système de deux inéquations suivant : $\begin{cases} x - 4y + 5 < 0 \\ 3x + 7y < 0 \end{cases}$

1. Dans un repère orthonormé, représente graphiquement :
 - en bleu l'ensemble des solutions de l'inéquation $x - 4y + 5 < 0$;
 - en vert l'ensemble des solutions de l'inéquation $3x + 7y < 0$.
2. a) Marque un point T dans la partie du plan qui est à la fois hachurée en bleu et en vert.
 b) Donne les coordonnées de T.
 c) Vérifie que le couple de coordonnées de T est une solution commune aux deux inéquations.
 d) Quelle partie du plan est la représentation graphique de l'ensemble des solutions du système ci-dessus ?

Fais le point

- L'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x - 4y + 5 < 0 \\ 3x + 7y < 0 \end{cases}$ est la partie du plan hachurée à la fois en bleu et en vert.
- Pour représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'un système de deux inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:
 - on représente l'ensemble des solutions de chacune des inéquations composant le système ;
 - l'ensemble cherché est l'ensemble des points communs aux deux représentations (c'est leur intersection).

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Représente graphiquement l'ensemble des solutions de chacun des systèmes ci-dessous :

$$(S_1) : \begin{cases} x - 2y - 4 \leq 0 \\ x - 2y + 2 < 0 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} 3x - y + 1 < 0 \\ x + y - 1 < 0 \end{cases} \quad (S_3) : \begin{cases} x + 2y - 1 > 0 \\ x + 2y - 2 > 0 \end{cases}$$

8 Résolution de problème du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ de traduire un problème du 1^{er} degré par :
 - une équation ou un système d'équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
 - une inéquation ou un système d'inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- ✓ de traiter une situation faisant appel aux équations ou inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Activité

Dans une librairie, Niangoni a dépensé 6540 FCFA pour acheter 5 cahiers de 200 pages et 2 cahiers de 300 pages. La semaine dernière, il a acheté 8 cahiers 200 pages et 3 cahiers de 100 pages à 10320 FCFA dans la même librairie.

Détermine le prix de chaque type de cahier dans cette librairie.

Fais le point

- En notant p le prix d'un cahier de 200 pages et q le prix d'un cahier de 300 pages, on obtient le système $\begin{cases} 5p + 2q = 6540 \\ 8p + 3q = 10320 \end{cases}$, qu'on résout pour déterminer le prix de chaque type.
- On peut résoudre un problème à l'aide d'une équation, d'une inéquation, d'un système de d'équations du premier degré ou d'un système de deux inéquations du premier degré à deux inconnues dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

La résolution comprend cinq étapes :

- le choix des inconnues ;
- la traduction des données par une (ou des) équation(s) ou inéquation(s) ;
- la résolution de l'équation, de l'inéquation, ou du système ;
- la vérification des résultats trouvés ;
- la conclusion et/ou l'interprétation du résultat trouvé.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

« YORO a 1 160 FCFA composé de pièces de 100 FCFA et de pièces de 25 FCFA. »

On donne trois traductions de la situation ci-dessus en notant x le nombre de pièces de 100 FCFA et y le nombre de pièces de 25 FCFA. Recopie la traduction correcte.

Traduction 1	Traduction 2	Traduction 3
$x + y = 1160$	$25x + 100y = 1160$	$100x + 25y = 1160$

EXERCICE

2

« Jeanne veut acheter des mangues à 125 FCFA l'une et des oranges à 75 FCFA l'une sans toutefois dépasser les 500 FCFA qu'elle possède ».

On donne trois traductions de la situation ci-dessus en notant x le nombre de mangues et y le nombre d'oranges. Recopie la traduction correcte.

Traduction 1	Traduction 2	Traduction 3
$x + y < 500$	$125x + 75y < 1160$	$125x + 75y \geq 500$

EXERCICE

3

DADIÉ possède 34 pièces d'argent composées de pièces de 100 FCFA et de pièces de 25 FCFA. Le montant total de ces pièces est de 1160 FCFA. Détermine le nombre de pièces de chaque type.

EXERCICE

4

« Deux nombres réels sont tels que :

- la somme du double du 1^{er} et du 2^e est plus grand que 3 ;
- la différence entre le 1^{er} et le double du 2^e est plus petite que 4.».

Détermine graphiquement 3 couples de nombres réels répondant aux critères ci-dessus.

Retiens les outils essentiels

1 Équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Définition

Une équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est une équation de la forme $ax + by = c$, où a , b et c sont des nombres réels donnés.

Le couple $(x ; y)$ est l'inconnue.

Exemple

$x - 3y + 7 = 0$ et $5x + 8y = -2$ sont des équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Méthode

Pour résoudre un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par substitution :

- on exprime une des deux inconnues en fonction de l'autre avec l'une des équations ;
- on la remplace (substitue) par cette expression dans l'autre équation pour obtenir une équation à une inconnue ;
- on résout l'équation ainsi obtenue pour trouver la valeur de l'inconnue ;
- on remplace celle-ci par sa valeur dans la première expression ;
- on détermine la valeur de la seconde inconnue.

2 Système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Définition

Un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un système de la forme
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$
 où a , b , c , a' , b' et c' sont des nombres réels donnés.

Le couple $(x ; y)$ est l'inconnue.

Exemple

$$\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases}$$
 est un système d'équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Résolution d'un système d'équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

Pour résoudre un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on utilise généralement trois méthodes :

- la méthode par substitution ;
- la méthode par combinaison ;
- la méthode graphique.

Méthode

Pour résoudre un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par combinaison :

- on multiplie les membres des équations par des nombres choisis de manière à obtenir des coefficients opposés dans chacune des deux équations pour l'une des deux inconnues ;
- on additionne membre à membre les deux équations du système afin d'obtenir une équation à une seule inconnue ;
- on détermine alors cette inconnue en résolvant l'équation obtenue ;
- on procède de la même façon pour déterminer l'autre inconnue.

Méthode

Pour résoudre un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par la méthode graphique on suit les étapes suivantes :

Retiens les outils essentiels

1 ^{re} étape	Réécrire le système sous la forme : $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$
2 ^e étape	Dans le plan muni d'un repère tracer la droite (D_1) d'équation $ax + by + c = 0$ et la droite (D_2) d'équation $a'x + b'y + c' = 0$.
3 ^e étape	Identifier la position relative des droites (D_1) et (D_2) ⇒ Si (D_1) et (D_2) sont sécantes en un point $M(p; q)$, alors le système a une solution qui est le couple $(p; q)$. ⇒ Si (D_1) et (D_2) sont parallèles, alors le système n'a pas de solution. ⇒ Si (D_1) et (D_2) sont confondues, alors le système a une infinité de solutions (le couple de coordonnées de chaque point de la droite (D_1) ou (D_2) est solution du système)

3 Inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Définition

Une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est une inéquation de la forme $ax + by \leq c$, où a , b et c sont des nombres réels donnés. Le couple $(x; y)$ est l'inconnue.

Remarque

On peut remplacer $\leq$, par $\geq$, $>$ ou $<$.

Exemple

$x - 3y + 7 \leq 0$ et $5x + 8y > -2$ sont des inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Représentation graphique de l'ensemble des solutions

Propriété

Soit a et b deux nombres réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$.

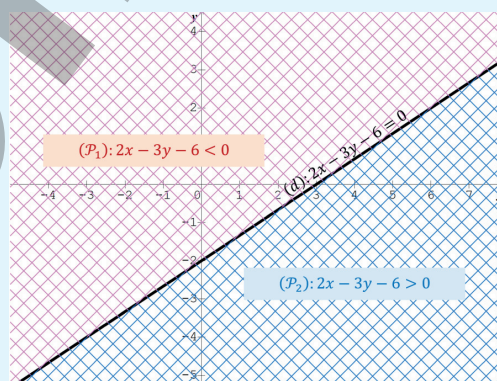
Dans le plan muni d'un repère, toute droite (d) d'équation $ax + by + c = 0$ partage le plan en trois parties

- Un demi-plan (P_1) de bord (d) dont les couples de coordonnées des points vérifient : $ax + by + c < 0$.
- La droite (d) dont les couples de coordonnées des points vérifient : $ax + by + c = 0$.

- Un demi-plan (P_2) de bord (d) dont les couples de coordonnées des points vérifient : $ax + by + c > 0$.

Exemple

(d) d'équation $2x - 3y - 6 = 0$



Représentation graphique de l'ensemble des solutions

Pour représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'une inéquation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la forme $ax + by + c < 0$ ou $ax + by + c > 0$

- On trace d'abord la droite (Δ) d'équation $ax + by + c = 0$;
- On choisit ensuite un point particulier (le point de coordonnées $(0; 0)$ par exemple s'il n'appartient pas la droite (Δ));
- Si les coordonnées du point vérifient l'inéquation, alors l'ensemble des solutions est représenté par le demi-plan de bord (Δ)

Retiens les outils essentiels

- contenant ce point.
- Si les coordonnées du point ne vérifient l'inéquation, alors l'ensemble des solutions est représenté par le demi-plan de bord (Δ) ne contenant pas ce point.

NB : pour les inéquations $ax+by+c \leq 0$ et $ax+by+c \geq 0$, la droite (Δ) fait partie de l'ensemble des solutions.

4 Système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Définition

Un système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un système de la forme

$$\begin{cases} ax + by < c \\ a'x + b'y > c' \end{cases} \text{ où } a, b, c, a', b' \text{ et } c' \text{ sont des}$$

nombres réels donnés.

Le couple $(x; y)$ étant l'inconnu.

Exemple

$\begin{cases} 3x + 2y \geq -5 \\ 2x - 5y < 1 \end{cases}$ est un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Représentation graphique de l'ensemble des solutions

Pour représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

- on représente l'ensemble des solutions de chacune des inéquations qui compose le système ;
- L'ensemble des solutions du système est la partie commune des deux représentations.

5 Problèmes du premier degré

Méthode

On peut résoudre un problème à l'aide d'une équation, d'une inéquation, d'un système d'équations du premier degré ou d'un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

La résolution comprend cinq étapes :

- le choix des inconnues ;
- la traduction des données par une (ou des) équation(s) ou inéquation(s) ;
- la résolution de l'équation, de l'inéquation, ou du système ;
- la vérification des résultats trouvés ;
- la conclusion et/ou l'interprétation du résultat trouvé.

Exercices commentés

Exercice 1

Résous graphiquement le système :
$$\begin{cases} x + 4y = -5 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$$

Solution

Réécrire chacune des équations sous la forme $ax + by + c = 0$

$$\begin{cases} x + 4y = -5 \\ 3x - y = 11 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x + 4y + 5 = 0 \\ 3x - y - 11 = 0 \end{cases}$$

Soit (D) la droite d'équation $x + 4y + 5 = 0$ et

(D') la droite d'équation $3x - y - 11 = 0$

Traçons (D) et (D') dans un repère :

Soit (D) la droite d'équation $x + 4y + 5 = 0$ et

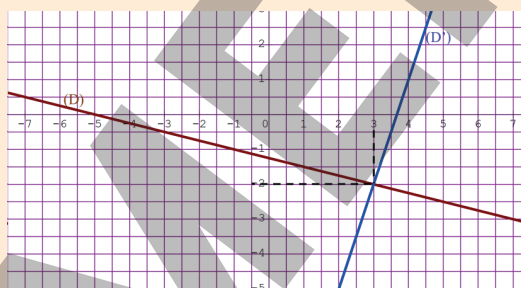
(D') la droite d'équation $3x - y - 11 = 0$

Traçons (D) et (D') dans un repère :

Les deux droites sont sécantes donc le système a une seule solution.

On lit les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

Les droites (D) et (D') se coupent au point de coordonnées (3 ; -2) ; donc la solution du système est : $S = \{(3 ; -2)\}$



Exercice 2

Résous graphiquement le système :
$$\begin{cases} x + 4y > -5 \\ 3x - y < 11 \end{cases}$$

Solution

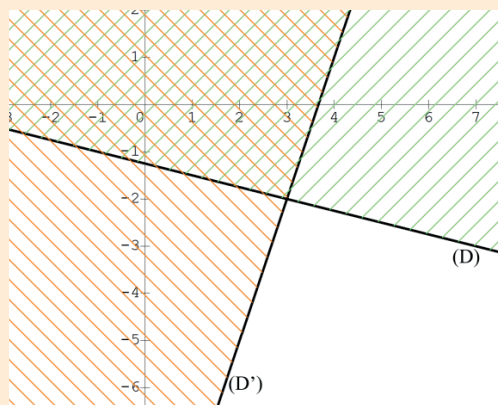
$$\begin{cases} x + 4y > -5 \\ 3x - y < 11 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x + 4y + 5 > 0 \\ 3x - y - 11 < 0 \end{cases}$$

Soit (D) la droite d'équation $x + 4y + 5 = 0$ et (D')

la droite d'équation $3x - y - 11 = 0$

Traçons (D) et (D') dans un repère.

- Le couple (0 ; 0) vérifie chacune des deux inéquations :
- La solution de l'inéquation $x + 4y + 5 > 0$ est le demi-plan de bord (D) contenant le point de coordonnées (0 ; 0) : hachuré en vert
- La solution de l'inéquation $3x - y - 11 < 0$ est le demi-plan de bord (D') contenant le point de coordonnées (0 ; 0) : hachurée en orange.
- L'ensemble des solutions est la partie hachurée en orange et vert à la fois.



Exercices commentés

Exercice 3

Pour les fêtes de fin d'année, un fermier propose deux kits de volailles composés comme suit :

- l'un composé de 5 pintades et 4 coquelets à 39 000 FCFA ;
- l'autre composé de 3 pintades et 6 coquelets à 30 000 FCFA.

Détermine le prix d'une pintade et celui d'un coquelet.

Solution

- Choix des inconnues : Ici il faut choisir les inconnues désignant chaque prix.
 - Soit x le prix d'une pintade et y celui d'un coquelet.
- Mise en équation : Ici on traduit les données en utilisant les inconnues choisies
 - 5 pintades et 4 coquelets à 39 000 Fcfa se traduit par : $5x + 4y = 39000$;
 - 3 pintades et 6 coquelets à 30 000 Fcfa se traduit par : $3x + 6y = 36000$.
- Résolution des équations : Ici il y a deux équations donc on résout un système d'équations.

$$\begin{cases} 5x + 4y = 39000 \\ 3x + 6y = 36000 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 5x + 4y = 39000 \\ x = \frac{36000 - 6y}{3} \end{cases} \text{ ce qui donne } \begin{cases} 5x + 4y = 39000 \\ x = 12000 - 2y \end{cases}$$

En remplaçant x par $12000 - 2y$ dans la 1^{re} équation on obtient :

$$5(12000 - 2y) + 4y = 39000 ,$$

$$-6y = 39000 - 60000$$

$$6y = 21000$$

$$y = 3500$$

En remplaçant y par 3500 dans l'équation $x = 12000 - 2y$ on obtient :

$$x = 12000 - 2 \times 3500$$

$$x = 5000$$

La solution du système est (5000 ; 3500)

NB : ici on a utilisé la méthode par substitution.

- Vérification : Ici il faut vérifier que les solutions trouvées répondent aux données du problème.

$$5 \times 5000 + 4 \times 3500 = 25000 + 14000 = 39000$$

$$3 \times 5000 + 6 \times 3500 = 15000 + 21000 = 36000$$

Les solutions trouvées répondent bien aux données du problème.

- Conclusion : Ici on donne la réponse au problème posé.

Le prix d'une pintade est de 5000 FCFA et celui d'un coquelet est de 3500 FCFA.

Utilisation des outils essentiels

⇒ A. Utilise plusieurs outils de la leçon pour résoudre un exercice

Exercice 1

On donne l'équation (e_1) : $x - y\sqrt{7} = 1$

- Pour chacun des couples ci-dessous, dis en justifiant s'il est ou non solution de l'équation (e_1) : $(0; 1)$; $(8; \sqrt{7})$; $(\sqrt{7}; \sqrt{7} + 1)$; $(\sqrt{7} + 1; 1)$
- Détermine le nombre réel r tel que le couple $(r; r)$ soit une solution de l'équation (e_1) .

Exercice 2

On donne l'équation (e) : $3x + 2y - 8 = 0$

- Détermine les nombres réels m, n et p tels que :
 - Le couple $(m; 1)$ est solution de l'équation (e) .
 - Le couple $\left(\frac{4}{3}; n\right)$ est solution de l'équation (e) .
 - Le couple $(-p; p)$ est solution de l'équation (e) .
- Détermine les solutions de l'équation (e) dont l'une des composantes est nulle.

Exercice 3

Détermine 4 solutions de l'équation : $0,5x + 0,2y = 11,6$.

