

DAVID DIARRA

Prébac

Sciences Physiques

Problèmes avec solutions

T.S.E et T.S.EXP

Par

Dahouda Lamine Diarra
Professeur principal
Lycée Ibrahima LY

Genuine

DAVID DIARRA

Prébac

Sciences Physiques

Problèmes avec solutions

T.S.E et T.S.EXP

Par

Dahouda Lamine Diarra

Professeur principal

Lycée Ibrahima LY

Tél : 76 01 61 95

E-mail : davidiel.dahouda@gmail.com

Adama . Y. A. TRAORE

TEL : 77 94 63 60

Zofiakou : Rue: [REDACTED]

P = 416 Rue: 224

Genuine

Contacts

DISTRICT DE BAMAKO

Elvis Harouna		Dembélé	LMS	66847556	76050178
Mme Rissa Fadimata		Walette	LMDB	66864971	70404243
Grégoire		Kassogué	LNDN	65866942	76057792
Salah		Ouologuem	LCAD		76456253
Djibril		Sissoko	LILY	63486856	76101787
Lamine		Dao	LILY	67000028	76522699
Ayouba		Touré	LBF		76495375
Issiaka		Keïta	LBS		74752384
Bakary		Traoré	LFDS	66864199	77357437
Famolo		Coulibaly	LMBS		75033618
Tidiane	Kaba	Diakité	LPROGRES	66710118	76853460
Jean	A	Coulibaly	LNIAMA	66851677	
Aliou		Théra	LDEREKA	66926553	77987527

REGION DE KAYES

Bakary		Camara	LDKK		76111978
Fassama		Traoré	Kita	66954722	77643560

REGION DE KOULIKORO

Mahamadou		Coulibaly	LDDK	65563204	79178568
Sidiki		Fané	LMSK Kati		76101222
Mahamadou		Kanté	LDMD Dioïla		79118016
Ko		Dao	Fana		76161057

REGION DE SEGOU

Sory		Dembélé	LAKCC		76082076
Idrissa		Aguissa	LNIONO		76089772
Dramane		Bayo	LBLA		73190529
Mamoud		Diakité	LSAN	69588558	79135608

REGION DE SIKASSO

Toué		Diarrasouba	LMMS	63573029	76124032
Aly		Niambaly	LKFB Bougouni	66887641	75919855
Kouabé		Koïta	LKDK Koutiala	66606913	79132149
Moussa		Théra	Kolondièba	66547004	76261828

REGION DE MOPTI

Aly		Guindo	LHDS	62834979	76212302
-----	--	--------	------	----------	----------

REGION DE GAO

Ibrahima	A	Maïga	LYMG		79061879
----------	---	-------	------	--	----------

Grandeurs et unités

GRANDEUR		UNITE	
Nom		Nom	Symbole
Force		newton	N
Masse		kilogramme	kg
Intensité de courant		ampère	A
Tension électrique		volt	V
Puissance		watt	W
Longueur d'onde		mètre	m
Temps		seconde	s
Longueur		mètre	m
Vitesse		mètre par seconde	$m \cdot s^{-1}$
Energie		joule	J
Pression		pascal	Pa
Température		kelvin ou degré Celsius	K ou °C
Quantité de matière		mole	mol
Concentration molaire		mole par litre	$mol \cdot L^{-1}$

Multiples et sous-multiples

Facteur	10^9	10^6	10^3	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}
Préfixe	giga	méga	Kilo	centi	milli	micro	nano	pico	Femto
Symbole	G	M	k	c	m	μ	n	P	F

Constantes

Constante d'Avogadro	N_A	$6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	R	$8,314 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante gravitationnelle	G	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

Lettres grecques

Nom	alpha	bêta	delta	lambda	mu	nu	tau	phi	oméga
Minuscule	α	β	δ	λ	μ	ν	τ	φ	ω
Majuscule	A	B	Δ	Λ	M	N	T	Φ	Ω

S'instruire sans jamais s'estimer satisfait
Enseigner sans jamais se lasser

M. Zedong
Diadié Yacouba Danioko
Chercheur

Avant-propos

La refondation du système éducatif exige des manuels appropriés. Dans le contexte de l'APC, un programme est un ensemble intégré d'activités de formation qui vise le **développement des compétences**.

Les compétences se déclinent en composantes diverses qui permettent d'en cerner les différentes facettes. La composante décrit les aspects essentiels au développement de la compétence. Elle permet à l'enseignant et à l'apprenant de s'en donner une représentation concrète et de saisir les principaux éléments en jeu lors de son exercice.

Ce livre s'adresse à des élèves qui préparent le baccalauréat, et dont beaucoup continueront des études supérieures dans les filières scientifiques. Il est moderne et conforme aux nouveaux programmes des classes de **terminales sciences exactes T.S.E** et **terminales sciences expérimentales T.S.EXP**.

En écrivant ce livre j'ai souhaité réaliser un ouvrage clair et utile aux **Enseignants et aux Apprenants**. Je serais très heureux d'avoir atteint cet objectif.

David

Table des matières

MECANIQUE

Mouvement du centre d'inertie.....	7
Projectile dans le champ de pesanteur.....	16
Satellite terrestre.....	32
Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique.....	40
Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique.....	50

ENERGIE INTERNE

Calorimétrie	80
--------------------	----

INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE

Auto- induction.....	87
Transformateurs et alternateurs.....	117

VIBRATIONS

Les ondes progressives.....	122
Notions de mathématiques.....	128
Interférences mécaniques.....	131
Interférences lumineuses.....	150
Le rayonnement laser.....	165

OSCILLATIONS LIBRES

Le pendule élastique.....	168
Le pendule de torsion.....	192
Le pendule pesant.....	200
Le circuit oscillant.....	205
Les ondes électromagnétiques.....	219

OSCILLATIONS FORCEES

Oscillations mécaniques forcées.....	222
Oscillations électriques forcées.....	226

PHYSIQUE ONDULATOIRE ET CORPUSCULAIRE

Effet photoélectrique.....	262
Niveaux d'énergie dans les atomes.....	270
Les rayons X.....	277

PHYSIQUE ATOMIQUE ET NUCLEAIRE

Le noyau atomique.....	279
Les réactions nucléaires.....	282

CHIMIE ORGANIQUE

Stéréochimie.....	295
Les alcools.....	303
Les amines.....	315
Les acides carboxyliques et leurs dérivés.....	320
Les acides α - aminés.....	329

Le glucose.....	334
Les polymères synthétiques.....	337
CINETIQUE CHIMIQUE	
Vitesses des réactions chimiques.....	340
Mécanisme réactionnel – catalyse.....	365
EQUILIBRES CHIMIQUES	
Etude qualitative de l'équilibre.....	370
Etude quantitative de l'équilibre.....	374
ACIDES ET BASES EN SOLUTIONS AQUEUSES	
Les solutions de chlorures d'hydrogène et d'hydroxyde de sodium.....	392
Les couples acide-base.....	401
Les réactions acido-basiques.....	413

MÉCANIQUE

1 RAPPELS

Mouvement du centre d'inertie

1.1 Cinématique

1.1.1 Définition

La cinématique est l'étude du mouvement des corps en dehors des causes qui provoquent ce mouvement.

1.1.2 Généralités

• Point matériel

Un point matériel est un corps de dimensions assez petites pour être confondu à un point.

Exemple : une voiture est un point matériel par rapport à la longueur de son trajet.

• Trajectoire

La trajectoire est l'ensemble des positions successives occupées par le mobile.

Le mouvement est **rectiligne** si la trajectoire est une droite; il est **curviligne** si la trajectoire est une courbe. Il est **circulaire** si la trajectoire est un cercle.

• Equations horaires

La position d'un point M à un instant t, se définit dans un repère cartésien $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par le vecteur :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

x, y et z sont les coordonnées cartésiennes du vecteur \vec{OM} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Si le point est au repos, les coordonnées x, y et z sont indépendantes du temps.

Si le point est en mouvement, les coordonnées sont fonctions du temps et notées :

$$x(t), y(t), z(t).$$

Ces fonctions sont appelées **équations horaires** ou **équations paramétriques** du mouvement.

Si le mouvement se fait dans le plan (o, \vec{i}, \vec{j}) , on a : $z = 0$. Par contre si le mouvement s'effectue dans le plan (o, \vec{i}, \vec{k}) , $y = 0$.

• Vitesse et accélération

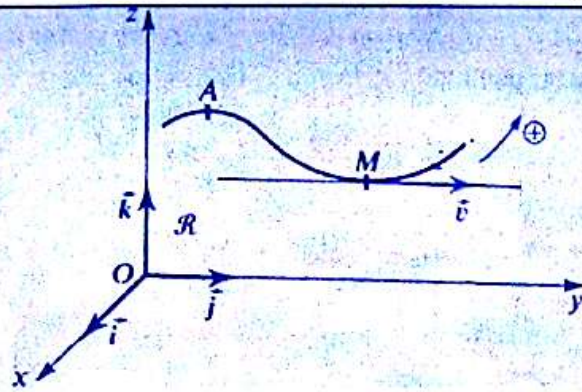
– Vitesse du mobile

Considérons un point mobile M en mouvement suivant l'axe ox. *La vitesse v est la dérivée de l'abscisse x par rapport au temps :*

$$v = \frac{dx}{dt}$$

L'unité de vitesse dans le système international est le mètre par seconde ($m \cdot s^{-1}$).

Le vecteur-vitesse est à chaque instant, porté par la tangente à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.



Vitesse \vec{v} du point M sur une trajectoire curviligne

- Accélération

L'accélération a est la dérivée de la vitesse v par rapport au temps :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

L'unité d'accélération dans le système international est le mètre par seconde au carré ($m \cdot s^{-2}$).

Remarque :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

L'accélération est la dérivée seconde de l'abscisse par rapport au temps :

$$a = \ddot{x}$$

1.1.3 Le mouvement rectiligne uniforme

• Définition

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniforme si sa trajectoire est une droite et sa vitesse est constante.

$$v = \text{Cte}$$

• Equation horaire

Dans un mouvement rectiligne uniforme, l'abscisse est une fonction linéaire du temps (fonction du premier degré du temps) :

$$x = vt + x_0$$

x_0 est l'abscisse du mobile à l'instant $t = 0$. On l'appelle abscisse initiale.

• Accélération

Par définition, l'accélération est :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Puisque

$$v = \text{Cte}, \quad \frac{dv}{dt} = 0$$

L'accélération d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniforme est nulle.

$$a = 0$$

1.1.4 Mouvement rectiligne uniformément varié

• Définition

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié si sa trajectoire est une droite et son accélération est constante.

$$a = \text{Cte}$$

• Equation horaire

Dans un mouvement rectiligne uniformément varié, l'abscisse est une fonction du second degré du temps :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

v_0 est la vitesse du mobile à la date $t = 0$. On l'appelle vitesse initiale.

• Vitesse

Par définition :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Puisque :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = at + v_0$$

$$v = at + v_0$$

• Relation liant espaces, vitesses et accélération

On a :

$$v = at + v_0 \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

En remplaçant t par sa valeur dans l'équation horaire on obtient :

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

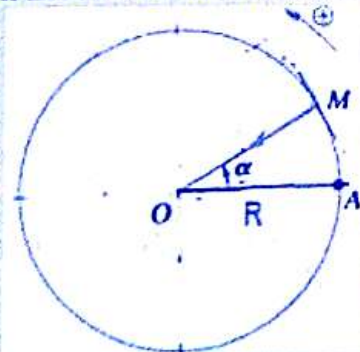
1.1.5 Mouvement circulaire uniforme

• Définition

Un mouvement est circulaire uniforme si sa trajectoire est un cercle et sa vitesse est constante.

• Vitesse linéaire et vitesse angulaire

Considérons un mobile en mouvement uniforme autour d'un cercle de rayon R .



Soit A la position du mobile à la date $t = 0$ et M sa position à une date $t \neq 0$. L'arc $s = AM$ est appelé **abscisse curviligne**. L'angle α des segments \overline{OA} et \overline{OM} est l'**abscisse angulaire**.

On appelle **vitesse linéaire** ou tout simplement **vitesse v** , la dérivée de l'abscisse

linéaire par rapport au temps :

$$v = \frac{ds}{dt}$$

L'unité de vitesse dans le système international est le mètre par seconde ($m \cdot s^{-1}$).

On appelle vitesse angulaire ω , la dérivée de l'abscisse angulaire par rapport au temps :

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

L'unité de vitesse angulaire dans le système international est le radian par seconde ($rad \cdot s^{-1}$). Par ailleurs, la mesure en radian de l'angle α est liée à l'abscisse curviligne s par la relation :

$$\alpha = \frac{s}{R}$$

Par conséquent : $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

• Période et fréquence

- **La période** est le temps T au bout duquel le mobile décrit un tour.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

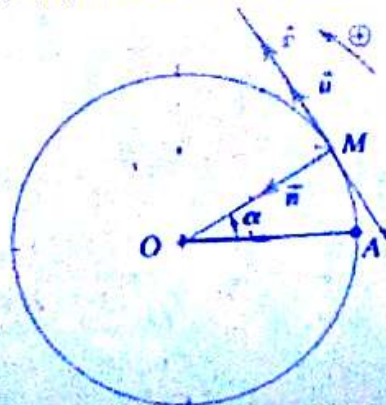
- **La fréquence** f représente le nombre de tours par unité de temps (la fréquence est l'inverse de la période).

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

La fréquence s'exprime en hertz quand la période est en seconde(s).

• Accélération

Soit \vec{u} le vecteur unitaire tangent en M à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement. Soit \vec{n} le vecteur unitaire orthogonal à \vec{u} et orienté vers le centre de la trajectoire. La base (\vec{u}, \vec{n}) associée au point M constitue la base de Frenet.



Dans la base de Frenet les coordonnées de l'accélération \vec{a} sont a_T et a_N tels que :

$$\vec{a} = a_T \vec{u} + a_N \vec{n}$$

a_T est l'accélération tangentielle :

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{car } v = \text{Cte}$$

a_N est l'accélération normale (ou accélération centripète) :

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

En conséquence : $a = a_N = \frac{v^2}{R}$

Le mouvement circulaire uniforme admet une accélération dirigée vers le centre de la trajectoire, appelée accélération normale ou centripète.

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

1.2 Dynamique

1.2.1 Définition

La dynamique est l'étude du mouvement des corps en tenant compte des causes qui provoquent ce mouvement.

1.2.2 Principe fondamental de la dynamique

Si un point matériel est soumis à une force \vec{F} , celle-ci lui communique une accélération \vec{a} de même direction et de même sens que la force et proportionnelle à cette force :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

m est la masse du corps

1.2.3 Relation fondamentale de la dynamique

Si un point matériel de masse m est soumis à l'action de plusieurs forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$, la somme de ces forces $\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$, lui communique une accélération \vec{a} telle que :

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

1.2.4 Repère galiléen

Un repère dans lequel s'applique la relation fondamentale est appelé repère galiléen.

Un repère lié à la terre, repère dit de laboratoire ou repère terrestre est galiléen si les expériences n'ont pas une trop grande durée.

1.2.5 Théorème du centre d'inertie

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces appliquées à un solide est égale au produit de sa masse m par le vecteur-accelération \vec{a}_G de son centre d'inertie G .

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_G$$

1.2.6 Principe de l'inertie

Dans un référentiel galiléen, le centre d'inertie d'un solide isolé (solide qui n'est soumis à aucune force extérieure) est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.

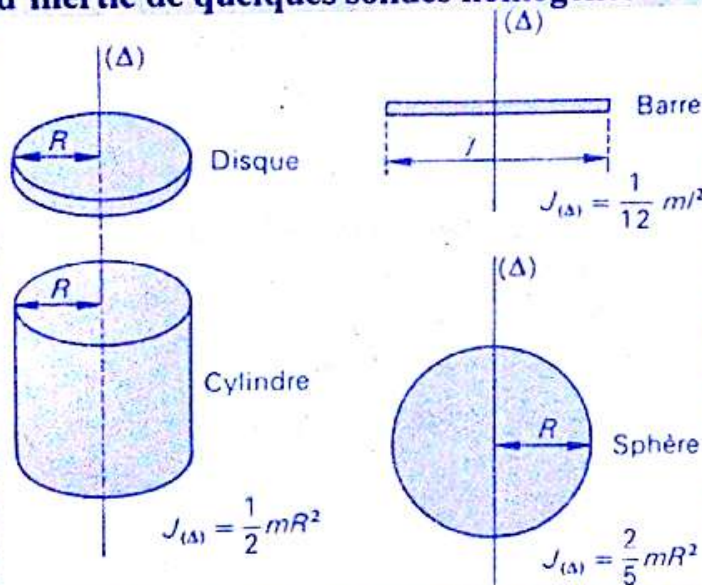
1.3 Dynamique du solide en rotation

1.3.1 Relation fondamentale

Quand un solide tourne autour d'un axe Δ , la somme algébrique des moments par rapport à cet axe de toutes les forces appliquées, est égale au produit du moment d'inertie J du solide par rapport au même axe, par l'accélération angulaire $\ddot{\alpha}$ du solide.

$$\Sigma M = J\ddot{\alpha}$$

1.3.2 Moments d'inertie de quelques solides homogènes



m est la masse du solide

R est le rayon du solide

$J_{(\Delta)}$ est le moment d'inertie du solide par rapport à un axe Δ passant par son centre d'inertie Δ .

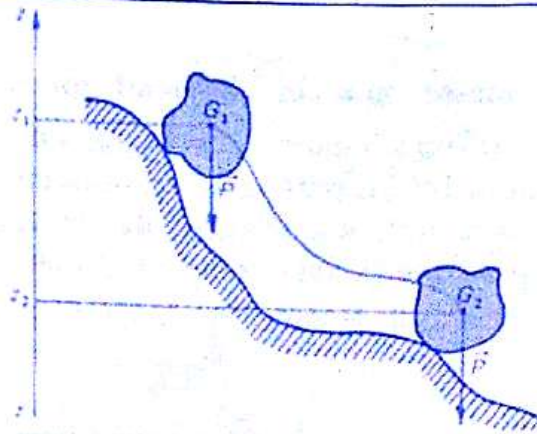
1.4 Energie

1.4.1 Travail du poids d'un corps

Le travail $W_{\vec{P}}$ du poids \vec{P} d'un solide de masse m lors d'un déplacement quelconque de son centre d'inertie de la position G_1 de cote z_1 à la position G_2 de cote z_2 , ne dépend pas du chemin suivi. Il ne dépend que de la différence d'altitude $h = |z_1 - z_2|$:

$$W_{\vec{P}} = \pm ph = \pm mgh$$

$$W_{\vec{P}} = \pm mgh$$



- si le solide monte, $W_{\vec{p}} = -mgh$
- si le solide descend, $W_{\vec{p}} = mgh$
- si le solide revient dans le plan horizontal de départ, $h = 0$ et $W_{\vec{p}} = 0$

1.4.2 Energie cinétique

• Définition

L'énergie cinétique E_c d'un point matériel à un instant est le demi-produit de sa masse m par le carré du module v de sa vitesse à cet instant.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

L'énergie cinétique est exprimée en joules (J) quand la masse est en kilogramme et la vitesse en mètre par seconde au carré ($m \cdot s^{-1}$).

• Energie cinétique d'un solide en rotation

L'énergie cinétique E_c d'un solide en rotation autour d'un axe est, à chaque instant le demi-produit de son moment d'inertie J par rapport au même axe par le carré de sa vitesse angulaire $\dot{\alpha}$.

$$E_c = \frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2$$

• Théorème de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique entre deux instants est égale à la somme algébrique des travaux des forces agissant sur ce système pendant le même intervalle de temps.

$$E_{cf} - E_{ci} = \sum W$$

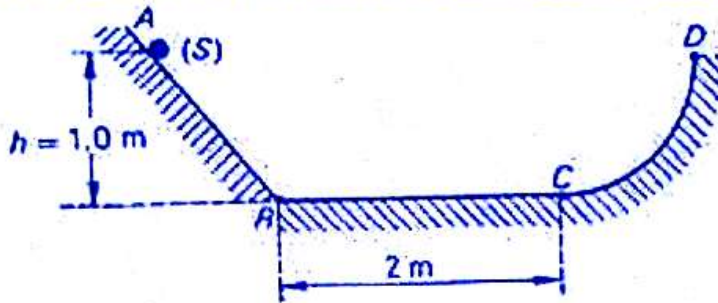
Autrement dit :

si \vec{v}_0 est la vitesse initiale et \vec{v} la vitesse finale, on a :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum W$$

Exercice résolu

Un solide ponctuel (S) de masse $m = 2\text{kg}$ descend un plan incliné poli (frottements négligeables) AB d'une hauteur $h = 1\text{m}$ en partant sans vitesse initiale. Arrivé au bas du plan incliné, il rencontre un plan rugueux horizontal BC de longueur 2m , où il est soumis à une force de frottement d'intensité constante $f = 6\text{N}$. En C, il monte une surface courbe CD polie.

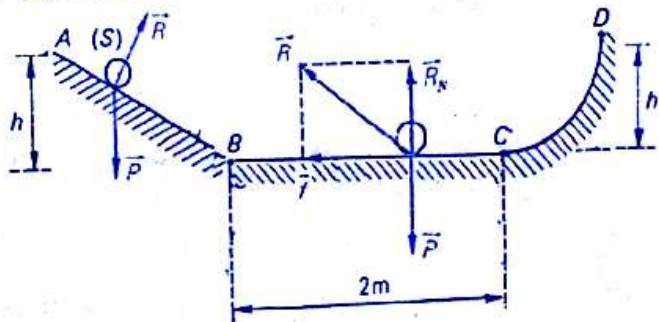


- 1° Quelles sont les vitesses de (S) en B et C ?
- 2° A Quelle hauteur (S) remonte-t-il sur la surface CD ?

$g = 9,81\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Réponses

1° Vitesses de (S) en B et C :



Vitesse en B :

Les forces appliquées à (S) sur le trajet AB sont : le poids \vec{P} et la réaction \vec{R} . La somme des travaux des forces appliquées est :

$$\sum W = W_{\vec{P}} + W_{\vec{R}}$$

En l'absence de frottement, la réaction est perpendiculaire au trajet AB. Le travail $W_{\vec{R}}$ de cette force est nul :

$$W_{\vec{R}} = 0 \Rightarrow \sum W = W_{\vec{P}} = mgh$$

D'autre part, l'énergie cinétique initiale est nulle (la vitesse initiale est nulle) :

$$E_{Ci} = 0$$

L'énergie cinétique finale (énergie cinétique au point B) est :

$$E_{Cf} = \frac{1}{2}mv_B^2$$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A et B :

$$E_{Cf} - E_{Ci} = \sum W$$

soit :
$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh$$

D'où :
$$v_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 1} = 4,43 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_B = 4,43 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Vitesse en C :

En présence de frottements, la réaction \vec{R} n'est plus perpendiculaire au trajet. Elle a deux composantes rectangulaires : la composante normale \vec{R}_N et une composante tangentielle qui est la force de frottement \vec{f} .

La somme des travaux des forces appliquées est :

$$\sum W = W_{\vec{P}} + W_{\vec{R}_N} + W_{\vec{f}}$$

Par ailleurs, poids \vec{P} et \vec{R}_N sont perpendiculaires au déplacement BC. Les travaux de ces forces sont nuls ($W_{\vec{P}} = W_{\vec{R}_N} = 0$).

En conséquence :
$$\sum W = W_{\vec{f}} = -f \cdot BC$$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les points B et C :

$$E_{Cf} - E_{Ci} = \sum W$$

soit :
$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -f \cdot BC$$

ou encore :
$$\frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 - f \cdot BC$$

D'où :
$$v_C = \sqrt{v_B^2 - \frac{2f \cdot BC}{m}}$$

AN :
$$v_C = \sqrt{(4,43)^2 - \frac{2 \times 6 \times 2}{2}} = 2,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_C = 2,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2° Les frottements sont de nouveau négligeables. Le travail de la réaction est donc nul ($W_{\vec{R}} = 0$). En conséquence :

$$\sum W = W_{\vec{P}} = -mgh'$$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur le trajet C et D (l'énergie cinétique finale est nulle car la vitesse finale est nulle) :

$$E_{Cf} - E_{Ci} = \sum W$$

soit :
$$0 - \frac{1}{2}mv_C^2 = -mgh'$$

D'où :
$$h' = \frac{v_C^2}{2g} = \frac{(2,76)^2}{2 \times 9,81} = 0,38 \text{ m}$$

2 PROJECTILE

DANS LE CHAMP DE PESANTEUR

2.1 Equation de la trajectoire

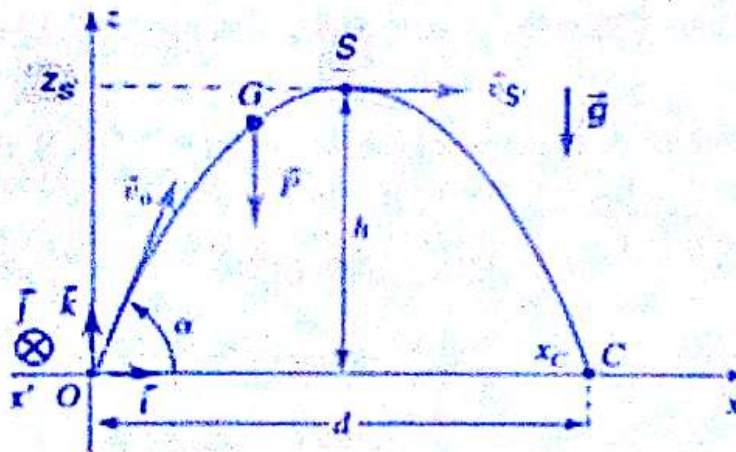
2.1.1 Les équations paramétriques

Considérons un solide de masse m , lancé à partir d'un point O avec une vitesse \vec{v}_0 faisant un angle α avec l'horizontale. Il constitue ainsi un projectile.

Étudions son mouvement dans un repère terrestre $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ supposé galiléen.

L'axe (o, \vec{k}) est vertical et ascendant. Le plan xoz contient le vecteur \vec{v}_0 .

L'origine des dates sera l'instant du lancement.



En négligeant la résistance de l'air, la seule force qui s'exerce sur le projectile en son centre d'inertie G , est le poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

Écrivons la relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{P} = m\vec{a}$$

Soit : $m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

Les coordonnées du vecteur-accélération \vec{a} sont :

$$\vec{a} \begin{pmatrix} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de la vitesse initiale \vec{v}_0 sont :

$$\vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Projetons le mouvement du centre d'inertie suivant les axes de coordonnées :

– suivant ox , l'accélération est nulle ($a_x = 0$); la vitesse initiale est $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$.

Le mouvement est donc rectiligne et uniforme d'équation horaire :

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \quad (1)$$

– suivant oy , l'accélération est nulle ($a_y = 0$); la vitesse initiale est nulle ($v_{0y} = 0$).

Il n'y a donc pas de mouvement suivant cet axe :

$$y = 0 \quad (2)$$

– suivant oz , l'accélération est $a_z = -g$. La vitesse initiale est $v_{0z} = v_0 \sin \alpha$. Le mouvement est rectiligne et uniformément varié d'équation horaire :

$$z = a_z t^2 + v_{0z} t = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin \alpha)t \quad (3)$$

Les équations horaires du mouvement encore appelées équations paramétriques sont donc :

$$\begin{aligned} x &= (v_0 \cos \alpha)t \\ y &= 0 \\ z &= -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin \alpha)t \end{aligned}$$

2.1.2 Equation de la trajectoire

En éliminant le temps t entre les équations (1) et (3) on obtient l'équation de la trajectoire :

$$z = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha$$

L'équation de la trajectoire est une fonction du second degré en x . La trajectoire est donc parabolique.

En utilisant la formule trigonométrique $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$, l'équation de la

trajectoire devient :

$$z = -\frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) x^2 + x \tan \alpha$$

2.2 Etude de la trajectoire

2.2.1 La portée

La portée est la distance d séparant le point de lancement O au point de chute C ($d = OC = x_c$). Sa valeur est obtenue en annulant l'équation de la trajectoire.

Soit :

$$x_c \left(-\frac{1}{2} g \frac{x_c}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \right) = 0$$

$x_c \neq 0$. Donc :

$$-\frac{1}{2} g \frac{x_c}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0$$

soit :
$$\frac{1}{2}g \frac{x_c}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow x_c = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

D'autre part :
$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha \Rightarrow x_c = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

La portée est maximale si : $\sin 2\alpha = 1$

Soit :
$$2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ \left(\text{ou } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \right)$$

2.2.2 La flèche

La flèche est l'altitude maximale h atteinte par le projectile. Elle correspond à la cote z_s du sommet S de la trajectoire ($h = z_s$). L'abscisse du sommet est :

$$x_s = \frac{d}{2} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

La cote du sommet est :
$$z_s = -\frac{1}{2}g \frac{x_s^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x_s \tan \alpha$$

soit :
$$z_s = -\frac{1}{2}g \frac{v_0^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

La flèche est maximale si $\sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$: c'est le cas d'un tir vertical.

2.3 Vitesse instantanée du projectile

La vitesse du projectile est à chaque instant donnée par la relation :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$x = (v_0 \cos \alpha)t \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha$

$y = 0 \Rightarrow v_y = \frac{dy}{dt} = 0$

$z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t \Rightarrow v_z = \frac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha$

Par conséquent :
$$v = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (-gt + v_0 \sin \alpha)^2}$$

NB : Au sommet S de la trajectoire, la vitesse se confond avec sa composante horizontale (au sommet $v_y = v_z = 0$) $\Rightarrow v_s = v_x = v_0 \cos \alpha$

$$v_s = v_0 \cos \alpha$$

1_ Frappe d'un golfeur

Un golfeur frappe une balle avec une vitesse initiale \vec{v}_0 faisant un angle $\alpha = 40^\circ$ avec l'horizontale. La balle part de o et le vecteur \vec{v}_0 est contenu dans le plan (o, \vec{i}, \vec{j}) . La norme de la vitesse initiale est $v_0 = 144 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

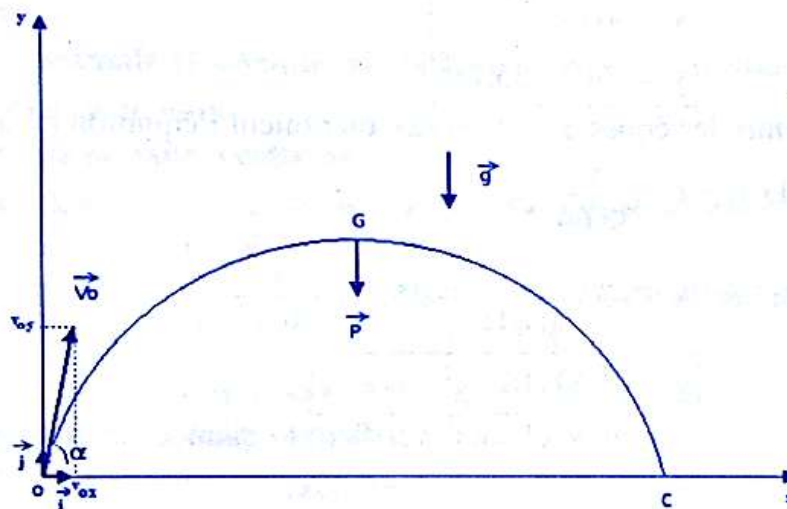
1° Etablir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ de la balle; en déduire l'équation de la trajectoire.

2° A quelle distance du point o la balle retombe t- elle ?

Prendre : $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Solution

1° Les équations horaires :



La seule force qui s'exerce sur la balle en son centre d'inertie G, est son poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

La relation fondamentale de la dynamique, appliquée à la balle s'écrit :

$$\vec{P} = m\vec{a}$$

soit : $m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

Dans le repère cartésien (o, \vec{i}, \vec{j}) les coordonnées de l'accélération \vec{a} sont :

$$\vec{a} \begin{pmatrix} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = -g \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de la vitesse initiale sont :

$$\vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

En projetant le mouvement de la balle sur les axes de coordonnées, on obtient :

– suivant l'axe ox : ($a_x = 0$ et $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$) Le mouvement est donc rectiligne uniforme d'équation horaire :

$$x = (v_0 \cos \alpha)t$$

$$v_0 = 144 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}. \text{ En unité SI : } v_0 = \frac{144000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{En conséquence : } x = (40 \cos 40^\circ)t = 30,64t \quad (1)$$

– suivant l'axe oy : ($a_y = -g$ et $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$) Le mouvement est rectiligne uniformément varié d'équation horaire :

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t$$

$$\text{soit : } y = -\frac{1}{2} \times 10t^2 + (40 \sin 40)t = -5t^2 + 25,71t \quad (2)$$

Les équations horaires du mouvement sont donc :

$$\begin{cases} x = 30,64t \\ y = -5t^2 + 25,71t \end{cases}$$

En éliminant t entre les équations (1) et (2), on obtient l'équation de la trajectoire :

$$(1) \Rightarrow t = \frac{x}{30,64}$$

$$(2) \Rightarrow y = -5 \frac{x^2}{(30,64)^2} + 25,71 \times \frac{x}{30,64}$$

soit :

$$y = -5,32 \cdot 10^{-3} x^2 + 0,83x$$

2° Les coordonnées du point de chute C vérifient l'équation de la trajectoire :

$$y_C = -5,32 \cdot 10^{-3} x_C^2 + 0,83x_C$$

$$y_C = 0 \Rightarrow -5,32 \cdot 10^{-3} x_C^2 + 0,83x_C = 0$$

$$\text{soit : } x_C(-5,32 \cdot 10^{-3} x_C + 0,83) = 0$$

$$x_C \neq 0. \text{ Donc : } -5,32 \cdot 10^{-3} x_C + 0,83 = 0$$

$$\text{D'où : } x_C = \frac{0,83}{5,32 \cdot 10^{-3}} = 156 \text{ m}$$

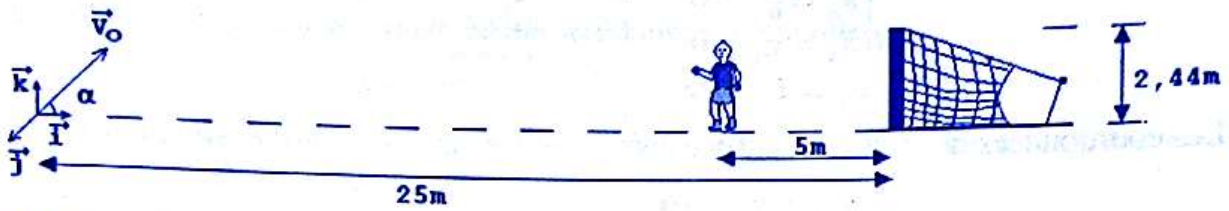
$$x_C = 156 \text{ m}$$

Remarque : la formule de la portée donne directement : $x_c = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

2_ Trajectoire d'un ballon de football

Le Stade Malien de Bamako a remporté la coupe CAF en 2009 face à l'Entente de Sétif d'Algérie. Lors de la finale retour disputée au Stade omnisport Modibo KEITA, le joueur Baco COULIBALY reçoit une balle au sol, dans l'axe des buts de l'Entente de Sétif, à 25 m de la ligne de but alors que le Gardien Saïb de l'Entente était sorti à 5m de sa cage. D'une frappe rapide du pied, il communique à la balle une vitesse \vec{v}_0 dans le plan (o, \vec{i}, \vec{k})

inclinée d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale et de valeur $v_0 = 18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. L'influence de l'air est négligeable.



1° Déterminer les équations paramétriques de la balle dans le repère cartésien $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2° Montrer que le mouvement de la balle se situe dans un plan et trouver l'équation de sa trajectoire.

3° Déterminer :

a) la hauteur maximale H atteinte par la balle ainsi que le temps t_1 que met la balle pour arriver à ce point.

b) la vitesse v_1 de la balle à cette hauteur.

4° La hauteur des buts est 2,44 m. Le Gardien peut toucher de la main en sautant, une balle située au plus à 3 m du sol.

a) Calculer le temps t_2 mis par la balle pour arriver au niveau du Gardien.

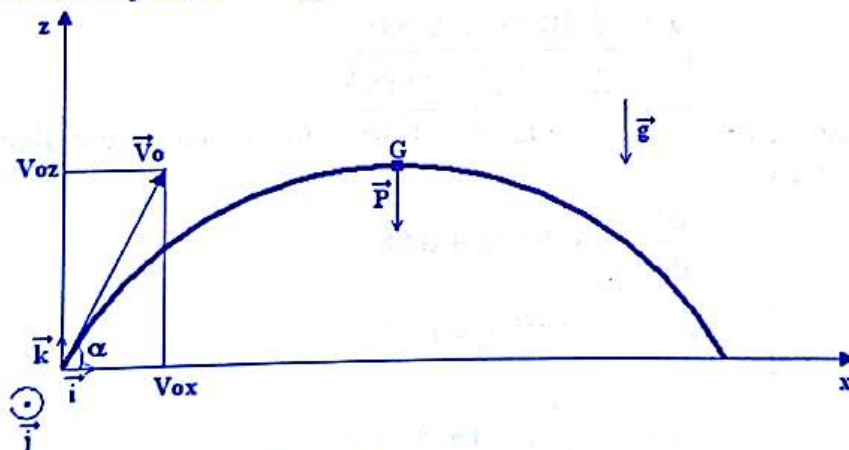
b) Quelle est la vitesse v_2 de la balle à cet instant ?

c) Le Gardien peut-il oui ou non toucher la balle ? (justifier votre réponse). Si non dire si la balle entre dans les buts.

Prendre $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Solution

1° Le ballon, de masse m , constitue à lui seul le système mécanique étudié. Si l'on néglige la résistance de l'air au mouvement, le système n'est soumis qu'à une seule force extérieure : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$.



Relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{P} = m\vec{a}$$

soit :

$$m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Les coordonnées de l'accélération dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont :

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{cases}$$

Les coordonnées de la vitesse initiale sont :

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

Par projection du mouvement suivant les axes, on obtient :

– suivant ox : $x = (v_0 \cos \alpha)t = 15,58t$ (1)

– suivant oy : $y = 0$ (2)

– suivant oz : $z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t = -5t^2 + 9t$ (3)

$$\begin{cases} x = 15,58t \\ y = 0 \\ z = -5t^2 + 9t \end{cases}$$

2° Puisque $y = 0$, le mouvement s'effectue dans le plan xoz.

En éliminant t entre les relations (1) et (3), on obtient l'équation de la trajectoire :

(1) $\Rightarrow t = \frac{x}{15,48}$ (1)'

Compte tenu de (1)' l'équation (3) s'écrit:

$$z = \frac{-5x^2}{(15,58)^2} + 9 \frac{x}{15,48}$$

soit :

$$\begin{cases} z = -2 \cdot 10^{-2} x^2 + 0,58x \\ z = -2 \cdot 10^{-2} x^2 + 0,58x \end{cases}$$

3° a) L'abscisse x_s du sommet de la trajectoire est obtenue en annulant la dérivée de z par rapport à x .

$$\frac{dz}{dx} = -4 \cdot 10^{-2} x + 0,58$$

Lorsque $x = x_s$, $\frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow -4 \cdot 10^{-2} x_s + 0,58 = 0$

D'où : $x_s = \frac{0,58}{4 \cdot 10^{-2}} = 14,50\text{m}$

La hauteur maximale H est la cote z_s du sommet.

Par conséquent : $z_s = -2 \cdot 10^{-2} x_s^2 + 0,58 x_s$

soit: $z_s = -2 \cdot 10^{-2} \times (14,50)^2 + 0,58 \times 14,50 = 4,20\text{m}$

$H = 4,20\text{m}$

La vitesse de la balle à chaque instant est donnée par la relation :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$$

Au sommet de la trajectoire, la vitesse se confond avec sa composante horizontale :

$$v_1 = v_x$$

Donc : $v_z = 0$

or : $v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(-5t^2 + 9t) = -10t + 9$

A la date t_1 , $v_z = 0 \Rightarrow -10t_1 + 9 = 0$

D'où : $t_1 = \frac{9}{10} = 0,9\text{s}$

$t_1 = 0,9\text{s}$

b) Nous avons : $v_1 = v_x$

or : $v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(15,58t) = 15,58\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$v_1 = 15,58\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

4° a) Le Gardien se trouve à l'abscisse $x = 20\text{m}$.

Par ailleurs : $x = 15,58t \Rightarrow 20 = 15,58t_2$

D'où: $t_2 = \frac{20}{15,88} = 1,28\text{s}$

$t_2 = 1,28\text{s}$

b) Les coordonnées de la vitesse \vec{v}_2 sont : v_{2x} et v_{2z} .

$$v_{2x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(15,58t) = 15,58\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{2z} = \frac{dz}{dt} = -10t_2 + 9$$

Soit : $v_{2z} = -10 \times 1,29 + 9 = -3,9\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

La norme de \vec{v}_2 est : $v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2z}^2}$

Soit : $v_2 = \sqrt{(15,58)^2 + (-3,9)^2} = 16,06\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$v_2 = 16,06\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

c) L'altitude h de la balle au niveau du Gardien est la cote $z(20)$ lorsque $x = 20\text{m}$.

Donc: $h = z(20) = -2 \cdot 10^{-2} \times (20)^2 + 0,58 \times 20 = 3,6\text{m}$

Puisque: $h > 3$, le Gardien ne peut pas toucher la balle (le Gardien a été lobé).

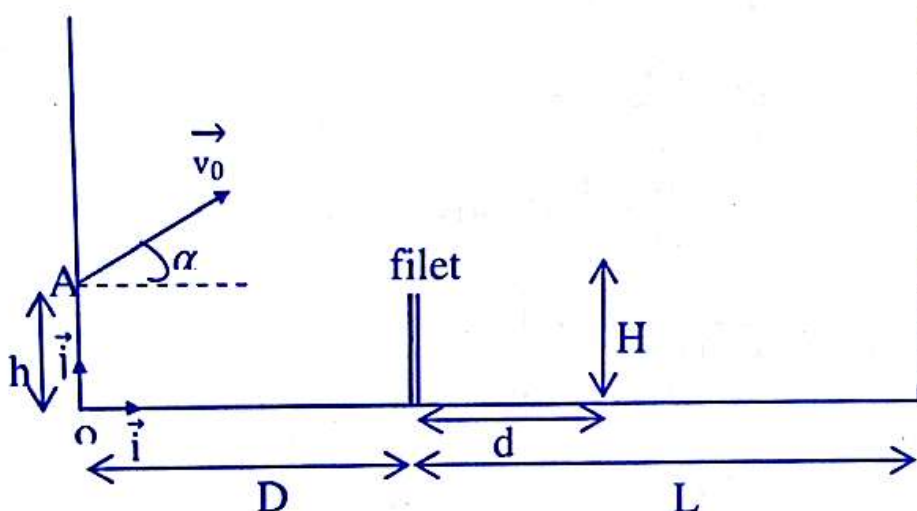
Pour que la balle entre dans les buts, il faut que son altitude h' au niveau de la ligne des buts soit inférieure à 2,44m (la ligne des buts a pour abscisse $x = 25\text{m}$).

$$h' = z(25) = -2 \cdot 10^{-2} \times (25)^2 + 0,58 \times 25 = 2\text{m}$$

$h' < 2,44\text{m}$. Donc la balle entre dans les buts.

3_ Tentative de lobe en tennis

Un joueur de tennis tente de loper son adversaire situé à une distance $d = 2\text{m}$ derrière le filet. Il frappe la balle en A, à la distance $D = 9\text{m}$ du filet et à la hauteur $h = 0,50\text{m}$ au dessus du sol. La balle part avec vitesse initiale \vec{v}_0 inclinée d'un angle $\alpha = 60^\circ$ par rapport à l'horizontale. La norme de la vitesse initiale est $v_0 = 12\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.



1° Etablir l'équation de la trajectoire de la balle dans le repère (o, \vec{i}, \vec{j}) .

2° La ligne de fond est à la distance $L = 12\text{m}$ du filet et l'adversaire peut, en sautant avec sa raquette à bout de bras, atteindre une hauteur maximale $H = 2,5\text{m}$.

a) Montrer que l'adversaire ne peut pas intercepter la balle.

b) Dire si la balle va retomber dans la surface de jeu.

Prendre : $g = 9,8\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Solution

1° Equation de la trajectoire :

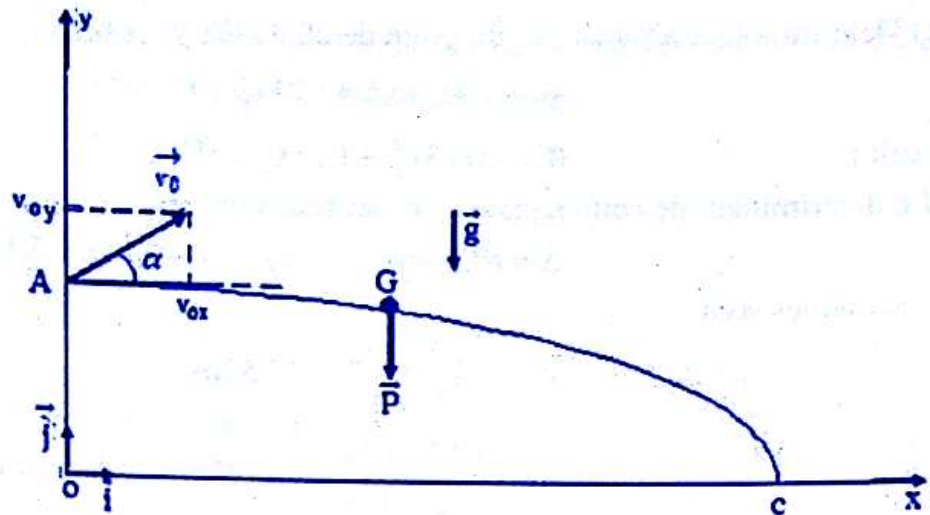
Relation fondamentale de la dynamique :

$$m\vec{g} = m\vec{a}$$

D'où :

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$\vec{a} \begin{pmatrix} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = -g \end{pmatrix}$$



Les coordonnées de la vitesse initiale sont :

$$\vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

La position initiale de la balle ne coïncide pas avec l'origine O du repère. Cette position initiale est déterminée par un vecteur \vec{OA} de coordonnées :

$$\vec{OA} \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

En projetant le mouvement de la balle sur les axes de coordonnées, on obtient :

– suivant l'axe ox : ($a_x = 0$ et $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$) Le mouvement est rectiligne uniforme d'équation horaire :

$$x = v_0 \cos \alpha \quad (1)$$

– suivant l'axe oy : ($a_y = -g$ et $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$) Le mouvement est rectiligne et uniformément varié d'équation horaire (on tient compte de la position initiale d'altitude h) :

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t + h \quad (2)$$

L'équation (2) s'écrit, en éliminant t à partir de (1) ;

$$y = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha + h$$

AN :

$$y = -\frac{9,8x^2}{2 \times (12)^2 \times 0,25} + 1,73x + 0,5$$

$$y = -0,13x^2 + 1,73x + 0,5$$

2° a) Déterminons la hauteur de la balle au niveau de l'adversaire d'abscisse

$x = D + d = 11\text{m}$: $y = -0,13 \times (11)^2 + 1,73 \times 11 + 0,5 = 3,8\text{m}$

$y > H$ Donc l'adversaire ne peut pas intercepter la balle.

b) Déterminons l'abscisse x_C du point de chute C ($y_C = 0$)

$$y_C = -0,13x_C^2 + 1,73x_C + 0,5$$

soit : $0 = -0,13x_C^2 + 1,73x_C + 0,5$

Le discriminant de cette équation du second degré est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1,73)^2 + 4 \times 0,13 \times 0,50 = (1,8)^2$$

Les racines sont :

$$x_1 = \frac{-1,73 - 1,8}{-2 \times 0,13} = 13,57 \text{ m}$$

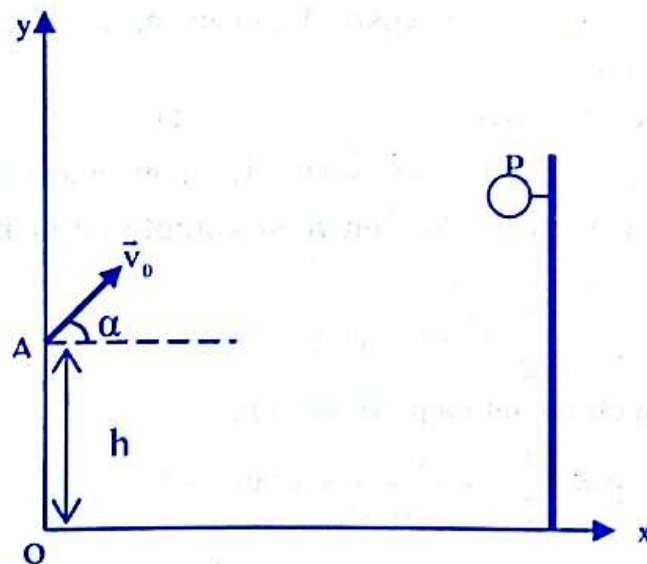
$$x_2 = \frac{-1,73 + 1,8}{-2 \times 0,13} = -0,26 \text{ m (à rejeter)}. \text{ Donc } x_C = 13,57 \text{ m.}$$

La ligne de fond est à l'abscisse $x = D + L = 9 + 12 = 21 \text{ m}$

$x < 21 \text{ m}$. Donc la balle retombe dans l'aire de jeu.

4_ La balle au panier

Un joueur désire réussir un panier en basket-ball. Il lance la balle à partir d'un point A situé au dessus du sol horizontal d'une distance $h = 1,7 \text{ m}$. On assimile le panier P à un cerceau de coordonnées $x_p = 10 \text{ m}$ et $y_p = 3,5 \text{ m}$. La vitesse initiale \vec{v}_0 de la balle est dans le plan (ox, oy) et fait avec l'horizontale un angle $\alpha = 60^\circ$.



1° Etablir les équations paramétriques de la balle.

2° Déterminer l'équation de la trajectoire en fonction de g , v_0 , α et h .

3° Avec quelle vitesse la balle doit être lancée pour que le panier soit réussi ?

On donne : $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Solution

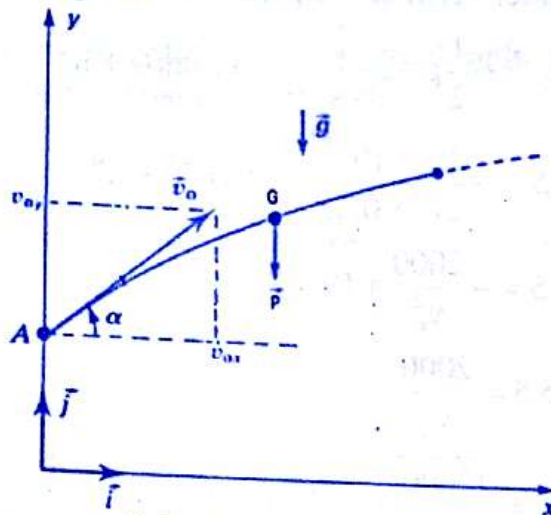
1° Les équations paramétriques du mouvement :

A l'absence de frottements, la seule force qui s'exerce sur la balle est le poids $\vec{P} = m\vec{g}$. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{g} = m\vec{a}$$

D'où :

$$\vec{g} = \vec{a}$$



Dans le repère cartésien (o, \vec{i}, \vec{j}) les coordonnées de l'accélération \vec{a} sont :

$$\vec{a} \begin{pmatrix} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = -g \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de la vitesse initiale sont :

$$\vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

En projetant le mouvement de la balle sur les axes de coordonnées, on obtient :

- suivant l'axe ox : ($a_x = 0$ et $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$) Nous avons un mouvement rectiligne uniforme d'équation horaire :

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \quad (1)$$

- suivant l'axe oy : ($a_y = -g$ et $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$) Nous avons un mouvement rectiligne et uniformément varié. Compte tenu de la position initiale de la balle au dessus de l'origine o , l'équation horaire suivant l'axe oy est :

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t + h \quad (2)$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = (v_0 \cos \alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t + h \end{matrix}}$$

2° En éliminant t entre les équations (1) et (2), on obtient l'équation de la trajectoire :

De (1) on obtient : $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad (3)$

Compte tenu de (3), la relation (2) donne :

$$y = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha + h$$

3° Les coordonnées du panier vérifient l'équation de la trajectoire :

$$y_p = -\frac{1}{2}g \frac{x_p^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x_p \tan \alpha + h$$

AN :

$$3,5 = -\frac{10 \times (10)^2}{2v_0^2 \times 0,25} + 10 \times 1,73 + 1,7$$

soit :

$$3,5 = -\frac{2000}{v_0^2} + 19$$

Par la suite :

$$15,5 = \frac{2000}{v_0^2}$$

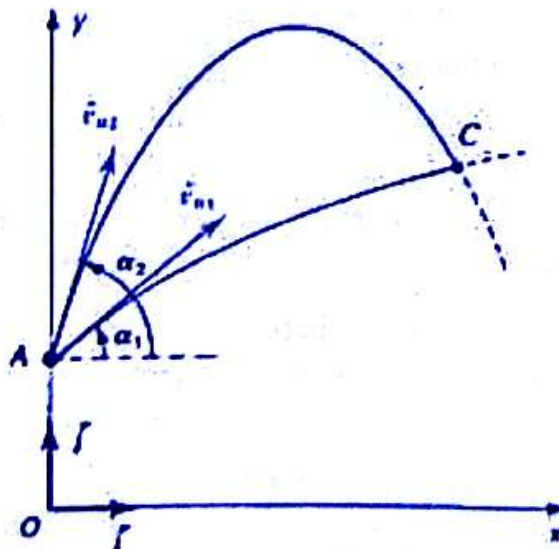
D'où :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2000}{15,5}} = 11,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_0 = 11,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

5_ Tir tendu et tir en cloche

Un garçon lance une pierre vers une cible C de coordonnées $x_C = 25\text{m}$ et $y_C = 5\text{m}$. La pierre part d'un point A de coordonnées $x_A = 0$ et $y_A = 1,65\text{m}$, avec une vitesse \vec{v}_0 faisant un angle α avec l'horizontale.



1° Etablir l'expression littérale de l'équation de la trajectoire en fonction de $\tan \alpha$.

Application numérique : $v_0 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2° Il existe deux angles de tir α_1 et α_2 qui permettent d'atteindre B (tir tendu et tir en cloche).

a) Calculer α_1 et α_2 .

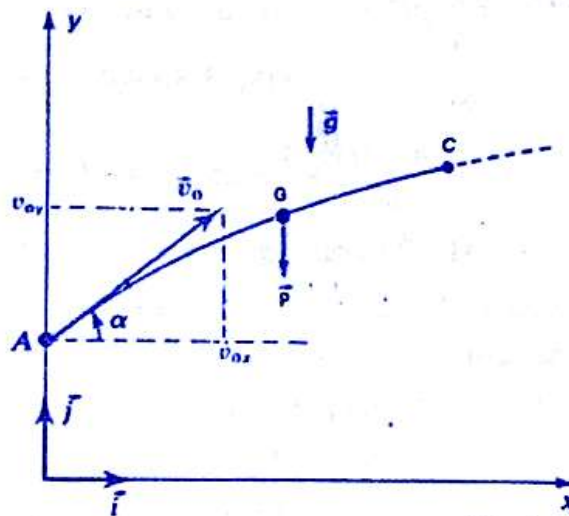
b) En envisageant les deux cas précédents, déterminer la hauteur maximale atteinte.

3° On considère que la pierre est lancée sous l'angle α_2 . Déterminer la norme et la direction du vecteur -vitesse au point B.

Prendre : $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Solution

1° En négligeant la résistance de l'air, la seule force qui s'exerce sur la pierre est le poids $\vec{P} = m\vec{g}$



La relation fondamentale de la dynamique permet d'écrire :

$$m\vec{g} = m\vec{a}$$

Donc :

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Les coordonnées de l'accélération \vec{a} sont :

$$\vec{a} \begin{pmatrix} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = -g \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de la vitesse initiale sont :

$$\vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Par projection du mouvement suivant les axes de coordonnées, on obtient :

suitant ox : $x = (v_0 \cos \alpha)t$ (1)

suitant oy : $y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t + y_A$ (2)

L'équation (2) s'écrit, en éliminant t à partir de (1) ;

$$y = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha + y_A$$

or : , $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$

Donc : $y = -\frac{g}{2v_0^2}(1 + \tan^2 \alpha)x^2 + x \tan \alpha + y_A$

Numériquement : $y = \frac{-10(1 + \tan^2 \alpha)x^2}{2 \times 400} + x \tan \alpha + 1,65$

$$y = -\frac{1}{80}(1 + \tan^2 \alpha)x^2 + x \tan \alpha + 1,65$$

2° a) Les coordonnées de C vérifient l'équation de la trajectoire, donc :

$$y_C = -\frac{1}{80}(1 + \tan^2 \alpha)x_C^2 + x_C \tan \alpha + 1,65$$

soit : $5 = -\frac{(1 + \tan^2 \alpha)625}{80} + 25 \tan \alpha + 1,65$

ou : $5 = -7,81 - 7,81 \tan^2 \alpha + 25 \tan \alpha + 1,65$

Par la suite: $7,81 \tan^2 \alpha - 25 \tan \alpha + 11,16 = 0$

En posant $X = \tan \alpha$, on obtient :

$$7,81X^2 - 25X + 11,16 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré est :

$$\Delta = (25)^2 - 4 \times 7,81 \times 11,16 = (16,62)^2$$

Les racines sont : $X_1 = \frac{25 - 16,62}{2 \times 7,81} = 0,5364$

$$X_2 = \frac{25 + 16,62}{2 \times 7,81} = 2,6600$$

Par conséquent: $\tan \alpha_1 = 0,5364 \Rightarrow \alpha_1 = 28,21^\circ$

$$\tan \alpha_2 = 2,6600 \Rightarrow \alpha_2 = 69,42^\circ$$

$$\alpha_1 = 28,21^\circ$$

$$\alpha_2 = 69,42^\circ$$

b) La hauteur maximale h est l'ordonnée du sommet de la trajectoire. En utilisant l'expression de la flèche, nous obtenons :

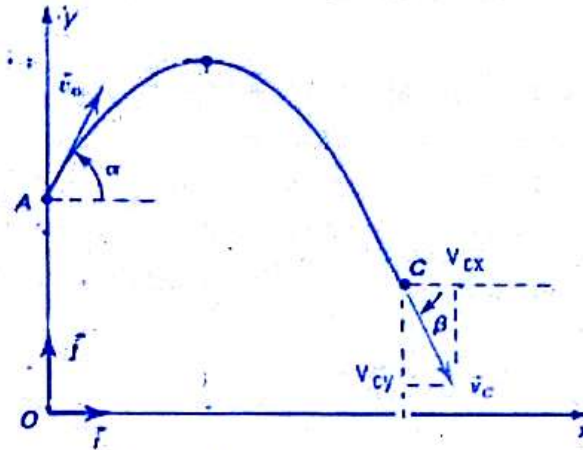
$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + y_A$$

Pour $\alpha = \alpha_1$, on a : $h_1 = \frac{(20)^2 \sin^2 28,21^\circ}{2 \times 10} + 1,65 = 6,12\text{m}$

Pour $\alpha = \alpha_2$, on a :
$$h_2 = \frac{(20)^2 \sin^2 69,42^\circ}{2 \times 10} + 1,65 = 19,18\text{m}$$

$h_1 = 6,12\text{m}$ $h_2 = 19,18\text{m}$
--

3° Les coordonnées du vecteur -vitesse \vec{v}_C sont v_{Cx} et v_{Cy} telles que :



$$v_{Cx} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 \cos \alpha_2)t = v_0 \cos \alpha_2$$

soit :
$$v_{Cx} = v_0 \cos \alpha_2 = 20 \cos 69,42^\circ = 7\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Par contre:
$$v_{Cy} = \frac{dy}{dt} = -gt + V_0 \sin \alpha_2$$

D'autre part :
$$x_C = (v_0 \cos \alpha_2)t$$

On en déduit:
$$t = \frac{x_C}{v_0 \cos \alpha_2} = \frac{25}{20 \times 0,35} = 3,57\text{s}$$

Donc:
$$v_{Cy} = -10 \times 3,57 + 20 \times \sin 69,42^\circ = -16,97\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Par ailleurs :
$$v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2}$$

soit :
$$v_C = \sqrt{49 + (-16,97)^2} = 18,36\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Le vecteur \vec{v}_C fait avec l'horizontale l'angle β tel que :

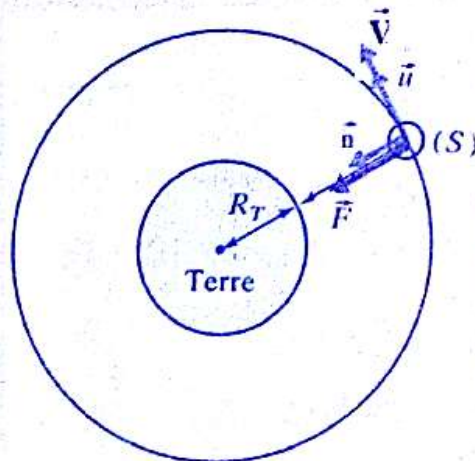
$$\tan \beta = \frac{v_{Cy}}{v_{Cx}} = \frac{-16,97}{7} = -2,424 \Rightarrow \beta = -67,58^\circ$$

$\beta = -67,58^\circ$ $v_C = 18,36\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
--

3 | SATELLITE TERRESTRE

3.1 Vitesse linéaire

La terre est considérée comme une sphère homogène de masse M_T et de rayon R_T . Un satellite (S), de masse M lancé à une altitude h avec une vitesse \vec{v} , tourne autour de la terre en mouvement circulaire. On choisit le référentiel géocentrique supposé galiléen et la base (\vec{u}, \vec{n}) associée à S. Le vecteur unitaire \vec{u} est tangent à la trajectoire et dirigé dans le sens du mouvement. Le vecteur unitaire \vec{n} est orthogonal à \vec{u} et dirigé vers le centre de la terre.



En dehors de l'atmosphère, la seule force qui s'exerce sur le satellite est la force d'attraction gravitationnelle \vec{F} :

$$\vec{F} = G \frac{M \cdot M_T}{(R_T + h)^2} \vec{n}$$

G est la constante de gravitation.

La relation fondamentale de la dynamique donne :

$$\vec{F} = M\vec{a}$$

soit :

$$G \frac{M \cdot M_T}{(R_T + h)^2} \vec{n} = M\vec{a}$$

Dans la base de Frenet (\vec{u}, \vec{n}) , les coordonnées du vecteur -accélération sont:

$$\vec{a} \begin{pmatrix} a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \\ a_N = \frac{v^2}{R_T + h} \end{pmatrix}$$

En conséquence :

$$G \frac{M \cdot M_T}{(R_T + h)^2} = M a_N = M \frac{v^2}{R_T + h}$$

D'où :

$$\frac{GM_T}{(R_T + h)^2} = \frac{v^2}{R_T + h}$$

Le champ de gravitation à l'altitude h est :

$$g = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}$$

Donc :

$$g = \frac{v^2}{R_T + h}$$

Ou encore :

$$v^2 = g(R_T + h)$$

Par ailleurs, la valeur du champ de gravitation au niveau du sol est :

$$g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

Ainsi :

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} \Rightarrow g = g_0 \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

Par conséquent :

$$v^2 = g_0 \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} \times (R_T + h)$$

soit :

$$v^2 = g_0 \frac{R_T^2}{R_T + h}$$

D'où :

$$v = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T + h}} = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}}$$

$$v = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}}$$

3.2 Vitesse angulaire

Le rayon de l'orbite du satellite est $R = R_T + h$. La vitesse angulaire ω du satellite est :

$$\omega = \frac{v}{R_T + h}$$

Soit :

$$\omega = \frac{R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}}}{R_T + h} = \frac{R_T}{R_T + h} \sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}} = R_T \sqrt{\frac{g_0}{(R_T + h)^3}}$$

$$\omega = R_T \sqrt{\frac{g_0}{(R_T + h)^3}}$$

3.3 Période du satellite

3.3.1 Expression de la période

La période T est le temps au bout duquel le satellite effectue un tour de la terre.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{R_T \sqrt{\frac{g_0}{(R_T + h)^3}}} = \frac{2\pi}{R_T} \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_0}}$$

$$T = \frac{2\pi}{R_T} \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_0}}$$

3.3.2 Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est un satellite qui tourne dans le plan équatorial, dans le sens ouest-est, avec la même vitesse angulaire que la terre. (c'est un satellite qui paraît immobile pour un observateur situé au sol). Sa période est $T = 24\text{h} = 86400\text{s}$.

3.3.3 Troisième loi de Kepler

On a :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{R_T^2} \times \frac{(R_T + h)^3}{g_0}$$

ou encore :

$$\frac{T^2}{(R_T + h)^3} = \frac{4\pi^2}{g_0 R_T^2}$$

D'autre part :

$$\left. \begin{array}{l} R_T + h = R \\ g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} = \text{Cte}$$

$$\frac{T^2}{R^3} = \text{Cte}$$

Loi de Kepler :

Les astres et satellites en orbite autour d'un même astre, décrivent des ellipses de demi-grand axe a avec une période T tels que :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{Cte}$$

La constante ne dépend que de la masse de l'astre attracteur.

1_ Satellite de la terre et satellite du soleil

Un satellite évolue dans le plan équatorial de la terre à une altitude h . Il fait un tour en 12h30mn.

1° Quelle est sa vitesse angulaire ?

2° Déterminer son altitude et sa vitesse linéaire.

3° On considère la terre et le soleil comme deux masses à symétrie sphérique. La masse de la terre est M_T ; celle du soleil est $M_S = KM_T$. Dans le référentiel héliocentrique, la terre décrit une orbite circulaire de rayon r .

a) Etablir l'expression de la vitesse angulaire ω_T de rotation de la terre autour du soleil en fonction de K , r , du rayon de la terre R_T et du champ de gravitation g_0 au niveau du sol. En déduire l'expression de la période T de révolution de la terre autour du soleil.

b) Calculer ω_T et T .