Exercice 4

Détermine 4 solutions de l'équation : $\frac{x}{2} - \frac{y}{6} = 1$.

Exercice 5

On donne l'inéquation suivante (j) : $-3x + 7y \geq 1$.

- Pour chacun des couples ci-dessous, dis en justifiant s'il est ou non solution de l'inéquation (j) : $(2; 1)$; $(7; 4)$; $(-4; -\frac{3}{2})$; $(14; 6)$
- Détermine l'ensemble des nombres réels r tel que le couple $(r; r)$ soit une solution de l'inéquation (j) .

Exercice 6

On donne l'inéquation suivante (i) : $2x - 3y < 4$.

- Soient m, n et p étant des nombres réels. Détermine :
 - deux valeurs de m telles que le couple $(2; m)$ est solution de l'inéquation (i) .
 - deux valeurs de n , dont une négative, telles que couple $\left(n; \frac{4}{3}\right)$ est solution de l'inéquation (i) .
 - deux valeurs de p telles que le couple $(-p; p)$ est solution de l'équation (i) .
- Détermine des solutions de l'équation (i) dont l'une des composantes est nulle.

Exercice 7

Détermine 4 solutions de l'inéquation : $x - 5y + 3 > 0$.

Exercice 8

Détermine 4 solutions de l'inéquation : $-2x + 5y \leq 2$.

Exercice 9

On donne les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} 3x - 2y = -17 \\ -3x + y = -5 \end{cases} \text{ et } (S_2) \begin{cases} -x + 2y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

Pour chacun de ces systèmes dis, en justifiant ta réponse, si le couple $(-3; 4)$ est la solution ou non.

Exercice 10

Résous chacun des systèmes d'équations suivants par combinaison

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 3x + 7y - 11 = 0 \\ -5x + 2y = 5 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 5y - 21 = 0 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} 4x + y = 1 \\ 6x + 3y - 1 = 0 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 9x = -2y \\ 5y = 3x - 17 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 11

Résous chacun des systèmes d'équations suivants par substitution

$$\text{a) } \begin{cases} 5x + 4y = 16 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4x - 3y = -3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 4x - y = 18 \\ x + 9y + 14 = 0 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 2x = 5 - y \\ 3y = x - 6 \end{cases}$$

Exercice 12

Résous chacun des systèmes d'équations suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y - 8 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - 7y = 15 \\ 3x - 5y = -7 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 4x + 3y = 29 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 7x - 2y = 8 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$$

Exercice 13

Résous graphiquement chacun des systèmes d'équations :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 3y = 3 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$$

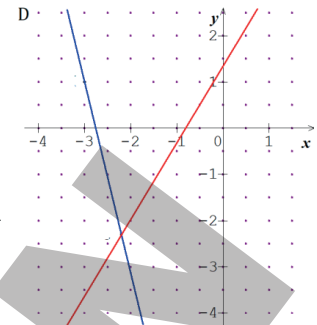
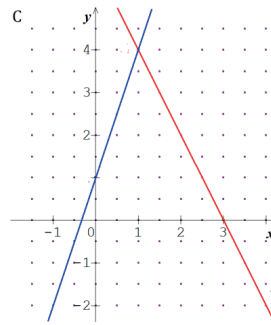
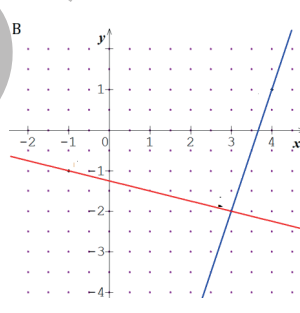
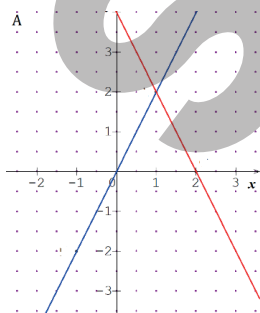
$$\text{c) } \begin{cases} 2x + y = 1 \\ -4x - 2y = 6 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x + 3y = 3 \\ 0,25x + 0,75y = 0,75 \end{cases}$$

Exercice 14

Écris le numéro de chaque système suivi de la lettre correspondant à sa résolution graphique.

$$\text{A) } \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad \text{B) } \begin{cases} x + 4y = -5 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$$

$$\text{C) } \begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \quad \text{D) } \begin{cases} 5x - 3y = -4 \\ 4x + y = -11 \end{cases}$$


Exercice 15

Représente dans un repère l'ensemble des solutions de chacune des inéquations suivantes :

$$1) 2x - y \geq 0 \quad 2) 6x + y - 5 \leq 0$$

$$3) 2y - \frac{2}{3} < x + \frac{5}{6} \quad 4) x - 2y + 4 > 0$$

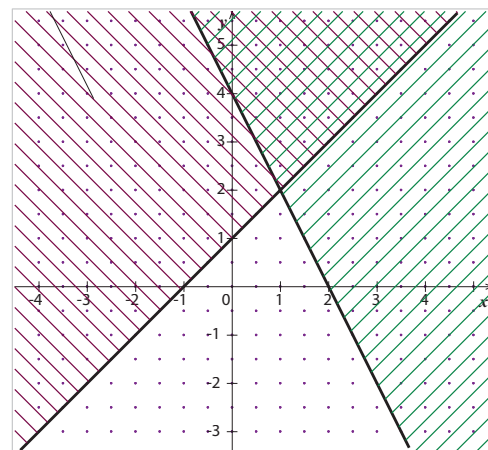
Exercice 16

Parmi les systèmes suivants, écris le numéro de celui dont les solutions sont représentées par :

- a) la partie non hachurée ;
- b) la partie hachurée en rouge et vert ;
- c) la partie hachurée en rouge ;
- d) la hachurée en vert.

$$1) \begin{cases} x - y + 1 < 0 \\ 2x + y - 4 > 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ 2x + y - 4 > 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ 2x + y - 4 < 0 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x - y + 1 < 0 \\ 2x + y - 4 < 0 \end{cases}$$



Exercice 17

Représente graphiquement l'ensemble des solutions de chacun des systèmes d'inéquations suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y \leq 5 \\ x - 3y - 6 \geq 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 3y > 3 \\ 3x + 2y < -5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + y \leq 1 \\ -4x - 2y \geq 6 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x - 2 > 0 \\ x + y - 2 > 0 \end{cases}$$

Exercice 18

Trouve deux nombres dont la somme est 29 et la différence 5.

Exercice 19

Détermine les nombres réels a et b tels que les couples $(-1 ; 3)$ et $(2 ; -5)$ soient solutions de l'équation $ax + by - 1 = 0$.

Exercice 20

Dans la ferme de Irié Lou, il y a 150 animaux, composés des cabris et des moutons. Il y a 36 moutons de plus que de cabris.

Détermine le nombre de cabris et le nombre de moutons.

Exercice 21

Trouve deux nombres réels tels que : le double de l'un diminué de l'autre est supérieur à 3.

Exercice 22

Kouao a en sa possession la somme de 23650 FCFA. Il veut acheter des chemises et des cravates.

Une cravate coûte 1250 FCFA et une chemise 5800 FCFA.

Combien de chemises et combien de cravates peut-il acheter sans dépenser tout son argent ?

⇒ B. Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un exercice

Exercice 23

Aya a pour l'instant deux notes en mathématiques. Une note obtenue à un devoir surveillé qui a un coefficient 2 et une note obtenue à une interrogation qui a un coefficient 1.

Avec ces coefficients, Aya a 11 de moyenne ; mais si le coefficient du devoir surveillé était 1 et celui de l'interrogation 2, elle aurait 13 de moyenne.

Quelles notes Aya a-t-il obtenu à son devoir surveillé et à son devoir interrogation écrite ?

Exercice 24

Lors d'un concert, chaque spectateur a garé son véhicule, voiture ou moto, sur un parking.

On a compté en tout 65 véhicules et 180 roues.

Calcule le nombre de motos et le nombre de voitures.

Exercice 25

Fargas a acheté 6 kilogrammes de viande de porc et 4 kilogrammes de viande de mouton à 24 200 FCFA, dans une boucherie. Dans la même boucherie, Eve a acheté 3 kilogrammes de viande de porc et 3 kilogrammes de viande de mouton à 14 850 FCFA. Détermine le prix du kilogramme de viande de porc et celui du kilogramme de viande de mouton, dans cette boucherie.

Exercice 26

Chaque année, l'entreprise Génimaths renouvelle le mobilier de son personnel.

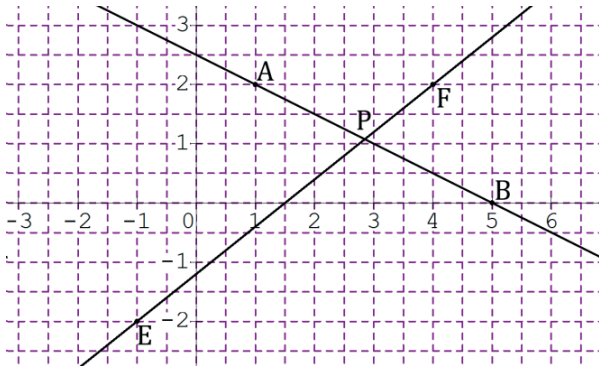
Lors de la première commande 20 fauteuils de bureau et 10 bureaux (tables) ont été achetés pour une dépense de 1 685 000 FCFA.

Pour la deuxième commande, 14 fauteuils de bureau et 7 bureaux ont été achetés pour la somme de 1 179 500 FCFA.

Détermine le prix d'un fauteuil et celui d'un bureau.

Exercice 27

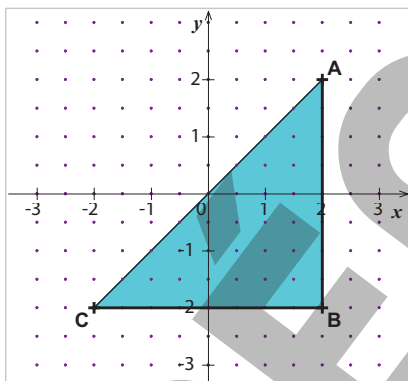
On donne le graphique ci-dessous.



Détermine le système d'équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dont la solution est le couple de coordonnées du point P.

Exercice 28

Détermine le système d'équation dont l'ensemble des solutions est représenté par la partie en bleu de la figure ci-dessous.


Exercice 29

Représente graphiquement l'ensemble des solutions de chacun des systèmes d'inéquations suivants.

- a) $\begin{cases} x > 1 \\ y < 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y > -1 \\ x + y < 0 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ x - y + 1 > 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$

Exercice 30

Résous chacun des systèmes d'équations suivants :

- 1) $\begin{cases} \frac{x-4}{5} - \frac{3y+4}{10} = x-y \\ \frac{2x-5}{5} - \frac{2y-4}{4} = x-12 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = -1 \\ 2x + (1-\sqrt{6})y = 0 \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} \frac{x-3}{2} - \frac{y+1}{3} = 0 \\ \frac{2x+1}{4} - \frac{3y-1}{8} = \frac{5}{4} \end{cases}$

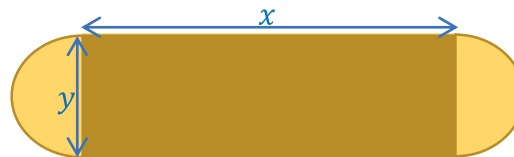
Exercice 31

KONÉ veut fabriquer une table de forme rectangulaire avec deux extrémités en formes de demi-disque de même dimensions. Il souhaite que la partie rectangulaire ait un périmètre de 12 m, que son aire soit le double de celui de la somme des aires des parties en forme demi-disque.

KONÉ a donné le dessin ci-dessous comme indication de la forme de la table au menuisier à qui il a confié le travail.

Ce dernier cherche à calculer les dimensions de la partie rectangulaire de la table qui répondent à la demande de KONÉ, mais il n'y arrive pas.

Il sollicite ton aide.



- a. Traduis par une égalité la phrase « Le périmètre de la partie rectangulaire de la table est 12 m ».

b. Écris la formule de l'aire de la partie rectangulaire.

c. Justifie que l'aire totale des deux parties en forme de demi-disque est : $\pi \times \frac{y^2}{4}$.
- Justifie que la phrase « L'aire de la partie rectangulaire de la table est le double de l'aire des deux parties en forme de demi-disque. » se traduit par l'égalité : $x \times y = \pi \times \frac{y^2}{2}$.

3. Justifie que le problème revient à résoudre le système :
$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - \frac{\pi}{2}y = 0 \end{cases}$$
4. a- Résous le système en prenant $\pi=3$.
b- Réponds à la préoccupation du menuisier.

⇒ C- Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un problème

Exercice 32

Pendant la fête de Pâques un car d'une compagnie prend des passagers à destination de Bouaké avec une à l'escale à Yamoussoukro, le ticket "Abidjan-Yamoussoukro" coûte 4500 FCFA et le ticket "Abidjan-Bouaké" coûte $\frac{9}{5}$ du celui du ticket "Abidjan-Yamoussoukro".

Au départ d'Abidjan il y avait 70 passagers, pour une recette totale de 469 800 FCFA.

A l'escale de Yamoussoukro il y a une discussion entre le chef de gare et le chauffeur concernant le nombre de passagers qui doivent descendre à Yamoussoukro.

Koffibah qui assiste à la discussion veut les aider mais il n'y arrive pas. Aide-le.

1. Justifie que le prix du ticket Abidjan-Bouaké est 8100 FCFA.
2. Soit a le nombre de passagers descendant à Yamoussoukro et b le nombre de passagers allant à Bouaké.
Avec a et b :
i) traduis le fait qu'il y a 70 passagers au départ d'Abidjan.

ii) traduis le fait que la recette totale (en FCFA) est de 469 800.
3. Détermine le nombre de passagers qui descendent à Yamoussoukro.

Exercice 33

Lors d'une leçon de science physique sur les conducteurs ohmiques, Ninsémon et les membres de son groupe de travail ont conçu deux circuits électriques alimentés par un même générateur.

En plus du générateur :

- le 1^{er} circuit est composé d'une lampe de résistance 500 ohms et d'un interrupteur ;

- le 2nd circuit est composé d'une lampe de résistance 80 ohms et d'un interrupteur.

Le professeur mesure, à l'aide d'un ampèremètre, l'intensité du courant dans chaque circuit.

Après ses mesures, il informe le groupe que la somme des intensités des deux circuits est 0,174 ampère. Il demande à chaque membre de déterminer la l'intensité du courant dans chaque circuit et la tension délivrée par le générateur. Ce travail étant à faire à la maison et à rendre le lendemain.

Arrivé à la maison Ninsémon ne sait pas comment s'y prendre pour faire les calculs. Il demande ton aide. On sait que :

« La tension U aux bornes d'un conducteur est égale au produit de sa résistance R par l'intensité I qui le traverse : $U = R \times I$, avec U en volt (V), R en ohm (Ω) et I en ampère (A) ».

1. En notant x l'intensité dans le 1^{er} circuit et y l'intensité dans le 2nd circuit :
a) traduis par une égalité le fait que la somme des intensités est égale à 0,174 A ;
b) donne la formule de la tension aux bornes de chaque lampe.
2. Traduis par une égalité le que le générateur délivre la même tension aux bornes des deux lampes.
3. Donne les solutions aux problèmes que Ninsémon doit résoudre.

Leçon

13

APPLICATIONS AFFINES

Situation d'apprentissage

Pour la kermesse organisée par les élèves de Troisième du Lycée Moderne de COCODY le comité d'organisation décide de louer du matériel de sonorisation pour une journée. Il s'adresse à deux fournisseurs.

Le premier fournisseur propose deux tarifs différents :

Tarif 1

Le matériel est cédé pour 5 000 F CFA l'heure avec une caution de 10 000 F CFA.

Tarif 2

Le matériel est cédé à un prix forfaitaire de 50 000 F CFA pour le temps de la manifestation.

Le deuxième fournisseur propose un tarif unique : 7 000 F CFA l'heure pour le temps de la manifestation.

Vu leurs moyens limités, ces élèves décident de déterminer le tarif le plus avantageux selon la durée de la manifestation.

Découvre de nouveaux outils

1 Application affine

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ d'identifier :
 - une application affine ;
 - la représentation graphique d'une application affine.
- ✓ de connaître :
 - la propriété relative à la représentation graphique d'une application affine ;
 - la propriété relative au sens de variation d'une application affine.
- ✓ de reconnaître :
 - une application affine ;
 - la représentation graphique d'une application affine ;
 - la représentation graphique d'une application affine constante, croissante ou décroissante.
- ✓ de déterminer :
 - l'expression d'une application affine à partir de sa représentation graphique ;
 - graphiquement une image ;
 - graphiquement le réel a tel que $f(a) = b$ (où f est une application affine et b un nombre réel donné) ;
 - une application affine connaissant deux nombres réels et leurs images ;
 - le sens de variation d'une application affine ;
 - l'application affine dont on connaît une équation de sa représentation graphique.
- ✓ de calculer :
 - l'image d'un nombre réel par une application affine ;
 - le nombre réel a tel que $f(a) = b$ (où f est une application affine et b un nombre réel donné).
- ✓ de représenter :
 - graphiquement une application affine dont on connaît l'expression explicite ;
 - graphiquement une application affine connaissant deux nombres réels et leurs images ;
- ✓ d'utiliser le sens de variation d'une application affine pour comparer les images de nombres.
- ✓ de justifier le sens de variation d'une application affine.

Activité 1

Tout abonné de la compagnie d'électricité CIE, au tarif domestique général basse tension doit payer 66,96 kwh en plus d'une prime fixe pour deux mois estimée à 2985 F CFA.

Monsieur BONI a consommé pour ces deux mois passés 220 kWh.
Détermine le montant de la facture de monsieur BONI.

On désigne par x le nombre de kwh consommés en deux mois et par $f(x)$ le prix à payer.
Exprime $f(x)$ en fonction de x .

Fais le point

- L'application qui, au nombre de kwh consommés, associe $66,96x + 2985$ est **une application affine**.
- On la note $f: x \mapsto 66,96x + 2985$.
- On dit que $66,96x + 2985$ est l'expression algébrique de l'application affine f .
 - * La forme générale d'une application affine est $f: x \mapsto ax + b$ où a et b sont des nombres réels.
 - * a est le **coefficient** et b est le **terme constant**.
 - * $ax + b$ est l'image de x par f .

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

Recopie et complète les colonnes du tableau ci-dessous selon l'exemple traité à la ligne 1.

Applications	Application affine (oui ou non)	Coefficient	Terme constant
$l: x \mapsto -3x + \frac{1}{3}$	oui	-3	$\frac{1}{3}$
$m: x \mapsto 16x - 5$			
$n: x \mapsto 4x^2 - 5$			
$p: x \mapsto -4 + \frac{1}{7}x$			
$q: x \mapsto \frac{1}{7}x - 10$			
$r: x \mapsto x\sqrt{3} + 1$			

Activité 2

On donne application affine f définie par : $f(x) = x + 1$.

1. Calcule $f(-1)$; $f(0)$ et $f(1)$.
2. Détermine le nombre réel x tel que : $f(x) = -5$.
3. Dans un repère du plan d'origine O et d'unité graphique 1 cm sur les axes, place les points A(-1 ; $f(-1)$) ; B(0 ; $f(0)$) et C(1 ; $f(1)$).
4. Trace la droite (AB).
5. Justifie que les points A, B et C sont alignés.

Fais le point

- $f(-1)$; $f(0)$ et $f(1)$ sont les images respectives de -1 ; 0 et 1 par f .
Soit f une application affine telle que pour tout nombre réel x , $f(x) = ax + b$.
Pour calculer l'image par f d'un nombre réel t , on remplace x par t dans l'expression de $f(x)$.
On écrit : $f(t) = at + b$ et on calcule $at + b$.
- Pour déterminer le nombre réel u tel que $f(u) = v$, v étant donné, on résout l'équation : $au + b = v$.
- Dans un repère, la représentation graphique d'une application affine f d'expression : $f(x) = ax + b$ est la droite d'équation : $y = ax + b$.
- Toute droite d'équation $y = ax + b$ est la représentation graphique d'une application affine.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Soit f une application affine telle que $f(x) = -3x + 4$.

1. Calcule l'image 0 et l'image $-\frac{1}{3}$ par f .
2. Détermine les nombres a et b tels que : $f(a) = -5$ et $f(b) = 2$.

EXERCICE 2

Recopie et relie chaque application affine de la colonne 1 à la droite qui la représente dans la colonne 2.

Colonne 1		Colonne 2
f est l'application affine définie par : $f(x) = 3x - 2$	• •	La droite d'équation : $y = -4x$
g est l'application affine définie par : $g(x) = -4x$	• •	La droite d'équation : $y = 8$
h est l'application affine définie par : $h(x) = -5x + 9$	• •	La droite d'équation : $y = 3x - 2$
k est l'application affine définie par : $k(x) = 8$	• •	La droite d'équation : $y = -5x + 9$

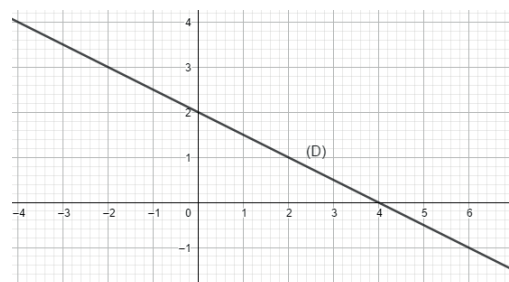
EXERCICE 3

Représente graphiquement dans le plan muni d'un repère (O, I, J) chacune des applications affines f et h définie par : $f(x) = 3x - 2$ et $h(x) = -2x + 3$.

Activité 3

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) ci-contre, la droite (D) est la représentation graphique d'une application affine g .

1. Détermine graphiquement l'ordonnée du point A d'abscisse 6 de la droite (D) .
2. Détermine graphiquement l'abscisse du point B d'ordonnée 3 de la droite (D) .



Fais le point

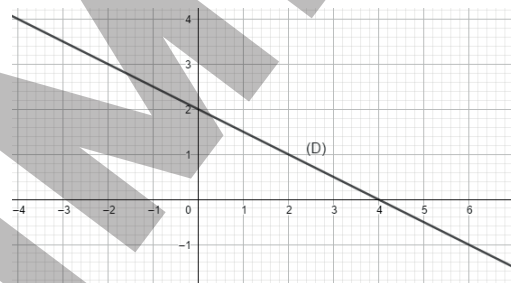
- À partir de la représentation graphique d'une application affine, on peut lire :
 - sur l'axe des ordonnées, l'image d'un nombre réel m : c'est $g(m)$;
 - sur l'axe des abscisses, le nombre réel n tel que $g(n) = y$, où y est un nombre réel donné.
- Pour déterminer graphiquement l'image d'un réel a par une application affine f :
 - on trace la droite d'équation $x = a$ qui coupe la représentation graphique de f en un point M ;
 - on lit l'ordonnée b du point M et on a : $f(a) = b$.
- Pour déterminer graphiquement l'image d'un réel u tel que $f(u) = v$:
 - on trace la droite d'équation $y = v$ qui coupe la représentation graphique de f en un point N ;
 - on lit l'abscisse v du point N et on a : $f(u) = v$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) ci-contre, la droite (D) est la représentation graphique d'une application affine g .

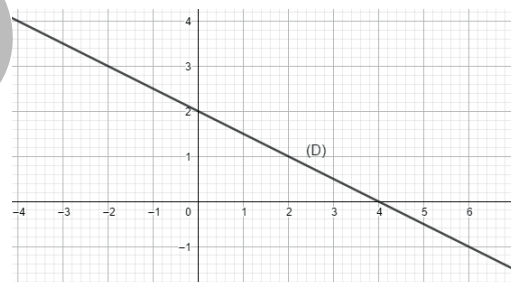
- Détermine graphiquement l'image de 1 par g .
- Détermine graphiquement l'image de (-2) par g .



EXERCICE 2

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) ci-contre, la droite (D) est la représentation graphique d'une application affine f .

- Détermine graphiquement le nombre réel m tel que : $f(m) = 3,5$.
- Détermine graphiquement le nombre réel t tel que : $f(t) = 0$.



Activité 4

On souhaite déterminer l'expression algébrique l'application affine $f: x \mapsto ax + b$ qui vérifie : $f(2) = -3$ et $f(4) = 1$.

- En utilisant $f(2) = -3$, justifie que : $2a + b = -3$.
- En utilisant $f(4) = 1$, justifie que : $4a + b = 1$.
- Résous le système d'équations suivant :
$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ 4a + b = 1 \end{cases}$$
- Déduis-en que : $f(x) = 2x - 7$.

Fais le point

On peut déterminer une application affine connaissant deux nombres et leurs images.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Détermine l'application affine g telle que $g(3) = 5$ et $g(7) = 13$.

EXERCICE 2

Détermine l'application affine f telle que $f(-4) = 6$ et $f(6) = 1$.

Activité 5

On considère l'application affine f définie par $f(x) = ax + b$, où a et b sont des nombres réels.

1. On suppose que : $a > 0$.

Soient u et v deux nombres réels tels que : $u \leq v$.

Justifie que $f(u) \leq f(v)$.

2. On suppose que : $a < 0$.

Soient u et v deux nombres réels tels que : $u \leq v$.

Justifie que : $f(u) \geq f(v)$.

3. On suppose que $a = 0$.

Soient u et v deux nombres réels tels que : $u \leq v$.

Justifie que : $f(u) = f(v)$.

Fais le point

L'application affine f définie par $f(x) = ax + b$ est :

- **croissante** sur $\mathbb{R}$ lorsque $a > 0$.
(les nombres sont rangés dans le même ordre que leurs images).
- **décroissante** sur $\mathbb{R}$ lorsque $a < 0$.
(les nombres sont rangés dans l'ordre contraire de leurs images).
- **constante** sur $\mathbb{R}$ lorsque $a = 0$.
(les nombres ont la même image)

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Complète le tableau suivant en mettant une croix dans la case qui convient, puis justifie.

Application affine	Décroissante	Constante	Croissante	Justification
$f: x \mapsto 2x - 1$				
$g: x \mapsto -5x + 3$				
$h: x \mapsto 12$				

EXERCICE 2

On donne les applications affines f ; g et h telles que f est constante, g est décroissante et h est croissante.

Compare :

1. $f(136)$ et $f(-7)$;
2. $g(1,5)$ et $g(4,3)$;
3. $h(-9)$ et $h(-14)$.

2 Application linéaire

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

- ✓ d'identifier :
 - une application linéaire.
 - la représentation graphique d'une application linéaire.
- ✓ de connaître :
 - la propriété relative à la représentation graphique d'une application linéaire
 - les propriétés de linéarité
- ✓ de reconnaître :
 - une application linéaire
 - la représentation graphique d'une application linéaire
 - la représentation graphique d'une application linéaire constante, croissante ou décroissante
- ✓ de déterminer une application linéaire connaissant un nombre réel et son image ;
- ✓ de représenter :
 - graphiquement une application linéaire dont on connaît l'expression explicite
 - graphiquement une application linéaire connaissant un nombre réel et son image
- ✓ d'utiliser les propriétés de linéarité pour calculer l'image d'un nombre
- ✓ de justifier le sens de variation d'une application linéaire

Activité 1

1. Détermine le périmètre $p(x)$ d'un triangle équilatéral dont la longueur en centimètre de l'un de ses côtés est désignée par x .
2. Justifie que $p(x)$ est une application affine, dont tu donneras le terme constant.

Fais le point

- L'application $p: x \mapsto 3x$ est une application affine dont le terme constant est nul.
- 3 est le coefficient de p .
- Toute application affine dont le terme constant est nul est **une application linéaire**.
- L'expression d'une application linéaire f est : $f(x) = ax$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Parmi les applications affines suivantes, écris dans ton cahier les numéros de celles qui sont des applications linéaires.

N°	Applications affines
1	$f: x \mapsto -7x + 4$
2	$g: x \mapsto 3x$
3	$h: x \mapsto -11x - 10$
4	$j: x \mapsto 4$
5	$k: x \mapsto x$

EXERCICE 2

On donne l'application linéaire f telle que : $f(x) = x\sqrt{2}$.

1. Calcule l'image par f de -2 , de 0 puis de $\sqrt{2}$.
2. Détermine le nombre réel m tel que : $f(m) = 1$.

Activité 2

On considère l'application linéaire f définie par $f(x) = 2x$.

Soit (D) la droite représentative de f dans un repère (O, I, J) .

1. Écris une équation de la droite (D) .
2. Vérifie que le point O appartient à la droite (D) .
3. Construis la droite (D) .

Fais le point

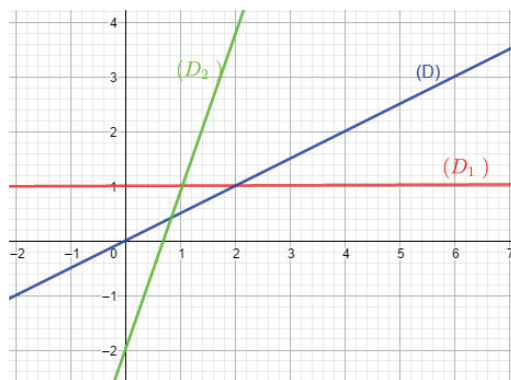
La représentation graphique d'une application linéaire est une droite d'équation de la forme $y = ax$ qui passe par l'origine du repère.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Soit la figure ci-contre.

Parmi les droites (D) , (D_1) et (D_2) , cite celle qui est la représentation graphique d'une application linéaire. Justifie ta réponse.



EXERCICE 2

Dans le plan muni d'un repère, trace la droite (D) représentation graphique de l'application linéaire f telle que : $f(x) = -\frac{3}{2}x$.

EXERCICE 3

Trace la droite (D), représentation graphique de l'application linéaire g telle que : $g(4) = 2$, dans le plan muni d'un repère.

Activité 3

Soit $f: x \mapsto ax$ une application linéaire, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $x' \in \mathbb{R}$.
Démontre que : $f(x + x') = f(x) + f(x')$.
2. Soit k un nombre réel.
Démontre que : $f(kx) = kf(x)$.

Fais le point

Soit f une application linéaire, m , n et k sont des nombres réels. On a :

- $f(m + n) = f(m) + f(n)$
- $f(km) = kf(m)$.

⇒ **Utilise le nouvel outil**

EXERCICE

Soit f une application linéaire telle que $f(2) = -6$ et $f(-3) = 9$
Calcule $f(-1)$, $f(-6)$ et $f(9)$ sans déterminer $f(x)$.

Retiens les outils essentiels

1 Application linéaire

1. Définition

Définition

Soit a et b deux nombres fixés.

On appelle application affine de coefficient a et de terme constant b , la correspondance f qui à chaque nombre réel x associe le nombre réel $ax + b$.

On note $f: x \mapsto ax + b$.

$ax + b$ est l'image de x par f et on note $f(x) = ax + b$.

Si $f(x) = y$, on dit que y est l'image de x par f .

Exemple

La correspondance $f: x \mapsto 2x + 1$ est une application affine.

2 est le coefficient et 1 est le terme constant.

2. Calcul de l'image d'un nombre par une application affine

Méthode

Soit f une application affine telle que pour tout nombre réel x , $f(x) = ax + b$.

Pour calculer l'image d'un nombre réel t , on remplace x par t dans l'expression de $f(x)$.

On écrit : $f(t) = at + b$ et on calcule $at + b$.

Exemple

Calcule l'image de 2 l'application affine $f: x \mapsto -5x + 7$.

$$f(2) = -5 \times 2 + 7$$

$$f(2) = -10 + 7$$

$$f(2) = -3$$

L'image de 2 par f est (-3) .

3. Détermination du nombre x tel que $f(x)=y$, étant donné un nombre réel y et une application affine f

Méthode

Soit y un nombre réel donné et f une application affine telle que pour tout réel x , $f(x) = ax + b$.

Pour déterminer le nombre réel x tel que $f(x)=y$, on résout l'équation $ax + b = y$, d'inconnue x .

Exemple

On donne l'application affine $g: x \mapsto 5x - 7$.

Détermine le nombre réel x tel que $g(x)=8$

On résout l'équation $5x - 7 = 8$

$$5x - 7 = 8 \text{ équivaut à } 5x = 8 + 7$$

$$\text{équivaut à } 5x = 15$$

$$\text{équivaut à } x = \frac{15}{5}$$

$$\text{équivaut à } x = 3.$$

Le nombre cherché est 3.

Remarque

On peut vérifier ce résultat.

$$\text{En effet } g(3) = 5 \times 3 - 7 = 15 - 7 = 8.$$

4. Détermination l'expression d'une application affine f définie par deux nombres réels et leurs images

Exemple

Soit f une application affine telle que : $f(2) = -3$ et $f(4) = 1$.

Détermine l'expression de $f(x)$ pour tout nombre réel x .

Cela revient à déterminer les nombres réels a et b tels que $f(x) = ax + b$.