On donne : $K = \frac{1}{3}10^6$; $g_0 = 9,8m \cdot s^{-2}$; $R_T = 6400km$; $r = 1,50 \cdot 10^8 km$.

Solution

1° La période T de révolution du satellite est liée à la vitesse angulaire ω par la relation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

On en déduit:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Avec :

$$T = 12h30mn = 12 \times 60 + 30mn = 750mn$$

soit, en secondes :

$$T = 750 \times 60 = 45 \cdot 10^3 s$$

Donc :

$$\omega = \frac{2 \times 3,14}{45 \cdot 10^3} = 1,39 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot s^{-1}$$

$$\boxed{\omega = 1,39 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot s^{-1}}$$

2° L'altitude du satellite :

Nous avons :

$$T = \frac{2\pi}{R_T} \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_0}}$$

En élevant le tout au carré, on obtient :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 (R_T + h)^3}{R_T^2 g_0}$$

ou encore :

$$T^2 R_T^2 g_0 = 4\pi^2 (R_T + h)^3$$

D'où :

$$R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T^2 R_T^2 g_0}{4\pi^2}}$$

Finalement :

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 R_T^2 g_0}{4\pi^2}} - R_T$$

$$R_T = 6400 \text{ km} = 6400 \cdot 10^3 \text{ m} = 64 \cdot 10^5 \text{ m}$$

$$\pi^2 = 10$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{(45 \cdot 10^3)^2 \times (64 \cdot 10^5)^2 \times 9,8}{40}} - 64 \cdot 10^5 = 2,08 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$h = 2,08 \cdot 10^7 \text{ m}$$

La vitesse linéaire du satellite :

$$v = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}} = 64 \cdot 10^5 \sqrt{\frac{9,8}{64 \cdot 10^5 + 2,08 \cdot 10^7}} = 3827 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v = 3827 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3° a) Expressions de la vitesse angulaire et de la période :

La force d'attraction héliocentrique qui s'exerce sur la terre a pour intensité :

$$F = G \frac{M_T M_S}{r^2}$$

D'autre part :

$$F = M_T a_N = M_T \frac{v_T^2}{r} \quad \left(a_N = \frac{v_T^2}{r} \right)$$

En conséquence :

$$G \frac{M_T M_S}{r^2} = M_T \frac{v_T^2}{r}$$

Par la suite, après simplifications, on obtient :

$$v_T^2 = \frac{G M_S}{r} = \frac{G \cdot K M_T}{r}$$

La vitesse de la terre autour du soleil est donc :

$$v_T = \sqrt{\frac{G \cdot K M_T}{r}}$$

Par ailleurs, le champ de gravitation au niveau du sol est :

$$g_0 = \frac{G M_T}{R_T^2} \Rightarrow G = \frac{g_0 R_T^2}{M_T}$$

En conséquence :

$$v_T = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2 \cdot K M_T}{M_T \cdot r}} = \sqrt{\frac{K g_0 R_T^2}{r}}$$

La vitesse angulaire de rotation de la terre autour du soleil est :

$$\omega_T = \frac{v_T}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{K g_0 R_T^2}{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{K g_0 R_T^2}{r^3}}$$

$$\omega_T = \sqrt{\frac{K g_0 R_T^2}{r^3}}$$

La période de la terre autour du soleil est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_T} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{K g_0 R_T^2}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{K g_0 R_T^2}}$$

b) Applications numériques :

$$\omega_T = \sqrt{\frac{10^6 \times 9,8 \times (64 \cdot 10^5)^2}{3 \times (1,50 \cdot 10^{11})^3}} = 1,99 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3 \times (1,50 \cdot 10^{11})^3}{10^6 \times 9,8 \times (64 \cdot 10^5)^2}} = 3,15 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$\omega_T = 1,99 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$T = 3,15 \cdot 10^7 \text{ s}$$

2_ Troisième loi de Kepler

On considère que la terre est une sphère de centre O, de rayon R_T , de masse M_T et qu'elle possède une répartition des masses à symétrie sphérique. Un satellite artificiel de masse M tourne autour de la terre à une altitude h en mouvement circulaire de centre O et de rayon $R = R_T + h$.

1° Donner l'expression littérale de la période du satellite en fonction de R, M_T et de G (constante de gravitation). En déduire la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{R^3} = \text{Cte}$$

2° Un satellite artificiel tourne autour de la terre en 145mn suivant une orbite circulaire de rayon $R = 8800\text{km}$. Par ailleurs, la lune gravite autour de la terre en mouvement circulaire de rayon R_T . Elle effectue un tour en 29jours. Calculer le rayon de l'orbite lunaire.

3° Calculer la masse de la terre.

On donne : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$

Solution

1° Expression de la période du satellite :

$$T = \frac{2\pi}{R_T} \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_0}}$$

soit :

$$T = \frac{2\pi}{R_T} \sqrt{\frac{R^3}{g_0}}$$

Par ailleurs, l'intensité du champ de gravitation g_0 au niveau du sol, a pour expression :

$$g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

En conséquence :

$$T = \frac{2\pi}{R_T} \sqrt{\frac{R^3}{\frac{GM_T}{R_T^2}}}$$

Ou encore :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\frac{R_T^2 GM_T}{R_T^2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_T}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_T}}$$

En élevant le tout au carré, on obtient :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM_T}$$

On en déduit :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} = \text{Cte}$$

$$\frac{T^2}{R^3} = \text{Cte}$$

2° La période de ce satellite est : $T = 145 \text{mn} = 145 \times 60 \text{s} = 8700 \text{s}$

La lune est un satellite naturel de la terre de période : $T_L = 29 \text{jours}$

soit :

$$T_L = 29 \times 24 \text{h} \times 3600 \text{s} = 2,5 \cdot 10^6 \text{s}$$

La troisième loi de Kepler permet d'écrire :

$$\frac{T_L^2}{R_L^3} = \frac{T^2}{R^3}$$

ou encore :

$$\frac{R_L^3}{T_L^2} = \frac{R^3}{T^2}$$

D'où :

$$R_L^3 = R^3 \frac{T_L^2}{T^2}$$

En prenant la racine cubique du tout on obtient :

$$R_L = R \times \sqrt[3]{\frac{T_L^2}{T^2}}$$

$$\text{AN: } R = 8800\text{km} = 88 \cdot 10^5 \text{ m}$$

$$R_L = 88 \cdot 10^5 \sqrt[3]{\frac{(2,5 \cdot 10^6)^2}{(8700)^2}} = 3,83 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$\boxed{R_L = 3,83 \cdot 10^8 \text{ m}}$$

3° Masse de la terre:

La période du satellite est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_T}}$$

Ou encore :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM_T}$$

D'où :

$$M_T = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$$

AN :

$$M_T = \frac{4 \times 10 \times (88 \cdot 10^5)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \times (8700)^2} = 5,4 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

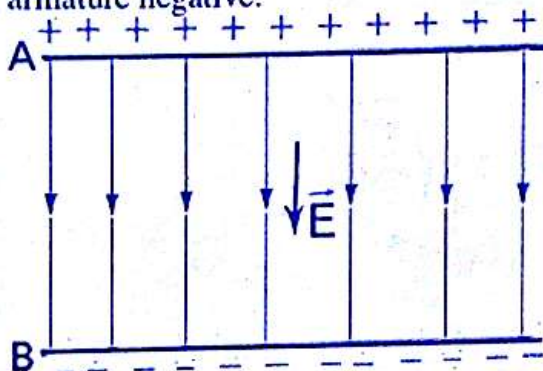
$$\boxed{M_T = 5,4 \cdot 10^{24} \text{ kg}}$$

4 MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE UNIFORME

4.1 Force électrostatique

4.1.1 Champ électrique uniforme

Il existe un champ électrique uniforme \vec{E} entre les armatures A et B d'un condensateur chargé. Les lignes de champ sont des segments de droites parallèles qui vont de l'armature positive à l'armature négative.



Les caractéristiques du champ électrique \vec{E} sont :

- Point d'application : tout point compris entre les plaques A et B.
- Direction : perpendiculaire aux armatures A et B
- Sens : celui des potentiels décroissants (Le potentiel de la plaque positive est supérieur au potentiel de la plaque négative : $V_A > V_B$)
- Si la tension électrique entre les plaques est $U = V_A - V_B$ et d , la distance entre elles, la norme du champ électrique est : $E = \frac{U}{d}$

4.1.2 Force électrique

Une particule de charge q , placée dans un champ électrique uniforme \vec{E} , est soumise à la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$. Les caractéristiques de cette force sont :

- point d'application : centre d'inertie de la particule
- direction : celle de \vec{E}
- sens : celui de \vec{E} si la charge q est positive et le sens contraire de \vec{E} si la charge est négative. (Une particule chargée positivement est entraînée dans le sens du champ \vec{E} , c'est à dire dans le sens des potentiels décroissants. Au contraire une particule de charge négative est entraînée dans le sens des potentiels croissants)
- sa norme est $F = |q|E$

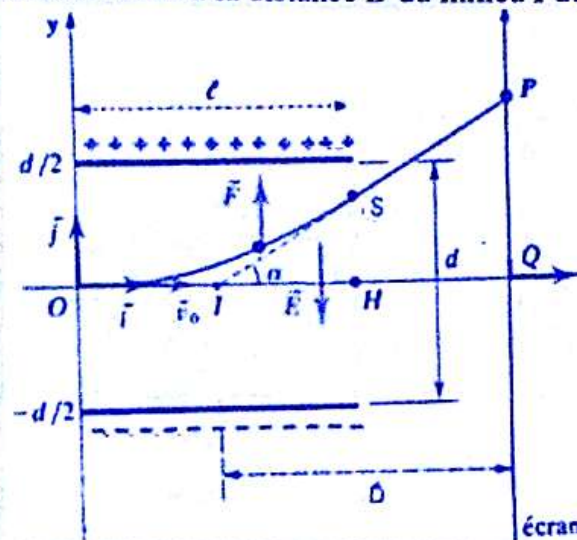
Remarque : un électron est une particule électrique de charge négative : $q = -e$

(avec $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$). La force électrique qui s'exerce sur un électron est : $\vec{F} = -e\vec{E}$

4.2 Déviation d'un électron par un champ électrique uniforme

4.2.1 Equations paramétriques

Un électron est lancé dans le champ électrique \vec{E} existant entre les branches d'un condensateur chargé sous une tension U . La longueur des armatures est ℓ et leur distance est d . La vitesse initiale \vec{v}_0 de l'électron est perpendiculaire au vecteur champ \vec{E} . A l'intérieur du condensateur, l'électron décrit une trajectoire curviligne. A la sortie du condensateur au point S , la trajectoire devient rectiligne et l'électron vient frapper un écran fluorescent situé à la distance D du milieu I du condensateur.



Les forces qui s'exercent sur l'électron sont : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force électrique $\vec{F} = -e\vec{E}$. Le poids étant négligeable devant la force électrique, la relation fondamentale de la dynamique donne :

$$-e\vec{E} = m\vec{a}$$

D'où :

$$\vec{a} = -\frac{e\vec{E}}{m}$$

Les coordonnées de l'accélération dans la base (\vec{i}, \vec{j}) sont :

$$a_x = -\frac{eE_x}{m}$$

$$a_y = -\frac{eE_y}{m}$$

Le vecteur champ électrique \vec{E} étant vertical et ascendant, sa composante horizontale est donc nulle : $E_x = 0$. Par conséquent $a_x = 0$.

Par contre : $E_y = -E$. Donc : $a_y = \frac{eE}{m}$

La vitesse initiale \vec{v}_0 est horizontale et de même sens que l'axe (o, \vec{i}) . Donc ses

coordonnées sont : $v_{0x} = v_0$ et $v_{0y} = 0$.

En projetant le mouvement suivant les axes ox et oy , on obtient :

– suivant ox : ($a_x = 0$ et $v_{0x} = v_0$) le mouvement est donc rectiligne uniforme
d'équation horaire : $x = v_{0x}t = v_0t$ (1)

– suivant oy : ($a_y = \frac{eE}{m}$ et $v_{0y} = 0$) le mouvement est rectiligne et uniformément varié
d'équation horaire : $y = \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2$

D'autre part: $E = \frac{U}{d} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \frac{eU}{md} t^2$ (2)

Les équations paramétriques du mouvement sont donc :

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2} \frac{eU}{md} t^2 \end{cases}$$

4.2.2 Équation de la trajectoire

En éliminant le temps t entre les équations (1) et (2), on obtient l'équation de la trajectoire :

$$y = \frac{1}{2} \frac{eU}{mdv_0^2} x^2$$

La trajectoire est parabolique.

4.2.3 Conditions de sortie de l'électron

Les coordonnées du point de sortie S de l'électron sont :

$$\begin{aligned} x_s &= \ell \\ y_s &= \frac{1}{2} \frac{eU}{mdv_0^2} x_s^2 = \frac{1}{2} \frac{eU}{mdv_0^2} \ell^2 \end{aligned}$$

Pour que l'électron puisse sortir du condensateur sans frapper une branche, il faut :

$$y_s < \frac{d}{2}$$

soit : $\frac{1}{2} \frac{eU\ell^2}{mdv_0^2} < \frac{d}{2}$

ou encore : $eU\ell^2 < md^2 v_0^2$

D'où : $U < \frac{md^2 v_0^2}{e\ell^2}$

4.2.4 La déflexion électrique

La déflexion électrique Y est la déviation QP du spot lumineux sur l'écran ($Y = QP$).

Considérons le triangle rectangle IQP :

$$\tan \alpha = \frac{\overline{QP}}{\overline{IQ}} = \frac{Y}{D} \quad (1)$$

D'après le triangle rectangle IHS :

$$\tan \alpha = \frac{\overline{HS}}{\overline{IH}} = \frac{y_s}{\frac{\ell}{2}}$$

Soit :

$$\tan \alpha = \frac{2y_s}{\ell} \quad (2)$$

(1) et (2) \Rightarrow

$$\frac{Y}{D} = \frac{2y_s}{\ell}$$

On en déduit :

$$Y = \frac{2y_s}{\ell} D$$

Par ailleurs :

$$y_s = \frac{1}{2} \frac{eU}{mdv_0^2} \ell^2$$

En conséquence :

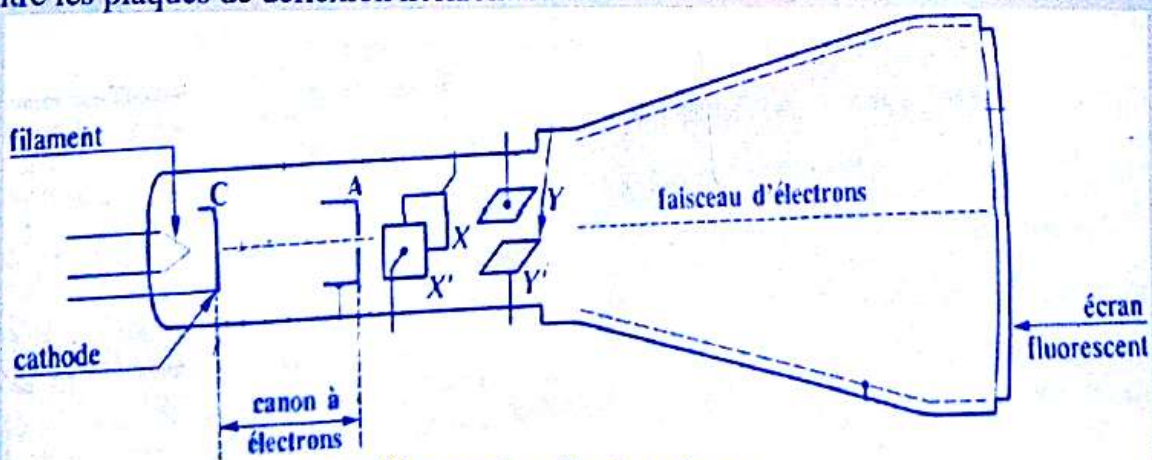
$$Y = \frac{eU\ell D}{mdv_0^2}$$

$$Y = \frac{eU\ell D}{mdv_0^2}$$

4.3 L'oscilloscope électronique

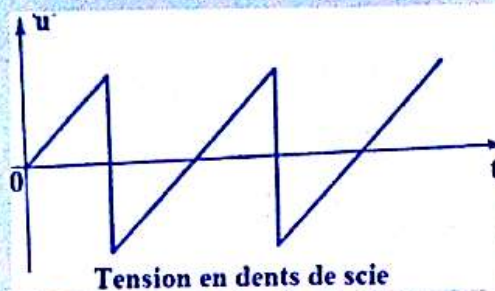
4.3.1 Principe de fonctionnement

Un oscilloscope électronique comporte un canon à électrons et un système de plaques (plaques de déviation horizontale X et X' et les plaques de déviation verticale Y et Y'). Le canon à électrons est constitué d'une cathode C et d'une anode A entre lesquelles on applique une tension accélératrice $U_{AC} = U_0$. Sous l'effet de la chaleur, les électrons quittent la cathode C avec une vitesse presque nulle et sont accélérés par la tension U_0 . Grâce à un trou percé dans l'anode A, ils s'échappent du canon et passent entre les plaques de déflexion horizontale et verticale.



Oscilloscope électronique

En appliquant une tension sinusoïdale entre les plaques horizontales et une tension en dents de scie entre les plaques verticales, on observe sur l'écran le graphe de la tension sinusoïdale.



4.3.2 Vitesse des électrons à l'anode

La vitesse v_0 des électrons à la sortie de l'anode est donnée par le théorème de l'énergie cinétique appliquée à l'électron entre la cathode C et l'anode A :

$$E_{cf} - E_{ci} = W$$

L'énergie cinétique initiale est nulle car les électrons quittent la cathode C avec une vitesse presque nulle : $E_{ci} = 0$

L'énergie cinétique finale est :

$$E_{cf} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Le travail de la force électrique est :

$$W = eU_0$$

Par conséquent, le théorème de l'énergie cinétique appliquée à l'électron entre le filament F et la plaque P s'écrit :

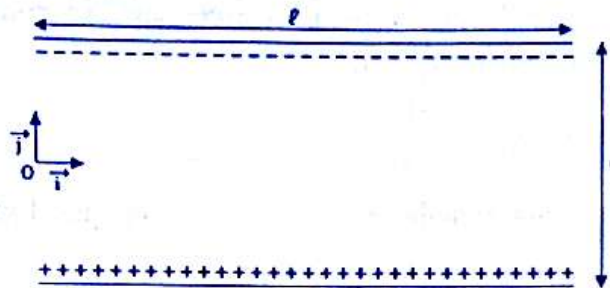
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = eU_0$$

On en déduit :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$$

1_ Electron lancé dans un champ électrique uniforme

On maintient entre les armatures d'un condensateur, une différence de potentiel U . La longueur des armatures est $\ell = 4\text{cm}$ et la distance qui les sépare est $d = 2\text{cm}$.



Un électron est injecté au point o situé à mi-distance des armatures avec une vitesse $v_0 = 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Le vecteur \vec{v}_0 est parallèle aux armatures.

1° Déterminer l'équation de la trajectoire de l'électron dans le champ électrostatique en fonction de la tension U .

2° Pour quelles valeurs de U , l'électron sort-t-il effectivement du condensateur sans être intercepté par l'une des armatures ?

Données :

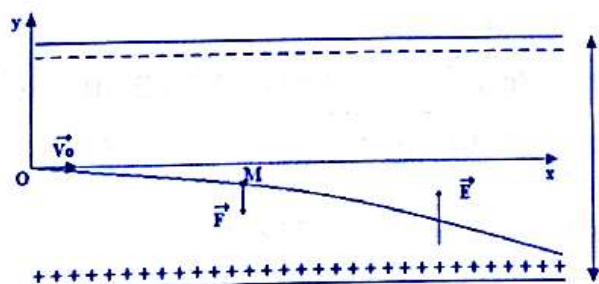
masse de l'électron $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

charge de l'électron $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Solution

1° a) Les forces appliquées à l'électron sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$.

Le poids est négligeable devant la force \vec{F} .



La relation fondamentale de la dynamique permet d'écrire :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

soit : $q\vec{E} = m\vec{a}$

D'où : $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$

Les coordonnées de l'accélération dans la base (\vec{i}, \vec{j}) sont :

$$a_x = -\frac{eE_x}{m}$$

$$a_y = -\frac{eE_y}{m}$$

Le vecteur champ électrique \vec{E} étant vertical et ascendant, sa composante verticale est donc nulle : $E_x = 0$. Par conséquent $a_x = 0$.

Par contre : $E_y = E$. Donc : $a_y = -\frac{eE}{m}$

La vitesse initiale \vec{v}_0 est horizontale et de même sens que l'axe (o, \vec{i}) . Donc ses coordonnées sont : $v_{0x} = v_0$ et $v_{0y} = 0$.

En projetant le mouvement suivant les axes ox et oy , on obtient :

– suivant ox : ($a_x = 0$ et $v_{0x} = v_0$) le mouvement est rectiligne uniforme d'équation horaire :

$$x = v_{0x}t = v_0t \quad (1)$$

– suivant oy : ($a_y = -\frac{eE}{m}$ et $v_{0y} = 0$) le mouvement est rectiligne uniformément varié

d'équation horaire :

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 = -\frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2$$

D'autre part : $E = \frac{U}{d} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}\frac{eU}{md}t^2 \quad (2)$

D'après (1): $t = \frac{x}{v_0}$

En portant cette expression dans (2), on obtient :

$$y = -\frac{eE}{2mv_0^2}x^2$$

$$E = \frac{U}{d} \Rightarrow y = -\frac{eU}{2mdv_0^2}x^2 = -\frac{1,6 \cdot 10^{-19}U}{2 \times 9,1 \cdot 10^{-31} \times 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{14}}x^2 = -4,4 \cdot 10^{-2}Ux^2$$

$$\boxed{y = -4,4 \cdot 10^{-2}Ux^2}$$

b) L'électron sort du condensateur si, pour $x = \ell, y < -\frac{d}{2}$

soit : $-4,4 \cdot 10^{-2}U\ell^2 < -\frac{d}{2}$

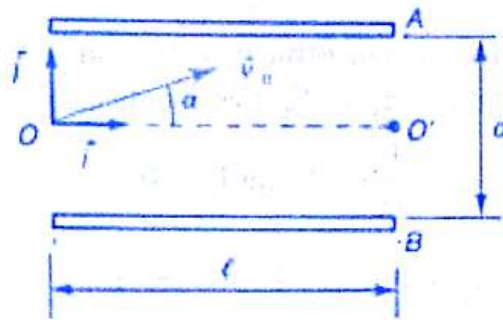
ou encore : $4,4 \cdot 10^{-2}U\ell^2 < \frac{d}{2}$

D'où : $U < \frac{d}{8,8 \cdot 10^{-2}\ell^2} < \frac{2 \cdot 10^{-2}}{8,8 \cdot 10^{-2} \times 16 \cdot 10^{-4}} < 142V$

$$\boxed{U < 142V}$$

2_ Projectile dans le champ électrostatique

Un proton de masse m et de charge q est lancé entre les plaques horizontales A et B d'un condensateur en O , à égale distance des plaques. La vitesse initiale \vec{v}_0 est dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) et fait un angle α avec le vecteur unitaire \vec{i} . La longueur des plaques est $\ell = 15\text{cm}$ et leur distance est $d = 8\text{cm}$. La tension électrique entre les plaques est $U = |V_A - V_B| = 1000\text{V}$.



1° Donner les caractéristiques (direction, sens et intensité) du champ électrique \vec{E} à l'intérieur du condensateur.

2° Etablir l'expression littérale de l'équation de la trajectoire du proton dans le condensateur en fonction de q , m , E , v_0 et de α .

Faire l'application numérique :

$$m = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$v_0 = 4 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \alpha = 30^\circ.$$

3° Le proton sort de la région où règne le champ électrique en un point S. Calculer :

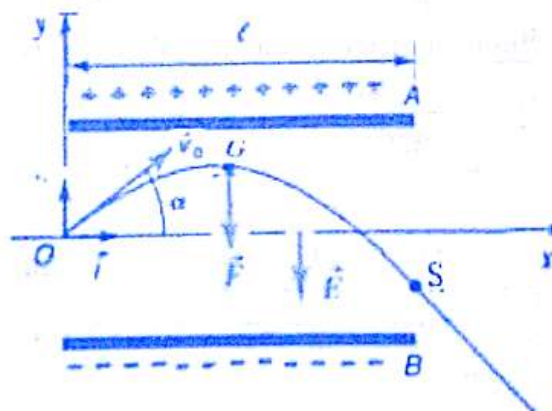
a) les coordonnées de S.

b) les coordonnées de la vitesse \vec{v}_S au point S et sa norme v_S .

4° Calculer la valeur de la tension U qui permettrait au proton de sortir en O' .

Solution

1° Les caractéristiques du champ électrique :



- direction : perpendiculaire aux plaques
- sens : de la plaque A vers la plaque B

- norme : $E = \frac{U}{d} = \frac{1000}{8 \cdot 10^{-2}} = 12,5 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

2° Les forces appliquées au proton sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force électrique $\vec{F} = -q\vec{E}$. Le poids est négligeable devant la force \vec{F} . En conséquence, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit : $\vec{F} = m\vec{a}$

soit : $q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$

Le vecteur champ électrique \vec{E} étant vertical et descendant, sa composante verticale est donc nulle : $E_x = 0$. Par contre : $E_y = -E$. Les coordonnées de l'accélération sont :

$$a_x = \frac{qE_x}{m} = 0 \quad \text{car } E_x = 0$$

$$a_y = \frac{qE_y}{m} = -\frac{qE}{m} \quad (E_y = -E)$$

Les coordonnées de la vitesse initiale sont :

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha.$$

En projetant le mouvement suivant les axes ox et oy , on obtient :

- suivant ox : ($a_x = 0$ et $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$) le mouvement est rectiligne uniforme d'équation horaire : $x = v_{0x}t = (v_0 \cos \alpha)t$ (1)

- suivant oy : ($a_y = -\frac{qE}{m}$ et $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$) le mouvement est rectiligne et uniformément varié d'équation horaire :

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 + (v_0 \sin \alpha)t = -\frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 + (v_0 \sin \alpha)t$$

$$y = -\frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 + (v_0 \sin \alpha)t \quad (2)$$

La relation (2) s'écrit, en éliminant le temps t à partir de la relation (1) :

$$y = -\frac{qE}{2mv_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

AN : $y = -\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 12,5 \cdot 10^3}{2 \times 1,66 \cdot 10^{-27} \times (4 \cdot 10^5)^2 \times (0,86)^2} x^2 + 0,57x$

$$y = -5,09x^2 + 0,57x$$

3° a) Les coordonnées de S sont :

$$x_s = \ell = 15 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$y_s = -5,09x_s^2 + 0,57x_s$$

soit :

$$y_s = -5,09 \times (15 \cdot 10^{-2})^2 + 0,57 \times 15 \cdot 10^{-2} = -2,9 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x_s = 15 \text{ cm} \\ y_s = -2,9 \text{ cm} \end{matrix}}$$

b) Les coordonnées de la vitesse de sortie \vec{v}_s :

$$v_{sx} = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha = 4 \cdot 10^5 \times 0,86 = 3,44 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{sy} = \frac{dy}{dt} = -\frac{qEt}{m} + v_0 \sin \alpha$$

$$x_s = (v_0 \cos \alpha)t \Rightarrow$$

$$t = \frac{x_s}{v_0 \cos \alpha} = \frac{15 \cdot 10^{-2}}{3,44 \cdot 10^5} = 4,36 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

En conséquence :

$$\begin{aligned} v_{sy} &= -\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 12,5 \cdot 10^3 \times 4,36 \cdot 10^{-7}}{1,66 \cdot 10^{-27}} + 4 \cdot 10^5 \times 0,5 \\ &= -3,25 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{matrix} v_{sx} = 3,44 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ v_{sy} = -3,25 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{matrix}}$$

La norme de \vec{v}_s : $v_s = \sqrt{v_{sx}^2 + v_{sy}^2} = \sqrt{(3,44 \cdot 10^5)^2 + (-3,25 \cdot 10^5)^2} = 4,73 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\boxed{v_s = 4,73 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

4° Valeur de la tension U qui permet la sortie en O.

Nous avons :
$$y = -\frac{qE}{2mv_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

$$E = \frac{U}{d} \Rightarrow y = -\frac{qU}{2mdv_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

$$\text{AN : } y = -\frac{1,6 \cdot 10^{-19} U}{2 \times 1,66 \cdot 10^{-27} \times 8 \cdot 10^2 \times (4 \cdot 10^5)^2 \times (0,86)^2} x^2 + 0,57x = -5,09 \cdot 10^{-3} U x^2 + 0,57x$$

Les coordonnées du point o'(x = l; y = 0) vérifient l'équation de la trajectoire :

Soit : $0 = -5,09 \cdot 10^{-3} U l^2 + 0,57l$

Ou encore : $5,09 \cdot 10^{-3} U l^2 = 0,57l$

Par la suite : $5,09 \cdot 10^{-3} U l = 0,57$

D'où :
$$U = \frac{0,57}{5,09 \cdot 10^{-3} l} = \frac{0,57}{5,09 \cdot 10^{-3} \times 15 \cdot 10^{-2}} = 746,56 \text{ V}$$

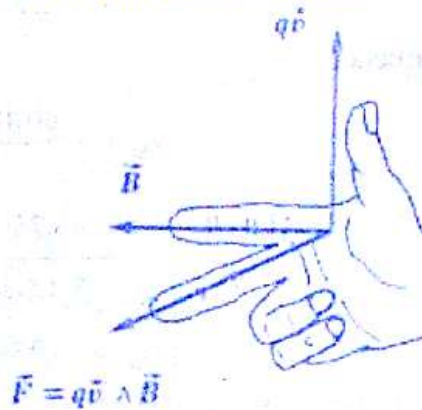
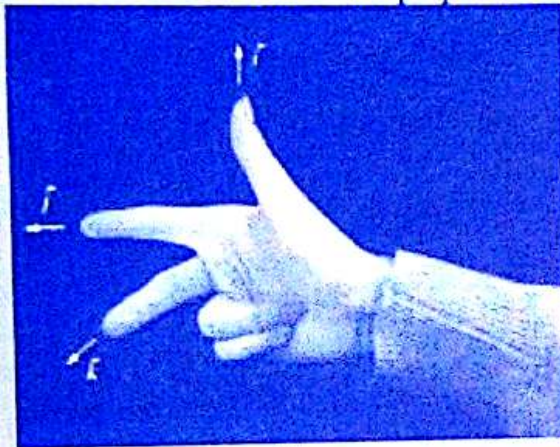
$$\boxed{U = 746,56 \text{ V}}$$

5 MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME

5.1 La force magnétique de Lorentz

5.1.1 Règle des trois doigts de la main droite

Si le pouce, l'index et le majeur de la main droite sont placés respectivement suivant les axes \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} , le trièdre $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct. La main droite peut donc servir à trouver le sens d'un vecteur perpendiculaire à la fois à deux autres vecteurs.

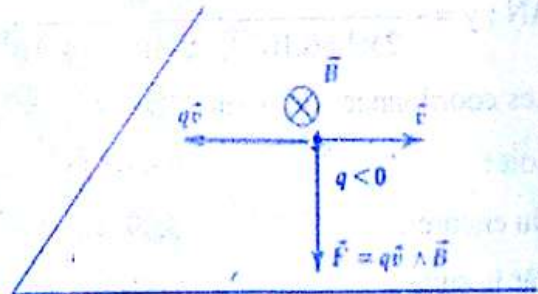
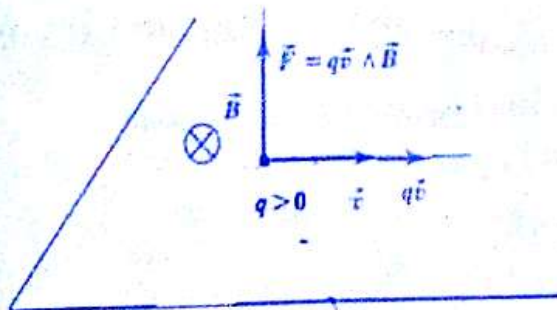


5.1.2 Force magnétique

Une particule de charge q , lancée dans un champ uniforme \vec{B} avec une vitesse \vec{v} est soumise à la force magnétique de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Les caractéristiques de cette force sont :

- point d'application : centre d'inertie de la particule
- direction : perpendiculaire à la fois au vecteurs \vec{v} et \vec{B}
- sens : son sens est tel que le trièdre $(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct.



- sa norme : si α est l'angle formé par les vecteurs \vec{v} et \vec{B} , l'intensité de la force magnétique est : $F = |q|vB \sin \alpha$. cas particuliers :

- si $\alpha = 90^\circ$ (la vitesse \vec{v} est perpendiculaire au vecteur champ \vec{B}), $F = |q|vB$

- si $\alpha = 0$ (la vitesse \vec{v} est parallèle au vecteur champ \vec{B}), $F = 0$.