On sait que :

$$f(2) = -3. \text{ Donc : } 2a + b = -3 \text{ (i)}$$

$$f(4) = 1. \text{ Donc : } 4a + b = 1 \text{ (ii)}$$

On obtient le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ 4a + b = 1 \end{cases}$$

Nous allons résoudre ce système par substitution.

$$\begin{cases} b = -3 - 2a \\ 4a + (-3 - 2a) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Puis } \begin{cases} b = -3 - 2a \\ 2a = 4 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \end{cases}$$

5. Représentation graphique d'une application affine

Propriété 1

Le plan étant rapporté à un repère (O, I, J) , l'application affine f définie pour tout réel x par : $f(x) = ax + b$, a pour représentation graphique la droite (D) d'équation : $y = ax + b$.

Si $M(x; y)$ appartient à la droite (D) , alors x et y vérifient l'égalité $y = ax + b$.

Remarque

- Le coefficient a est le coefficient directeur de la droite (D) .
- La constante b est l'ordonnée à l'origine de f (l'image de 0 par f).

Représentation graphique d'une application affine connaissant son expression

Méthode

Le plan étant rapporté à un repère (O, I, J) .

Pour tracer la droite (D) , représentation graphique de l'application affine f :

- on choisit deux nombres et on calcule leurs images. Chaque nombre et son image sont les coordonnées d'un point de la droite (D) ;
- on obtient ainsi deux points de (D) que l'on place dans le repère (O, I, J) ;
- on trace la droite qui passe par ces deux points qui est la droite (D) .

Exemple

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , trace la droite (Δ) , représentation graphique de l'application affine f définie par : $f(x) = 0,5x - 3$.

$$f(x) = 0,5x - 3$$

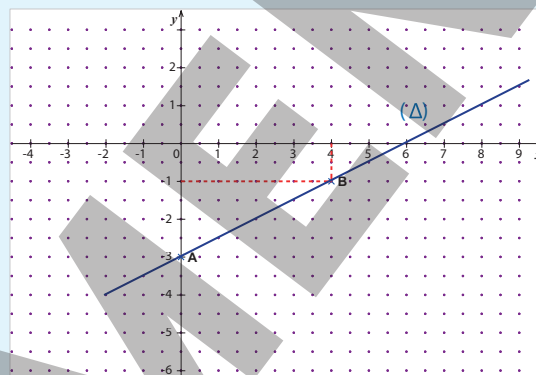
Je choisis deux nombres, par exemple : 0 et 4.

Je calcule les images de 0 et 4 par f .

On résume les résultats dans le tableau suivant.

x	0	4
$f(x)$	-3	-1
Point	A(0 ; -3)	B(4 ; -1)

La représentation graphique de f est la droite (Δ) passant par les points A et B.



Représentation graphique d'une application affine connaissant deux nombres réels et leurs images

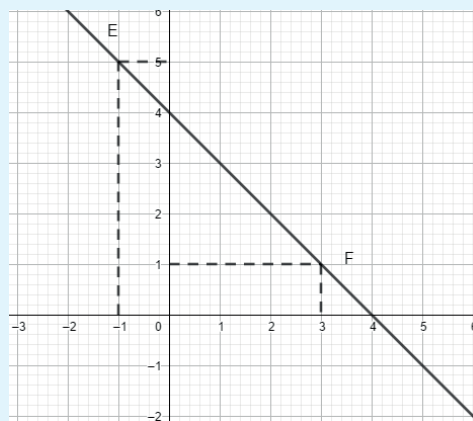
Exemple

On donne l'application affine g telle que : $g(-1) = 5$ et $g(3) = 1$.

Représente graphiquement g dans le plan muni d'un repère (O, I, J) .

La représentation graphique de g est la droite qui passe par le point E(-1 ; 5), car $g(-1)=5$ et par le point F(3 ; 1), car $g(3)=1$.

Il suffit donc de marquer les points E et F dans le repère et de tracer la droite (EF).



6) Utilisation de la représentation graphique d'une application affine.

a. Détermination graphique de l'image d'un nombre

Méthode

Pour déterminer l'image d'un réel m à partir de la représentation graphique (D) d'une application affine f dans un repère :

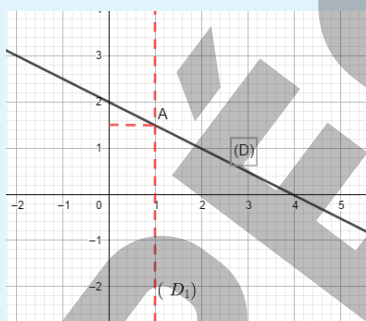
- on trace d'abord la droite (Δ) d'équation : $x = m$;
- la droite (Δ) coupe la droite (D) en un point A d'abscisse m ;
- l'ordonnée n de A est l'image de m par f .

Exemple

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) ci-dessous, la droite (D) est la représentation graphique d'une application affine g .

Déterminons graphiquement l'image de 1 par g .

- On trace la droite (D_1) d'équation $x = 1$ (en rouge).
- (D_1) coupe (D) en A.
- L'ordonnée de A est 1,5.
- Donc, graphiquement, l'image de 1 par g est 1,5.



b. Détermination graphique du nombre m tel que $f(m) = n$

Méthode

Étant donné un nombre réel n , pour déterminer graphiquement le nombre réel m tel que $f(m)=n$ à partir de la représentation graphique (D) d'une application affine f :

- on trace d'abord la droite (Δ) d'équation $y = n$;
- la droite (Δ) coupe la droite (D) en un point A d'ordonnée n ;
- l'abscisse du point A est le nombre m cherché.

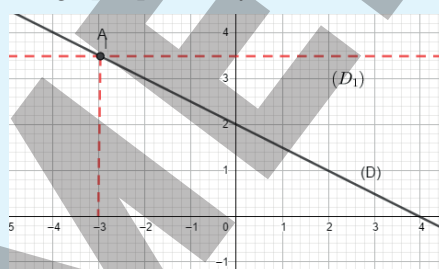
Exemple

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) ci-dessous, la droite (D) est la représentation graphique d'une application affine f .

Déterminons graphiquement le réel m tel que :

$$f(m) = 3,5.$$

- On trace la droite (D_1) d'équation $y = 3,5$
- La droite (D_1) coupe la droite (D) en A.
- L'abscisse de A est -3 .
- Donc, graphiquement, $f(-3) = 3,5$. D'où $m = -3$



c. Détermination de l'expression d'une application affine connaissant une équation de sa représentation graphique

Méthode

Une droite (D) d'équation : $px + qy + r = 0$ est la représentation graphique d'une application affine.

Pour Déterminer l'expression de cette application affine, il suffit de réécrire l'équation de la droite sous la forme $y = ax + b$.

Exemple

Déterminons l'expression de l'application affine f dont la représentation graphique dans un repère est la droite (Δ) d'équation : $3x + y - 5 = 0$

$$(\Delta) : 3x + y - 5 = 0 \text{ équivaut à } y = -3x + 5.$$

$$\text{Donc } f(x) = -3x + 5.$$

d. Détermination de l'expression d'une application affine f à partir de sa représentation graphique

Méthode

Pour déterminer l'expression d'une application affine f à partir de sa représentation graphique dans un repère, il faut choisir deux points A et B dont on peut lire facilement les coordonnées sur le graphique.

Puis on remplace x et $f(x)$ par les coordonnées des points A et B dans l'expression :

$f(x) = ax + b$, pour déterminer les nombres réels a et b .

Exemple

Déterminons l'expression de l'application affine f dont la représentation graphique (D) est donnée par la figure ci-dessous.

On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = ax + b$.

On choisit deux points quelconques A et B sur la droite (D).

On choisit par exemple les points A(-2 ; 2) et B(4 ; -1).

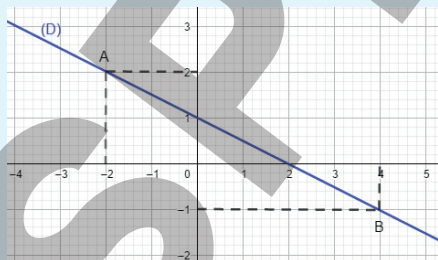
A et B appartiennent à la représentation graphique de f donc :

$$f(-2) = 2 \text{ et } f(4) = -1$$

$$f(-2) = 2 \text{ équivaut à } -2a + b = 2$$

$$f(4) = -1 \text{ équivaut à } 4a + b = -1$$

On résout le système d'équations :
$$\begin{cases} -2a + b = 2 \\ 4a + b = -1 \end{cases}$$
 par combinaison



On multiplie les deux membres de la première

$$\text{équation par } -1 \text{ et on obtient : } \begin{cases} 2a - b = -2 \\ 4a + b = -1 \end{cases}$$

En additionnant membre par membre, on a :

$$6a = -3. \text{ D'où, } a = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}.$$

On multiplie les membres de la 1^{re} équation par -2

$$\begin{cases} -4a + 2b = 4 \\ 4a + b = -1 \end{cases}$$

En additionnant membre par membre, on a $3b = 3$.

D'où $b = 1$

On obtient : $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 1$.

Ainsi donc $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

7) Sens de variation d'une application affine.

Définition

Soit f une application affine.

- On dit que f est croissante lorsque pour tous nombres réels m et n , si $m > n$, alors $f(m) > f(n)$.
- On dit que f est décroissante lorsque pour tous nombres réels m et n , si $m > n$, alors $f(m) < f(n)$.
- On dit que f est constante lorsque pour tous nombres réels m et n , si $m > n$, alors $f(m) = f(n)$.

Exemple

- f est l'application affine telle que : $f(-5) = 3$ et $f(2) = 7$.

On a : $-5 < 2$ et $f(-5) < f(2)$. Donc, f est croissante.

- g est l'application affine telle que : $g(1) = -2$ et $f(3) = -6$.

On a : $1 < 3$ et $g(1) > g(3)$. Donc, g est décroissante.

Propriété

Soit f une application affine définie par :

$$f(x) = ax + b.$$

- Si $a > 0$, alors l'application f est croissante.
- Si $a < 0$, alors l'application f est décroissante.
- Si $a = 0$, alors l'application f est constante.

Utilisation du sens de variation d'une application affine pour comparer les images de nombres réels

Exemple

On donne les applications affines f ; g et h telle que f est constante, g est décroissante et h est croissante. Comparons:

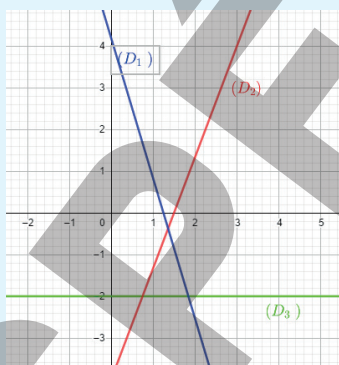
1. $f(136) = f(-7)$;
2. $g(1,5) > g(4,3)$;
3. $h(-9) < h(-14)$.

Le sens de variation d'une application affine et sa représentation graphique

- Lorsqu'une application affine est croissante, sa représentation graphique est une droite « montante » de la gauche vers la droite.
- Lorsqu'une application affine est décroissante sa représentation graphique est une droite « descendante » de la gauche vers la droite.
- Lorsqu'une application affine est constante sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple

Soit les droites (D_1) , (D_2) et (D_3) représentées dans le repère ci-dessous.



- La droite (D_1) , en bleu, descend de la gauche vers la droite. Donc elle est la représentation graphique d'une application affine décroissante.
- La droite (D_2) , en rouge, monte de la gauche vers la droite. Donc elle est la représentation graphique d'une application affine croissante.
- La droite (D_3) , en vert, est parallèle à l'axe des abscisses. Donc elle est la représentation graphique d'une application affine constante.

2 Application linéaire

Définition

Soit a un nombre.

On appelle application linéaire de coefficient a , toute application affine f telle que $f(x) = ax$.

Exemple

- Les applications f et g telles que $f(x) = -7x$ et $g(x) = x\sqrt{2}$ sont des applications linéaires.
- L'application h telle que $h(x) = -4x + 3$ n'est pas une application linéaire.

Remarque

Une application linéaire étant une application affine, tout ce que nous avons vu concernant les applications affines est aussi valable pour les applications linéaires.

2. Représentation graphique d'une application linéaire

Propriété

Le plan est rapporté à un repère (O, I, J) .

La représentation graphique d'une application linéaire f est une droite qui passe par l'origine du repère c'est-à-dire le point de couple de coordonnées $(0 ; 0)$.

Exemple

- Dans le plan muni d'un repère, traçons la droite (D) représentation graphique de l'application linéaire f telle que $f(x) = -\frac{3}{2}x$.

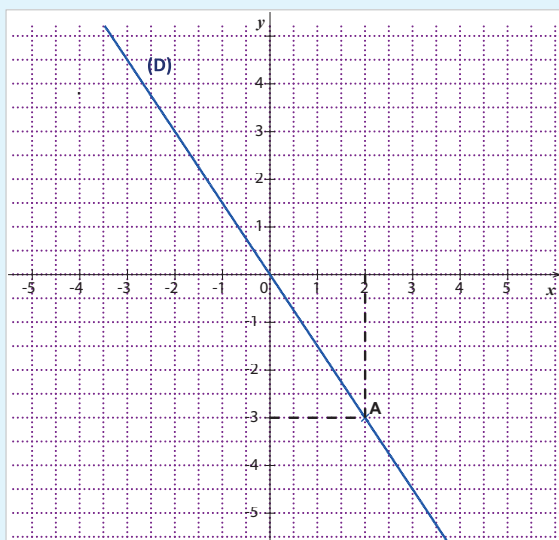
Choisissons deux nombres réels et cherchons leurs images par f .

On choisit par exemple 0 et 2. On a : $f(0) = 0$; $f(2) = -3$

Donc (D) passe par le point $O(0 ; 0)$ et le point $A(2 ; -3)$

Le point O étant déjà placé, on place le point A .

La droite (D) est la droite (OA) .



4) Traduire une situation de proportionnalité par une application linéaire

Exemple

Au marché Gouro d'Adjamé, un kilogramme (kg) d'oranges coûte 340 FCFA.

Si Kossonou achète x kg d'oranges, alors le montant à payer est $340 x$.

La correspondance qui, à chaque quantité d'oranges exprimée en kg associe la somme à payer est

$x \mapsto 340 x$. Cette correspondance est une application linéaire.

3. Les propriétés de linéarité

Propriété

Soit f une application linéaire, m , n et k sont des nombres réels. On a :

$$f(m + n) = f(m) + f(n)$$

$$f(km) = kf(m)$$

Exemple

On a $f(2) = 6$ et $f(3) = 9$

- $f(5) = f(2 + 3) = f(2) + f(3)$. Donc $f(5) = 15$
- $f(-4) = f(-2 \times 2) = -2f(2)$. Donc $f(-4) = -12$

Exercices commentés

Exercice 1

Une application affine f est telle que : $f(-3) = 7$ et $f(8) = -15$.
Détermine l'expression algébrique de $f(x)$.

Solution

Je sais que f est une application affine, donc $f(x) = ax + b$.

Je calcule le coefficient a de f , on a : $a = \frac{f(-3) - f(8)}{-3 - 8} = \frac{7 - (-15)}{-11} = -2$.

Donc : $f(x) = -2x + b$.

Je calcule l'ordonnée à l'origine de g .

Je sais que $f(-3) = 7$, donc $-2 \times (-3) + b = 7$. Soit $b = 7 - 6 = 1$.

Ainsi, $f(x) = -2x + 1$.

Exercice 2

Une application linéaire g est telle que : $g(12) = 20$.
Détermine l'expression algébrique de $g(x)$.

Solution

Je sais que g est une application linéaire, donc $g(x) = ax$.

Je calcule le coefficient a de g :

On a $g(12) = 20$ équivaut à : $12a = 20$. Donc $a = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$.

Donc $g(x) = \frac{5}{3}x$.

Exercice 3

h est une application linéaire telle que : $h\left(\frac{8}{5}\right) = 3$.

En utilisant les propriétés de linéarité :

a) Calcule $h(8)$.

b) Déduis-en $h\left(\frac{48}{5}\right)$.

Solution

a) Pour calculer $h(8)$, je vais utiliser la formule : $h(ka) = k \times h(a)$.

On sait que : $8 = 5 \times \frac{8}{5}$; donc $h(8) = h\left(5 \times \frac{8}{5}\right) = 5 \times h\left(\frac{8}{5}\right) = 5 \times 3 = 15$.

b) Pour calculer $h\left(\frac{48}{5}\right)$, je vais utiliser la formule : $f(a + b) = f(a) + f(b)$.

On sait que : $\frac{48}{5} = \frac{8}{5} + 8$, donc $h\left(\frac{48}{5}\right) = h\left(\frac{8}{5} + 8\right) = h\left(\frac{8}{5}\right) + h(8) = 3 + 15 = 18$.