5.2 Nature du mouvement

Une particule de masse m et de charge q , lancée dans un champ uniforme \vec{B} avec une vitesse \vec{v} est soumise à l'action de son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la force magnétique de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Le poids est négligeable devant la force magnétique. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit donc :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

soit :

$$q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a}$$

D'où :

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Cette accélération, perpendiculaire à la vitesse \vec{v} , est centripète. Le mouvement est donc circulaire. Par ailleurs la force magnétique \vec{F} est aussi perpendiculaire à la vitesse \vec{v} . Le travail $W_{\vec{F}}$ de cette force est par conséquent nul. L'énergie cinétique de la particule ne varie donc pas. En conséquence, la vitesse est constante.

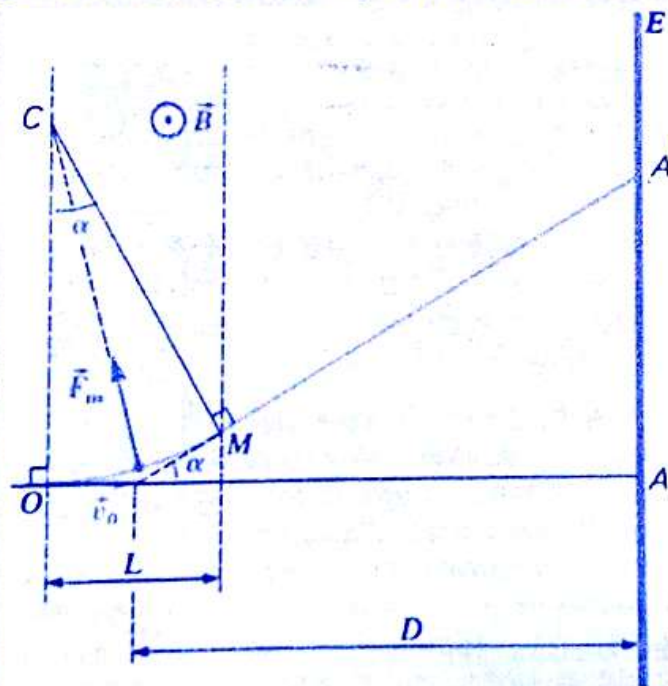
Le mouvement d'une particule électrique dans un champ magnétique uniforme est circulaire et uniforme.

5.3 Déviation d'un électron par un champ magnétique uniforme

5.3.1 Cas où la vitesse initiale est perpendiculaire au champ

• Rayon de la trajectoire

Un électron de masse m et de charge $q = -e$ est lancé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} de largeur L avec une vitesse \vec{v}_0 perpendiculaire au vecteur-induction \vec{B} .



A l'intérieur du champ, il décrit une portion de cercle OM de centre C et de rayon $CM = R$. A la sortie du champ au point M, la trajectoire devient rectiligne et l'électron vient frapper un écran fluorescent E situé à la distance D du milieu I du champ magnétique.

Les forces qui s'exercent sur l'électron sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force magnétique de Lorentz $\vec{F} = -e\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$ d'intensité $F = ev_0B$. Le poids est négligeable.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'électron dans le champ magnétique s'écrit :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Dans la base de Frenet (\vec{u}, \vec{v}) , l'accélération est :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u} + \frac{v_0^2}{R}\vec{n}$$

Le mouvement étant circulaire uniforme, $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \frac{v_0^2}{R}\vec{n}$

Par conséquent :

$$\vec{F} = m \frac{v_0^2}{R} \vec{n}$$

Soit, en modules :

$$F = m \frac{v_0^2}{R}$$

ou encore :

$$ev_0B = m \frac{v_0^2}{R}$$

D'où :

$$R = \frac{mv_0}{Be}$$

• Déflexion magnétique

La déflexion magnétique Y est la déviation AA' du spot lumineux sur l'écran ($Y = AA'$).

Considérons le triangle rectangle IAA'. L'angle α des segments IA et IA' est appelé **déflexion angulaire**.

$$\tan \alpha = \frac{AA'}{D} = \frac{Y}{D}$$

α très petit ($\tan \alpha \approx \alpha$) $\Rightarrow \alpha = \frac{Y}{D}$ (1)

D'autre part l'angle au centre α intercepte l'arc OM. Donc :

$$\alpha = \frac{OM}{R}$$

OM \approx L donc :

$$\alpha = \frac{L}{R}$$
 (2)

Des relations (1) et (2) on tire l'égalité :

On en déduit :

$$\frac{Y}{D} = \frac{L}{R}$$

$$Y = \frac{LD}{R}$$

Par ailleurs :

$$R = \frac{mv_0}{Be}$$

Donc :

$$Y = \frac{BeLD}{mv_0}$$

$$Y = \frac{BeLD}{mv_0}$$

5.3.2 Cas où la vitesse initiale est parallèle au champ

Si la vitesse initiale est colinéaire au champ magnétique \vec{B} , la force magnétique est nulle. Le mouvement de la particule est rectiligne uniforme conformément au principe de l'inertie.

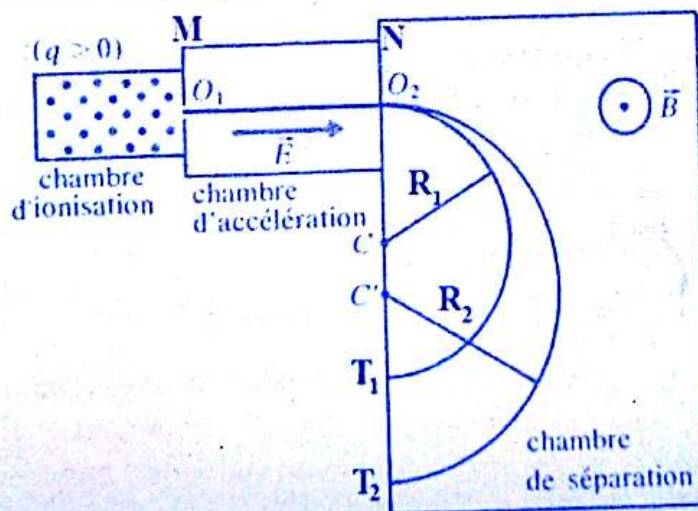
5.4 Applications de la déviation magnétique

5.4.1 Le spectrographe de masse

• principe de fonctionnement

Un spectrographe de masse est un appareil qui utilise la déviation magnétique pour séparer les isotopes. Il est constitué de trois chambres : la chambre d'ionisation, la chambre d'accélération et la chambre de séparation.

Les ions isotopes d'un élément de masses respectives m_1, m_2, \dots , de même charge q sont introduits en O_1 à vitesse presque nulle. Ils sont accélérés entre O_1 et O_2 grâce à une tension U créant un champ électrostatique de vecteur \vec{E} . Ils pénètrent ensuite en O_2 dans la chambre de déviation où règne un champ magnétique uniforme de vecteur induction \vec{B} et décrivent des demi-cercles de rayons respectifs R_1, R_2, \dots avant de tomber dans des collecteurs T_1, T_2, \dots



- **Le rayon de courbure d'un ion**

Soit $U = |V_M - V_N|$ la tension électrique entre les plaques M et N de la chambre d'accélération. La vitesse v_1 de l'isotope de masse m_1 et de charge q , à la sortie de la fente O_2 est donnée par le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ion entre les plaques M et N de la chambre d'accélération :

$$E_{Cf} - E_{Ci} = W$$

$$E_{Ci} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = |q|U$$

D'où :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2|q|U}{m_1}}$$

La vitesse v_2 de l'autre isotope de masse m_2 est également donnée par le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = |q|U$$

D'où :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2|q|U}{m_2}}$$

Le rayon de courbure du premier isotope est :

$$R_1 = \frac{m_1 v_1}{B|q|}$$

Le rayon de courbure du second isotope est :

$$R_2 = \frac{m_2 v_2}{B|q|}$$

La distance séparant les deux tas d'isotopes est :

$$T_1 T_2 = O_2 T_2 - O_2 T_1 = 2R_2 - 2R_1$$

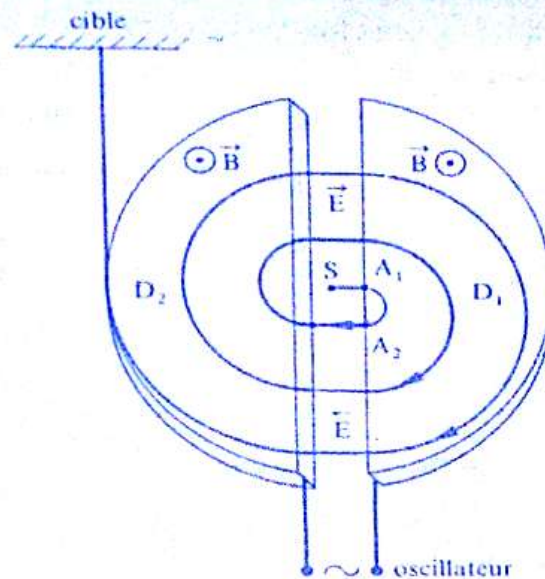
$$T_1 T_2 = 2R_2 - 2R_1$$

5.4.2 Le cyclotron

- **principe de fonctionnement**

Un cyclotron est un accélérateur de particules électriques constitué de deux demi-cylindres creux appelés « D ». Ces D sont séparés par un intervalle étroit et sont placés horizontalement dans un champ magnétique uniforme \vec{B} . Dans l'intervalle étroit, on crée un champ électrique périodique \vec{E} à l'aide d'une tension alternative $u = U_m \cos \omega t$, de valeur maximale U_m et de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

On introduit les particules électriques en S pendant que le champ électrique est maximal. Elles sont accélérées vers A_1 où elles pénètrent dans le champ magnétique. Elles décrivent dans D_1 un demi-cercle et se présentent en A_2 lorsque le champ électrique \vec{E} est inversé.



Elles seront de nouveau accélérées vers D₂ où elles décrivent un autre demi-cercle de rayon un peu plus grand et le cycle reprend. Les particules arrivant à la périphérie des D sont éjectées à l'extérieur par une ouverture.

• **Energie cinétique maximale**

Toute particule de charge q et de masse m qui pénètre dans un D décrit une trajectoire circulaire de rayon :

$$R = \frac{mv}{B|q|}$$

La vitesse angulaire ω de cette particule est :

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{v}{\frac{mv}{B|q|}} = \frac{B|q|}{m}$$

$$\omega = \frac{B|q|}{m}$$

La vitesse maximale v_{\max} acquise par chaque particule est liée au rayon maximal R_{\max} des D par la relation :

$$v_{\max} = \omega R_{\max} = \frac{B|q|}{m} R_{\max}$$

$$v_{\max} = \frac{B|q|}{m} R_{\max}$$

L'énergie cinétique maximale est par conséquent :

$$E_{C\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

- **Nombre de tours effectués par une particule**

A chaque tour, une particule traverse deux fois le champ électrique. L'énergie transmise à une particule pendant un tour est donc :

$$W_1 = 2|q|U_m \quad (U_m \text{ est la tension maximale})$$

Pour n tours effectués dans le cyclotron par la particule, la vitesse est maximale et l'énergie acquise est :

$$W_{\max} = nW_1 = 2n|q|U_m$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = 2n|q|U_m$$

On en déduit :

$$n = \frac{mv_{\max}^2}{4|q|U_m}$$

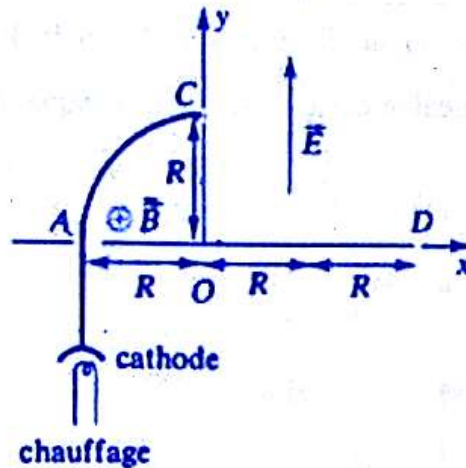
$$n = \frac{mv_{\max}^2}{4|q|U_m}$$

Soit :

$$n = \frac{E_{C\max}}{2|q|U_m}$$

1_ Electrons émis par un filament

Un faisceau d'électrons émis d'une cathode est accéléré par une anode OA. La différence de potentiel entre l'anode et la cathode est $U_0 = 285V$. Grâce à un trou pratiqué dans l'anode, les électrons entrent dans une région où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} . Ils y décrivent un quart de cercle de rayon $R = 20cm$ et pénètrent par un trou C dans un champ électrique uniforme \vec{E} limité par le dièdre xoy. Le champ électrique est parallèle à l'axe oy.



- 1° Déterminer la vitesse des électrons dans le champ magnétique.
- 2° Calculer l'intensité B du champ magnétique.
- 3° Etablir littéralement l'expression de la trajectoire des électrons dans le champ électrique ; en déduire la nature de la trajectoire.
- 4° Calculer la valeur à donner à la norme E du champ électrique pour que le point d'impact des électrons soit un point D situé à la distance $OD = 2R$.

Données:

masse de l'électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

charge de l'électron : $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Solution

1° La vitesse v_0 acquise par les électrons à l'anode A reste constante dans le champ magnétique. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'électron entre F et A donne :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = e U_0$$

D'où :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$$

soit :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 285}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_0 = 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2° Le rayon de courbure de la trajectoire des électrons dans le champ magnétique est :

$$R = \frac{mv_0}{Be}$$

On en déduit :

$$B = \frac{mv_0}{Re}$$

$$R = 20\text{cm} = 20 \cdot 10^{-2}\text{m}$$

$$B = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^7}{20 \cdot 10^{-2} \times 1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,81 \cdot 10^{-4}\text{T}$$

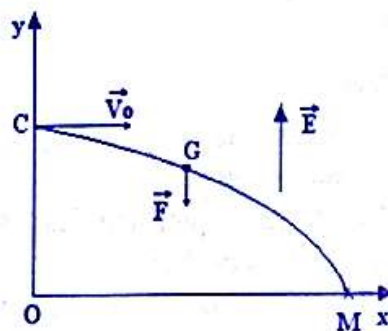
$$\boxed{B = 2,81 \cdot 10^{-4}\text{T}}$$

3° Les forces qui s'exercent sur un électron sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force électrique $\vec{F} = -e\vec{E}$. Le poids est négligeable devant la force électrique. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit donc :

$$m\vec{a} = -e\vec{E}$$

D'où :

$$\vec{a} = -\frac{e\vec{E}}{m}$$



Les coordonnées de l'accélération dans la base (\vec{i}, \vec{j}) sont :

$$a_x = -\frac{eE_x}{m}$$

$$a_y = -\frac{eE_y}{m}$$

Le vecteur champ électrique \vec{E} étant vertical et ascendant, sa composante horizontale est donc nulle : $E_x = 0$. Par conséquent $a_x = 0$.

Par contre : $E_y = E$. Donc : $a_y = -\frac{eE}{m}$

La vitesse initiale \vec{v}_0 est horizontale et de même sens que l'axe (o, \vec{i}) . Donc ses coordonnées sont : $v_{0x} = v_0$ et $v_{0y} = 0$.

En projetant le mouvement suivant les axes ox et oy , on obtient :

– suivant ox : ($a_x = 0$ et $v_{0x} = v_0$) Le mouvement est donc rectiligne uniforme d'équation horaire :

$$x = v_{0x}t = v_0t \quad (1)$$

- suivant oy : $\left(a_y = \frac{eE}{m} \text{ et } v_{0y} = 0 \right)$ Le mouvement est rectiligne et uniformément varié

d'équation horaire : $y = \frac{1}{2} a_y t^2 + y_0$ (l'ordonnée initiale est : $y_0 = y_C = R$)

Soit :
$$y = -\frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2 + R \quad (2)$$

D'après (1) :
$$t = \frac{x}{v_0} \quad (3)$$

La relation (2) compte tenu de (3) donne l'équation de la trajectoire :

$$y = -\frac{1}{2} \frac{eE}{mv_0^2} x^2 + R$$

L'équation de la trajectoire est une fonction du second degré de l'abscisse x . le mouvement dans le champ électrique est donc parabolique.

4° Les coordonnées du point D sont : $x_D = 2R$ et $y_D = 0$

D'autre part :
$$y_D = -\frac{1}{2} \frac{eE}{mv_0^2} x_D^2 + R$$

soit :
$$0 = -\frac{eE \times 4R^2}{2mv_0^2} + R$$

ou encore :
$$0 = -R \left(\frac{2eR}{mv_0^2} - 1 \right)$$

Puisque $R \neq 0$,
$$\frac{2eER}{mv_0^2} - 1 = 0$$

D'où :
$$\frac{2eER}{mv_0^2} = 1$$

On en déduit :
$$E = \frac{mv_0^2}{2eR}$$

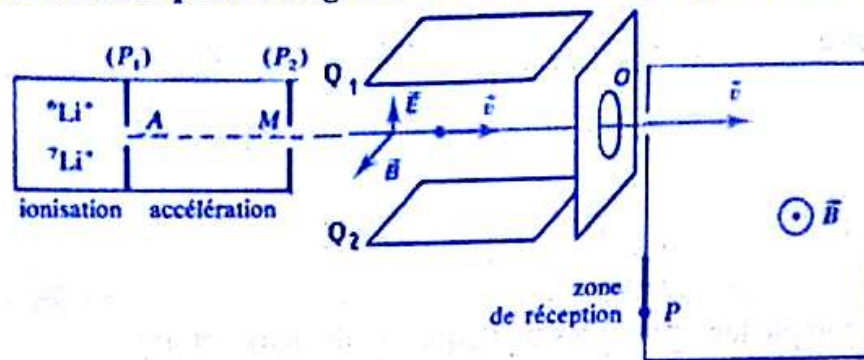
AN :
$$E = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \times 10^{14}}{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,2} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$E = 1,4 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

2_ Sélecteur de vitesse

Une chambre d'ionisation produit des ions lithium ${}^6\text{Li}^+$ et ${}^7\text{Li}^+$ de masses respectives m_1 et m_2 . Ces ions sont ensuite accélérés dans le vide par le champ électrique \vec{E}_0 existant entre deux plaques métalliques verticales P_1 et P_2 distantes de

$d_1 = 10\text{cm}$. La tension accélératrice est $U_0 = V_{P_1} - V_{P_2} = 10^4\text{V}$. Les vitesses respectives des ions lorsqu'ils atteignent le trou M de la plaque P_2 sont v_1 et v_2 .



1° Calculer l'intensité de la force électrique \vec{F} qui s'exerce sur un ion ${}^6_3\text{Li}^+$ et montrer que le poids d'un ion est négligeable devant la force électrique. (La masse d'un ion sera déterminée à partir des masses m_p du proton et m_n du neutron). La masse des électrons est négligeable.

On donne : $m_p = m_n = 1,67 \cdot 10^{-27}\text{kg}$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$$

$$g = 9,8\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

2° Calculer la vitesse v_2 des ions ${}^7_3\text{Li}^+$.

3° Montrer que $m_1 v_1^2 = m_2 v_2^2$

4° Après leurs sorties de la chambre d'accélération, les ions ${}^6_3\text{Li}^+$ et ${}^7_3\text{Li}^+$ pénètrent dans un dispositif appelé sélecteur de vitesse. Le principe de cet appareil est le suivant : les particules sont injectées entre deux plaques horizontales Q_1 et Q_2 distantes de $d_2 = 8\text{cm}$. Une tension électrique $U = V_{Q_2} - V_{Q_1} = 4 \cdot 10^3\text{V}$ crée entre elles un champ électrique \vec{E} . Dans toute la région où règne \vec{E} , existe un champ magnétique uniforme \vec{B} orthogonal à \vec{E} . Le dispositif est réglé sur une vitesse \vec{v} . Autrement dit, toute particule ionisée qui arrive dans l'espace compris entre les plaques Q_1 et Q_2 avec la vitesse \vec{v} , aura une trajectoire rectiligne et sortira du sélecteur de vitesse par un trou O . Les particules de vitesses différentes seront déviées et ne sortiront pas de l'appareil.

a) Exprimer v en fonction de E et B .

b) Calculer B dans le cas où $v = v_2$.

5° Seuls, les ions ${}^7_3\text{Li}^+$ sont sortis du sélecteur de vitesse. Ils pénètrent ensuite dans une chambre où règne un champ magnétique uniforme \vec{B}' orthogonal à \vec{v} et sont collectés en P . La norme de ce champ est $B' = 0,2\text{T}$.

a) Calculer le rayon de courbure de leur trajectoire.

b) Quel est le temps que met un ion ${}^7_3\text{Li}^+$ pour parcourir ce trajet dans le champ \vec{B}' .

Solution

1° Intensité de la force électrique \vec{F} :

$$F = qE_0 = eE_0$$

Par ailleurs, $E_0 = \frac{U_0}{d_1} \Rightarrow F = \frac{eU_0}{d_1} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 10^4}{10 \cdot 10^{-2}} = 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ N}$

$$\boxed{F = 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ N}}$$

Comparons cette force au poids P_1 de l'ion ${}^6\text{Li}^+$

$$P_1 = m_1 g$$

$$m_1 = 6m_p = 6 \times 1,67 \cdot 10^{-27} = 10^{-26} \text{ kg} \Rightarrow P_1 = 10^{-26} \times 9,8 = 9,8 \cdot 10^{-26} \text{ N}$$

$$F - P_1 = 1,6 \cdot 10^{-14} - 9,8 \cdot 10^{-26} = 1,6 \cdot 10^{-14} = F \Rightarrow P_1 = 0$$

Le poids est donc négligeable devant la force électrique.

2° Appliquons le théorème de l'énergie entre les plaques P_1 et P_2 de la chambre d'accélération :

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = eU_0 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_2}}$$

$$m_2 = 7m_p = 7 \times 1,6 \cdot 10^{-27} = 1,16 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 10^4}{1,16 \cdot 10^{-26}}} = 5,23 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\boxed{v_2 = 5,23 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

3° Appliquons le théorème de l'énergie cinétique aux deux ions entre les plaques P_1 et P_2 :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = eU_0$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = eU_0$$

Des deux relations, on retient :

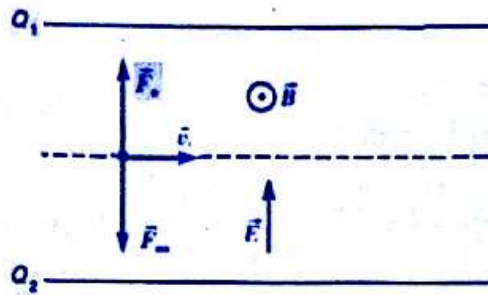
$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow m_1 v_1^2 = m_2 v_2^2$$

$$\boxed{m_1 v_1^2 = m_2 v_2^2}$$

4° a) Expression de v en fonction de E et B :

Chaque type d'ion est soumis à la force électrique \vec{F}_e et à la force magnétique \vec{F}_m . Si la trajectoire d'un ion est rectiligne, la force électrique compense la force magnétique :

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = \vec{0}$$



Soit :

$$\vec{F}_e = -\vec{F}_m$$

Ou encore :

$$F_e = F_m$$

soit :

$$eE = evB$$

Par la suite :

$$E = vB$$

D'où :

$$v = \frac{E}{B}$$

b) Valeur du champ B :

Nous avons :

$$v = \frac{E}{B}$$

On en déduit :

$$B = \frac{E}{v}$$

$$E = \frac{U}{d_2} \Rightarrow$$

$$B = \frac{U}{d_2 v}$$

$$v = v_2 \Rightarrow$$

$$B = \frac{U}{d_2 v_2}$$

AN :

$$B = \frac{4 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-2} \times 5,23 \cdot 10^5} = 9,56 \cdot 10^{-2} \text{T}$$

$$B = 9,56 \cdot 10^{-2} \text{T}$$

5° a) Le rayon de courbure :

$$R = \frac{m_2 v_2}{B'e}$$

AN :

$$R = \frac{1,16 \cdot 10^{-26} \times 5,23 \cdot 10^5}{0,2 \times 1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,18 \text{m}$$

$$R = 18 \text{cm}$$

b) Le temps pour faire un tour est la période T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \frac{v_2}{R} \Rightarrow$$

$$T = \frac{2\pi R}{v_2}$$

Le temps t mis par l'ion pour parcourir le demi-cercle de diamètre op est la moitié de la période :

$$T = \frac{2\pi R}{v_2} \Rightarrow$$

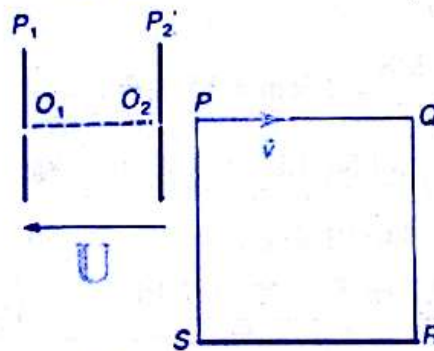
$$t = \frac{T}{2}$$

$$t = \frac{\pi R}{v_2} = \frac{3,14 \times 0,18}{5,23 \cdot 10^5} = 1,08 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$t = 1,08 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

3_ Déviation des deutons par un champ magnétique

Des deutons (noyaux de deutérium ${}^2_1\text{H}^+$) pénètrent sans vitesse initiale, en o_1 dans le champ électrique uniforme \vec{E} existant entre deux plaques P_1 et P_2 . La différence de potentiel entre les plaques est U . A la sortie du champ électrique en o_2 ils entrent en M dans un carré PQRS de 5 cm de côté où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} , avec une vitesse \vec{v} colinéaire à MN. Le vecteur \vec{B} est perpendiculaire au plan du carré et a pour valeur $B = 0,25\text{T}$.



1° Les particules arrivent en S.

- Préciser le sens de \vec{B} .
- Quelle est la nature du mouvement des deutons entre P et S. Calculer la vitesse des deutons en S.
- Calculer la valeur de la tension accélératrice U pour que les deutons arrivent en S.

2° La distance séparant les plaques est $o_1o_2 = 10\text{cm}$.

- Quelle est la nature du mouvement des particules entre o_1 et o_2 ?
- Calculer la durée du trajet o_1o_2

On donne : charge électrique élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

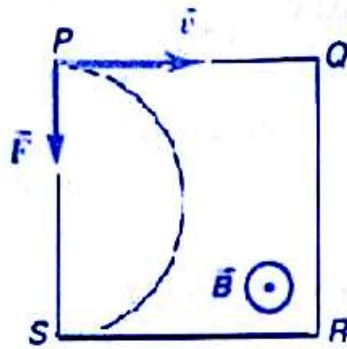
masse du deuton : $m_{D^+} = 2u$

$1u = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Solution

1° a) La force magnétique \vec{F} est perpendiculaire à la vitesse \vec{v} et dirigée vers le centre de la trajectoire. Le trièdre $(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct (le pouce, l'index et le majeur de la main

droite sont placés respectivement les vecteurs \vec{v} , \vec{B} et \vec{F}). Le vecteur \vec{B} est perpendiculaire au plan de la figure et dirigé vers l'avant :



b) Le mouvement des particules dans le champ magnétique est circulaire et uniforme. Le rayon de la trajectoire des deutons est :

$$R_{D^+} = \frac{m_{D^+} v}{Bq}$$

On en déduit :

$$v = \frac{R_{D^+} Bq}{m_{D^+}}$$

$$R_{D^+} = \frac{MS}{2} = 2,5\text{cm} = 2,5 \cdot 10^{-2}\text{m}$$

$$m_{D^+} = 2 \times 1,66 \cdot 10^{-27} = 3,32 \cdot 10^{-27}\text{kg}$$

$$q = e = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$$

AN :

$$v = \frac{2,5 \cdot 10^{-2} \times 0,25 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{3,32 \cdot 10^{-27}} = 3 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\boxed{v = 3 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

c) Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre o_1 et o_2 :

$$\frac{1}{2} m_{D^+} v^2 = qU$$

D'où :

$$U = \frac{m_{D^+} v^2}{2q} = \frac{3,32 \cdot 10^{-27} \times (3 \cdot 10^5)^2}{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19}} = 933,75\text{V}$$

$$\boxed{U = 933,75\text{V}}$$

2° a) Le mouvement des deutons entre o_1 et o_2 est rectiligne et uniformément varié d'accélération a.

b) La vitesse initiale étant nulle, l'équation horaire des espaces est donc :

$$x = \frac{1}{2} at^2 \quad (1)$$

La vitesse d'un deuton sur le trajet $o_1 o_2$ est, par conséquent :

$$v = at \quad (2)$$

D'après la relation (2) : $t = \frac{v}{a}$ (3)

En remplaçant t par sa valeur dans la relation (1), on obtient :

$$x = \frac{1}{2} a \left(\frac{v^2}{a^2} \right) = \frac{v^2}{2a}$$

D'où : $v^2 = 2ax$

On en déduit l'accélération d'une particule dans le champ électrique :

$$a = \frac{v^2}{2x}$$

AN: $v = 3 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $x = 0,02 = 10 \text{ cm} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

$$a = \frac{(3 \cdot 10^5)^2}{2 \times 10 \cdot 10^{-2}} = 4,5 \cdot 10^{11} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

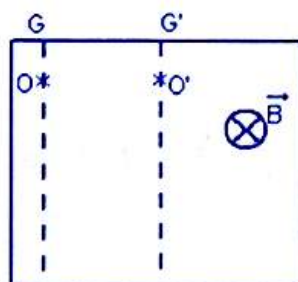
La relation (3) permet de calculer la durée du trajet :

$$t = \frac{v}{a} = \frac{3 \cdot 10^5}{4,5 \cdot 10^{11}} = 6,66 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

$$t = 6,66 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

4_ Accélération d'ions négatifs entre deux grilles G et G'

Des ions négatifs de charge q et de masse m sont émis dans le vide, pratiquement sans vitesse initiale, en un point O d'une grille plane G verticale. Ces ions sont accélérés par un champ électrostatique \vec{E} dû à une tension U appliquée entre la grille G et une autre grille G' parallèle à G (on obtient le même champ qu'entre deux plaques parallèles portées à des potentiels différents, mais les ions peuvent traverser les grilles).



1° a) Comparer les potentiels v_G et $v_{G'}$ pour que les ions soient accélérés entre G et G'. Sur un schéma on indiquera la direction et le sens de \vec{E} .

b) Exprimer la tension accélérative U en fonction de v_G et $v_{G'}$.

2° Les ions émis en O atteignent G' en un point O' avec une vitesse \vec{v} . Exprimer en fonction de q , U et m la norme v de ce vecteur- vitesse.

Application numérique : $q = -3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $m = 2,65 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$

$$U = 100 \text{ V}$$

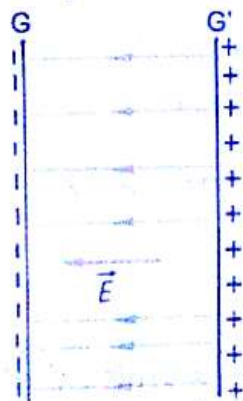
3° Après avoir traversé la grille G' , les ions entrent dans une région où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} orthogonal à \vec{v} dont le module est $B = 0,1T$.

- a) Déterminer la nature du mouvement des ions dans cette région.
 b) Montrer qu'ils reviennent sur G' en un point A. Exprimer $O'A$ en fonction de q , m , B et U . Faire l'application numérique.

4° Quel est le mouvement des ions après leur passage en A ? Reviennent-ils en G ? Si oui avec quelle vitesse ? Décrire le mouvement des ions jusqu'aux limites des champs \vec{B} et \vec{E} .

Solution

1° a) Les ions négatifs sont entraînés dans le sens contraire du vecteur champ électrique \vec{E} , c'est à dire dans le sens des potentiels croissants. Puisque les ions vont de G à G' , le potentiel de G' est supérieur au potentiel de G : $v_{G'} > v_G$.



b) La tension U est égale à la différence de potentiels entre G' et G :

$$U = v_{G'} - v_G = |v_G - v_{G'}|$$

2° Appliquons le théorème de l'énergie cinétique aux ions entre G et G' :

$$\frac{1}{2}mv^2 = |q|U$$

D'où :

$$v = \sqrt{\frac{2|q|U}{m}}$$

AN :

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 3,2 \cdot 10^{-19} \times 100}{2,65 \cdot 10^{-26}}} = 4,91 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v = 4,91 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

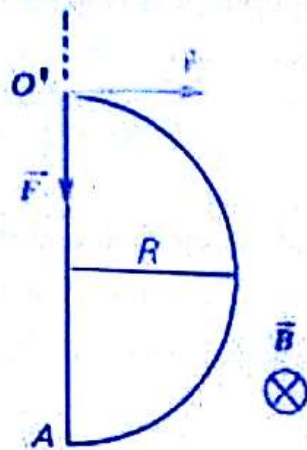
3° a) Dans le champ magnétique, les ions sont soumis à la force magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Cette force étant perpendiculaire à la vitesse \vec{v} , son travail est donc nul. En conséquence l'énergie cinétique ne varie pas. Le mouvement est donc uniforme. En plus, l'accélération

des ions est : $\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{v} \wedge \vec{B}$. Cette accélération, perpendiculaire à la vitesse, est centripète :

le mouvement est circulaire. En conclusion : le mouvement des ions dans le champ \vec{B} est circulaire et uniforme.

b) Expression de O'A



Les ions décrivent un demi-cercle de rayon $R = \frac{O'A}{2} \Rightarrow O'A = 2R$

Par ailleurs :

$$R = \frac{mv}{B|q|}$$

or :

$$v = \sqrt{\frac{2|q|U}{m}}$$

Donc :

$$R = \frac{m \sqrt{\frac{2|q|U}{m}}}{B|q|} = \frac{\sqrt{2m^2|q|U}}{B|q|} = \frac{\sqrt{2m|q|U}}{B|q|}$$

ou encore

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m|q|U}{|q|^2}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{|q|}}$$

$O'A = 2R \Rightarrow$

$$O'A = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2mU}{|q|}}$$

AN :

$$O'A = \frac{2}{0,1} \sqrt{\frac{2 \times 2,65 \cdot 10^{-26} \times 100}{3,2 \cdot 10^{-19}}} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$O'A = 8 \text{ cm}$$

4° A partir du trou A, les ions sont lancés dans le champ électrique dans le sens des potentiels décroissants avec une vitesse \vec{v} . Ils sont donc décélérés par le champ \vec{E} .

Soit \vec{v}' leur vitesse au niveau de la grille G. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué aux ions entre G' et G donne :

$$\frac{1}{2} m v'^2 - \frac{1}{2} m v^2 = qU$$

soit :

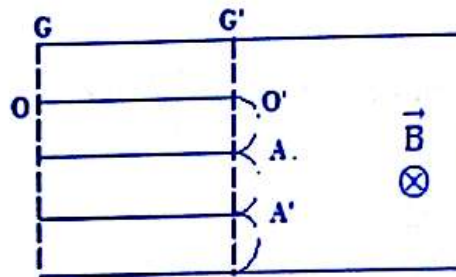
$$\frac{1}{2} m v'^2 = qU + \frac{1}{2} m v^2$$

Par la suite :
$$v'^2 = \frac{2qu}{m} + v^2$$

D'après la question n°2 :
$$\frac{2qU}{m} = -v^2$$

Par conséquent :
$$v'^2 = -v^2 + v^2 = 0 \Rightarrow v' = 0$$

Les ions regagnent la grille G avec une vitesse nulle. Ils seront de nouveau accélérés vers la grille G' en sens inverse par le champ \vec{E} . Arrivés en A ils feront un demi-cercle dans le champ \vec{B} avant de pénétrer dans le champ électrique par un trou A' situé à 8cm de A et le cycle reprend.

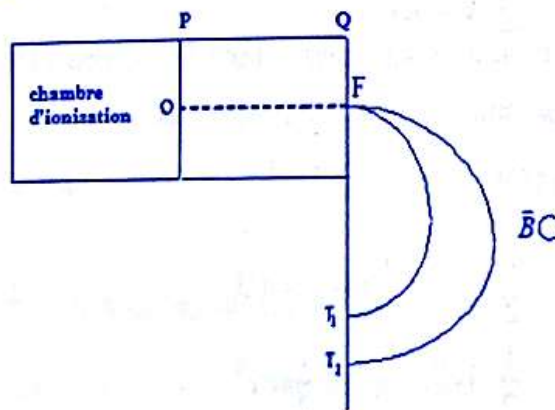


5_ Séparation des isotopes d'uranium

L'uranium naturel contient essentiellement deux types d'isotopes : ${}_{92}^{235}\text{U}$ et ${}_{92}^{238}\text{U}$.

Pour les séparer on les transforme dans une chambre d'ionisation en ions ${}_{92}^{235}\text{U}^+$ et ${}_{92}^{238}\text{U}^+$. Ces ions sont ensuite introduits sans vitesse initiale en O dans une chambre d'accélération limitée par deux plaques parallèles P et Q. La tension électrique entre les plaques est $U = V_P - V_Q$.

Grâce à une fente F pratiquée dans la plaque Q, les ions pénètrent dans une région où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} orthogonal aux vitesses \vec{v}_1 et \vec{v}_2 des ions de norme $B = 0,2\text{T}$.



1° Exprimer les vitesses v_1 et v_2 respectivement des ions ${}^{235}_{92}\text{U}^+$ et ${}^{238}_{92}\text{U}^+$ en fonction des masses respectives m_1 et m_2 , de leur charge q et de la tension U .

2° Les masses m_1 et m_2 des ions seront déterminées à partir des masses m_p du proton et m_N du neutron. La masse des électrons sera considérée comme négligeable.

Calculer v_1 et v_2

On donne : $m_p = m_N = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$; $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$$U = 4 \cdot 10^3 \text{ V.}$$

3° Au delà de la fente F, les ions décrivent des trajectoires circulaires de rayons R_1 et R_2 et sont recueillis aux points T_1 et T_2 .

- Indiquer en le justifiant le sens du vecteur \vec{B} .
- Calculer les rayons de courbure R_1 et R_2 .
- Calculer la distance T_1T_2 séparant les deux tas.

Solution

1° Appliquons le théorème de l'énergie cinétique aux deux ions dans le champ électrique existant entre les plaques P et Q.

Ions ${}^{235}_{92}\text{U}^+$: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 = qU$

D'où :
$$v_1 = \sqrt{\frac{2qU}{m_1}}$$

De même, avec les ions ${}^{238}_{92}\text{U}^+$, on obtient :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2qU}{m_2}}$$

2° La somme des nucléons (protons et neutrons) de l'ion ${}^{235}_{92}\text{U}^+$ est 235. La masse de cet ion est donc :

$$m_1 = 235m_p = 235 \times 1,67 \cdot 10^{-27} = 3,92 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$$

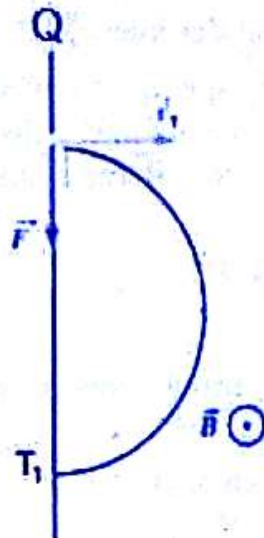
La vitesse de cet ion est :
$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 4000}{3,92 \cdot 10^{-25}}} = 5,71 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

De même : $m_2 = 238m_p = 238 \times 1,67 \cdot 10^{-27} = 3,97 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 4000}{3,97 \cdot 10^{-25}}} = 5,67 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\boxed{\begin{matrix} v_1 = 5,71 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ v_2 = 5,67 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{matrix}}$$

3° a) La force magnétique \vec{F} qui s'exerce sur un ion est perpendiculaire à sa vitesse et dirigée vers le centre de la trajectoire circulaire.



Le trièdre $(q\vec{v}_1, \vec{B}, \vec{F})$ étant direct, le vecteur \vec{B} est perpendiculaire au plan de la figure et dirigé vers l'avant comme l'indique la figure ci dessus.

b) Les rayons de courbures des trajectoires sont :

$$R_1 = \frac{m_1 v_1}{Bq} = \frac{3,92 \cdot 10^{-25} \times 5,71 \cdot 10^4}{0,2 \times 1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,69 \text{m} = 69 \text{cm}$$

$$R_2 = \frac{m_2 v_2}{Bq} = \frac{3,97 \cdot 10^{-25} \times 5,67 \cdot 10^4}{0,2 \times 1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,70 \text{m} = 70 \text{cm}$$

$$\boxed{R_1 = 69 \text{cm}}$$

$$\boxed{R_2 = 70 \text{cm}}$$

c) La distance séparant les deux tas :

$$T_1 T_2 = 2R_2 - 2R_1 = 2(R_2 - R_1)$$

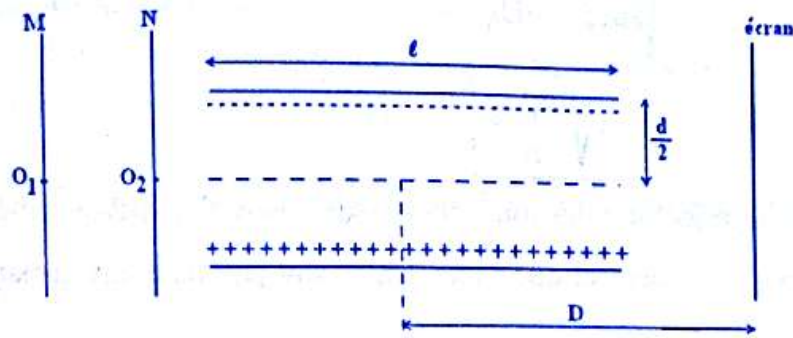
soit :

$$T_1 T_2 = 2(70 - 69) = 2 \text{cm}$$

$$\boxed{T_1 T_2 = 2 \text{cm}}$$

6_ Séparation des isotopes du magnésium

Des ions Mg^{2+} sortant d'une chambre d'ionisation, pénètrent avec une vitesse négligeable par un trou o_1 dans l'espace compris entre deux plaques M et N. Lorsqu'on applique entre les plaques une tension $U_0 = |V_M - V_N|$, les ions atteignent le trou o_2 avec la vitesse \vec{v}_0 .



1° Quelle plaque (M ou N) doit-on porter au potentiel le plus élevé ? Pourquoi ? Exprimer v_0 en fonction de la charge q et de la masse m d'un ion, ainsi que de U_0 .

2° A la sortie de o_2 , les ions ayant cette vitesse \vec{v}_0 , pénètrent entre les armatures d'un condensateur. La longueur des armatures est l et leur écartement est d . Un écran vertical est situé à la distance D du centre des armatures. On applique entre les armatures une tension U créant un champ électrique vertical.

- a) Etablir l'équation de la trajectoire des ions à l'intérieur du condensateur en fonction de U_0 , U et d .
- b) Trouver l'expression de la déflexion électrique Y .

3° Dans l'espace entre les armatures, on superpose au champ électrique vertical, un champ magnétique horizontal \vec{B} . Le mouvement des ions dans le condensateur est rectiligne uniforme et horizontal.

- a) indiquez le sens de \vec{B} .
- b) Exprimer U en fonction de U_0 , m , d , B et q .

4° En réalité, le magnésium est formé des isotopes ${}^{24}_{12}\text{Mg}^{2+}$; ${}^{A_1}_{12}\text{Mg}^{2+}$ et ${}^{A_2}_{12}\text{Mg}^{2+}$ de masses respectives m_1 , m_2 et m_3 .

Lorsque $U = U_1 = 228\text{V}$, seuls les ions ${}^{24}_{12}\text{Mg}^{2+}$ ont la trajectoire rectiligne.

Lorsque $U = U_2 = 223\text{V}$, seuls les ions ${}^{A_1}_{12}\text{Mg}^{2+}$ ont la trajectoire rectiligne.

Lorsque $U = U_3 = 219\text{V}$, seuls les ions ${}^{A_2}_{12}\text{Mg}^{2+}$ ont la trajectoire rectiligne.

- a) Exprimer le rapport $\frac{U_2}{U_1}$ en fonction de m_1 et m_2 . En déduire le rapport $\frac{U_3}{U_1}$
- b) Calculer A_1 et A_2 .

Données: la masse d'un ion est $m = Au$ (A est le nombre de masse)

$$1u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Solution

1° Les ions Mg^{2+} de charge positive $q = +2e$ sont entraînés dans le sens du champ électrique, c'est à dire dans le sens des potentiels décroissants. Le potentiel de la plaque M doit être élevé par rapport au potentiel de la plaque N.

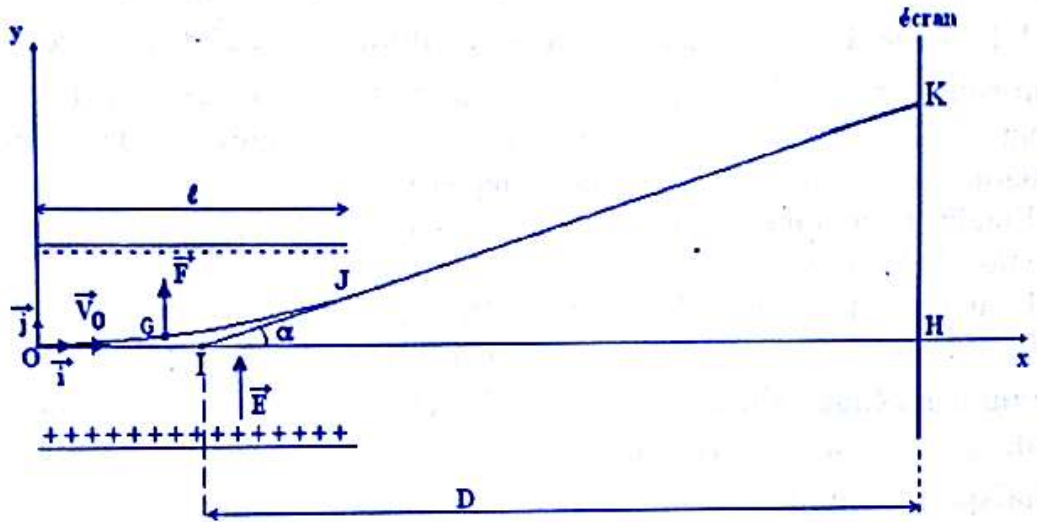
Par ailleurs, le théorème de l'énergie cinétique appliqué aux ions Mg^{2+} entre o_1 et o_2 permet d'écrire :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = qU_0$$

D'où :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2qU_0}{m}}$$

2° a) Pour étudier la trajectoire des ions, choisissons un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) lié aux armatures et supposé galiléen tel que l'axe (o, \vec{i}) soit parallèle aux armatures. Les forces qui s'exercent sur un ion sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$. (\vec{P} est négligeable devant \vec{F}).



La relation fondamentale de la dynamique donne :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

soit :

$$q\vec{E} = m\vec{a}$$

D'où :

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

Les coordonnées de l'accélération \vec{a} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) sont :

$$a_x = \frac{qE_x}{m}$$

$$a_y = \frac{qE_y}{m}$$

Le vecteur champ électrique \vec{E} étant vertical et ascendant, sa composante verticale est donc nulle : $E_x = 0$. Par conséquent $a_x = 0$.

Par contre : $E_y = E$, donc : $a_y = \frac{qE}{m}$

La vitesse initiale \vec{v}_0 est horizontale et de même sens que l'axe (o, \vec{i}) . Donc ses coordonnées sont : $v_{0x} = v_0$ et $v_{0y} = 0$.

En projetant le mouvement suivant les axes ox et oy , on obtient :

- suivant ox : ($a_x = 0$ et $v_{0x} = v_0$) Le mouvement est donc rectiligne uniforme
d'équation horaire : $x = v_{0x}t = v_0t$ (1)

- suivant oy : ($a_y = \frac{qE}{m}$ et $v_{0y} = 0$) Le mouvement est rectiligne et uniformément varié

d'équation horaire : $y = \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2$

$$E = \frac{U}{d} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \frac{qU}{md} t^2 \quad (2)$$

En éliminant t entre les équations (1) et (2), on obtient l'équation de la trajectoire :

$$y = \frac{1}{2} \frac{qU}{mdv_0^2} x^2$$

D'après la question n°1: $m = \frac{2qU_0}{v_0^2}$

En conséquence : $y = \frac{U}{4U_0d} x^2$

$$y = \frac{1}{4} \frac{U}{U_0d} x^2$$

b) La déflexion électrique est la déviation Y du spot lumineux sur l'écran : $Y = HK$.
Considérons le triangle rectangle IKH :

$$\tan \alpha = \frac{HK}{D}$$

soit : $\tan \alpha = \frac{Y}{D}$ (3)

Par ailleurs, à la sortie du condensateur, les ions ne sont soumis à l'action d'aucune force : leur mouvement est rectiligne suivant un segment de droite tangente à la parabole. Le coefficient directeur de cette droite est la dérivée de y par rapport à la variable x :

Pour $x = \ell$, $\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$.

D'après l'équation de la trajectoire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{U}{2U_0d} x$$

Soit, avec $x = \ell$: $\frac{dy}{dx} = \frac{U}{2U_0d} \ell$

Donc : $\tan \alpha = \frac{U\ell}{2U_0d}$ (4)

(3) et (4) $\Rightarrow \frac{Y}{D} = \frac{U\ell}{2U_0d}$

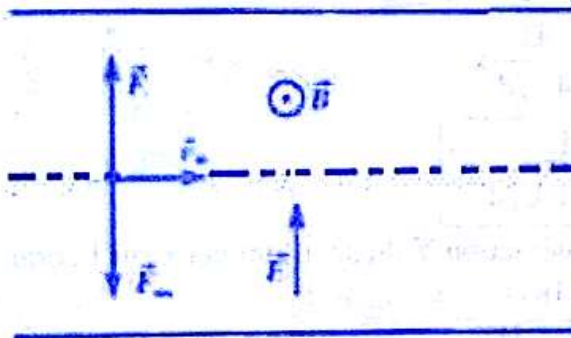
D'où : $Y = \frac{1}{2} \frac{U\ell D}{U_0d}$

3° a) Dans le champ magnétique, les ions sont soumis à la force magnétique $\vec{F}_m = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$. La trajectoire des ions dans le condensateur sera rectiligne si la force magnétique compense la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$:

$$\vec{F} + \vec{F}_m = \vec{0}$$

La force \vec{F}_m est donc verticale, dirigée vers le bas. Le trièdre $(q\vec{v}_0, \vec{B}, \vec{F}_m)$ est direct (le pouce, l'index et le majeur de la main droite sont placés respectivement sur $q\vec{v}_0, \vec{B}$ et \vec{F}_m).

Le vecteur \vec{B} est donc perpendiculaire au plan de la figure et dirigé vers l'avant selon le schéma suivant :



b) Nous avons : $\vec{F} + \vec{F}_m = \vec{0}$

ou encore : $F = F_m$

Soit : $qE = qv_0B$

Par la suite : $E = v_0B$

Autrement : $\frac{U}{d} = v_0B$

$v_0 = \sqrt{\frac{2qU_0}{m}} \Rightarrow \frac{U}{d} = B\sqrt{\frac{2qU_0}{m}}$

Enfinement : $U = dB\sqrt{\frac{2qU_0}{m}}$

4° a) $U_1 = dB\sqrt{\frac{2qU_0}{m_1}}$

$U_2 = dB\sqrt{\frac{2qU_0}{m_2}}$

Donc :
$$\frac{U_2}{U_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

De même :
$$\frac{U_3}{U_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m_3}}$$

b)

$m_1 = 24u$ et $m_2 = A_1u \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \sqrt{\frac{24u}{A_1u}}$

soit :
$$\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 = \frac{24}{A_1}$$

Ou encore :
$$\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 = \frac{A_1}{24}$$

En conséquence :
$$A_1 = 24 \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2$$

soit :
$$A_1 = 24 \times \left(\frac{228}{223}\right)^2 = 25$$

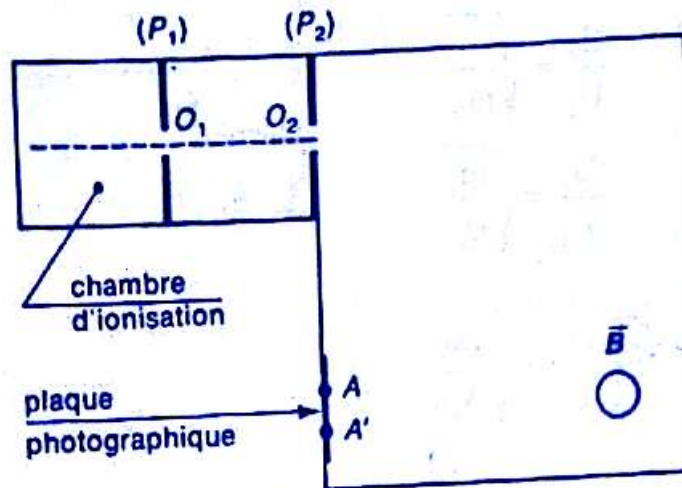
De même :
$$\frac{U_3}{U_1} = \sqrt{\frac{24u}{A_2u}}$$

D'où :
$$A_2 = 24 \left(\frac{U_1}{U_3}\right)^2 = 24 \times \left(\frac{228}{219}\right)^2 = 26$$

$A_1 = 25$
$A_2 = 26$

7_ Détermination du nombre de masse d'un isotope de zinc

Une chambre d'ionisation produit des ions ${}^{68}\text{Zn}^{2+}$ et ${}^x\text{Zn}^{2+}$ de masses respectives $m_1 = 68u$ et $m_2 = xu$. Ces ions sont ensuite accélérés dans le vide entre deux plaques parallèles P_1 et P_2 . La tension accélératrice a pour valeur $U = 1000V$. Les ions pénètrent ensuite dans une région où règne un champ magnétique \vec{B} orthogonal au plan de la figure, d'intensité $B = 0,1T$.



- 1° Calculer la vitesse v_1 des ions $^{68}\text{Zn}^{2+}$ lorsqu'ils arrivent en O_2 . Exprimer la vitesse v_2 des ions $^{\text{x}}\text{Zn}^{2+}$ en O_2 en fonction de v_1 et de x .
- 2° Indiquer sur un schéma le sens du vecteur \vec{B} pour que les ions $^{68}\text{Zn}^{2+}$ parviennent en A et les ions $^{\text{x}}\text{Zn}^{2+}$ en A' .
- 3° Calculer le rayon de courbure pour les ions $^{68}\text{Zn}^{2+}$ dans le champ \vec{B} .
- 4° On donne $AA' = 8\text{mm}$. Calculer x .

Donnée: $1u = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{kg}$
 $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$

Solution

1° Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à l'ion Zn^{2+} entre o_1 et o_2 :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = qU$$

On en déduit :
$$v_1 = \sqrt{\frac{2qU}{m_1}}$$

Application numérique :

$$q = 2e = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{C} \quad m_1 = 68u = 68 \times 1,67 \cdot 10^{-27} = 1,14 \cdot 10^{-25} \text{kg}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \times 3,2 \cdot 10^{-19} \times 1000}{1,14 \cdot 10^{-25}}} = 7,49 \cdot 10^4 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_1 = 7,49 \cdot 10^4 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

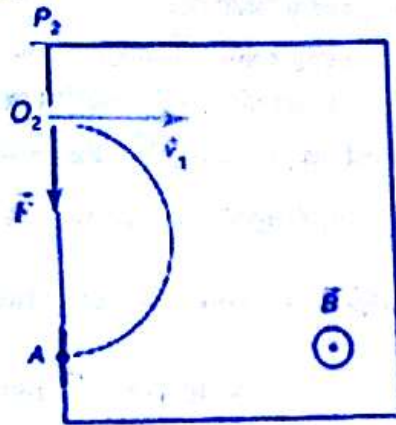
De même :
$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = qU$$

soit :
$$v_2 = \sqrt{\frac{2qU}{m_2}} = \sqrt{\frac{2qU}{xu}}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2qU}{68u}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{68}{x}}$$

D'où:
$$v_2 = v_1 \sqrt{\frac{68}{x}}$$

2° Le trièdre $(q\vec{v}_1, \vec{B}, \vec{F})$ est direct (Le pouce, l'index et le majeur de la main droite sont placés respectivement sur $q\vec{v}_1, \vec{B}$ et \vec{F}). Le vecteur \vec{B} est perpendiculaire au plan de la figure et dirigé vers l'avant :



3° Le rayon de courbure de la trajectoire des ions $^{68}\text{Zn}^{2+}$ est:

$$R_1 = \frac{m_1 v_1}{Bq}$$

soit :
$$R_1 = \frac{1,14 \cdot 10^{-25} \times 7,49 \cdot 10^4}{0,1 \times 3,2 \cdot 10^{-19}} = 2,64 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

$$R_1 = 2,64 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

4° Nous avons :

$$AA' = 2R_2 - 2R_1$$

D'où :

$$R_2 = \frac{AA' + 2R_1}{2}$$

soit:

$$R_2 = \frac{8 \cdot 10^{-3} + 2 \times 2,64 \cdot 10^{-1}}{2} = 2,7 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

Par ailleurs :

$$R_2 = \frac{m_2 v_2}{Bq}$$

$$v_2 = v_1 \sqrt{\frac{68}{x}} ; m_2 = xu : R_2 = \frac{xuv_1}{Bq} \sqrt{\frac{68}{x}} = \frac{uv_1}{Bq} \sqrt{68x^2}$$

soit :

$$R_2 = \frac{v_1 u}{Bq} \sqrt{68x}$$

AN :

$$R_2 = \frac{7,49 \cdot 10^4 \times 1,67 \cdot 10^{-27}}{0,1 \times 3,2 \cdot 10^{-19}} \sqrt{68x} = 3,9 \cdot 10^{-3} \sqrt{68x}$$

On en déduit :

$$\sqrt{68x} = \frac{R_2}{3,9 \cdot 10^{-3}} = \frac{0,27}{3,9 \cdot 10^{-3}} = 69,23$$

Par la suite : $68x = (69,23)^2$

D'où : $x = \frac{(69,23)^2}{68} = 70$

$x = 70$

8_ Accélération de protons par un cyclotron

Juste avant de s'échapper d'un cyclotron, des protons décrivent un cercle de 420mm de rayon. La fréquence de la tension alternative appliquée entre les D est $f = 10^7$ Hz. La masse d'un proton est $m_p = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg; leur charge est $+e$.

1° Calculer la valeur du champ magnétique, la vitesse des protons et leur énergie cinétique à la sortie de l'appareil.

2° Quel est le nombre minimal de tours complets effectués par les protons si la tension maximale entre les D est de 20kV ?

3° Dans ce même cyclotron, on introduit des deutons de masse $m_{D^+} = 3,34 \cdot 10^{-27}$ kg et de charge $+e$.

a) Calculer la fréquence de la tension alternative à appliquer.

b) Quelle sera la vitesse d'éjection des deutons ? Déterminer leur énergie cinétique à la sortie de l'appareil.

On donne : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C

Solution

1° La vitesse angulaire des protons est :

$$\omega = 2\pi f = 2 \times 3,14 \times 10^7 = 6,28 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

D'autre part : $\omega = \frac{Be}{m_p}$

D'où : $B = \frac{\omega \cdot m_p}{e}$

AN : $B = \frac{6,28 \cdot 10^7 \times 1,66 \cdot 10^{-27}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,65 \text{ T}$

$B = 0,65 \text{ T}$

La vitesse des protons à la sortie de l'appareil (vitesse maximale) :

$v_{\max} = \omega R_{\max}$

$R_{\max} = 420 \text{ mm} = 0,42 \text{ m} \Rightarrow v_{\max} = 6,28 \cdot 10^7 \times 0,42 = 2,64 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$v_{\max} = 2,64 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Energie cinétique des protons à la sortie de l'appareil :

$$E_{C_{\max}} = \frac{1}{2} m_p v_{\max}^2$$

$$E_{C_{\max}} = \frac{1}{2} \times 1,66 \cdot 10^{-27} \times (2,64 \cdot 10^7)^2 = 5,78 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$\boxed{E_{C_{\max}} = 5,78 \cdot 10^{-13} \text{ J}}$$

2° Nombre minimal de tours complets effectués :
Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m v_{\max}^2 = 2neU_{\max}$$

Ou encore :

$$E_{C_{\max}} = 2neU_{\max}$$

On en déduit :

$$n = \frac{E_{C_{\max}}}{2eU_{\max}} = \frac{5,78 \cdot 10^{-13}}{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 20 \cdot 10^3} = 90,31 \approx 90 \text{ trs}$$

$$\boxed{n = 90 \text{ trs}}$$

3° a) La nouvelle vitesse angulaire est :

$$\omega' = \frac{Be}{m_{D^+}} = \frac{0,65 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{3,34 \cdot 10^{-27}} = 31,13 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Par conséquent, la nouvelle fréquence est :

$$f' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{31,13 \cdot 10^6}{2 \times 3,14} = 4,95 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

$$\boxed{f' = 4,95 \cdot 10^6 \text{ Hz}}$$

b) Vitesse d'éjection des deutons :

$$v'_{\max} = \omega' R_{\max} = 31,13 \cdot 10^6 \times 0,42 = 1,3 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\boxed{v'_{\max} = 1,3 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Energie cinétique des deutons à la sortie du cyclotron :

$$E'_{C_{\max}} = \frac{1}{2} m_{D^+} v'^2_{\max}$$

$$E'_{C_{\max}} = \frac{1}{2} \times 3,34 \cdot 10^{-27} \times (1,3 \cdot 10^7)^2 = 2,82 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$\boxed{E'_{C_{\max}} = 2,82 \cdot 10^{-13} \text{ J}}$$

Calorimétrie

1 Mesure d'une quantité de chaleur

La mesure des quantités de chaleur constitue la calorimétrie. Pour mesurer une quantité de chaleur, on utilise les effets produits sur un corps lorsqu'il reçoit ou cède cette quantité de chaleur.

1.1 Echange de chaleur

Un échange de chaleur entre deux corps a toujours lieu spontanément du corps chaud vers le corps froid.

1.2 Equilibre thermique

Deux corps à la même température n'échangent pas globalement de chaleur. Ils sont en équilibre thermique.

1.3 Les effets d'un échange de chaleur

Lorsqu'un corps reçoit ou cède de la chaleur, il se produit :

- soit une variation de sa température ;
- soit un changement de son état physique à température constante.

2 Chaleur de variation de température

2.1 Capacité calorifique d'un corps

La capacité calorifique ou capacité thermique μ d'un corps est la quantité de chaleur qu'il faut fournir à ce corps pour l'échauffer de un degré Celsius.

Autrement dit, si un corps reçoit la quantité de chaleur Q et s'échauffe de la température θ_i à la température θ_f , la capacité calorifique de ce corps est :

$$\mu = \frac{Q}{\theta_f - \theta_i}$$

D'où :

$$Q = \mu(\theta_f - \theta_i)$$

L'unité de capacité calorifique dans le système international est le joule par Kelvin ($J \cdot K^{-1}$).

Propriété : si un système comprend n corps de capacités calorifiques respectives $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ l'ensemble est équivalent à un seul corps de capacité calorifique μ telle que :

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n$$

2.2 Chaleur massique d'un corps

La chaleur massique c d'un corps homogène de masse m , est la quantité de chaleur qu'il faut fournir à l'unité de masse de ce corps pour augmenter sa température de un degré Celsius.

$$c = \frac{\mu}{m}$$

D'où :

$$\mu = mc$$

La capacité calorifique s'exprime en joule par kelvin par kilogramme ($J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$).

2.3 Chaleur reçue ou chaleur cédée

Lorsque la température d'un corps varie de θ_i à θ_f , il reçoit (ou cède) la quantité de chaleur :

$$Q = \mu(\theta_f - \theta_i) = mc(\theta_f - \theta_i)$$

$$Q = mc(\theta_f - \theta_i)$$

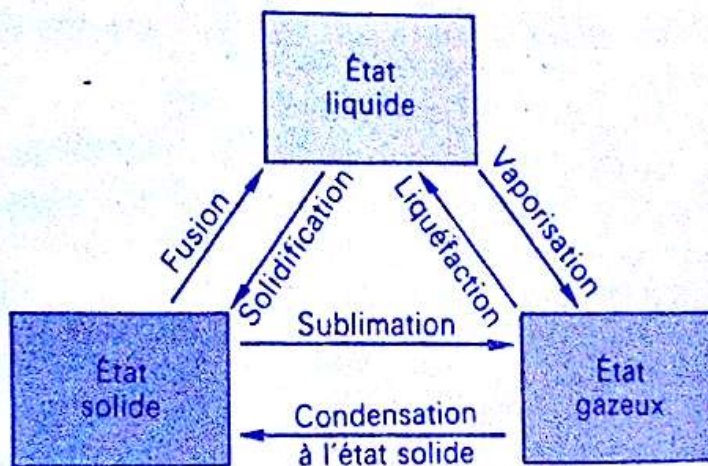
Si le corps a reçu de la chaleur, $\theta_f > \theta_i \Rightarrow Q > 0$

Si au contraire, il a cédé de la chaleur, $\theta_f < \theta_i \Rightarrow Q < 0$.

3 Chaleur de changement d'état physique à température constante

3.1 Les changements d'état physique

Les trois états physiques de la matière sont : l'état solide, l'état liquide et l'état gazeux. Les divers changements d'état physiques sont représentés dans le tableau ci-dessous :



3.2 Chaleur latente de changement d'état physique

La chaleur latente L d'un changement d'état d'un corps de masse m , est la quantité de chaleur Q_L reçue ou cédée par l'unité de masse du corps pur lors de son changement d'état :

$$L = \frac{Q_L}{m}$$

Exemple : la chaleur latente de fusion de la glace est $L = 3,34 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$

4 Mesures calorimétriques

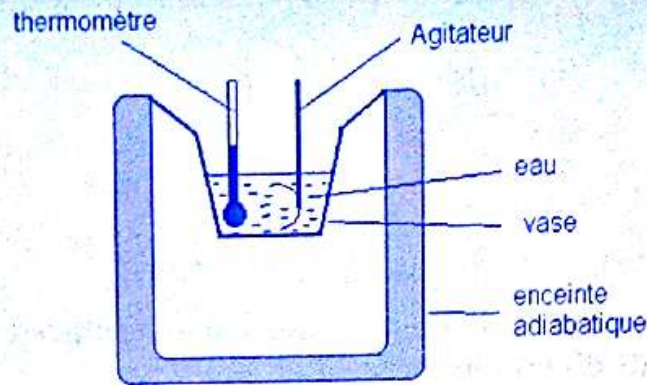
4.1 Enceinte adiabatique

Une enceinte adiabatique est une enceinte dont la paroi est imperméable à la chaleur.