Utilisation des outils essentiels

⇒ A. Utilise plusieurs outils de la leçon pour résoudre un exercice

Exercice 1

Réponds par **vrai** ou par **faux** à chacune des affirmations suivantes :

1. Toute application affine est linéaire.
2. Toute application linéaire est affine.
3. Toute application constante est linéaire.
4. Deux points distincts suffisent pour construire la représentation graphique d'une application affine.

Exercice 2

Pour chacune des affirmations suivantes, recopie le numéro suivi de vrai si l'affirmation est vraie ou faux si l'affirmation est fausse.

1. L'application f définie par $f(x) = 5x - 2$ est une application affine.
2. L'application affine g définie par $g(x) = 2x + 3$ a pour coefficient le nombre 3.
3. L'application affine h définie par $h(x) = \frac{5}{7}\left(x - \frac{14}{5}\right)$ a pour terme constant le nombre 2.
4. L'application affine l définie par $l(x) = x\sqrt{5}$ est une application linéaire.
5. L'application affine m définie par $m(x) = x\sqrt{5}$ est une application affine.

Exercice 3

1. Détermine l'application affine f telle que : $f(2) = 1$ et $f(3) = -4$.
2. Détermine l'application affine h dont la représentation graphique passe par les points $A(2; 3)$ et $B(1; 4)$.

Exercice 4

Recopie puis met une croix dans la bonne colonne sur chaque ligne du tableau ci-dessous.

	Vrai	faux
f est l'application affine définie par : $f(x) = x\sqrt{2} - 50$ On a : $f(2) > f(8)$.		
g est une application linéaire. On a : $g(5 + \sqrt{3}) = g(5) + g(\sqrt{3})$.		
h est l'application affine définie par : $h(x) = -12x + \pi$. On a : $h(20) < h(10)$.		

Exercice 5

f est une application affine telle que : $f(x) = ax + b$.

1. Détermine le nombre réel a sachant que : $b = -3$ et $f(2) = 7$.
2. Détermine le nombre réel b sachant que : $a = -\frac{5}{3}$ et $f(-1) = 1$.

Exercice 6

f est une application linéaire telle que $f(3) = 9$ et $f(4) = 12$.

Sans déterminer $f(x)$.

1. $f(7)$; $f(20)$.
2. $f(17)$ sachant que $17 = 9 + 8$.

Exercice 7

f ; g ; h ; l et k sont des applications affines définies par :

$$f(x) = 5 - x ; g(x) = 2 ; h(x) = \frac{4}{5}x + 1 ; l(x) = -\frac{3}{4}$$

$$\text{et } k(x) = 10^{-3}x.$$

Indique celles qui sont des applications affines :

1. croissantes ;
2. décroissantes ;
3. constantes.

Utilisation des outils essentiels

Exercice 8

f est une application affine.

Dans chacun des cas ci-dessous, détermine le sens de variation de f .

1. $f(3) = 5$ et $f(-4) = 1$.
2. $f(-2) = 7$ et $f(-8) = 10$.
3. $f(\sqrt{7}) = 9$ et $f(\sqrt{3}) = 9$.

Exercice 9

f est une application linéaire.

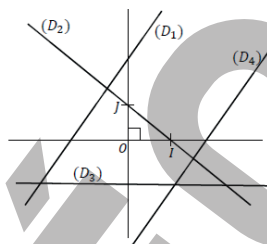
p et q sont deux nombres réels non nuls tels que :
 $f(p) = 2$ et $f(q) = 5$.

Démontre que : $f(p+2q) = 9$.

Exercice 10

Sur la figure ci-dessous, les droites (D_1) , (D_2) , (D_3) et (D_4) représentent graphiquement chacune respectivement les applications affines f , g , h et j . Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations ci-dessous :

1. f est croissante.
2. g est décroissante.
3. h est constante.
4. j est croissante.



Exercice 11

f est une application définie par : $f(x) = 2x - 1$.

1. Justifie que f est croissante.
2. Sans calculer les images de -2 et de $-\frac{1}{3}$ compare $f(-2)$ et $f\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 12

g est une application définie par : $g(x) = \frac{4}{5} - \frac{2}{3}x$.

1. Justifie que g est décroissante.
2. Sans calculer les images de 5 et de -1 , compare $g(5)$ et $g(-1)$.

Exercice 13

h est une application affine croissante.

Range dans l'ordre décroissante les nombres

$$h(0), h(-4), h\left(\frac{2}{3}\right), h\left(\frac{4}{3}\right) \text{ et } h(\sqrt{5}).$$

Exercice 14

On donne l'application linéaire f telle que :
 $f(\sqrt{2}) = 2$ et $f(3+3\sqrt{2})$.

- 1) a) Calcule $f(3+3\sqrt{2})$.
 b) Calcule $f(\sqrt{6})$ sachant que $\sqrt{6} = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$.
- 2) Justifie que f est une application linéaire croissante.

Exercice 15

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

On considère l'application affine f définie par :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2.$$

La droite (D) est la représentation graphique de cette application.

1. Quel est le sens de variation de f ? Justifie ta réponse.
2. a) Calcule $f(0)$ et $f(4)$.
 b) Trace la représentation graphique (D) de f .

Exercice 16

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

On considère l'application linéaire g définie par :
 $g(-5) = 10$.

La droite (D) est la représentation graphique de cette application.

1. a- Calcule le coefficient de cette application linéaire.
 b- Justifie que g est décroissante.
2. Trace la représentation graphique (D) de g .

Exercice 17

Une application linéaire g est telle que :
 $g(-\sqrt{2}) = \sqrt{3}$.

Détermine l'image du nombre $\frac{\sqrt{6}}{2}$ par g .

Exercice 18

Soit h l'application affine définie par :

$$h(x) = (a-2)x + 11.$$

Dans chacun des cas ci-dessous, détermine les valeurs du nombre réel a pour lesquelles :

1. h est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. h est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. h est constante sur $\mathbb{R}$.

⇒ B. Utilise plusieurs outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un exercice

Exercice 19

Détermine le sens de variation des applications affines f et g définies par :

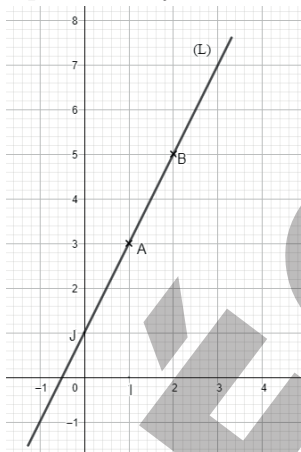
$$f(x) = (\sqrt{7} - 3)x + 10 \text{ et } g(x) = (5 - \sqrt{13})x - 1$$

Exercice 20

Observe bien la figure ci-dessous.

La droite (L) est la représentation graphique d'une application affine f .

1. Quel est le sens de variation de f ?
2. Détermine graphiquement le coefficient et le terme constant de f .
3. Donne l'expression de f .


Exercice 21

f est l'application affine définie par :

$$f(x) = (2 - 3\sqrt{2})x - 5.$$

1. a- Justifie que $2 - 3\sqrt{2}$ est négatif.
b- Déduis-en le sens de variation de f .
2. Range dans l'ordre croissant, sans les calculer : $f(\sqrt{2})$; $f(\sqrt{3})$ et $f(2 - 3\sqrt{2})$.

Exercice 22

Soit l'application affine f définie par :

$$f(x) = (\sqrt{2} - 2)x + 1.$$

1. a- Justifie que $\sqrt{2} - 2$ est négatif.

b- f est-elle croissante ou décroissante ? Justifie ta réponse.

c- Déduis-en la comparaison de $f(\sqrt{2})$ et $f(\sqrt{3})$.

2. Détermine le nombre réel n tel que : $f(n) = 2$.
(tu écriras le résultat sans radical au dénominateur)

Exercice 23

Le plan est muni du repère (O, I, J).

1. Détermine l'application affine f dont la représentation graphique est la droite (D) passant par les points A(-2 ; 3) et B(2 ; 0).
2. f est-elle croissante ou décroissante ? Justifie ta réponse.

Exercice 24

h est une application affine définie par : $h(x) = 2x - 5$.

1. Calcule $h\left(\frac{1}{2}\right)$ et $h(-1)$.
2. Détermine les nombres réels a et b tels que :
 $h(a) = 7$ et $h(b) = \frac{3}{2}$.

Exercice 25

Dans un repère, on considère les points A(-1 ; 3) ; B(3 ; 5) et C(-7 ; 13,5).

1. Détermine l'application affine dont la représentation graphique est la droite (AB).
2. Déduis-en que le point C n'appartient pas à la droite (AB).

Exercice 26

On considère l'application affine f définie par : $f(x) = (m-1)x + 2$, où m est un nombre réel.

Soit (D) la droite représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J).

On donne : A(2 ; -5) et B(-8 ; -1) deux points de ce repère.

Détermine la valeur de m pour que les droites (D) et (AB) soient parallèles.

⇒ C-Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un problème

Exercice 27

Monsieur Sylla doit effectuer avec sa voiture un voyage à Odienné pour prendre part à la cérémonie d'ouverture d'un nouveau collège. À la fin de cette cérémonie, il doit retourner à Abidjan. Les deux villes sont distantes de 800 km.

On sait que la quantité q (en litres) d'essence restante dans la voiture après une distance x parcourue (en kilomètres), est une application affine et qu'après 100 km de trajet la consommation d'essence est d'environ 5 litres.

Avant le départ d'Abidjan, Monsieur Sylla a rempli son réservoir dont la capacité est de 60 litres d'essence.

Il dit à son fils élève de 3^{ème}, qu'avant de tomber en panne sèche (le réservoir vide), le voyant lumineux devrait s'allumer lorsqu'il reste seulement 5 litres d'essence dans le réservoir.

Mais ce voyant a un défaut et ne fonctionne pas.

Afin de prendre toutes les dispositions pour éviter la panne sèche, M. Koné voudrait savoir la distance à parcourir d'Odienné au lieu où le voyant lumineux devrait s'allumer.

Il ne sait pas comment procéder. Son fils veut lui apporter son aide.

1. Détermine la quantité d'essence restante après un parcours de 100 km.
2. Démontre que la quantité q d'essence restante est telle que : $q(x) = -\frac{1}{20}x + 60$.
3. a. Détermine la distance parcourue après laquelle le voyant lumineux devrait s'allumer.
b. Déduis-en la distance à parcourir d'Odienné au lieu où le voyant devrait s'allumer.

Exercice 28

Awa, une jeune femme ayant cinq enfants, veut faire du commerce pour subvenir aux besoins de sa petite famille. Au bout de trois mois, elle note son gain comme l'indique le tableau ci-dessous :

	1 ^{er} mois	2 ^e mois	3 ^e mois
Gains en FCFA	30 000	60 000	90 000

En observant son tableau, elle se demande quand elle pourra gagner 600 000 FCFA pour mieux investir dans son commerce si la tendance se poursuit ainsi.

Pour cela, elle fait appel à sa fille Kadi, élève en classe de 3^e et elle lui soumet son souci.

Cette dernière te sollicite pour l'aider.

1. Reporte ces valeurs, à l'aide de points, dans un repère orthonormé (O, I, J).
Tu prendras pour échelles : abscisse : 1 cm → 2 mois
Ordonnée : 1 cm → 60 000 F.
2. Détermine l'expression de l'application affine f représentée par la droite qui passe par ces points.
3. Réponds à la préoccupation de AWA.

Exercice 29

Une classe de 3^e, d'effectif 70 élèves, veut faire une sortie détente pour visiter une plantation d'hévéa à Bakanou, un village près de Sikensi. Ces élèves veulent organiser un convoi. Le chef de la classe se rend auprès de deux compagnies de transport pour avoir une idée des frais du transport.

De retour, le chef rend compte aux autres élèves comme suit :

- La compagnie RTS : « 1 500 F par personne »
- La compagnie SST : « Réservation du car 16 000 F et 1 200F par personne »

Alors la classe cherche la compagnie qui leur sera avantageuse.

1. On désigne par x le nombre de personnes.
Exprime en fonction de x l'expression d'une application affine permettant de calculer :
 - a. Les frais de transport pour la compagnie RST.
 - b. Les frais de transport pour la compagnie SST.
2. Sachant que toute la classe participe à cette sortie, détermine la compagnie la plus avantageuse.

Leçon

14

PYRAMIDES ET CÔNES

Situation d'apprentissage

Un lycée dispose d'une citerne qui a la forme d'un cône de révolution.

Ce cône a pour base un disque de rayon 3 m et pour hauteur 6 m.

Pour des travaux de construction, on souhaite remplir cette citerne avec de l'eau sur une hauteur de 4 m par une pompe débitant 15 L d'eau par seconde. La pompe démarre le remplissage à 10 h 15 min.

Le chef de chantier veut alors connaître l'heure de la fin de remplissage de cette citerne.

Ta classe de 3^e étant informée, vous sollicitez l'aide de votre professeur de mathématiques qui décide d'approfondir vos connaissances sur les solides de l'espace.

Découvre de nouveaux outils

1 Pyramide régulière

À la fin de cette séquence, tu dois être capable :

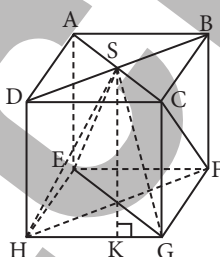
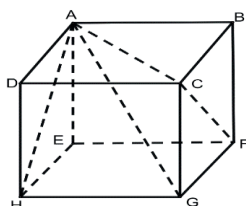
- ✓ d'identifier : une pyramide régulière ; un patron d'une pyramide régulière ; les faces d'une pyramide régulière ; la base d'une pyramide régulière ; une arête d'une pyramide régulière ; la hauteur d'une pyramide régulière ; l'apothème d'une pyramide régulière ;
- ✓ de connaître : la formule du volume d'une pyramide régulière ; la formule de l'aire latérale d'une pyramide régulière ; la formule de l'aire totale d'une pyramide régulière.
- ✓ de décrire : une pyramide régulière ;
- ✓ de construire : un patron de pyramide de pyramide régulière ;
- ✓ de réaliser : une pyramide régulière ;
- ✓ de calculer : le volume d'une pyramide régulière ; l'aire latérale et l'aire totale d'une pyramide régulière.

Activité 1

Sur chacune des figures ci-dessous, le solide ABCDEFGH est un cube.

Décris chacun des solides AEF GH et SEFGH en nommant :

1. La face sur laquelle il est posé et la nature de cette face.
2. La nature et le nombre des autres faces.
3. Le nombre d'arêtes.



Fais le point

- Chacun des solides AEF GH et SEFGH est posé sur la face EFGH qui est un carré. Ils ont chacun 4 autres faces triangulaires qui ont un sommet commun.
- Ces solides sont des **pyramides**.
- Les faces triangulaires sont appelées **faces latérales**.
- La face EFGH sur laquelle chacun est posé est appelée **base** de la pyramide.
- Le sommet commun des faces latérales est le **sommet** de la pyramide.
- Comme le quadrilatère EFGH est un carré, on dit que SEFGH est une **pyramide régulière**.
- Une **pyramide régulière** est une pyramide dont la base est un polygone régulier (figure plane ayant plusieurs côtés, tous de même longueur : triangle équilatéral, carré, hexagone, ...) et dont la hauteur passe par le polygone de base.
- La **hauteur** d'une pyramide est la distance du sommet au plan de la base.
- L'**apothème** d'une pyramide régulière est la distance du sommet à l'une des arêtes de sa base.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Réponds par vrai ou par faux.

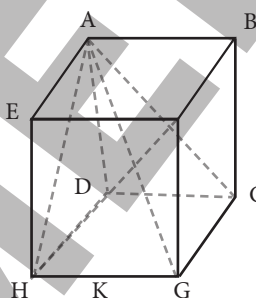
1. Les faces latérales d'une pyramide peuvent être des rectangles.
2. La base d'une pyramide régulière peut être un disque.
3. La base d'une pyramide ne peut pas être un triangle.
4. Les faces latérales d'une pyramide régulière sont toujours des triangles isocèles.
5. L'apothème est aussi la hauteur d'une pyramide régulière.

EXERCICE

2

Dans le cube ci-contre, on considère la pyramide ACGHD.

1. Identifie : son sommet, sa base, sa hauteur.
2. Nomme ses faces latérales et donne la nature de chacune ses faces latérales.



Activité 2

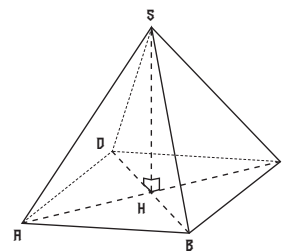
L'unité de longueur est le centimètre

Voici la représentation en perspective cavalière d'une pyramide régulière.

- ABCD est un carré de centre H ;
- [SH] est la hauteur de la pyramide.