4.2 Principe calorimétrique

Un calorimètre est essentiellement constitué d'un vase et des accessoires (thermomètre et agitateur). Le vase est dans une enceinte adiabatique.

On introduit dans le calorimètre une masse M d'eau. L'eau, le vase et les accessoires auront une température θ_i .



Si en plus, on introduit dans le vase une substance de masse m portée à une température θ_2 , la température de l'ensemble, devient θ_f .

Soient Q_1 , la quantité de chaleur reçue ou cédée par le vase calorimétrique, les accessoires et l'eau et Q_2 la quantité de chaleur reçue ou cédée par la substance.

A l'équilibre thermique on a :

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

4.3 Mesure de la chaleur latente de fusion de la glace

Dans le vase d'un calorimètre, on introduit une masse M d'eau de chaleur massique c_e . Le vase calorimétrique, les accessoires et l'eau sont à une température θ_1 . La capacité calorifique du vase et des accessoires est μ .

On ajoute dans le vase un morceau de glace de masse m , pris à la température $\theta_2 < 0$. La température finale d'équilibre est θ_f .

En se refroidissant de θ_1 à θ_f , le vase calorimétrique et l'eau cèdent la quantité de chaleur :

$$Q_1 = (\mu + Mc_e)(\theta_f - \theta_1)$$

Le morceau de glace de chaleur massique c et de chaleur latente de fusion L , reçoit les quantités de chaleur suivantes :

– chaleur de variation de température de θ_2 à 0°C : $Q = mc(0 - \theta_2) = -mc\theta_2$

– chaleur de changement d'état à 0°C : $Q_L = mL$

– chaleur de variation de température de 0°C à θ_f : $Q' = mc_e(\theta_f - 0) = mc_e\theta_f$

Au total, le morceau de glace reçoit la quantité de chaleur :

$$Q_2 = Q + Q_L + Q' = -mc\theta_2 + mL + mc_e\theta_f$$

A l'équilibre thermique, on a :

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

Soit :

$$(\mu + Mc_e)(\theta_f - \theta_1) - mc\theta_2 + mL + mc_e\theta_f = 0$$

D'où :

$$L = \frac{mc\theta_2 - (\mu + Mc_e)(\theta_f - \theta_1) - mc_e\theta_f}{m}$$

1_ Chaleur de fusion de la glace

Un calorimètre contient une masse $m = 350\text{g}$ d'eau à 16°C . La capacité calorifique du vase et des accessoires est $80\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$.

1° On plonge dans l'eau de ce calorimètre un morceau de glace de masse $m_1 = 50\text{g}$ prélevé à la température de -18°C . Quelle est la température finale d'équilibre sachant que toute la glace a fondu ?

2° On ajoute dans le calorimètre un nouveau morceau de glace de masse $m_2 = 50\text{g}$, toujours prélevé à la température de -18°C . On constate que ce nouveau morceau de glace ne fond pas entièrement. Quelle est la masse de glace restante ?

Données : chaleur massique de l'eau : $c = 4180\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

chaleur massique de la glace : $c' = 2100\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

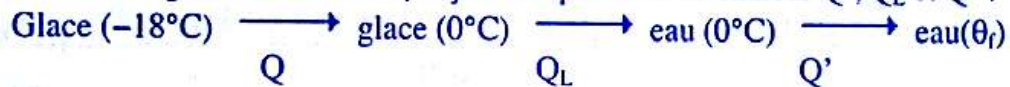
chaleur latente de fusion de la glace : $L = 334\cdot 10^3\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}$

Solution

1° Le calorimètre de capacité calorifique μ et l'eau de capacité calorifique mc constituent un système de capacité calorifique totale $\mu + mc$. Ce système, en se refroidissant de 16°C à la température finale θ_f cède la quantité de chaleur :

$$Q_1 = (\mu + mc)(\theta_f - 16)$$

Le morceau de glace de masse m_1 reçoit les quantités de chaleur Q , Q_L et Q' :



– chaleur sans changement d'état pour passer de -18°C à 0°C à l'état solide :

$$Q = m_1 c' (0 - (-18)) = 18m_1 c'$$

– chaleur de changement d'état pour fondre à 0°C :

$$Q_L = m_1 L$$

– chaleur sans changement d'état pour passer de 0°C à $\theta_f^\circ\text{C}$ à l'état d'eau liquide :

$$Q' = m_1 c (\theta_f - 0)$$

Au total, m_1 reçoit la quantité de chaleur :

$$Q_2 = Q + Q_L + Q'$$

Soit :

$$Q_2 = 18m_1 c' + m_1 L + m_1 c \theta_f$$

A l'équilibre thermique : $Q_1 + Q_2 = 0$

soit :

$$(\mu + mc)(\theta_f - 16) + 18m_1 c' + m_1 L + m_1 c \theta_f = 0$$

ou encore :

$$\theta_f (\mu + mc) - 16(\mu + mc) + 18m_1 c' + m_1 L + m_1 c \theta_f = 0$$

De même :

$$\theta_f (\mu + mc + m_1 c) - 16(\mu + mc) + 18m_1 c' + m_1 L = 0$$

Par la suite :

$$\theta_f (\mu + mc + m_1 c) = 16(\mu + mc) - 18m_1 c' - m_1 L$$

Finalement :

$$\theta_f = \frac{16(\mu + mc) - 18m_1 c' - m_1 L}{m_1 c + \mu + mc}$$

Numériquement : $m = 0,34\text{kg}$; $m_1 = 0,05\text{kg}$

$$\theta_f = \frac{16(80 + 0,35 \times 4180) - 18 \times 0,05 \times 2100 - 0,05 \times 334000}{0,05 \times 4180 + 80 + 0,35 \times 4180} = 3,48^\circ\text{C}$$

$$\theta_f = 3,48^\circ\text{C}$$

2° Si toute la glace n'a pas fondu, la température finale est 0°C . Le calorimètre et la masse d'eau qu'il contient se refroidissent de $3,48^\circ\text{C}$ à 0°C . La quantité de chaleur cédée par le vase calorimétrique et son contenu est alors :

$$Q_1 = (\mu + mc + m_1c)(0 - 3,48) = -3,48(\mu + mc + m_1c)$$

Soit x la masse de glace fondue du second morceau de glace. La masse m_2 reçoit les chaleurs suivantes :

- chaleur sans changement d'état de -18°C à 0°C : $Q = m_2c'(0 - (-18)) = 18m_2c'$

- chaleur de changement d'état pour fondre à 0°C : $Q_L = xL$

Au total m_2 reçoit la chaleur : $Q_2 = Q + Q_L = 18m_2c' + xL$

Equilibre thermique : $Q_1 + Q_2 = 0$

soit : $-3,48(\mu + mc + m_1c) + 18m_2c' + xL = 0$

ou encore $xL = 3,48(\mu + mc + m_1c) - 18m_2c'$

D'où : $x = \frac{3,48(\mu + mc + m_1c) - 18m_2c'}{L}$

AN : $x = \frac{3,48(80 + 0,35 \times 4180 + 0,05 \times 4180) - 18 \times 0,05 \times 2100}{334000} = 10^{-2} \text{ kg}$

La masse de glace fondue est $x = 10^{-2} \text{ kg} = 10 \text{ g}$

La masse de glace non fondue est donc :

$$m_3 = m_2 - x = 50 - 10 = 40 \text{ g}$$

$$m_3 = 40 \text{ g}$$

2_ Chaleur massique de l'aluminium

Un calorimètre contient une masse $m_1 = 100 \text{ g}$ d'eau à la température $\theta_1 = 20^\circ\text{C}$.

On verse dans ce calorimètre une masse $m_2 = 80 \text{ g}$ d'eau à la température $\theta_2 = 50^\circ\text{C}$.

La température finale du mélange est $\theta_f = 32^\circ\text{C}$.

1° Calculer la capacité calorifique du vase calorimétrique et des accessoires.

2° On plonge ensuite dans le calorimètre un objet en aluminium de masse $m = 51 \text{ g}$

porté à la température $\theta_3 = 90^\circ\text{C}$. La température de l'ensemble se stabilise à 35°C .

Calculer la chaleur massique de l'aluminium.

On donne : chaleur massique de l'eau $c_e = 4185 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Solution

1° Le calorimètre de capacité calorifique μ et l'eau de capacité calorifique $m_1 c_e$ constituent un système de capacité calorifique totale $\mu + m_1 c_e$. Ce système reçoit la quantité de chaleur Q_1 pour passer de 20°C à la température finale de 32°C :

$$Q_1 = (\mu + m_1 c_e)(\theta_f - \theta_i)$$

soit :

$$Q_1 = (\mu + m_1 c_e)(32 - 20) = 12(\mu + m_1 c_e)$$

La masse m_2 d'eau cède la quantité de chaleur Q_2 en se refroidissant de 50°C à 32°C :

$$Q_2 = m_2 c_e (32 - 50) = -18m_2 c_e$$

Equilibre thermique on a : $Q_1 + Q_2 = 0$

soit :

$$12(\mu + m_1 c_e) - 18m_2 c_e = 0$$

ou encore :

$$12\mu + 12m_1 c_e - 18m_2 c_e = 0$$

Par la suite :

$$12\mu = 18m_2 c_e - 12m_1 c_e$$

D'où :

$$\mu = \frac{18m_2 c_e - 12m_1 c_e}{12}$$

AN : $m_1 = 100\text{g} = 0,1\text{kg}$; $m_2 = 80\text{g} = 0,08\text{kg}$

$$\mu = \frac{18 \times 0,08 \times 4185 - 12 \times 0,1 \times 4185}{12} = 83,7\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\boxed{\mu = 83,7\text{J} \cdot \text{K}^{-1}}$$

2° le calorimètre et la masse $M = m_1 + m_2$ d'eau reçoivent la quantité de chaleur Q_1 pour s'échauffer de 32°C à 35°C :

$$Q_1 = (\mu + M c_e)(35 - 32) = 3(\mu + M c_e)$$

L'objet en aluminium de chaleur massique c , en se refroidissant de 90°C à 35°C cède la quantité de chaleur :

$$Q_2 = mc(35 - 90) = -55mc$$

A l'équilibre thermique on a :

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

soit :

$$3(\mu + M c_e) - 55mc = 0$$

ou encore :

$$3(\mu + M c_e) = 55mc$$

D'où :

$$c = \frac{3(\mu + M c_e)}{55m}$$

AN : $M = 0,1 + 0,08 = 0,18\text{kg}$; $m = 51\text{g} = 0,051\text{kg}$

$$c = \frac{3(83,7 + 0,18 \times 4185)}{55 \times 0,051} = 895,18\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\boxed{c = 895,18\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}$$

3_ Glaçon en cours de fusion

Un glaçon de masse 10g est à la température de 0°C . On l'échauffe en lui apportant la quantité $Q = 670\text{J}$.

1° a) Toute la glace fond-elle ?

b) Si non, quelle est la température finale et la masse restante de glace ?

2° Dans le vase d'un calorimètre contenant 295g d'eau à la température $\theta_1 = 23,3^\circ\text{C}$, on introduit un second glaçon en cours de fusion, de masse $m = 36,2\text{g}$, à la température $\theta_2 = 0^\circ\text{C}$. Calculer la température finale d'équilibre sachant que toute la glace a fondue. On donne :

chaleur massique de l'eau : $c = 4,185 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

chaleur latente de fusion de la glace : $L = 334 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$

capacité calorifique du vase et des accessoires : $\mu = 77,4 \cdot \text{JK}^{-1}$

Solution

1° a) Déterminons la masse m_f de glace pouvant être fondue par la quantité de chaleur $Q = 670\text{J}$.

$$m_f = \frac{Q}{L} = \frac{670}{334 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 2\text{g}$$

$m_f < 10\text{g}$. Donc toute la glace n'a pas fondu.

b) Au cours d'un changement d'état physique, la température reste constante. En conséquence, la température finale est 0°C .

2° Quantité de chaleur cédée par le vase et les accessoires :

$$Q_1 = (\mu + Mc)(\theta_f - \theta_1)$$

Quantité de chaleur reçue par le glaçon :

$$Q_2 = mL + mc(\theta_f - \theta_2)$$

A l'équilibre thermique, on aura : $Q_1 + Q_2 = 0$

soit : $(\mu + Mc)(\theta_f - \theta_1) + mL + mc(\theta_f - \theta_2) = 0$

ou encore : $\theta_f(\mu + Mc) - \theta_1(\mu + Mc) + mL + \theta_f mc - mc\theta_2 = 0$

par la suite : $\theta_f(\mu + Mc + mc) - \theta_1(\mu + Mc) + mL - mc\theta_2 = 0$

Il s'en suit : $\theta_f(\mu + Mc + mc) = \theta_1(\mu + Mc) - mL + mc\theta_2$

D'où :
$$\theta_f = \frac{\theta_1(\mu + Mc) - mL + mc\theta_2}{\mu + Mc + mc}$$

AN : $M = 0,295\text{kg}$; $m = 0,0362\text{kg}$ $c = 4,185 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $L = 334 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$

$$\theta_f = \frac{23,3(77,4 + 0,295 \times 4185) - 0,0362 \times 334 \cdot 10^3 + 0,0362 \times 4185 \times 0}{77,4 + 0,295 \times 4185 + 0,0362 \times 4185} = 12,62^\circ$$

$\theta_f = 12,62^\circ$

Induction électromagnétique

1 AUTO-INDUCTION

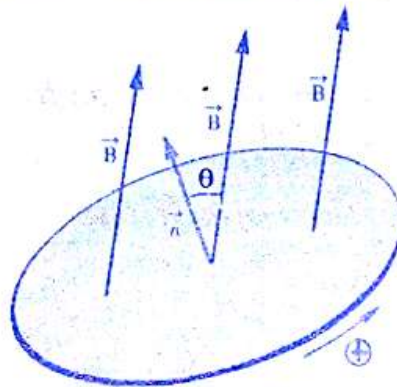
1 Flux magnétique à travers un circuit fermé

1.1 Définition

Le flux magnétique à travers un circuit fermé représente le nombre de lignes de champ magnétique par section de ce circuit.

1.2 Expression

Considérons un circuit plan formé d'une spire dans un champ magnétique uniforme \vec{B} . Orientons cette surface en choisissant un sens positif arbitraire de parcours. Le vecteur unitaire \vec{n} , normal au plan du circuit, a le sens d'un tire-bouchon que l'on tourne suivant l'orientation choisie.



On appelle flux Φ du champ magnétique \vec{B} à travers la surface plane S , la grandeur algébrique définie par :

$$\Phi = BS \cos \theta$$

θ est l'angle formé par les vecteurs \vec{B} et \vec{n}

Une bobine comprenant N spires de surface S chacune, placée dans un champ magnétique uniforme \vec{B} , est traversée par le flux magnétique :

$$\Phi = NBS \cos \theta$$

L'unité de flux dans le système international est le weber (Wb)

1.3 **Activité 1** : Phénomène d'induction électromagnétique

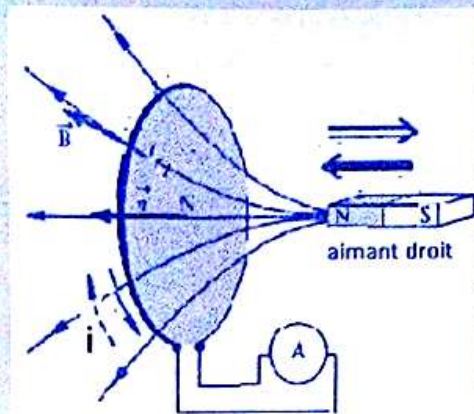
Matériel : Bobine plate, galvanomètre à zéro central, fils de connexion, aimant droit.

1.3.1 Manipulation

OBJECTIF : Mise en évidence du phénomène d'induction

Réalisons un circuit comprenant une bobine plate et un galvanomètre. Déplaçons un aimant droit devant la bobine en approchant le pôle Nord. Le galvanomètre indique le passage d'un courant de courte durée. Cette apparition de courant électrique constitue un phénomène d'induction électromagnétique. Le courant qui résulte de ce phénomène

est appelé **courant induit**. Si on éloigne le pôle Nord, le courant induit apparaît en sens inverse.



1.3.2 Interprétation

Si on approche le pôle Nord de la bobine, le nombre de lignes de champ pénétrant dans celle-ci augmente : le flux magnétique à travers chaque spire de la bobine augmente donc. En éloignant le pôle Nord, le flux magnétique diminue dans la bobine. Le courant induit apparaît donc lors de l'augmentation ou de la diminution du flux magnétique dans un circuit.

1.3.3 Cause du courant induit

Toute variation du flux magnétique à travers un circuit fermé s'accompagne de la production dans ce circuit d'un courant induit.

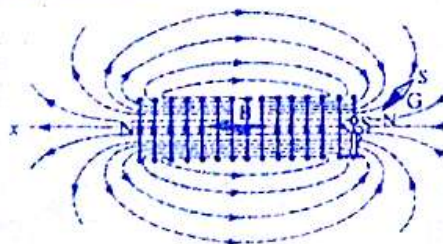
1.3.4 Loi de Lenz

Le courant induit a un sens tel que par ses effets, il s'oppose à la cause qui lui donne naissance.

1.4 Auto-induction

1.4.1 Flux d'auto-induction

Une bobine parcourue par un courant, crée un champ magnétique dans tout l'espace environnant cette bobine. Chacune des spires de la bobine est alors traversée par des lignes de champ magnétique.



Spectre magnétique d'un solénoïde

La bobine est donc à l'origine d'un flux à travers elle même. Ce flux est appelé flux propre ou flux d'auto-induction (ou encore self induction).

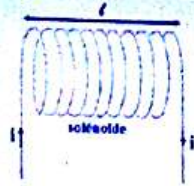
Le flux Φ d'auto-induction est proportionnel à l'intensité i du courant :

$$\Phi = Li$$

Le coefficient de proportionnalité L du flux d'auto-induction par rapport à l'intensité est appelé coefficient d'auto-induction ou encore **inductance de la bobine**. Son unité dans le système international est le henry (H).

1.4.2 Inductance d'un solénoïde

Considérons un solénoïde sans noyau de fer, de longueur ℓ comprenant N spires de surface S chacune, parcouru par un courant d'intensité i .



Le flux d'auto-induction à travers ce solénoïde est :

$$\Phi = NBS \quad (\text{avec } \cos \theta = 1)$$

Le champ magnétique \vec{B} créé par le courant i à l'intérieur de ce solénoïde a pour expression :

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{\ell} i$$

En conséquence :

$$\Phi = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N^2}{\ell} Si \quad (1)$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\Phi = Li \quad (2)$$

(1) et (2) \Rightarrow

$$Li = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N^2}{\ell} Si$$

D'où :

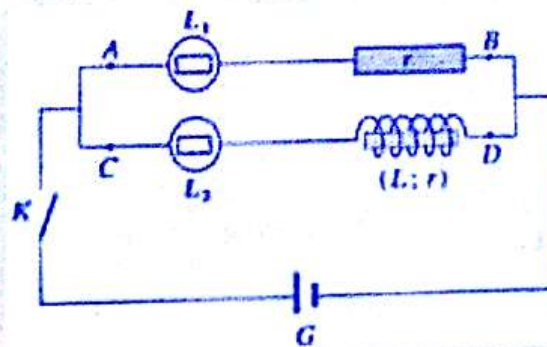
$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N^2}{\ell} S$$

I.4.3 Activité 2 : Phénomène d'auto-induction

OBJECTIF : Mise en évidence du phénomène d'auto-induction

• Manipulation

Réalisons un circuit comprenant : un générateur de courant continu G , deux ampoules identiques L_1 et L_2 , un conducteur ohmique de résistance r , une bobine à noyau de fer d'inductance L possédant la même résistance que le conducteur ohmique, et un interrupteur K .



Fermons le circuit : la lampe L_1 s'allume avant la lampe L_2 . Le circuit étant fermé, si on l'ouvre de nouveau, la lampe L_1 s'éteint avant la lampe L_2 . La bobine est donc la cause du retard à l'établissement ou à l'annulation du courant dans la branche CD. Ce phénomène porte le nom d'auto-induction.

• Interprétation

Quand on ferme le circuit, le flux magnétique augmente dans la bobine. Il s'y crée un

courant induit qui s'oppose pendant un bref instant à l'établissement du courant conformément à la loi de Lenz. Quand on ouvre le circuit, le flux diminue dans la bobine. Le courant induit apparaît de nouveau et s'oppose à la rupture du courant.

1.5 Force électromotrice induite (f.é.m induite)

1.5.1 Valeur moyenne de la f.é.m induite

On appelle f.é.m. moyenne e_{moy} dans un circuit fermé, l'opposé de la variation du flux par unité de temps

$$e_{\text{moy}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Ou encore, si Φ_1 est le flux qui traverse un circuit à l'instant t_1 et Φ_2 le flux qui traverse le même circuit à l'instant t_2 , la f.é.m. moyenne e_{moy} entre ces deux instants est :

$$e_{\text{moy}} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{t_2 - t_1}$$

La f.é.m s'exprime en volt (V) dans le système d'unités international.

1.5.2 f.é.m induite instantanée

La f.é.m induite instantanée ou tout simplement f.é.m induite e dans un circuit fermé est l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux magnétique à travers ce circuit.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

La f.é.m s'exprime en volt (V) dans le système d'unités international.

1.5.3 f.é.m d'auto-induction

Le flux d'auto-induction est : $\Phi = Li$

La f.é.m d'auto-induction est par conséquent :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

$$e = -\frac{Ldi}{dt}$$

1.5.4 Tension aux bornes d'une bobine

Considérons un dipôle AB constitué par une bobine d'inductance L et de résistance r parcourue par un courant d'intensité i de A vers B.

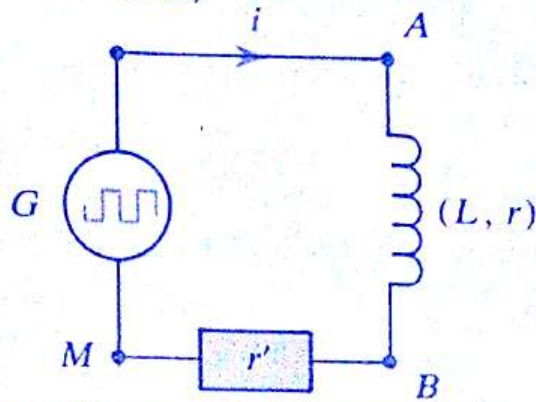


La tension u_{AB} aux bornes de cette bobine est :

$$u_{AB} = ri - e = ri + L\frac{di}{dt}$$

$$u_{AB} = ri + L\frac{di}{dt}$$

Considérons un circuit comprenant : un générateur G délivrant une tension en créneaux, une bobine d'inductance L et de résistance r et un conducteur ohmique de résistance r'. La tension en créneaux délivre alternativement une tension constante e₀ et une tension nulle. (figure ci-dessous)



Durant l'établissement du courant, le générateur délivre une tension $u_{AM} = e_0$.

D'autre part :

$$u_{AM} = u_{AB} + u_{BM}$$

soit :

$$e_0 = L \frac{di}{dt} + ri + r'i = L \frac{di}{dt} + (r+r')i$$

La résistance totale du circuit est $R = r + r'$.

Par conséquent :

$$e_0 = L \frac{di}{dt} + Ri$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$i = \frac{e_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

Posons : $i_0 = \frac{e_0}{R}$ et $\tau = \frac{L}{R}$

τ est appelé constante de temps du circuit. Son unité est la seconde dans le système international.

En conséquence :

$$i = i_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

1.4.2 Intensité au cours de l'annulation du courant

Durant l'annulation du courant, le générateur délivre une tension nulle :

$$u_{AM} = L \frac{di}{dt} + (r+r')i = 0$$

Soit :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Soit :
$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

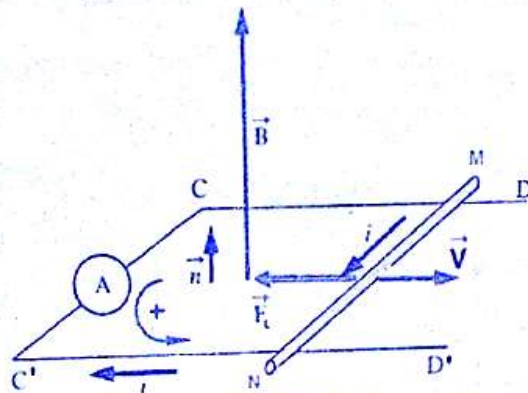
La solution de cette équation différentielle est :

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

1.7 Déplacement d'un conducteur dans un champ magnétique uniforme

1.7.1 Force électromotrice induite

Une barre conductrice MN est mobile sur deux rails parallèles, horizontaux CD et C'D' reliés à un galvanomètre. L'écartement des rails est ℓ . L'ensemble du circuit est situé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} orthogonal au plan des rails. En déplaçant le conducteur MN à la vitesse constante \vec{v} , le galvanomètre indique la circulation d'un courant induit.



Orientons le circuit dans le sens MCC'N. Le vecteur unitaire \vec{n} normal au plan du circuit et le vecteur \vec{B} sont parallèles et de même sens.

En une durée très petite dt , la surface du circuit varie de la quantité :

$$dS = \ell v dt.$$

La variation du flux qui en découle est :

$$d\Phi = B \cdot dS = B\ell v dt$$

la f.é.m induite apparue est par conséquent :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell v$$

$$e = -B\ell v$$

1.7.2 Intensité du courant induit

Si R est la résistance totale du circuit, l'intensité du courant induit est :

$$i = \frac{|e|}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$

$$i = \frac{B\ell v}{R}$$

La barre MN, en déplacement sur les rails constitue ainsi un élément de courant dans un champ magnétique. Elle est donc soumise à la force de Laplace \vec{F}_L , opposée à la vitesse \vec{v} . L'intensité de cette force d'origine électromagnétique est :

$$F_L = Bi\ell = B \times \frac{B\ell v}{R} \times \ell = \frac{B^2 \ell^2 v}{R}$$

$$F_L = \frac{B^2 \ell^2 v}{R}$$

1.7.3 Tension aux bornes de MN

- **Sens du courant induit**

Le sens du courant induit dans le conducteur MN est lié aux sens du champ magnétique \vec{B} et de la force de Laplace \vec{F}_L par la règle des trois doigts de la main droite formant un trièdre direct :

Courant - Champ - Force
 pouce index majeur

On appelle **champ électromoteur**, le vecteur \vec{E}_m défini par :

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

La norme du champ électromoteur est :

$$E_m = vB = \frac{e\ell}{\ell}$$

Le sens du courant induit dans le conducteur mobile MN est celui du champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$: Le trièdre $(\vec{v}, \vec{B}, \vec{E}_m)$ est direct. (le pouce et l'index de la main droite sont placés respectivement \vec{v} et \vec{B} . Le majeur indique le sens du vecteur \vec{E}_m qui est le sens du courant induit dans le conducteur MN).

- **Tension aux bornes du conducteur mobile**

Le conducteur MN, de résistance r , est traversé par le courant de M vers N. La tension entre ses bornes est u_{NM} :

$$u_{NM} = ri - e$$

Si la résistance de la barre est négligeable, ou si la barre est en circuit ouvert, on a :

$$u_{NM} = -e$$

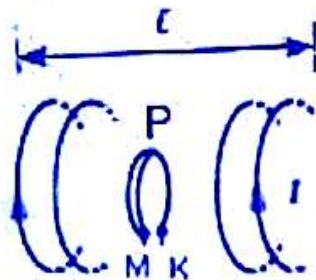
1.8 Quantité d'électricité induite:

La quantité d'électricité Q qui traverse un circuit de résistance totale R , dont le flux varie de Φ_1 à Φ_2 pendant un certain intervalle de temps est :

$$Q = \frac{|\Phi_2 - \Phi_1|}{R}$$

1_ Courant triangulaire dans un solénoïde

Un solénoïde de 40 cm de longueur, comportant $N = 800$ spires est parcouru par un courant d'intensité $I = 0,3A$ dans le sens indiqué sur la figure ci-dessous :



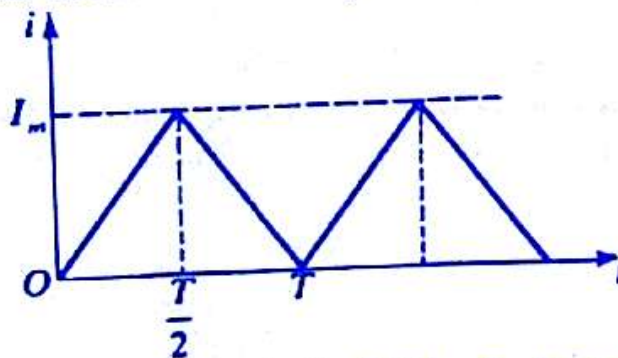
1° Donner les caractéristiques du vecteur champ magnétique \vec{B} régnant à l'intérieur du solénoïde.

2° A l'intérieur du solénoïde, on introduit une bobine plate P , de même axe que le solénoïde. Cette bobine est formée de $N' = 300$ spires, chacune ayant une surface $S = 10cm^2$.

a) Expliquer pourquoi il apparaît une différence de potentiel entre les bornes K et M de la bobine P lorsqu'on annule le courant.

b) Le courant dans le solénoïde s'annule en 1ms. Calculer la valeur moyenne de la f.é.m induite qui apparaît aux bornes de la bobine P .

3° On fait passer maintenant dans le solénoïde un courant d'intensité i dont les variations en fonction du temps sont précisées sur la figure suivante :



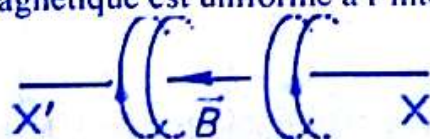
a) Donner entre les instants $t = 0$ et $t = T$, les expressions de l'intensité i en fonction du temps.

On donne : $I_m = 0,35A$ et $T = 10^{-2}s$

b) Calculer les valeurs prises par la force électromotrice induite dans la bobine plate au cours d'une période T et représenter le graphe de la force électromotrice durant le même temps.

Solution

1° Le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde.



Les caractéristiques du champ magnétique \vec{B} sont :

- point d'application : tout point de l'axe X'X
- direction : axe du solénoïde X'X
- sens : donné par la règle de l'observateur d'Ampère (de X vers X')

- norme : $B = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{\ell} I = \frac{4 \times 3,14 \cdot 10^{-7} \times 800 \times 0,3}{0,4} = 7,35 \cdot 10^{-4} T$

2°

a) Si on annule le courant, le champ magnétique \vec{B} disparaît, par conséquent le flux devient nul : il y a variation de flux, donc création d'une f.é.m induite entre les bornes K et M.

b) Quand le courant $I = 0,3A$ circule dans le solénoïde, la valeur du champ \vec{B} dans le solénoïde est $B = 7,53 \cdot 10^{-4} T$.

Le flux magnétique à travers la bobine plate est :

$$\Phi_1 = N'BS$$

$$S = 10cm^2 = 10 \cdot 10^{-4} m^2 = 10^{-3} m^2$$

Donc : $\Phi_1 = 300 \times 7,53 \cdot 10^{-4} \times 10^{-3} = 2,25 \cdot 10^{-4} Wb$

Si on coupe le courant, le champ magnétique disparaît et comme corolaire le flux devient nul :

$$\Phi_2 = 0$$

La f.é.m moyenne qui apparaît durant l'intervalle de temps $\Delta t = 1ms = 10^{-3}s$ est :

$$e_{moy} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = -\frac{0 - 2,25 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 2,25 \cdot 10^{-1} V$$

$$e_{moy} = 0,225V$$

3°

a) Les expressions de l'intensité i en fonction du temps entre les instants $t = 0$ et $t = T$

• Entre les instants $t = 0$ et $t = \frac{T}{2}$, l'intensité i du courant est un segment de

droite. Son expression est de la forme : $i = at + b$ (a et b sont des constantes à déterminer)

- à $t = 0, i = 0 \Rightarrow 0 = a \times 0 + b \Rightarrow b = 0$

Donc : $i = at$

- Lorsque $t = \frac{T}{2}$, soit $t = \frac{10^{-2}}{2} = 5 \cdot 10^{-3}s, i = I_m = 0,35A :$

soit : $0,35 = a \times 5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow a = \frac{0,35}{5 \cdot 10^{-3}} = 70$

En conséquence : $i = 70t$

• Entre les instants $t = \frac{T}{2}$ et $t = T$, l'intensité i est un segment de droite d'équation :

$$i = a't + b'$$

(a' et b' sont des constantes à déterminer)

- à $t = \frac{T}{2}$, $i = I_m = 0,35A \Rightarrow 0,35 = a' \frac{10^{-2}}{2} + b'$

ou encore : $0,35 = a' \times 5 \cdot 10^{-3} + b'$ (1)

- Lorsque $t = T$, $i = 0 \Rightarrow 0 = a' \times 10^{-2} + b'$ (2)

La soustraction membres à membres (2) - (1) donne :

$$-0,35 = a' \times 5 \cdot 10^{-3}$$

D'où : $a' = -\frac{0,35}{5 \cdot 10^{-3}} = -70$

De la relation (2), on tire : $b' = -a' \times 10^{-2}$

soit : $b' = 70 \times 10^{-2} = 0,7$

En conséquence : $i = -70t + 0,7$

b) Valeurs prises par la f.é.m induite au cours d'une période :

Quand le solénoïde est parcouru par le courant i , l'expression du champ B s'écrit :

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{\ell} i$$

soit : $B = 4 \times 3,14 \cdot 10^{-7} \times 2000i = 2,51 \cdot 10^{-3} i$

Le flux magnétique à travers la bobine P a pour expression :

$$\Phi = N'BS$$

La surface d'une spire est $S = 10^{-3} m^2$

Donc : $\Phi = 300 \times 2,51 \cdot 10^{-3} \times 10^{-3} i = 7,53 \cdot 10^{-4} i$

Lorsque : $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$, $i = 70t$. Pendant cet intervalle de temps, le flux dans

la bobine P devient :

$$\Phi = 7,53 \cdot 10^{-4} \times 70t = 52,71 \cdot 10^{-3} t$$

La f.é.m induite apparue dans la bobine P pendant l'intervalle de temps $\left[0, \frac{T}{2}\right]$:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -52,71 \cdot 10^{-3} V = -52,71 mV$$

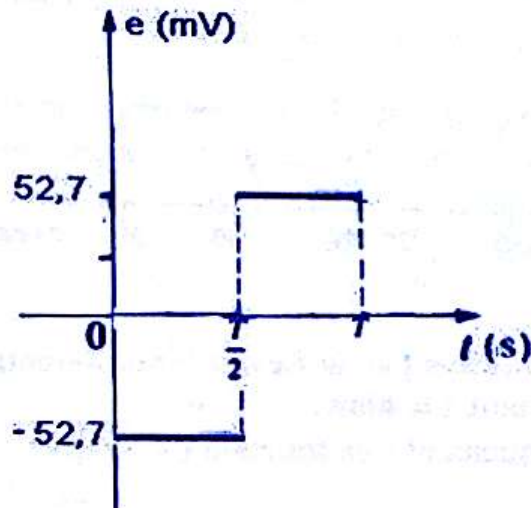
- lorsque $\frac{T}{2} \leq t \leq T$, $i = -70t + 0,7$. Pendant cet intervalle de temps, le flux dans la bobine P devient :

$$\Phi = 7,53 \cdot 10^{-4}(-70t + 0,7) = -52,71 \cdot 10^{-3}t + 5,27 \cdot 10^{-4}$$

La f.é.m induite apparue dans P pendant l'intervalle de temps $\left[\frac{T}{2}, T\right]$:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = 52,7 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 52,7 \text{ mV}$$

Le graphe représentant les variations de la f.é.m induite en fonction du temps est la suivante :



2_ f.é.m moyenne et f.é.m instantanée

Une bobine de longueur ℓ assimilable à un solénoïde de diamètre D , est formée d'une seule couche de spires jointives, faites d'un fil de cuivre de diamètre d , recouvert d'une mince couche d'isolant.

1° Quel est le coefficient d'induction de cette bobine ?

Application numérique : $\ell = 20\text{cm}$; $d = 0,2\text{mm}$; $D = 10\text{cm}$

Prendre $\pi^2 = 10$

2° La bobine est traversée par un courant continu d'intensité $I = 5\text{A}$.

a) Lors de l'établissement du courant, l'intensité dans la bobine passe de la valeur $I_1 = 1\text{A}$ à la valeur $I = 5\text{A}$ en $0,5\text{s}$.

Calculer la f.é.m moyenne d'auto-induction qui apparaît aux bornes de la bobine au cours de cette phase.

b) On annule le courant. Lors de cette annulation, l'intensité passe de la valeur $I = 5\text{A}$, à la valeur $I_2 = 0,5\text{A}$ en 10ms .

Quelle est f.é.m moyenne d'auto-induction qui apparaît aux bornes de la bobine pendant l'interruption du courant ?

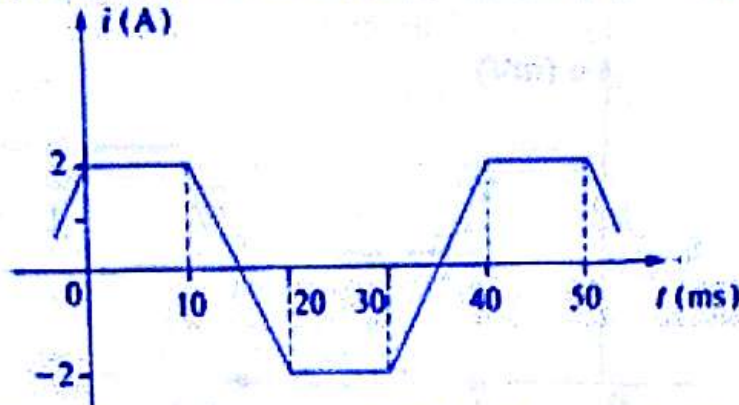
3° La bobine est maintenant traversée par un courant dont l'intensité i est une fonction sinusoïdale du temps :

$$i = 2,5 \cos 100\pi t.$$

Calculer la f.é.m induite qui apparaît aux bornes de la bobine à l'instant

$$t = \frac{1}{200} \text{ s}$$

4° On alimente enfin la bobine avec un courant i dont les variations sont représentées par la figure ci-dessous :



a) Calculer les valeurs prises par la f.é.m d'auto-induction e depuis l'origine des dates jusqu' à l'instant $t = 40 \text{ ms}$.

b) Représenter graphiquement e en fonction du temps.

Solution

1° Coefficient d'induction de la bobine (inductance de la bobine)

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} N^2 S}{\ell}$$

Le nombre de spires du solénoïde est : $N = \frac{\ell}{d} = \frac{0,2 \text{ m}}{0,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 10^3$

La surface d'une spire est $S = \pi R^2$

$R = \frac{D}{2} \Rightarrow S = \pi \frac{D^2}{4}$

Par conséquent : $L = \frac{4\pi^2 \cdot 10^{-7} N^2 D^2}{4\ell}$

$$L = \frac{4 \times 10 \cdot 10^{-7} \times 10^6 \times (10 \cdot 10^{-2})^2}{4 \times 0,2} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ H}$$

$$\boxed{L = 5 \cdot 10^{-2} \text{ H}}$$

2° a) Le flux d'auto-induction à l'instant initial est :

$$\Phi_0 = LI_0 = 5 \cdot 10^{-2} \times 1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

Le flux d'auto-induction à l'instant final est :

$$\Phi_1 = LI_1 = 5 \cdot 10^{-2} \times 5 = 25 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$$

f.é.m d'auto-induction pendant l'établissement du courant :

$$e_{\text{moy}} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = -\frac{25 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-2}}{0,4} = -0,4\text{V}$$

$$e_{\text{moy}} = -0,4\text{V}$$

b) Le flux d'auto-induction initial est :

$$\Phi_1 = 25 \cdot 10^{-2} \text{Wb}$$

Le flux d'auto-induction à l'instant final est :

$$\Phi_2 = LI_2 = 5 \cdot 10^{-2} \times 0,5 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{Wb}$$

La durée de l'annulation du courant est $\Delta t = 10\text{ms} = 10 \cdot 10^{-3} \text{s} = 10^{-2} \text{s}$

La f.é.m moyenne d'auto-induction pendant l'annulation du courant est :

$$e_{\text{moy}} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = -\frac{(2,5 \cdot 10^{-2} - 25 \cdot 10^{-2})}{10^{-2}} = 22,5\text{V}$$

$$e_{\text{moy}} = 22,5\text{V}$$

3° La f.é.m instantanée ou tout simplement f.é.m induite a pour expression :

$$e = -L \frac{di}{dt}$$

L'intensité du courant a pour expression :

$$i = 2,5 \cos 100\pi t$$

Alors :

$$\frac{di}{dt} = -2,5 \times 100\pi \sin 100\pi t = -250\pi \sin 100\pi t$$

En conséquence :

$$e = -L \frac{di}{dt} = 5 \cdot 10^{-2} \times 250 \times 3,14 \sin 100\pi t = 39,25 \sin 100\pi t$$

Lorsque $t = \frac{1}{200} \text{s}$, $e = 39,25 \sin 100\pi \times \frac{1}{200}$

soit : $e = 39,25 \sin \frac{\pi}{2} = 39,25\text{V}$

$$e = 39,25\text{V}$$

4° a) La f.é.m d'auto-induction a pour formule :

$$e = -L \frac{di}{dt}$$

Si l'intensité i est représentée par un segment de droite, la f.é.m d'auto-induction

peut s'écrire : $e = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}$

- Lorsque $t = 0$, $i = 2\text{A}$. Lorsque $t = 10\text{ms}$, $i = 2\text{A}$.

La variation de l'intensité pendant cet intervalle de temps de durée $\Delta t = 10\text{ms}$ est :

$$\Delta i = 2\text{A} - 2\text{A} = 0$$

Par conséquent :
$$e = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} = 0$$

- à $t = 10\text{ms}$, $i = 2\text{A}$. Lorsque $t = 20\text{ms}$, $i = -2\text{A}$.

La variation de l'intensité pendant cet intervalle est :

$$\Delta i = -2\text{A} - 2\text{A} = -4\text{A}$$

La durée de la variation de l'intensité est : $\Delta t = 20\text{ms} - 10\text{ms} = 10\text{ms} = 10 \cdot 10^{-3}\text{s}$

La f.é.m d'auto-induction est par conséquent :

$$e = -\frac{L\Delta i}{\Delta t} = \frac{-5 \cdot 10^{-2} \times (-4)}{10 \cdot 10^{-3}} = 20\text{V}$$

- Lorsque $t = 20\text{ms}$, $i = -2\text{A}$. Lorsque $t = 30\text{ms}$, $i = -2\text{A}$.

La variation de l'intensité pendant cet intervalle de temps est :

$$\Delta i = -2\text{A} + 2\text{A} = 0$$

Par conséquent :
$$e = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} = 0$$

- à $t = 30\text{ms}$, $i = -2\text{A}$. Lorsque $t = 40\text{ms}$, $i = 2\text{A}$.

La variation de l'intensité pendant cet intervalle est :

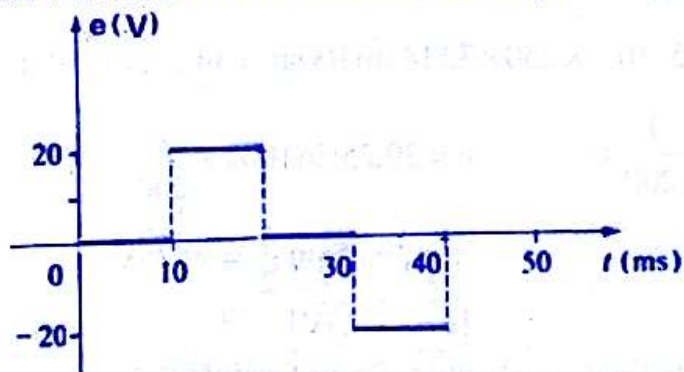
$$\Delta i = 2\text{A} + 2\text{A} = 4\text{A}$$

La durée de la variation de l'intensité est :

$$\Delta t = 40\text{ms} - 30\text{ms} = 10\text{ms} = 10 \cdot 10^{-3}\text{s}$$

$$e = -\frac{L\Delta i}{\Delta t} = \frac{-5 \cdot 10^{-2} \times 4}{10 \cdot 10^{-3}} = -20\text{V}$$

Le graphe représentant les variations de e en fonction du temps :

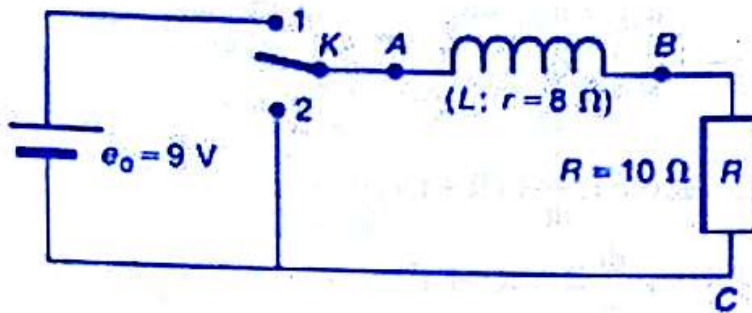


3_ Constante de temps dans un circuit inductif

Un solénoïde de 50cm de longueur et de 8cm de diamètre est considéré comme infiniment long. Il comporte 2000spires par mètre.

1° Calculer l'inductance de ce solénoïde.

2° On réalise avec ce solénoïde le montage représenté sur la figure. La résistance interne du générateur est négligeable. L'interrupteur K est en position 1.



- a) Déterminer l'intensité i_0 du courant dans le circuit en régime permanent.
 b) Calculer la constante de temps τ du circuit.
 3° A l'instant $t=0$ (en un temps négligeable), l'interrupteur passe de la position 1 à la position 2. Montrer que l'intensité i du courant dans le circuit varie en fonction du temps suivant la relation :

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Calculer la valeur de i lors que $t = \frac{L}{R+r}$.

Solution

1° Inductance du solénoïde :

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N^2}{\ell} S$$

Le nombre de spires par unité de longueur est $n = \frac{N}{\ell} \Rightarrow N = n\ell$.

En conséquence : $L = 4\pi \cdot 10^{-7} n^2 \ell S$

AN :

$$L = 4 \times 3,14 \cdot 10^{-7} \times (2000)^2 \times 50 \cdot 10^{-2} \times 8 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

$$\boxed{L = 2\text{mH}}$$

2°

a) L'intensité i_0 du courant dans le circuit en régime permanent :

$$i_0 = \frac{e_0}{R+r} = \frac{9}{10+8} = 0,5\text{A}$$

$$\boxed{i_0 = 0,5\text{A}}$$

b) Constante de temps du circuit :

$$\tau = \frac{L}{R+r} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{18} = 1,11 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

$$\boxed{\tau = 1,11 \cdot 10^{-4} \text{ s}}$$

3° Expression de i en fonction de i_0 :

Quand l'interrupteur est en position 2, la tension aux bornes du circuit est :

$$u_{AC} = u_{AB} + u_{BC}$$

soit :

$$0 = L \frac{di}{dt} + ri + Ri$$

ou encore :

$$0 = L \frac{di}{dt} + (R + r)i$$

Par la suite :

$$L \frac{di}{dt} = -(R + r)i$$

ou :

$$\frac{di}{i} = -\frac{R + r}{L} dt$$

Compte tenu de la condition initiale $i = i_0$ pour $t = 0$, cette équation différentielle s'intègre de la façon suivante :

$$\int_{i_0}^i \frac{di}{i} = -\frac{R + r}{L} \int_0^t dt$$

soit :

$$\ln i - \ln i_0 = -\frac{R + r}{L} t$$

ou

$$\ln \frac{i}{i_0} = -\frac{R + r}{L} t$$

$$\frac{R + r}{L} = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \ln \frac{i}{i_0} = -\frac{t}{\tau}$$

En conséquence :

$$\frac{i}{i_0} = e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow i = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

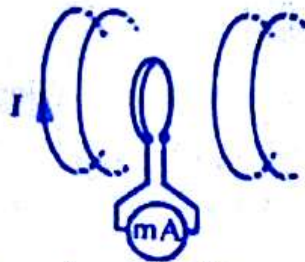
$$\boxed{i = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Lorsque $t = \frac{L}{R + r} = \tau$, $i = i_0 e^{-1} = 0,5e^{-1} = 0,18A$

$$\boxed{i = 0,18A}$$

4_ Courant alternatif dans un solénoïde

Un solénoïde (S) de longueur $\ell = 50\text{cm}$, est formé d'une seule couche de spires jointives faites d'un fil de diamètre $d = 1\text{mm}$. A l'intérieur de ce solénoïde se trouve une bobine plate (P) de même axe que le solénoïde. Cette bobine plate, comportant 400 spires ayant chacune une surface $S = 14\text{cm}^2$, est reliée à un milliampèremètre. La résistance totale du circuit est $R = 8\Omega$.



1° On fait circuler dans le solénoïde un courant d'intensité $I = 12\text{A}$ dans le sens indiqué sur la figure.

a) Donner les caractéristiques du vecteur-champ magnétique \vec{B} régnant à l'intérieur du solénoïde.

b) Calculer le flux magnétique Φ à travers la bobine plate.

2° On fait varier l'intensité du courant dans le solénoïde suivant la loi :

$$I(t) = 12 - 3t^2 \quad (t \text{ varie de } 0 \text{ à } 12 \text{ s}).$$

a) Trouver l'expression du courant induit i dans la bobine (P) et tracer le graphique $i = f(t)$ dans l'intervalle $0 \leq t \leq 2\text{s}$.

b) Calculer la quantité d'électricité induite qui traverse une section quelconque de la bobine plate pendant le même intervalle de temps.

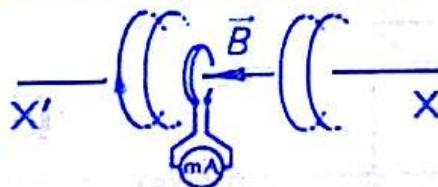
3° Le solénoïde est à présent alimenté par un courant alternatif sinusoïdal d'équation : $i(s) = 14 \cos 100\pi t$ (les intensités sont en ampères et les temps sont en secondes).

a) Trouver l'expression de la force électromotrice dont la bobine (P) est le siège.

b) Déterminer l'intensité du courant induit dans (P) à l'instant $t = 5 \cdot 10^{-3}\text{s}$.

Solution

1° a) Caractéristiques du champ magnétique \vec{B} :



- point d'application : tout point de l'axe X'X du solénoïde

- direction : axe X'X

- sens : donné par la règle de l'observateur d'Ampère : de X vers X'

- intensité : $B = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N_1}{\ell} I$

$$N_1 = \frac{50 \cdot 10^{-2}}{10^{-3}} = 500 \text{ spires} \quad \Rightarrow B = \frac{4 \times 3,14 \cdot 10^{-7} \times 500 \times 12}{50 \cdot 10^{-2}} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

b) Le flux à travers la bobine P est :

$$\Phi = N_2 BS$$

$$S = 14 \text{ cm}^2 = 14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \quad \Phi = 400 \times 1,5 \cdot 10^{-2} \times 14 \cdot 10^{-4} = 8,4 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

$$\Phi = 8,4 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

2° a) Lorsque $I = 12 - 3t^2$, l'expression du champ magnétique devient :

$$B(t) = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N_1}{\ell} (12 - 3t^2)$$

soit :

$$B(t) = \frac{4 \times 3,14 \cdot 10^{-7} \times 500}{50 \cdot 10^{-2}} (12 - 3t^2) = 1,5 \cdot 10^{-2} - 3,77 \cdot 10^{-3} t^2$$

le flux magnétique à travers la bobine P sera alors :

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= N_2 B(t) S = 400 (1,5 \cdot 10^{-2} - 3,77 \cdot 10^{-3} t^2) \times 14 \cdot 10^{-4} \\ &= 8,4 \cdot 10^{-3} - 2,1 \cdot 10^{-3} t^2 \end{aligned}$$

La f.é.m induite apparue est alors :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = 2 \times 2,1 \cdot 10^{-3} t = 4,2 \cdot 10^{-3} t$$

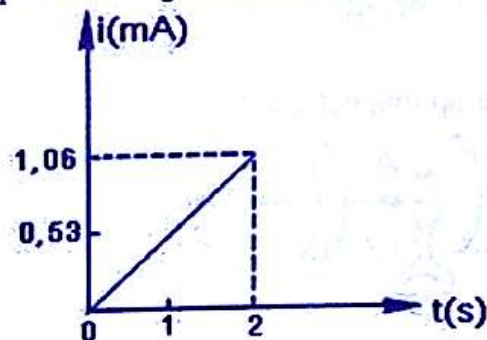
L'intensité du courant induit est :

$$i = \frac{|e|}{R} = \frac{4,2 \cdot 10^{-3}}{8} t = 0,53 \cdot 10^{-3} t$$

On voit donc que l'intensité est une fonction du premier degré du temps ; son graphe est donc une droite. D'autre part, lorsque $t = 0$, $i = 0$.

Lorsque $t = 2\text{s}$, $i = 0,53 \cdot 10^{-3} \times 2 = 1,06 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 1,06 \text{ mA}$

Nous obtenons le graphe de la figure suivante :



b) La quantité d'électricité induite Q à travers la bobine plate :

$$Q = \frac{|\Phi_2 - \Phi_1|}{R}$$

Nous avons :

$$\Phi(t) = 8,4 \cdot 10^{-3} - 2,1 \cdot 10^{-3} t^2$$

Lorsque $t = 0$, le flux magnétique à travers (P) est :

$$\Phi_1 = 8,4 \cdot 10^{-3} - 0 = 8,4 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Lorsque $t = 2\text{s}$, le flux est devenu :

$$\Phi_2 = 8,4 \cdot 10^{-3} - 2,1 \cdot 10^{-3} \times 4 = 0$$

Par conséquent, la quantité d'électricité est :

$$Q = \frac{8,4 \cdot 10^{-3} - 0}{8} = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

$$Q = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

3° a) Lorsque l'intensité du courant est $i(s) = 14 \cos 100\pi t$, l'expression du champ magnétique dans le solénoïde devient :

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N_1}{\ell} i(s)$$

soit :

$$B = \frac{4 \times 3,14 \cdot 10^{-7} \times 500}{50 \cdot 10^{-2}} 14 \cos 100\pi t$$

$$B = 1,76 \cdot 10^{-2} \cos 100\pi t$$

Le flux à travers la bobine (P) est devient :

$$Q = N_2 B S$$

soit :

$$\Phi = 400 \times 14 \cdot 10^{-4} \times 1,76 \cdot 10^{-2} \cos 100\pi t = 9,86 \cdot 10^{-3} \cos 100\pi t$$

La f.é.m induite apparue dans la bobine plate (P) aura pour expression :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = 100\pi \times 9,86 \cdot 10^{-3} \sin 100\pi t = 3,1 \sin 100\pi t$$

$$e = 3,1 \sin 100\pi t$$

b) L'intensité du courant induit dans la bobine plate (P) :

$$i = \frac{|e|}{R} = \frac{3,1}{8} \sin 100\pi t = 0,39 \sin 100\pi t$$

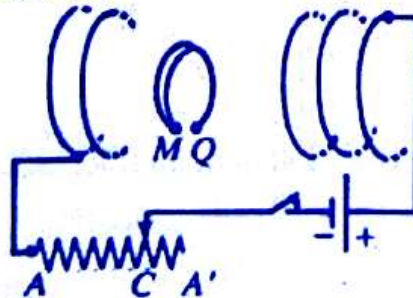
Lorsque $t = 0,005s$,

$$i = 0,39 \sin 100\pi \times 0,005 = 0,39 \sin \frac{\pi}{2} = 0,39 \text{ A}$$

$$i = 0,39 \text{ A}$$

5_Variation linéaire de la résistance dans un circuit inductif

Un circuit comprend, montés en série, un générateur de f.é.m $E = 12V$ et de résistance interne $r = 1\Omega$, un solénoïde de longueur $\ell = 40cm$ comportant $N_1 = 1000$ spires et de résistance $R_1 = 2,5\Omega$, un rhéostat dont la résistance R_{AC} peut varier de 0 à 25Ω .



1° A la date $t = 0$, le curseur C du rhéostat est en A ($R_{AC} = 0$). On le déplace à vitesse constante et il arrive en A' à la date $t = 0,5s$ ($R_{AC} = 25\Omega$).

- Déterminer l'expression de la résistance R_{AC} en fonction du temps.
- Trouver en fonction du temps, l'expression de l'intensité I du courant dans le solénoïde.

c) Préciser les caractéristiques du vecteur-champ du champ magnétique \vec{B} à l'intérieur du solénoïde (exprimer son intensité B en fonction du temps).

2° A l'intérieur du solénoïde, on place une bobine plate de section moyenne $S = 12cm^2$ dont l'axe est confondu avec celui du solénoïde. Cette bobine comporte $N_2 = 500$ spires et sa résistance est $R_2 = 10\Omega$.

a) Déterminer la polarité des bornes de la bobine au cours de l'expérience décrite à la question no 1.

b) Déterminer en fonction du temps la f.é.m d'induction e de cette bobine.

3° On reprend l'expérience du 1° après avoir relié entre elles les bornes de la bobine. Calculer la quantité d'électricité Q qui traverse une section quelconque du fil constituant la bobine, lors de cette expérience.

Solution

1° a) La résistance du rhéostat est une fonction linéaire du temps (fonction du 1^{er} degré). On peut donc écrire :

$$R_{AC} = at + b \quad (a \text{ et } b \text{ sont des constantes à déterminer})$$

Lorsque $t = 0, R_{AC} = 0 \Rightarrow 0 = a \times 0 + b \Rightarrow b = 0$

Donc : $R_{AC} = at$

Lorsque $t = 0,5s, R_{AC} = 25\Omega. \Rightarrow 25 = a \times 0,5 \Rightarrow a = \frac{25}{0,5} = 50$

En conséquence : $R_{AC} = 50t$

b) La tension aux bornes du générateur est : $U = E - rI$

D'autre part : $U = R_{AC} \cdot I + R_1 I$

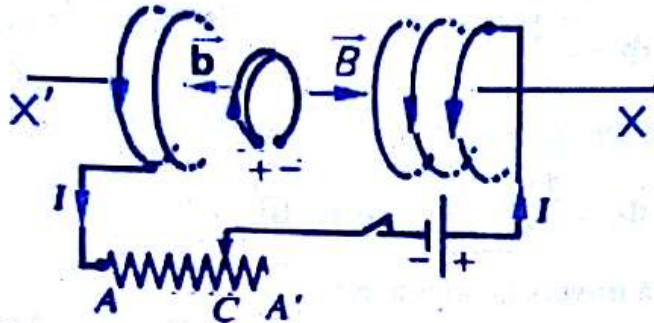
En conséquence : $E - rI = R_{AC} \cdot I + R_1 \cdot I$

ou encore : $E = I(R_{AC} + R_1 + r)$

D'où : $I = \frac{E}{R_{AC} + R_1 + r}$

AN : $I = \frac{12}{50t + 3,5}$

c) Les caractéristiques du champ \vec{B} à l'intérieur du solénoïde :



- point d'application : tout point de l'axe X'X
- direction : axe X'X
- sens : donné par la règle de l'observateur d'Ampère (de X' vers X)
- intensité : $B = 4\pi \cdot 10^{-7} nI$ avec $n = \frac{N_1}{\ell} = \frac{1000}{0,4} = 2500$

AN :
$$B = \frac{4 \times 3,14 \cdot 10^{-7} \times 2500 \times 12}{50t + 3,5} = \frac{3,76 \cdot 10^{-2}}{50t + 3,5}$$

$$B = \frac{3,76 \cdot 10^{-2}}{50t + 3,5}$$

2° a) Polarité de la bobine :

Puisque le champ B est fonction du temps, le flux varie dans la bobine. Il s'y crée un courant induit qui, par ses effets tend à s'opposer à la variation de B en créant un champ \vec{b} contraire à \vec{B} conformément à la loi de Lenz. Selon la règle de l'observateur d'Ampère, le courant circule dans la bobine de M vers Q. M est donc positif ; Q est négatif.

b) Expression de la f.é.m e dans la bobine :

Le flux à travers la bobine a pour expression :

$$\Phi = N_2 BS$$

$$S = 12\text{cm}^2 = 12 \cdot 10^{-4} \text{m}^2$$

AN :
$$\Phi = \frac{500 \times 3,76 \cdot 10^{-2} \times 12 \cdot 10^{-4}}{50t + 3,5} = \frac{2,25 \cdot 10^{-2}}{50t + 3,5}$$

La f.é.m induite est l'opposé de la dérivée du flux par rapport au temps :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{2,25 \cdot 10^{-2}}{50t + 3,5} \right)$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \Rightarrow e = \frac{50 \times 2,25 \cdot 10^{-2}}{(50t + 3,5)^2} = \frac{1,12}{(50t + 3,5)^2}$$

$$e = \frac{1,12}{(50t + 3,5)^2}$$

3° Quantité d'électricité :

Nous avons :
$$\Phi = \frac{2,25 \cdot 10^{-2}}{50t + 3,5}$$

A la date $t = 0$, le flux à travers la bobine est :

$$\Phi_1 = \frac{2,25 \cdot 10^{-2}}{3,5} = 6,43 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

A la date $t = 0,5\text{s}$, le flux à travers la bobine est :

$$\Phi_2 = \frac{2,25 \cdot 10^{-2}}{50 \times 0,5 + 3,5} = 7,89 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

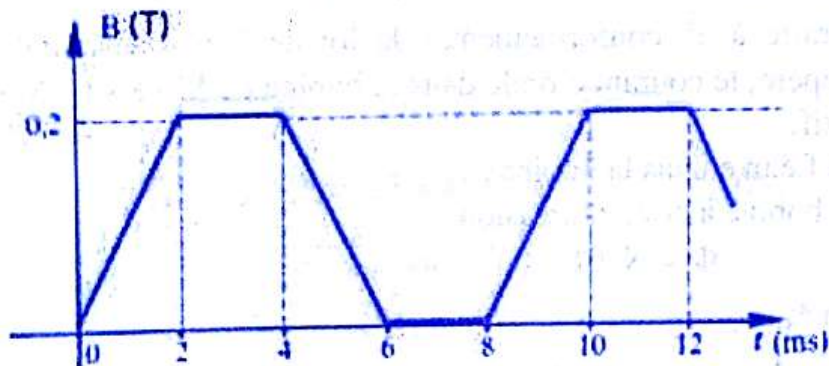
La quantité d'électricité Q qui traverse une section du fil est :

$$Q = \frac{|\Phi_2 - \Phi_1|}{R_2} = \frac{|7,89 \cdot 10^{-4} - 6,43 \cdot 10^{-3}|}{10} = 5,7 \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

$$\boxed{Q = 5,7 \cdot 10^{-4} \text{ C}}$$

6_Variations linéaires du champ magnétique dans une spire carrée

Une spire conductrice carrée, de côté $c = 30\text{cm}$, est placée dans un champ magnétique. Le vecteur-champ magnétique \vec{B} est normal au plan de la spire et son intensité varie en fonction du temps selon le graphe suivant :



1° Calculer les valeurs prises par la f.é.m induite e dans la spire depuis l'origine des dates jusqu'à l'instant $t = 12\text{ms}$.

2° Tracer le graphe $e = f(t)$.

Solution

1° Les valeurs prises par la f.é.m :

Le flux à travers la spire est :

$$\Phi = BS$$

$$S = c^2 = (30 \cdot 10^{-2})^2 = 9 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

- Pour $t \in [0, 2\text{ms}]$, B est un segment de droite d'équation :

$$B = at + b$$

(a et b sont des constantes à déterminer)

à $t = 0, B = 0 \Rightarrow 0 = b$

Donc : $B = at$

à $t = 2\text{ms}, B = 0,2\text{T} \Rightarrow 0,2 = a \times 2 \cdot 10^{-3}$

D'où : $a = \frac{0,2}{2 \cdot 10^{-3}} = 100$

Par la suite : $B = 100t$

En conséquence : $\Phi = 100t \times 9 \cdot 10^{-2} = 9t$

La f.é.m induite apparue est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -9\text{V}$$

$$\boxed{e = -9\text{V}}$$

- Pour $t \in [2, 4\text{ms}]$, l'intensité B du champ magnétique est constante : $B = 0,2\text{T}$

Donc : $\Phi = 0,2 \times 9 \cdot 10^{-2} = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{Wb}$

La f.é.m induite apparue est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

$$\boxed{e = 0}$$

- Pour $t \in [4, 6\text{ms}]$, l'intensité B est un segment de droite d'équation :

$$B = at + b \text{ (a et b sont des constantes)}$$

à $t = 4\text{ms}, B = 0,2\text{T} \Rightarrow 0,2 = 4 \cdot 10^{-3}a + b$ (1)

à $t = 6\text{ms}, B = 0 \Rightarrow 0 = 6 \cdot 10^{-3}a + b$ (2)

(1) - (2) $\Rightarrow 0,2 = (4 \cdot 10^{-3} - 6 \cdot 10^{-3})a$

D'où : $a = -\frac{0,2}{2 \cdot 10^{-3}} = -100$

(2) $\Rightarrow b = -6 \cdot 10^{-3}a = 100 \times 6 \cdot 10^{-3} = 0,6$

Par la suite : $B = -100t + 0,6$

En conséquence : $\Phi = (-100t + 0,6) \times 9 \cdot 10^{-2} = -9t + 5,4 \cdot 10^{-2}$

La f.é.m induite apparue est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = 9\text{V}$$

$$\boxed{e = 9\text{V}}$$

- Pour $t \in [6, 8\text{ms}]$, $B = 0 \Rightarrow \Phi = 0$

Par conséquent : $\boxed{e = 0}$

- Pour $t \in [8, 10\text{ms}]$, B est un segment de droite d'équation :

$$B = at + b \text{ (a et b sont des constantes)}$$

à $t = 8\text{ms}, B = 0 \Rightarrow 0 = 8 \cdot 10^{-3}a + b$ (1)

à $t = 10\text{ms}$, $B = 0,2\text{T} \Rightarrow 0,2 = 10 \cdot 10^{-3} a + b$ (2)

(2) - (1) $\Rightarrow 0,2 = (10 \cdot 10^{-3} - 8 \cdot 10^{-2}) a$

D'où : $a = -\frac{0,2}{2 \cdot 10^{-3}} = 100$

(1) $\Rightarrow b = -8 \cdot 10^{-3} a = -8 \cdot 10^{-3} \times 100 = -0,8$

Par la suite : $B = 100t - 0,8$

En conséquence : $\Phi = (100t - 0,8) \times 9 \cdot 10^{-2} = 9t - 7,2 \cdot 10^{-2}$

La f.é.m induite apparue est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -9\text{V}$$

$$e = -9\text{V}$$

- Pour $t \in [10, 12\text{ms}]$, B est constant : $B = 0,2\text{T}$

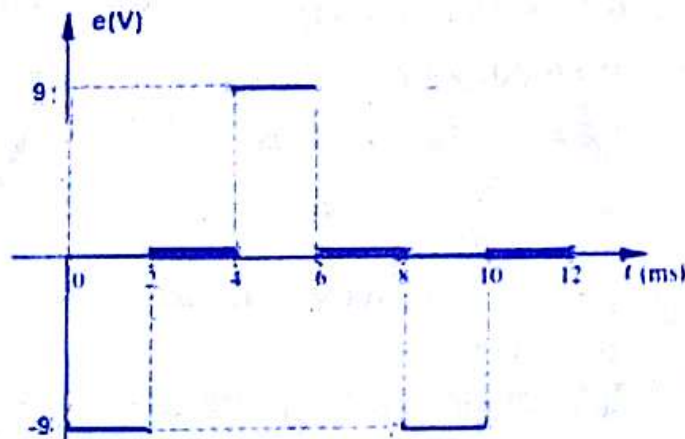
Donc : $\Phi = 0,2 \times 9 \cdot 10^{-2} = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{Wb}$

La f.é.m induite apparue est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

$$e = 0$$

2° Représentation de $e = f(t)$:



7_ f.é.m induite – résistance et résistivité d'une bobine

Une bobine b_1 , assimilable à un solénoïde, a pour caractéristiques :

- rayon moyen des spires : $R_1 = 10\text{cm}$

- nombre de spires : $N_1 = 500$

- longueur : $\ell_1 = 1\text{m}$

1° Donner la formule de l'inductance L de b_1 en fonction de R_1 , ℓ_1 et de N_1 .
Calculer sa valeur.