On donne : $AB = 5$, $AH = 6$

1. Indique la nature du triangle AHB.
2. Construis en vraie grandeur le carré ABCD et sur chacun des côtés les triangles ASB ; BSC ; CSD et DSA.



Fais le point

- La figure ainsi obtenue est un patron de la pyramide régulière SABCD.
- Le patron d'une pyramide régulière est constitué d'un polygone régulier qui représente la base et de triangles isocèles superposables qui sont ses faces latérales.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

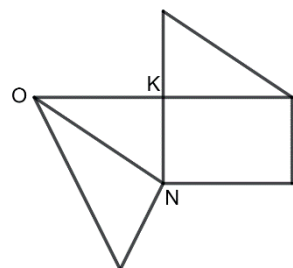
1

L'unité de longueur est le centimètre.

La figure ci-contre représente une partie d'un patron d'une pyramide KLMNO.

On donne : $KN = 3$, $KL = 4$, $KO = 5$.

Construis le patron de cette pyramide.



EXERCICE

2

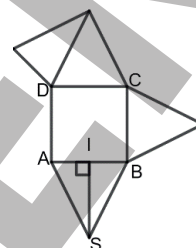
Construis le patron d'une pyramide dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux de côtés de longueur 3 cm.

Activité 3

La figure ci-dessous est un patron d'une pyramide régulière qui n'est pas en grandeurs réelles. I est le milieu du segment [AB].

On donne : $AB = 6$, $SA = 5$

1. Justifie que $SI = 4$.
2. Calcule l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABS.
3. Déduis-en l'aire latérale $\mathcal{A}_l$ de la pyramide SABCD.
4. Vérifie que $\mathcal{A}_l = \frac{P \times SI}{2}$, où P est le périmètre de la base ABCD.
5. Calcule l'aire totale $\mathcal{A}_T$ de la pyramide SABCD.



Fais le point

On admet que :

- l'aire latérale d'une pyramide régulière est égale à $\frac{1}{2} P \times a$, où P est le périmètre de la base et a est l'apothème.
- l'aire totale est égale à la somme de son aire latérale et de l'aire de sa base.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Dans chacun des cas suivants, exprime l'aire latérale $\mathcal{A}_l$ et l'aire totale $\mathcal{A}_T$ en fonction de x , y et a .

1. $\mathcal{P}_1$ est une pyramide régulière d'apothème de longueur a et dont la base est un carré de côté de longueur x
2. $\mathcal{P}_2$ est une pyramide régulière d'apothème de longueur a et dont la base est un triangle équilatéral de côté de longueur x .

EXERCICE

2

Une pyramide régulière d'apothème de longueur 7,2 cm a pour base un triangle équilatéral de côté de longueur 6 cm.

Calcule son aire latérale, puis son aire totale.

EXERCICE

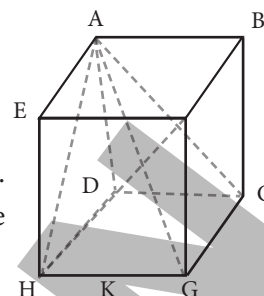
3

Une pyramide régulière à base carrée a pour aire latérale 88 cm² et pour apothème de longueur 8 cm. Calcule la longueur du côté de sa base.

Activité 4

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3 cm.

1. Construis un patron de la pyramide ADCGH.
2. Assemble le solide obtenu avec celui d'autres voisins.
3. Détermine le nombre de solides identiques qu'il faut pour reconstituer le cube.
4. Propose une formule générale permettant de calculer le volume d'une pyramide.



Fais le point

On admet que le volume d'une pyramide est égale à $\frac{B \times h}{3}$, où B est l'aire de la base et h est la hauteur de la pyramide.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Dans chacun des cas suivants, exprime le volume de la pyramide en fonction de a et/ou b .

1. P_1 est une pyramide régulière à base carrée de côté de longueur a et dont sa hauteur est $2a$
2. P_2 est une pyramide régulière à base triangulaire de côté de longueur a et b sa hauteur.

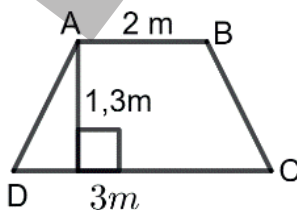
EXERCICE 2

Une pyramide a pour base un rectangle de dimensions 5,6 cm et 7,8 cm et une hauteur de 3,2 cm. Calcule son volume.

EXERCICE 3

Un abri de toile a la forme d'une pyramide de hauteur 2,7 m. Sa base est un trapèze isocèle ABCD représenté ci-dessous.

Calcule le volume de l'abri.



EXERCICE 4

Calcule la hauteur d'une pyramide régulière à base carrée de côté de longueur 6 cm et de volume $115,2 \text{ cm}^3$

2 Cône de révolution

À la fin de la séquence, tu dois être capable :

- ✓ d'identifier : un cône de révolution ; un patron d'un cône de révolution ; le sommet d'un cône de révolution ; la base d'un cône de révolution ; la hauteur d'un cône de révolution ; l'angle de développement d'un cône de révolution ; une génératrice d'un cône de révolution ;
- ✓ de connaître : la formule du volume d'un cône de révolution ; la formule de l'aire latérale d'un cône de révolution ; la relation entre longueur d'une génératrice et, l'angle de développement et le périmètre de la base d'un cône de révolution
- ✓ de construire un patron d'un cône de révolution
- ✓ de réaliser un cône de révolution
- ✓ de calculer : le volume, l'aire latérale et l'aire totale d'un cône de révolution

Activité 1

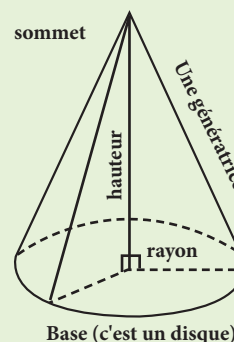
1. Décris le solide ci-contre.
2. Quelle est la nature de la partie jaune ?
3. Quelle est la nature de la partie bleue ?



Fais le point

- Un **cône de révolution** est un solide limité par :
 - Un **disque** : la base du cône ;
 - Une **surface latérale** formée par tous les segments joignant le sommet du cône aux points du cercle de base.
- Le segment qui joint le sommet du cône à tout point du cercle de base est appelé **génératrice**.

Cône de révolution



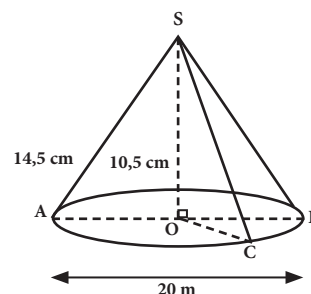
Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Réponds par vrai ou faux

1. Le segment $[OB]$ a pour longueur 10 cm.
2. La hauteur a pour longueur 14,5 cm.
3. SOC est un triangle rectangle en C .
4. $SC = 10$ cm.
5. SAC est un triangle isocèle en S .



EXERCICE 2

Recopie et complète les phrases suivantes avec : une génératrice, la rotation, le rayon de la base, la hauteur.

Un cône de révolution est engendré par ... d'un triangle rectangle DEF tel que $DE=6$ cm, $EF=10$ cm et $DF=8$ cm autour de la droite (DF).

[DE] est ..., [DF] est ... et [EF] est ...

EXERCICE 3

L'unité de longueur est le centimètre (cm).

On souhaite générer un cône de révolution à partir du triangle IJK rectangle en J tel que : $IJ = 4$ et $JK = 7$.

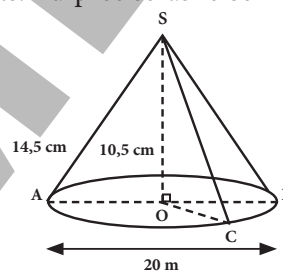
Détermine si on obtient un cône de révolution dans les cas suivants. Tu préciseras le sommet, la hauteur, le centre et le rayon du disque de base.

1. On fait tourner le triangle IJK autour de [IJ].
2. On fait tourner le triangle IJK autour de [JK].
3. On fait tourner le triangle IJK autour de [IK].

EXERCICE 4

Parmi les triangles dont les mesures des côtés sont données ci-dessous, indique celui qui peut engendrer un cône de révolution en précisant sa génératrice.

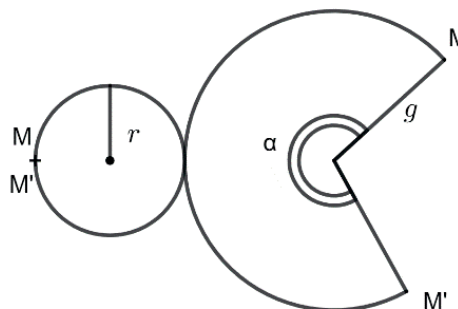
1. $EF = 0,7$; $FG = 2,4$ et $EG = 2,6$
2. $KI = 16$; $JK = 30$ et $IJ = 34$



Activité 2

On considère la figure ci-dessous.

Établis une relation entre r , g et α pour que la figure ci-contre soit le patron d'un cône de révolution.



Fais le point

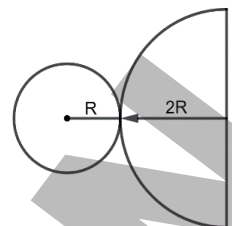
- On admet que : $360^\circ \times r = g \times \alpha$, où r est le rayon du disque de base, g est la longueur d'une génératrice et α l'angle de développement du cône.
- Le patron d'un cône de révolution est composé d'un disque et d'une surface conique, qui est la face latérale.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

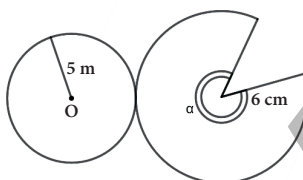
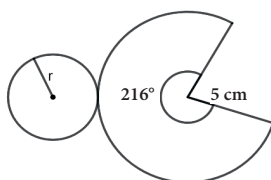
Sur la figure ci-contre, S est le centre du demi-cercle et O le centre du cercle de rayon R.

Justifie que la figure est le patron d'un cône de révolution.



EXERCICE 2

On considère les figures suivantes :



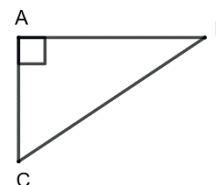
1. Calcule le rayon r du disque de base dans la figure 1
2. Calcule la mesure α de l'angle de développement dans la figure 2

EXERCICE 3

L'unité de longueur est le centimètre (cm).

Construis un patron du cône obtenu en faisant tourner le triangle rectangle ABC autour du côté [AB].

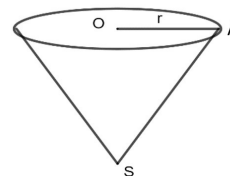
On donne : $AB = 2$; $AC = 1,5$ et $BC = 2,5$



Activité 3

On considère la figure ci-contre qui est un cône de révolution.

1. Calcule l'aire latérale $\mathcal{A}_l$ de ce cône de révolution
2. Vérifie que $\mathcal{A}_l = \frac{\mathcal{P} \times g}{2}$ où $\mathcal{P}$ est le périmètre du disque de base.
3. Calcule l'aire totale $\mathcal{A}_t$ du cône de révolution.



Fais le point

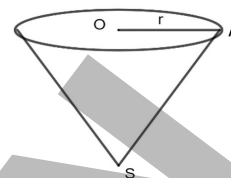
On admet que :

- L'aire latérale d'un cône de révolution est égale à $\frac{\mathcal{P} \times g}{2}$, où $\mathcal{P}$ est le périmètre du disque de base et g la longueur d'une génératrice.
- L'aire totale d'un cône de révolution est égale à la somme de l'aire du disque de base et de l'aire latérale.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

On considère le cône de révolution ci-contre.
On donne : $OA = r$ et $SA = g$
Exprime en fonction de r et g l'aire latérale puis l'aire totale du cône.



EXERCICE 2

Un cône de révolution a une génératrice de longueur $5,4 \text{ cm}$ et un disque de base de rayon $3,5 \text{ cm}$.
Calcule son aire latérale et son aire totale.

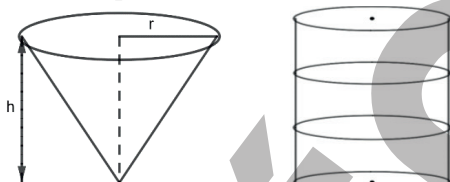
EXERCICE 3

Un cône de révolution dont une génératrice est de longueur 7 cm a pour aire latérale $28\pi \text{ cm}^2$.
Calcule le rayon de son disque de base.

Activité 4

On remplit un cône de révolution avec de l'eau qu'on verse ensuite dans un cylindre gradué de même rayon et de même hauteur.

L'eau occupe alors le tiers du volume du cylindre.



Détermine une formule permettant de calculer le volume du cône.

Fais le point

On admet que : le volume d'un cône de révolution est égal à $\frac{1}{3}B \times h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, où r est le rayon du disque de base et h la hauteur du cône de révolution.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Calcule le volume d'un cône de révolution de rayon $6,5 \text{ cm}$ et de hauteur $7,5 \text{ cm}$.

EXERCICE 2

Calcule la hauteur d'un cône de révolution dont la base est un disque de rayon $4,5 \text{ cm}$ et le volume est égal à $48,60\pi \text{ cm}^3$.

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 3

Un cône de révolution de hauteur 6 cm a pour volume $100,48 \text{ cm}^3$.
Calcule le rayon du disque de sa base, en prenant $\pi = 3,14$.

3 Sections planes

À la fin de la séquence, tu dois capable :

- ✓ d'identifier : le tronc d'une pyramide régulière ; le tronc d'un cône de révolution ;
- ✓ de connaître les propriétés de réduction
- ✓ d'extraire une figure plane d'une représentation d'un cône de révolution ou d'une pyramide régulière
- ✓ de calculer : des volumes de troncs de pyramides régulières ; des volumes de troncs de cônes de révolution ; le coefficient de réduction

Activité 5

On considère une pyramide régulière de sommet S dont la base $ABCD$ est un carré.

- Le quadrilatère $IJKL$ est une section plane de cette pyramide par un plan parallèle au plan de la base ;
- Le quadrilatère $IJKL$ est une réduction de la base $ABCD$ de la pyramide.
- On note k le coefficient de réduction.

1. On considère le triangle SAB .

- a) Cite deux droites parallèles ;
- b) Justifie que : $\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SB} = \frac{IJ}{AB}$;
- c) Déduis-en que : $SI = kSA$; $SJ = kSB$ et $IJ = kAB$;
- d) Sans justifier, recopie et complète les égalités suivantes :
 $SO' = k \times \dots$; $O'K = k \times \dots$; $LJ = k \times \dots$

2. Dis ce que ce que représente la pyramide $IJKL$ par rapport à la pyramide $ABCD$.

3. Sur la figure ci-dessous, le solide $SABCD$ est une pyramide de sommet S et de base le carré $ABCD$, et le carré $EFGH$ est une section plane de cette pyramide par un plan au plan de la base.

On donne : $AB = 40\sqrt{2}$; $EF = 10\sqrt{2}$ et $SO = 96$

1. La pyramide $SEFGH$ est une réduction de la pyramide $SABCD$ à l'échelle k .

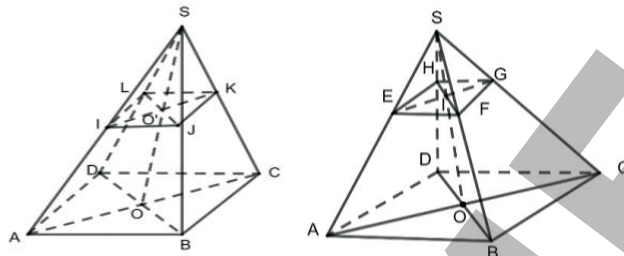
- a) Recopie et complète les égalités suivantes : $k = \frac{SI}{SA} = \frac{\dots}{AB} = \frac{SE}{SA} = \frac{\dots}{AC}$;
- b) Calcule le coefficient de réduction k .

c) Démontre que :

$$\frac{\text{Aire}(EFGH)}{\text{Aire}(ABCD)} = k^2$$

$$\frac{\text{Volume}(SEFGH)}{\text{Volume}(ABCD)} = k^3$$

d) Exprime le volume du tronc de la pyramide en fonction de k et du volume V de la pyramide SABCD.



Fais le point

On admet les résultats suivants :

- lorsqu'on coupe une pyramide de sommet S par un plan parallèle au plan de sa base, la pyramide de sommet S et de base la section plane est une réduction de la pyramide que l'on a coupée
- on a obtenu deux solides :
 - l'un est une réduction de pyramide, de sommet S , de hauteur SO' et de base un carré $IJKL$;
 - l'autre est un tronc de pyramide, de hauteur $O'O$ et de bases les carrés $IJKL$ et $ABCD$ (figure 1)
- Dans cette réduction de rapport k ,
 - l'aire d'une surface est multipliée par k^2
 - le volume d'un solide est multiplié par k^3
 - le volume du tronc est $V - k^3V$

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE

1

Pour chaque ligne du tableau écris le numéro suivi de la lettre permettant d'avoir une proposition vraie.

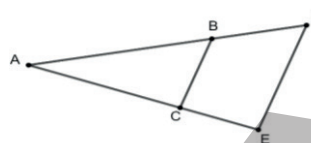
N°	Énoncés	A	B	C
1	Si une pyramide est coupée par un plan parallèle au plan de sa base, alors la section est :	une réduction de la pyramide	une réduction de la base de la pyramide	un tronc de pyramide
2	Si on réduit un solide en multipliant les longueurs par $\frac{3}{5}$, alors son volume est multiplié par :	$3 \times \frac{3}{5}$	$\frac{9}{125}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^3$
3	Si un carré EFGH est la réduction de rapport $\frac{2}{3}$ d'un carré ABCD d'aire 27cm^2 , alors son aire, en cm^2 , est :	12	18	$\frac{4}{6} \times 27$

EXERCICE 2

Sur la figure ci-contre, le triangle ABC est une réduction du triangle AEF de rapport k .

- Aire du triangle AEF est égale à $13,5 \text{ cm}^2$
- $AC = 40 \text{ mm}$; $AE = 50 \text{ mm}$

1. Calcule le coefficient de réduction k
2. Déduis-en l'aire du triangle ABC

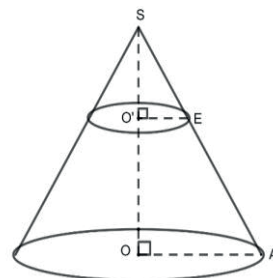


EXERCICE 3

Une pyramide SEFGH est une réduction d'une pyramide SABCD de volume 64 cm^3 à l'échelle $\frac{3}{4}$.
Calcule le volume du tronc de pyramide.

Activité 6

1. On considère un cône de révolution de sommet S dont la base est un disque de centre O et de rayon OA, et le cercle de centre O' et de rayon O'E est une réduction de la base du cône.
On note k le coefficient de réduction.
 - a) Cite deux droites parallèles
 - b) Justifie que le triangle SO'E est la réduction du triangle SOA dont on précisera le coefficient de réduction.
 - c) Dis ce que représente le petit cône par rapport au grand cône de révolution.
2. On note $\mathcal{A}$ l'aire de la base du grand cône de révolution de volume $\mathcal{V}$ et $\mathcal{A}'$ l'aire de la base du petit cône de révolution de volume $\mathcal{V}'$.
 - a) Démontre que : $\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = k^2$.
 - b) Démontre que : $\frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}} = k^3$.
 - c) Démontre que $\text{Volume (tronc)} = (1 - k^3)\mathcal{V}$.



Fais le point

On admet les résultats suivants :

- Lorsqu'on coupe un cône de révolution de sommet S par un plan parallèle au plan de sa base, le cône de sommet S et de base la section plane est une réduction du cône que l'on a coupée
- On a obtenu deux solides :
 - L'un est une réduction du cône, de sommet S, de hauteur SO' et de base un disque de centre O' et de rayon O'E.
 - L'autre est un tronc de cône, de hauteur OO' et de bases le disque de centre O' et de rayon O'E et le disque de centre O et de rayon OA.
- $\text{Volume (tronc)} = (1 - k^3) \times \text{Volume du cône initial.}$

⇒ Utilise le nouvel outil

EXERCICE 1

Choisis la bonne réponse

N°	Énoncés	A	B	C
1	Si un cône de révolution est coupé par un plan parallèle au plan de sa base, alors la section est :	une réduction du cône	un tronc de cône	un disque
2	Si un cône de révolution de hauteur 7 cm et de rayon 6 cm est coupé par un plan parallèle au plan de sa base et situé à 3,5 cm du sommet, alors la section est :	un disque de rayon 3 cm	un disque de rayon 6 cm	un disque de rayon 3,5 cm
3	Si les disques d'un tronc de cône ont pour aires respectives 8 cm^2 et 18 cm^2 , après une section du cône par un plan au plan de sa base, alors le coefficient de réduction est :	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$

EXERCICE 2

Un cône de révolution de disque de base de rayon 4,2 cm est une réduction d'un cône de disque de diamètre 12 cm à l'échelle k .

Calcule la valeur exacte du coefficient de réduction k .

EXERCICE 3

On obtient un tronc de cône après la réduction d'un cône de révolution de volume $3,43 \text{ cm}^3$ à l'échelle $\frac{2}{7}$.

Calcule le volume du tronc de cône obtenu.

Retiens les outils essentiels

1 Pyramides – Pyramides régulières

Définition

Un **polygone** est une figure géométrique plane constituée d'une ligne brisée et fermée.

Une **pyramide** est un solide dont :

- une des faces est un polygone appelé **base**,
- les autres faces sont des triangles qui ont un sommet commun. Ces faces sont appelées **faces latérales**.
- Le sommet commun aux faces latérales est le **sommet** de la pyramide.

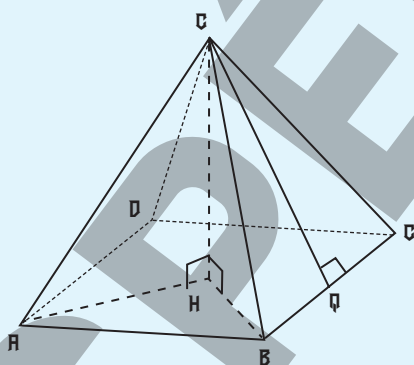
La **hauteur** d'une pyramide de sommet S est le segment [SH], de support perpendiculaire au plan contenant la base de la pyramide, H est un point de ce plan.

On appelle aussi hauteur la longueur SH.

Exemple

Dans la pyramide régulière représentée ci-dessous :

- Le **sommet** est le point S.
- La **base** est le quadrilatère ABCD.
- Les **faces latérales** sont les triangles SAB, SAC, SBC, SDC, SAC.



- Les arêtes latérales sont les segments dont une extrémité est le point S : [SA], [SB], ...
- La hauteur est le segment [SH] ou SH.
- L'apothème est SQ.

Pyramide régulière

Définition

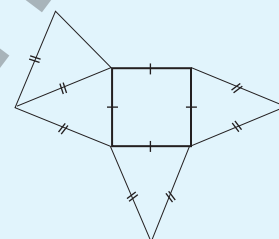
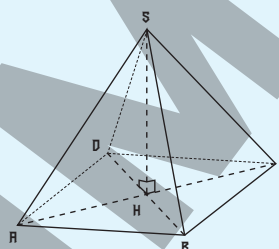
Un **polygone régulier** est un polygone dont les côtés ont la même longueur et dont tous les angles ont la même mesure.

Une **pyramide régulière** est une pyramide dont :

- la base est un polygone régulier ;
- la hauteur est la perpendiculaire au plan de la base.

Exemple

Représentation en perspective cavalière



Patron

Les faces sont des triangles isocèles identiques.

N.B : La hauteur d'une pyramide n'apparaît pas sur un patron.

2 Cône de révolution

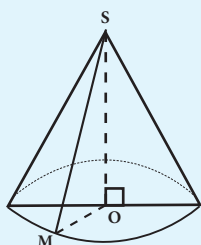
Définition

- Un **cône de révolution** est un solide engendré par la rotation d'un triangle autour d'un des supports de l'angle droit. Il est constitué :
 - d'un disque appelé **la base** du cône ;
 - d'une surface non plane appelée **face latérale**.
- La **hauteur** d'un cône de révolution désigne :
 - La droite passant par le centre de la base et par le sommet du cône ;
 - La longueur du segment joignant le centre de la base et le sommet du cône.
- La **génératrice** d'un cône de révolution est l'hypoténuse (ou sa longueur) du triangle rectangle qui a engendré ce cône.

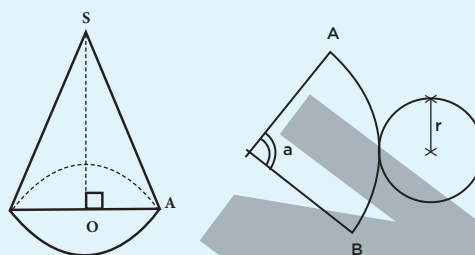
Exemple

Le solide ci-contre est un cône de révolution engendré par la rotation du triangle SOM rectangle en O.

- Le point S est le sommet ;
- La base est le disque de centre O et de rayon [OM] ;
- La hauteur est la droite (SO) et O est le pied de la hauteur.
- Le segment [SM] est une génératrice de cône.



Patron d'un cône de révolution



La longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est égale à la longueur du cercle de base de rayon r .

3 Aires et volumes

Aire latérale d'une pyramide et d'un cône de révolution

Solides	Aire latérale	Aire totale
Pyramide régulière 	$\frac{P \times a}{2}$ P : périmètre de la base ; a : apothème.	aire latérale + aire de la base
Cône de révolution 	$\frac{P \times g}{2} = \pi r g$ P : périmètre de la base ; g : longueur d'une génératrice ; r : rayon du disque de base.	aire latérale + aire de la base ou bien : $\pi r g + \pi r^2 = \pi r (g + r)$

Volume d'une pyramide régulière et d'un cône de révolution

Exemples de solides	Volume
Pyramide régulière 	$\frac{B \times h}{3}$ B : aire de la base h : hauteur de la pyramide ou du cône
	$\frac{\pi r^2 h}{3}$

4 Sections planes

Section d'une pyramide régulière par un plan parallèle à la base.

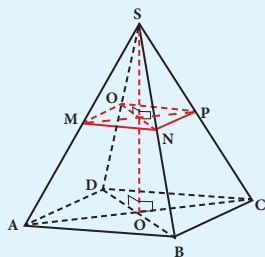
Propriété 1

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone qui est une réduction du polygone de base.

Exemple

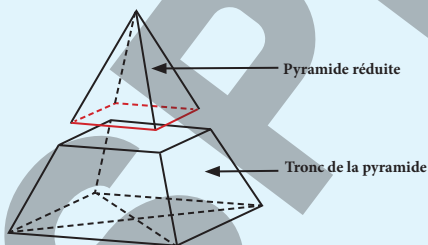
La section de la pyramide régulière SABCD par le plan parallèle à sa base est la réduction de la base ABCD (qui est le carré MNPQ) dont le coefficient

de réduction est : $k = \frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{SI}{SO} = \dots$



Remarque

En sectionnant une pyramide régulière par un plan parallèle à la base, on obtient deux solides : une petite pyramide régulière, réduction de la grande pyramide régulière et un autre solide appelé tronc de la pyramide.



Section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base.

Propriété 1

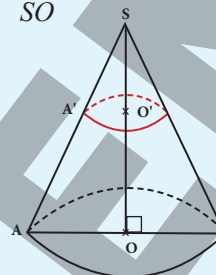
La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un disque.

Exemple

La section du cône par le plan parallèle à la base est la réduction de la base (disque de centre O' et de rayon O'A')

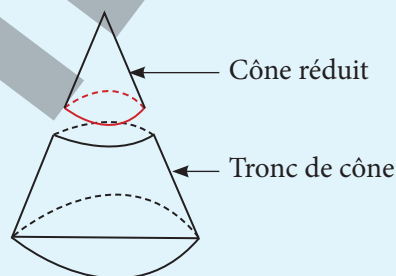
dont le coefficient de réduction

$$k = \frac{O'A'}{OA} = \frac{SA'}{SA} = \frac{SO'}{SO} = \dots$$



Remarque

En sectionnant un cône de révolution par un plan parallèle à la base, on obtient deux solides : un petit cône, réduction du grand cône et un autre solide appelé **tronc du cône**.



Aire et volume après réduction d'une pyramide régulière ou d'un cône de réduction

Propriété 1

(S') désigne la petite pyramide régulière ou le petit cône de révolution et (S) la grande pyramide régulière ou le grand cône de révolution.

Si (S') est une réduction de (S) à l'échelle k , alors :

- une longueur L' de (S') s'obtient en multipliant par k la longueur L associée de (S) et on a : $L' = k \times L$.
- l'aire A' d'une surface de (S') s'obtient en multipliant par k^2 l'aire A de la surface associée de (S) et on a : $A' = k^2 \times A$.
- le volume V' de (S') s'obtient en multipliant par k^3 le volume V de (S) et on a : $V' = k^3 \times V$.

Aire et volume de tronc d'une pyramide régulière ou d'un cône de réduction**Propriété 1**

(S') désigne la petite pyramide régulière ou le petit cône de révolution ;

(S) désigne la grande pyramide régulière ou le grand cône de révolution.

(S') est une réduction de coefficient k du solide (S).

Soient A'_1 l'aire latérale de (S') et A_1 l'aire latérale de (S).

Soient V'_1 le volume de (S') et V le volume de (S).

- L'aire latérale du tronc de (S) est : **aire (tronc)** $= A_1 - A'_1 = (1 - k^2)A_1$.
- Le volume du tronc de (S) est :
 $V_T - V'_1 = (1 - k^3)V$.

Exercices commentés

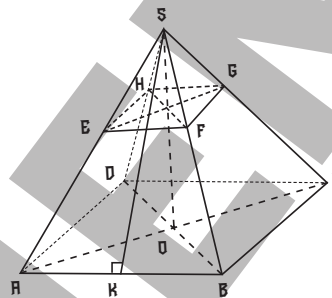
Exercice 1

L'unité de longueur est le centimètre (cm)

Soit SABCD une pyramide régulière à base carrée et EFGH une section plane par un plan parallèle au plan de sa base.

On donne : $AB = 5$; $SK = 9$ et $EF = 3$

1. Justifie que le coefficient de réduction k est égal à $\frac{3}{5}$.
2. a) Calcule l'aire latérale $\mathcal{A}$ de la pyramide SABCD.
b) Déduis-en l'aire latérale du tronc de pyramide.
3. Démontre que : $SO = \frac{\sqrt{299}}{2}$.
4. Calcule le volume du tronc de pyramide.



Solution

1. Justifions que : $k = \frac{3}{5}$.

La section de la pyramide par un plan parallèle au plan de sa base est un carré EFGH qui est une réduction du carré ABCD. Donc : $k = \frac{EF}{AB} = \frac{3}{5}$.

2. a) Calcul de l'aire latérale $\mathcal{A}$ de la pyramide

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{P} \times SK}{2} = \frac{1}{2} \times 4 \times AB \times SK = 2 \times 5 \times 9 = 90 \text{ cm}^2$$

$$\text{b) L'aire latérale du tronc de pyramide est : } \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2\right) \times 90 = \frac{16}{25} \times 90 = 57,6 \text{ cm}^2$$

3. Démontrons que $SO = \frac{\sqrt{299}}{2}$

On considère le triangle SOK rectangle en O. D'après la propriété de Pythagore, on a : $OK^2 + SO^2 = SK^2$

$$\text{Donc : } SO^2 = SK^2 - OK^2.$$

$$SO = \sqrt{9^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{299}{4}} = \frac{\sqrt{299}}{2}$$

4. Calcul du volume du tronc de la pyramide

Le volume du tronc de pyramide est : $V_T = (1 - (k)^3) \times \text{volume de pyramide}$.

$$V_T = \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3\right) \times \frac{1}{3} \times AB^2 \times SO = \frac{98}{125} \times \frac{1}{3} \times 25 \times \frac{\sqrt{299}}{2} = \frac{49}{15} \sqrt{299}.$$

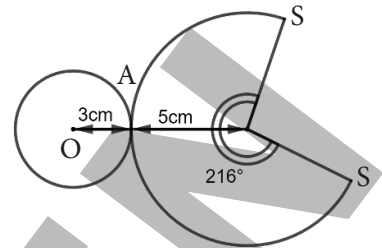
$$\text{Le volume du tronc de pyramide est } \frac{49}{15} \sqrt{299} \text{ cm}^3.$$

Exercices commentés

Exercice 2

On considère le cône de révolution dont on a représenté un patron ci-contre.

1. Calcule l'aire totale de ce cône de révolution.
2. Justifie que ce cône a pour hauteur 4 cm.



Solution

1. Calcul de l'aire totale du cône de révolution

Connaissant le rayon de la base et la longueur des génératrices, on a :

$$A_T = \pi r^2 + \pi gr = \pi r(r + g) = 3\pi \times 8 = 24\pi.$$

L'aire totale de ce cône est $24\pi \text{ cm}^2$

2. Justifions que $h = 4 \text{ cm}$.

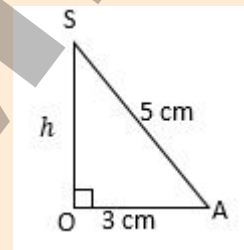
On considère le triangle SOA rectangle en O qui engendre ce cône. D'après la propriété de Pythagore, on a :

$$SO^2 + OA^2 = SA^2$$

$$\text{Donc : } SO^2 = SA^2 - OA^2$$

$$\text{D'où : } h = SO = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

La hauteur du cône est égale à 4 cm.



Utilisation des outils essentiels

⇒ A- Utilise plusieurs outils de la leçon pour résoudre un exercice

Exercice 1

L'unité de longueur est le centimètre.

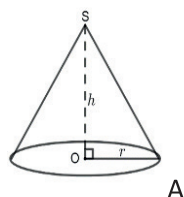
Un carré ABCD est la base d'une pyramide régulière de sommet S.

M est le milieu du côté [AB] et H le centre de ABCD.

Calcule l'aire latérale et le volume de cette pyramide lorsque $SM = 8$ et $SH = 6$

Exercice 2

Calcule le rayon de la base, puis la hauteur d'un cône de révolution dont la surface latérale est un demi-cercle de 6 cm de rayon.



Exercice 3

Une pyramide SABC a un volume de 54 cm^3 .

Sa base ABC est un triangle dont les côtés mesurent 4,5 cm ; 6 cm et 7,5 cm.

1. Justifie que le triangle ABC est rectangle.
2. Calcule sa hauteur.

Exercice 4

Trois cônes de révolution (C_1) ; (C_2) et (C_3) ont la même hauteur et des rayons de base respectifs 3 cm ; 4 cm et 5 cm.

Démontre que le volume du cône (C_3) est égal à la somme des volumes des cônes (C_1) et (C_2) .

Exercice 5

Une pyramide de hauteur 8 cm a pour base un carré de 10 cm de côté.

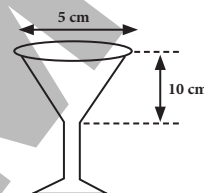
1. Calcule son volume.
2. Déduis-en le volume d'une réduction de cette pyramide à l'échelle $\frac{1}{3}$.

Exercice 6

Une flûte à champagne a la forme d'un cône de révolution.

1. Calcule son volume (sa contenance), en cL.
2. Avec une bouteille de 75 cL, détermine le nombre de flûtes identiques à celle-ci qu'on peut remplir entièrement.
3. On remplit cette flûte aux quatre cinquièmes de sa hauteur.

Calcule la quantité de champagne correspondante.

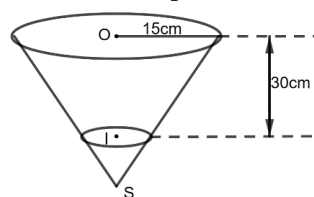


Exercice 7

Un pot de fleurs a la forme d'un tronc de cône ci-dessous.

I est le milieu du segment [SO]

1. Calcule le volume du cône de révolution dont il est issu.
2. Calcule le volume du pot de fleurs.

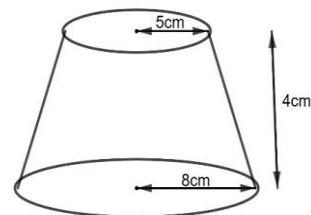


Exercice 8

La figure ci-contre est un tronc de cône de révolution.

On désigne par h la hauteur du cône dont il est issu.

1. Démontre que :
$$\frac{h-4}{h} = \frac{5}{8}$$



2. Déduis-en la valeur de h .

Exercice 9

L'unité de longueur est le centimètre (cm).

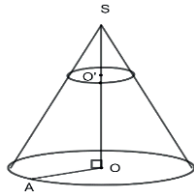
On sectionne le cône de révolution ci-dessous par un plan parallèle au plan de sa base.

Ce plan coupe la hauteur [SO] du cône en O' .

On donne : $SO' = 3$; $SO = 9$ et $OA = 6$.

1. Justifie que la section est un disque

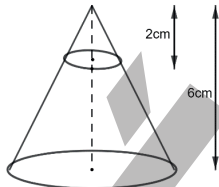
2. Calcule le rayon de ce disque.



Exercice 10

On a sectionné un cône de révolution de hauteur 6 cm par un plan parallèle au plan de sa base et situé à 2 cm du sommet.

Sachant que le volume du grand cône est 54 cm^3 , calcule le volume du petit cône, puis l'aire de sa base.



Exercice 11

On coupe un cône de révolution de hauteur 10 cm et de rayon 5 cm par un plan parallèle au plan de sa base. On obtient comme section un disque d'aire $16\pi \text{ cm}^2$.

1. Calcule le coefficient de réduction.
2. Calcule la distance du sommet du cône au centre de la section.

Exercice 12

On considère un cône de révolution de hauteur 12 cm et de rayon de base 7 cm.

On souhaite couper ce cône par un plan parallèle au plan de sa base pour obtenir une section de rayon 4 cm. Calcule la distance à laquelle doit être situé le plan de

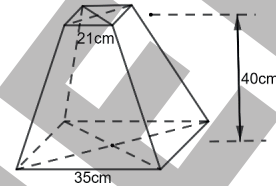
coupe par rapport au sommet.

Exercice 13

Un tabouret a la forme d'un tronc de pyramide régulière à base carrée.

La hauteur du tabouret est égale à 40 cm, les côtés de la grande base mesurent 35 cm et ceux de la petite base mesurent 21 cm.

Calcule la hauteur de la pyramide initiale



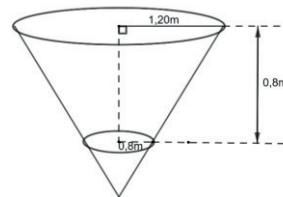
Exercice 14

Un réservoir a la forme d'un tronc de cône de révolution.

Les cercles de base ont pour rayons 0,80 m et 1,20 m

La hauteur du réservoir est égale à 0,80 m.

Calcule le volume de ce réservoir.



Exercice 15

Une pyramide régulière à base carrée et un cône de révolution ont la même hauteur h et le même volume V

Le rayon du disque de base du cône est égal à 17 cm.

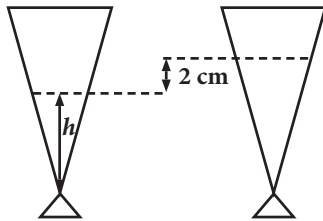
Calcule la longueur du côté de base de la pyramide.

Exercice 16

Les figures ci-dessous représentent une coupe en verre ayant la forme un cône de révolution de hauteur 10 cm.

La hauteur h du liquide étant égale à 6 cm, calcule le volume d'eau qu'il faut ajouter pour que la hauteur augmente de 2 cm.

⇒ B- Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un exercice

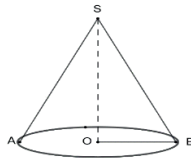

Exercice 17

L'unité de longueur est le centimètre (cm)

On considère la figure ci-dessous.

On donne : $AB = 8$ et $\widehat{ASB} = 60^\circ$.

1. Justifie que SAB est un triangle équilatéral
2. Calcule l'aire totale de ce cône.
3. Détermine la mesure de l'angle de développement de ce cône de révolution.


Exercice 18

Sur une plage, un visiteur achète un cornet de glace qui a la forme d'un cône de révolution.

Celui-ci a une hauteur de 15 cm et le diamètre de base est 6 cm.

La glace remplit exactement le cornet ; hélas elle fond trop vite, il la verse dans un cylindre de diamètre de diamètre 5 cm.

Calcule la hauteur de la glace dans le verre.

Exercice 19

L'unité de longueur est le centimètre (cm)

Sur la figure ci-dessous qui n'est pas en vraie grandeur :

SABCD est une pyramide à base rectangulaire, de hauteur [SH], où H est le centre du rectangle ABCD.

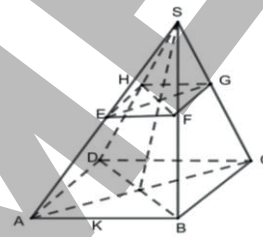
On donne : $AB = 8$; $BC = 6$ et $SH = 12$

1. Justifie que $AC = 10$ et $SA = 13$
2. Soit E le point de [SA] tel que $SE = 3,25$.

On coupe la pyramide par le plan parallèle au plan de sa base, et passant par le point E. On obtient une

petite pyramide SEFGH.

- a. Justifie que le coefficient de réduction de SEFGH par rapport à SABCD est $k = \frac{1}{4}$
- b. Calcule le volume du tronc EFGHABCD de la pyramide SABCD
3. On souhaite obtenir une pyramide dont le volume serait huit fois plus petit que celui de la pyramide SABCD.
Détermine la position exacte du point E par rapport à S sur le segment [SA].

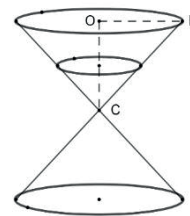

Exercice 20

L'unité de longueur est le centimètre (cm)

Un sablier est formé de deux cônes identiques.

On donne : $OB = 5$ et $OC = 12$

1. Juste avant de s'écouler, le sable est aux deux tiers de la hauteur du cône.
Justifie que le volume V , en cm^3 , du sable contenu dans le sablier est égal à $\frac{800}{27}\pi$
2. Après 7 minutes, le niveau du sable est au tiers de la hauteur du cône.
 - a. Calcule le volume V_r , en cm^3 , de sable qui reste dans le cône d'où le sable s'écoule.
 - b. Calcule le volume V' , en cm^3 , de sable qui s'est écoulé
 - c. L'écoulement étant régulier, détermine le temps restant pour que celui-ci s'achève.


Exercice 21

L'unité de longueur est le centimètre (cm)

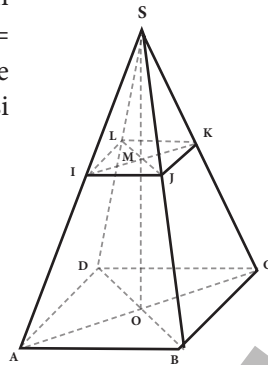
Un artisan fabrique des boîtes en forme de tronc de pyramide.

Pour cela, il considère une pyramide régulière SABCD, de volume 1536 cm^3 , à base carrée de centre O.

Sa hauteur est [SO].

On donne : $SO = 16$ et $SA = 20$.

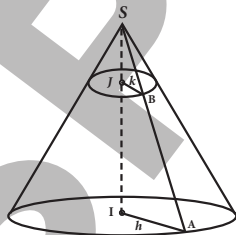
1. Démontre que $AB = 12\sqrt{2}$.
2. L'artisan coupe cette pyramide SABCD par un plan parallèle au plan de sa base tel que $SM = 2$ et où M est le centre de la section IJKL ainsi obtenue.
 - a. Calcule le coefficient de réduction transformant SABCD en SIJKL
 - b. Calcule la longueur IJ



Exercice 22

On considère un cône de révolution de hauteur 4 cm, sa base a pour rayon 3 cm.

1. Calcule la longueur de sa génératrice
2. On sectionne ce cône par un plan parallèle au plan de sa base et passant par le point J tel que $SJ = 3$ cm.
 - a. Calcule SB.
 - b. Calcule l'aire latérale du tronc de cône obtenu.



Exercice 23

L'unité de longueur est le centimètre (cm)

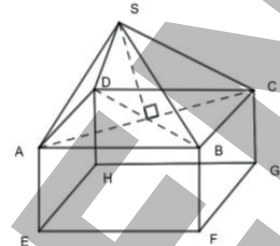
Le solide représenté est constitué de deux parties :

- une pyramide de sommet S dont la base SABCD est un carré, de centre O.

- un pavé droit ABCDEFGH ;

On donne : $AB = 30$; $AE = 10$ et $SO = 30$

1. Calcule le volume du pavé droit.
2. Calcule le volume de la pyramide.
3. Déduis-en le volume total du solide.



Exercice 24

L'unité de longueur est le centimètre (cm).

ABCDEFGH est un pavé droit tel que : $AE = 5$; $EF = 6$; $FG = 4$.

- Le point J appartient au segment [DH] ;
- La pyramide DEFGH est coupée par un plan parallèle au plan de sa base et passant par le point J ;
- La section est un quadrilatère où les points K, L et M appartiennent respectivement aux segments [DE] ; [DF] et [DG].

On considère la pyramide DEFGH

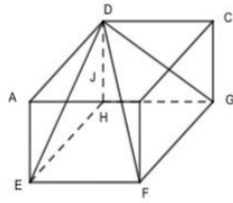
1. a) Identifie le sommet, la hauteur de cette pyramide.
b) Donne la nature exacte du quadrilatère JKLM.
2. La pyramide DJKLM est une réduction de la pyramide DEFGH.

On donne $JH = 2$

- a. Détermine le coefficient de réduction k .
- b. Calcule le périmètre P du quadrilatère JKLM.
3. On pose $x = DH$.
 - a. Justifie que : $0 \leq x \leq 5$
 - b. On note $f(x)$ le périmètre du quadrilatère. Démontre que : $f(x) = 20 - 4x$.
 - c. Détermine la position de J sur le segment [DH] pour que le périmètre P soit égal à 6 cm.

Exercice 25

- Un cône de révolution dont l'aire de base est égale à $2,50 \text{ m}^2$ a une hauteur de $1,30 \text{ m}$.
- Sans calculer son rayon de base, détermine l'aire de la section obtenue quand on le coupe par un plan parallèle au plan de sa base à $0,90 \text{ m}$ du sommet.

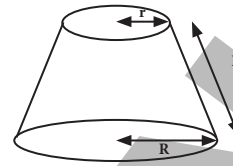


Exercice 26

Un abat-jour recouvert de tissu a la forme d'un cône tronqué comme indiqué ci-dessous. Calcule l'aire du tissu nécessaire à la confection de cet abat-jour, lorsque

$$l = 30 \text{ cm} ; R = 27 \text{ cm} \text{ et } r = 18 \text{ cm}.$$

(On suppose que le raccord se fait bord à bord et on ne couvre ni le dessus ni le dessous).



Exercice 27

Un cône de révolution a un volume de 63 cm^3 . On effectue un agrandissement de ce cône et on obtient un cône de révolution de volume 504 cm^3 .

- Calcule le coefficient d'agrandissement k .
- La hauteur du grand cône est 13 cm . Calcule la hauteur du petit cône.
- Calcule les aires des bases des cônes.

⇒ C- Utilise des outils de la leçon avec d'autres outils pour résoudre un problème

Exercice 28

Un lycée dispose d'une citerne qui a la forme d'un tronc de cône de révolution.

Ce cône a pour base un disque de rayon 3 m et pour hauteur 6 m .

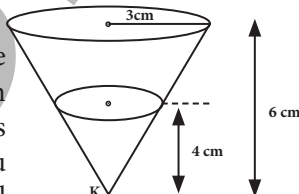
Pour des travaux de construction, on souhaite remplir cette citerne avec de l'eau sur une hauteur de 4 m par une pompe débitant $15 \text{ litres d'eau par seconde}$.

La pompe démarre à $10 \text{ h } 15 \text{ min}$ pour le remplissage. Le chef de chantier veut connaître l'heure de la fin de remplissage de cette citerne.

Pour cela, il sollicite ton aide.

On admet que l'eau occupe un cône qui est une réduction de la citerne.

- Justifie que le volume exact V de la citerne, en m^3 , est égal à 18π
- Démontre que le volume d'eau v , en m^3 , contenue dans la citerne à la fin du remplissage est égal à $\frac{16}{3}\pi$.
- Détermine l'heure de la fin de remplissage.



Exercice 29

Le club de musique d'un lycée veut s'offrir un tambour qui a la forme d'un tronc de cône de révolution.

Pour recouvrir sa face latérale d'un cuir, les organisateurs dudit club souhaitent connaître l'aire de cuir nécessaire.

Pour cela, ils te sollicitent.

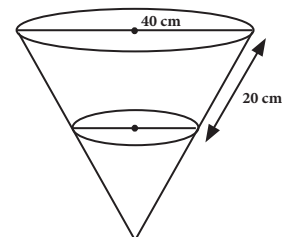
Sur la figure :

Les deux disques de base de ce tronc ont pour diamètres respectifs 40 cm et 20 cm .

- Justifie que le coefficient de réduction k est égal à $\frac{1}{2}$.
- Justifie qu'une génératrice de longueur g du cône dont le cône est issu vérifie l'égalité :

$$\frac{g - 20}{g} = \frac{1}{2}$$

- Déduis-en la longueur g
- Réponds à la préoccupation des organisateurs.



SPECIMEN

SPÉCIMEN

FP Éditions, 2024
Tél. : 01 51 45 23 45

Dépôt légal : N° 20802, janvier 2024
ISBN : 978-2-492829-39-0

Achevé d'imprimer sur les presses de : FP Éditions
Pour le compte de FP Éditions