2° Calculer les valeurs de la f.é.m d'auto-induction à travers cette bobine lorsque le courant qui y circule est successivement : $i_1 = 2A$; $i_2 = 5t + 2$.

3° On place à l'intérieur de la bobine b_1 , au voisinage de son centre, une petite bobine b_2 de même axe, dont les caractéristiques sont :

- Rayon moyen des spires : $R_2 = 1cm$

- Nombre de spires : $N_2 = 100$

- Longueur : $\ell_2 = 10cm$

a) Calculer le flux magnétique qui traverse la bobine b_2 , lorsque la bobine b_1 est parcourue par le courant $i_1 = 2A$ (faire d'abord un calcul littéral puis l'application numérique).

b) Quelle est la valeur moyenne de la f.é.m induite apparue dans la bobine b_2 au bout d'un temps estimé à $1/100s$ (durée de l'établissement du courant i_1 dans b_1) ?

c) Quelles sont les valeurs prises par la f.é.m induite dans la bobine b_2 , lorsque b_1 est parcourue par le courant $i_2 = 5t + 2$

4° La bobine b_2 est formée de spires jointives faites d'un fil de diamètre d et de résistivité $\rho = 1,6 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$, recouvert d'un vernis isolant d'épaisseur négligeable. Calculer la résistance R de b_2 .

Solution

1° L'inductance L de la bobine b_1 :

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N_1^2}{\ell_1} S_1^2$$

$$S_1 = \pi R_1^2 \Rightarrow$$

$$L = 4\pi^2 \cdot 10^{-7} \frac{N_1^2}{\ell_1} R_1^2$$

Application numérique : $R_1 = 10cm = 0,1m$

$$L = \frac{4 \times 10 \times 10^{-7} \times (500)^2 \times (0,1)^2}{1} = 10^{-2} H$$

$$L = 10^{-2} H$$

2° L'expression de la f.é.m d'auto-induction qui traverse b_1 s'écrit :

$$e = -L \frac{di}{dt}$$

Lorsque $i = i_1 = 2A$, $\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow e = 0$

$$e = 0$$

Lorsque $i = i_2 = 5t + 2$, $\frac{di}{dt} = 5 \Rightarrow e = -5 \cdot 10^{-2} V$

$$e = -5 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

3° a) Le flux Φ à travers la bobine b_2 , dans le champ magnétique B_1 créé par le courant i_1 est :

$$\Phi = N_2 B_1 S_2$$

$$B_1 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N_1}{\ell_1} i_1 \Rightarrow \Phi = N_2 \times 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N_1}{\ell_1} i_1 \times \pi R_2^2 = 4\pi^2 \cdot 10^{-7} \frac{N_1 N_2}{\ell_1} R_2^2 i_1$$

$$\Phi = 4\pi^2 \cdot 10^{-7} \frac{N_1 N_2}{\ell_1} R_2^2 i_1$$

AN :

$$\Phi = \frac{4 \times 10 \cdot 10^{-7} \times 500 \times 100 \times (10^{-2})^2 \times 2}{1} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

$$\Phi = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

b) La f.é.m moyenne induite apparue dans la bobine b_2 :

$$e_{\text{moy}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_f - \Phi_i}{\Delta t}$$

Le flux initial (quand le courant i_1 circule dans b_1) est $\Phi_i = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$

Le flux final (aucun courant ne traverse b_1) est $\Phi_f = 0$

En conséquence :

$$e_{\text{moy}} = -\frac{0 - 4 \cdot 10^{-5}}{10^{-2}} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

$$e_{\text{moy}} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

c) La f.é.m induite est par définition :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Lorsque b_1 est parcourue par le courant $i_2 = 5t + 2$, le flux à travers b_2 est :

$$\Phi = 4\pi^2 \cdot 10^{-7} \frac{N_1 N_2}{\ell_1} R_2^2 i_2 = 4\pi^2 \cdot 10^{-7} \frac{N_1 N_2}{\ell_1} R_2^2 (5t + 2)$$

La f.é.m induite apparue dans b_2 est alors :

$$e = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -4\pi^2 \cdot 10^{-7} \frac{N_1 N_2}{\ell_1} R_2^2 \frac{d}{dt}(5t + 2)$$

Soit :

$$e = -4\pi^2 \cdot 10^{-7} \frac{N_1 N_2}{\ell_1} R_2^2 \times 5$$

AN :

$$e = -\frac{4 \times 10 \cdot 10^{-7} \times 500 \times 100 \times (10^{-2})^2 \times 5}{1} = -10^{-4} \text{ V}$$

$$e = -10^{-4} \text{ V}$$

4° La résistance d'un fil conducteur cylindrique, de résistivité ρ , de longueur ℓ et de section s , a pour expression :

$$R = \rho \frac{\ell}{s}$$

La longueur ℓ du fil est égale au périmètre d'une spire multiplié par le nombre de spires de b_2 :

$$\ell = 2\pi R_2 \times N_2$$

Par ailleurs, le diamètre d du fil est égal à la longueur ℓ_2 de la bobine b_2 divisé par le nombre de spires de b_2 :

$$d = \frac{\ell_2}{N_2}$$

La section du fil est, par conséquent :

$$s = \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \frac{\ell_2^2}{4N_2^2}$$

La résistance de la bobine b_2 est donc :

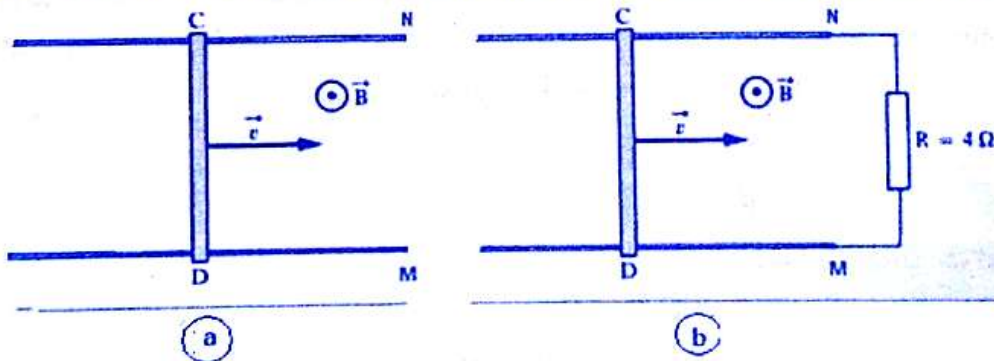
$$R = \frac{\rho \times 2\pi R_2 N_2}{\frac{\pi \ell_2^2}{4N_2^2}} = \frac{8\rho R_2 N_2^3}{\ell_2^2}$$

AN :
$$R = \frac{8 \times 1,6 \cdot 10^{-8} \times 10^{-2} \times (100)^3}{(0,1)^2} = 128 \cdot 10^{-3} \Omega$$

$$R = 128 \cdot 10^{-3} \Omega$$

8_ conducteur mobile sur deux rails

Deux rails horizontaux distants de $\ell = 50\text{cm}$ sont plongés dans un champ magnétique uniforme de vecteur \vec{B} vertical et d'intensité $B = 0,4\text{T}$. Sur ces deux rails glisse un barreau conducteur CD de 50cm de longueur, à la vitesse constante $v = 2\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, et ce, perpendiculairement aux lignes de champ (fig a).



1° Donner les caractéristiques du vecteur- champ électromoteur \vec{E}_m .

2° Calculer la tension u_{CD} qui apparaît aux extrémités du barreau. Préciser son signe.

3° On réunit les points M et N à un conducteur ohmique de résistance $R = 4\Omega$ (fig b). La résistance des rails et du barreau est négligeable. Quelle est la valeur de l'intensité du courant induit ? Quel est le sens de ce courant ?

4° a) Quelle force doit-on appliquer au barreau pour conserver sa vitesse constante ?

b) Quelle puissance mécanique doit-on ainsi fournir ?

5° Calculer la puissance électrique développée par ce générateur rudimentaire.

Solution

1° Les caractéristiques du champ électromoteur :

– point d'application : tout point de CD

– direction : perpendiculaire au plan défini par les vecteurs \vec{v} et \vec{B}

– sens : il est tel que le trièdre $(\vec{v}, \vec{B}, \vec{E}_m)$ est direct (de C vers D)

– norme : $E_m = vB = 2 \times 0,4 = 0,8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

2° La tension aux extrémités du barreau :

$$|u_{CD}| = |e| = B\ell v = E\ell$$

soit : $|u_{CD}| = 0,8 \times 50 \cdot 10^{-2} = 0,4 \text{ V}$

Par ailleurs, le vecteur \vec{E}_m étant dirigé vers D, $u_{DC} > 0 \Rightarrow u_{CD} < 0$

En conséquence : $u_{CD} = -0,4 \text{ V}$

$$\boxed{u_{CD} = -0,4 \text{ V}}$$

3° Valeur de l'intensité du courant induit:

$$i = \frac{B\ell v}{R} = \frac{|u_{CD}|}{R} = \frac{0,4}{4} = 0,1 \text{ A}$$

Le courant induit i a même sens que le champ électromoteur \vec{E}_m (sens de $\vec{v} \wedge \vec{B}$) : il circule dans le sens CDMN.

4° a) Le barreau est soumis à la force de Laplace \vec{F}_L opposée à la vitesse \vec{v} . Le mouvement est donc ralenti. Pour maintenir la vitesse constante, il faudra appliquer une force \vec{F} qui compense l'action de \vec{F}_L . Ainsi :

$$\vec{F}_L + \vec{F} = \vec{0}$$

soit : $\vec{F} = -\vec{F}_L$

En modules, on obtient :

$$\begin{aligned} F &= F_L = Bi\ell \\ &= 0,4 \times 0,1 \times 50 \cdot 10^{-2} \\ &= 2 \cdot 10^{-2} \text{ N} \end{aligned}$$

$$\boxed{F = 2 \cdot 10^{-2} \text{ N}}$$

b) Puissance mécanique à fournir :

$$P = Fv = 2 \cdot 10^{-2} \times 2 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ W}$$

$$\boxed{P = 4 \cdot 10^{-2} \text{ W}}$$

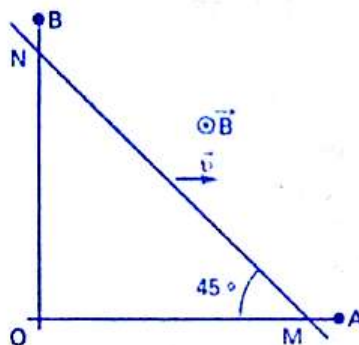
5° Puissance électrique développée par ce générateur :

$$P_e = Ri^2 = 4 \times (0,1)^2 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ W}$$

$$P_e = 4 \cdot 10^{-2} \text{ W}$$

9_ conducteur mobile sur deux rails perpendiculaires

Deux conducteurs rectilignes OA et OB, de même longueur $\ell = 1\text{m}$, sont soudés en O, perpendiculairement l'un à l'autre. Un troisième conducteur rectiligne, beaucoup plus long, et appuyé sur les deux premiers, est déplacé parallèlement à lui-même. Sa direction fait un angle de 45° avec les directions OA et OB. Les points de contact sont M et N. Le point M se déplace de O vers A à la vitesse $v = 25\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$.



1° En posant $OM = x$, et en supposant qu'à l'instant $t = 0$, les points M et N coïncident avec O, établir l'expression de la surface S du circuit OMN ainsi formé en fonction du temps.

2° L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} orthogonal au plan du circuit, d'intensité $B = 0,1\text{T}$.

- Déterminer l'expression de f.é.m induite apparue dans le circuit.
- Quelle est la valeur maximale de cette f.é.m.

Solution

1° Le circuit est un demi-carré de côté $ON = OM = x$. Sa surface est donc :

$$S = \frac{x^2}{2}$$

Par ailleurs, le point M se déplace de O vers A en mouvement rectiligne uniforme d'équation horaire :

$$x = vt$$

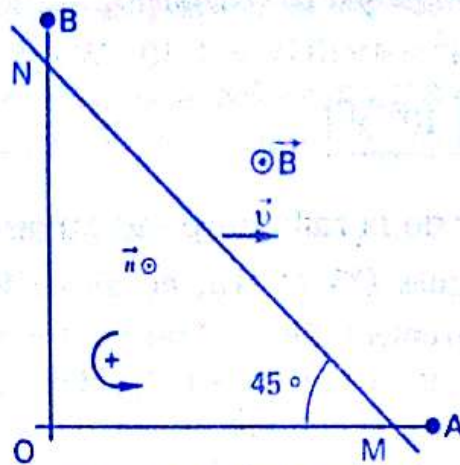
$$v = 25\text{cm} \cdot \text{s}^{-1} = 25 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Donc : $x = 25 \cdot 10^{-2} t$

En conséquence : $S = \frac{(25 \cdot 10^{-2})^2 t^2}{2} = 31,25 \cdot 10^{-3} t^2$

$$S = 31,25 \cdot 10^{-3} t^2$$

2° a) Choisissons comme sens positif de parcours, le sens OMN.



Le vecteur unitaire \vec{n} normal au plan de la surface a même direction et même sens que le vecteur champ magnétique \vec{B} . En conséquence, l'expression du flux magnétique est :

$$\Phi = BS$$

soit :
$$\Phi = 0,1 \times 31,25 \cdot 10^{-3} t^2 = 31,25 \cdot 10^{-4} t^2$$

La f.é.m induite apparue a pour expression :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -31,25 \cdot 10^{-4} t$$

$$e = -31,25 \cdot 10^{-4} t$$

b) cette f.é.m apparaît entre les points O et A. Au delà de A, le circuit est ouvert. La durée de l'apparition du courant induit est donc :

$$t = \frac{OA}{v} = \frac{l}{v} = \frac{l}{25 \cdot 10^{-2}} = 4s$$

La valeur maximale de la f.é.m est donc :

$$e_{\max} = -31,25 \cdot 10^{-4} \times 4 = -12,5 \cdot 10^{-3} V$$

$$e_{\max} = -12,5 \cdot 10^{-3} V$$

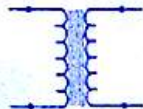
2 | LES TRANSFORMATEURS ET LES ALTERNATEURS

2.1 Les transformateurs

2.1.1 Définition

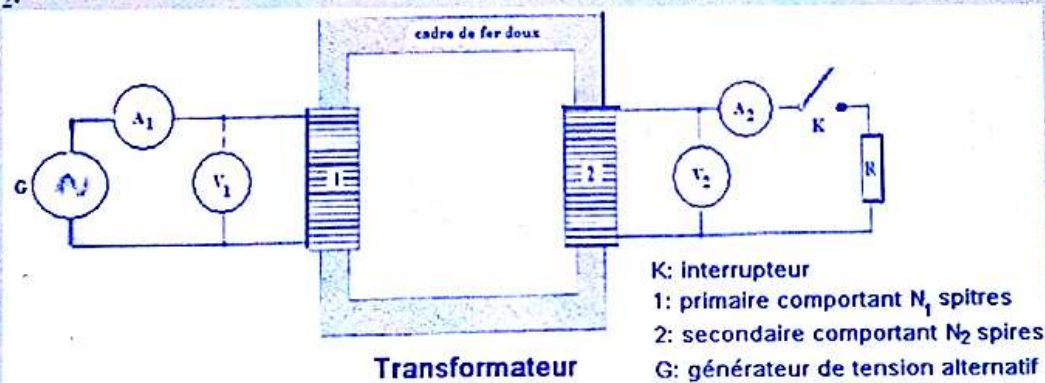
Un transformateur est un quadripôle qui permet de modifier les tensions et les intensités alternatives.

Schéma conventionnel du transformateur :



2.1.2 Principe de fonctionnement

Un transformateur est constitué par un cadre de fer doux sur lequel sont enroulés deux circuits indépendants : le primaire et le secondaire. Le primaire comporte N_1 spires et le secondaire N_2 spires. Lorsque le primaire est alimenté par une tension alternative, il s'y crée un champ magnétique alternatif. Les lignes de champ magnétique, canalisées par le cadre de fer doux, provoquent dans le secondaire une variation de flux et par conséquent la naissance d'une f.é.m induite. Cette f.é.m dépend des nombres de spires N_1 et N_2 .



2.1.3 Fonctionnement à vide

En fonctionnement, quand le circuit secondaire est ouvert, les tensions efficaces U_1 et U_2 , respectivement aux bornes du primaire et du secondaire sont proportionnelles aux nombres de spires.

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Le quotient $\frac{N_2}{N_1}$ est appelé rapport de transformation.

2.1.4 Fonctionnement à charge

En fonctionnement, quand le circuit secondaire est fermé, les intensités efficaces du courant I_1 et I_2 , respectivement au primaire et au secondaire sont inversement proportionnelles aux nombres de spires :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

2.1.5 Transformateur parfait

Un transformateur est parfait si la puissance moyenne P_2 fournie au secondaire est égale à la puissance moyenne P_1 utilisée au primaire :

$$P_2 = P_1$$

Par ailleurs, si l'intensité et la tension sont en phase à l'entrée et à la sortie du transformateur, on a :

$$\begin{aligned} P_1 &= U_1 I_1 \\ P_2 &= U_2 I_2 \end{aligned}$$

2.2 Les alternateurs

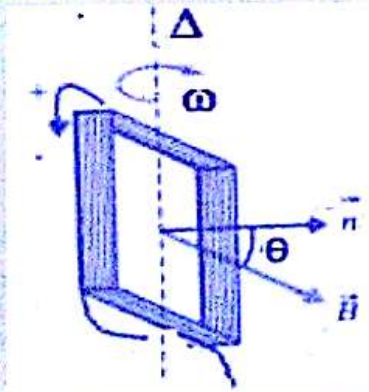
2.2.1 Définition

Un alternateur est une machine qui utilise le phénomène d'induction électromagnétique pour produire des tensions et des intensités alternatives.

2.2.2 Production d'une f.é.m alternative

• Bobine mobile dans un champ magnétique

Considérons un cadre rectangulaire, comprenant N spires, placé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} . Le vecteur \vec{B} fait un angle θ avec le vecteur unitaire \vec{n} normal au plan du cadre. Le cadre est mobile autour d'un axe vertical Δ .



Le flux magnétique à travers ce cadre a pour expression :

$$\Phi = NBS \cos \theta$$

Faisons tourner le cadre autour de l'axe Δ avec une vitesse angulaire constante ω . L'angle θ devient une fonction linéaire du temps : $\theta = \omega t$. En conséquence, l'expression du flux devient :

$$\Phi = NBS \cos \omega t$$

La f.é.m induite apparue dans le cadre au cours de cette rotation est :

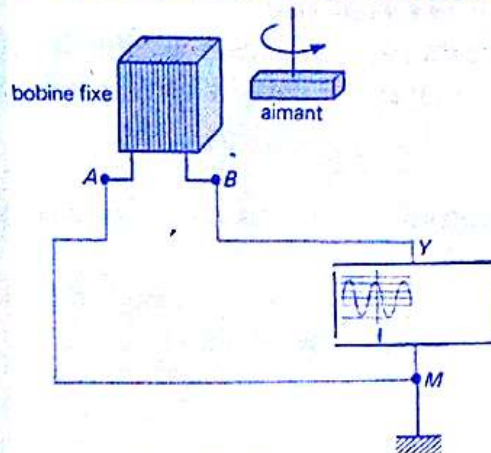
$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = NBS \omega \sin \omega t$$

$$e = NBS \omega \sin \omega t$$

• Rotation d'un aimant devant une bobine

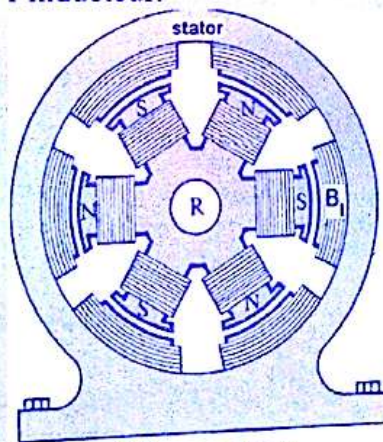
Les bornes A et B d'une bobine fixe sont branchées aux bornes Y et M d'un

oscillographe électronique. Faisons tourner un aimant droit devant la bobine. L'oscillographe indique une tension électrique périodique dont la fréquence dépend de la vitesse angulaire de l'aimant. La bobine fixe est alors appelée **induit**. L'aimant droit porte le nom d'**inducteur**. L'ensemble constitue un alternateur simplifié à deux pôles.



2.2.3 Les alternateurs industriels

Un alternateur industriel comporte un induit fixe appelé **stator** constitué de plusieurs bobines connectées. L'inducteur appelé **rotor** est constitué de bobines à noyau de fer doux appelées **pôles**, alimentées en courant continu délivré par une dynamo. Les sens des enroulements du fil de ces bobines font que les pôles sont alternativement Nord et Sud et sont toujours en nombre paire ($2p$ pôles). Les bobines induites sont en même nombre que les pôles de l'inducteur.



Alternateur

R: rotor N: pôle nord
 B₁: bobine de l'induit S: pôle sud

Lorsque le rotor tourne, chaque bobine induite devient le siège d'un courant induit. Les f.é.m des $2p$ bobines s'ajoutent.

2.2.4 Fréquence de la tension alternative

Un alternateur dont le rotor comporte $2p$ pôles, tournant à la vitesse de n tours par seconde, devant $2p$ bobines fixes, est le siège d'une f.é.m alternative sinusoïdale de fréquence f telle que :

$$f = np \quad f \text{ est exprimé en hertz (Hz).}$$

P est le nombre de paire de pôles (nombre de pôles nord)

1_ Transformateur parfait

On applique une tension efficace de 220V au primaire d'un transformateur parfait. L'intensité efficace du courant qui y circule est égale à 50mA. Le primaire est formé de 1050 tours de fil et le secondaire, de 30 tours.

1° Quelle est la tension efficace au secondaire ?

2° Quelle est l'intensité efficace du courant dans le secondaire ?

3° Quelles sont les puissances moyennes dans le circuit primaire et dans le circuit secondaire ?

Solution

1° Les tensions efficaces sont proportionnelles aux nombres de spires :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

On en déduit :

$$U_2 = U_1 \frac{N_2}{N_1}$$

AN :

$$U_2 = 220 \times \frac{30}{1050} = 6,28V$$

$$\boxed{U_2 = 6,28V}$$

2° Les intensités efficaces sont inversement proportionnelles aux nombres de spires :

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

soit :

$$I_2 = I_1 \frac{N_1}{N_2}$$

AN :

$$I_2 = 50 \times \frac{1050}{30} = 1750mA$$

$$\boxed{I_2 = 1750mA}$$

3° La puissance moyenne au primaire :

$$P_1 = U_1 I_1$$

$$I_1 = 50mA = 50 \cdot 10^{-3} A \Rightarrow P_1 = 220 \times 50 \cdot 10^{-3} = 11W$$

$$\boxed{P_1 = 11W}$$

La puissance moyenne au secondaire :

Le transformateur étant parfait, nous avons :

$$P_2 = P_1 = 11W$$

$$\boxed{P_2 = 11W}$$

2_ Transformateur connecté à un dipôle

Un transformateur, connecté à un dipôle par l'intermédiaire d'une ligne de résistance $R = 2\Omega$, fournit une puissance de 4kW sous une tension de 110V. (on admet que la tension est en phase à l'entrée comme à la sortie du transformateur)

- 1° Quelle est l'intensité efficace du courant dans la ligne ?
- 2° Quelle est la chute de potentiel dans la ligne ?
- 3° Quelle est la tension efficace disponible en bout de ligne ?
- 4° Quelle est la perte relative de puissance dans cette ligne ?

Solution

1° La puissance moyenne disponible au secondaire est $P_2 = 4\text{kW} = 4000\text{W}$

D'autre part : $P_2 = U_2 I_2$

On en déduit : $I_2 = \frac{P_2}{U_2} = \frac{4000}{110} = 36,36\text{A}$

$$I_2 = 36,36\text{A}$$

2° La chute de tension dans la ligne :

$$U = RI_2 = 2 \times 36,36 = 72,72\text{V}$$

$$U = 72,72\text{V}$$

3° La tension disponible en bout de ligne :

$$\Delta U = U_2 - U = 110 - 72,72 = 37,28\text{V}$$

$$\Delta U = 37,28\text{V}$$

4° La puissance perdue en chaleur dans la ligne est :

$$P = RI_2^2 = 2 \times (36,36)^2 = 2644,09\text{W}$$

La perte relative de puissance dans la ligne est le rapport $\frac{P}{P_2}$:

soit, en pourcentage : $\frac{P}{P_2} \times 100 = \frac{2644,09 \times 100}{4000} = 66,1\%$

2_ Nombre de pôles inducteurs d'un alternateur

Un alternateur tournant à 1000tr/mn donne à ses bornes une f.é.m alternative de fréquence $f = 50\text{Hz}$.

Quel est le nombre de pôles inducteurs ?

Réponse

Le nombre p de paires de pôle (nombre de pôles nord) :

$$p = \frac{f}{n}$$

La vitesse en tours par seconde est :

$$n = \frac{1000}{60} = \frac{50}{3} \text{ tr.s}^{-1}$$

Par conséquent : $p = \frac{50}{\frac{50}{3}} = 3$ pôles nord

Le nombre de pôles inducteur est $2P = 6$

VIBRATIONS

1 RAPPELS

LES ONDES PROGRESSIVES

1.1 Généralités

1.1.1 Les signaux

On appelle signal ou ébranlement, toute déformation brusque et locale qui se propage dans un milieu.

Il existe deux types de signaux :

– Les signaux mécaniques (*Exemples* : un signal sonore ; un signal à la surface de l'eau etc.)

– Les signaux électromagnétiques (*Exemples* : un signal radioélectrique utilisé par les avions pour se guider la nuit ou par temps de brouillard ; un signal lumineux)

1.1.2 Milieu de propagation

Un milieu de propagation est un milieu élastique capable de transmettre un signal. Il est solide, liquide ou gazeux.

Les signaux électromagnétiques se propagent dans le vide contrairement aux signaux mécaniques.

1.1.3 Célérité d'un signal

La vitesse ou **célérité c** , est la distance parcourue par un signal par unité de temps. Dans un milieu homogène et isotrope, la célérité d'un signal est constante.

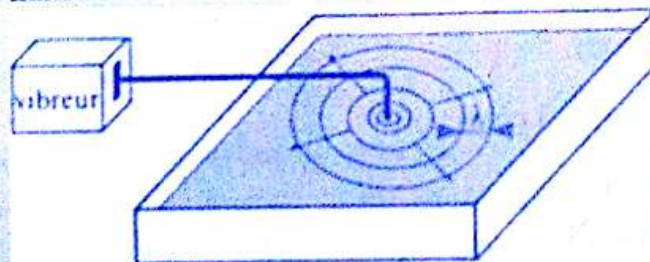
Exemples : La célérité du son dans l'air à 20°C est $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La célérité d'un signal électromagnétique dans le vide est $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1.2 Ondes progressives

1.2.1 Définition

Une onde progressive ou tout simplement onde, est l'ensemble des perturbations imposées à un milieu par la propagation d'un signal périodique.

Exemple : Onde progressive à la surface de l'eau : une pointe actionnée par un vibreur fait naître des rides circulaires à la surface de l'eau.



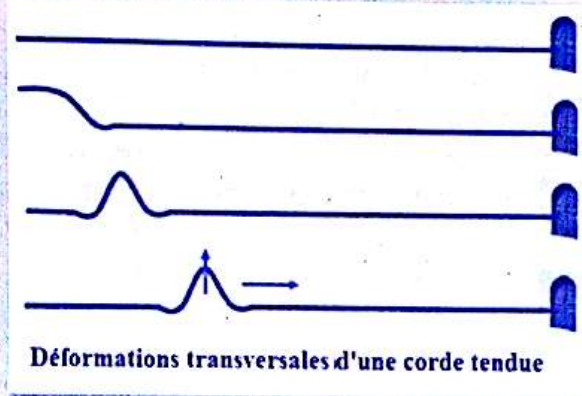
Onde circulaire transversale à la surface de l'eau

1.2.2 Onde transversale et onde longitudinale

• Onde transversale

Une onde est transversale si les déformations du milieu sont perpendiculaires à la direction de propagation.

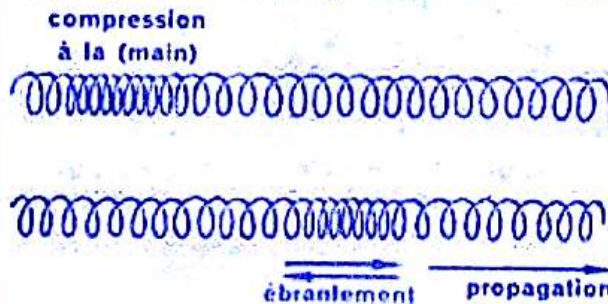
Exemple : imprimons à la main une secousse verticale, vers le haut, à l'une des extrémités d'une longue corde souple, horizontale. La déformation se propage le long de la corde, soulevant chacun de ses points qui retombent ensuite. Les directions de la propagation et de l'ébranlement sont perpendiculaires



• Onde longitudinale

Une onde est longitudinale si les déformations du milieu sont parallèles à la direction de propagation.

Exemple : rapprochons à la main quelques spires d'un long ressort tendu, puis lâchons-les. La compression se propage le long du ressort. La direction de propagation est parallèle à la direction du déplacement des spires.



1.2.3 Période et fréquence d'un phénomène périodique

• La période T est la durée au bout de laquelle un phénomène se reproduit, identique à lui-même.

• La fréquence f correspond au nombre de périodes contenues dans l'unité de temps. La fréquence est l'inverse de la période.

$$f = \frac{1}{T}$$

1.2.4 Longueur d'onde

La longueur d'onde λ , est la distance parcourue par un signal au bout d'un temps

égale à la période T .

$$\lambda = cT$$

λ en mètres (m)
 c en mètres par seconde ($m \cdot s^{-1}$)
 T en secondes (s)

D'autre part : $T = \frac{1}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f}$

1.2.5 Ligne d'onde et rayon d'onde

• Ligne d'onde

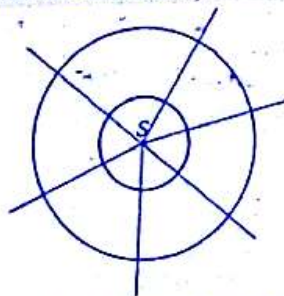
Pour un milieu de propagation bidimensionnel et homogène, on appelle **ligne d'onde** l'ensemble des points atteints au même instant par le signal émis par une source S .

Si la source S est ponctuelle, les lignes d'onde sont des cercles de centre S . C'est le cas d'une onde progressive à la surface de l'eau. Ces lignes d'onde sont appelées « crêtes ». La distance entre deux crêtes consécutives est la longueur d'onde λ .

Pour un milieu homogène tridimensionnel, on appelle **surface d'onde** l'ensemble des points atteints au même instant par le signal émis par une source.

• Rayon d'onde

Un rayon d'onde est une **ligne perpendiculaire** en chacun de ses points aux lignes ou aux surfaces d'ondes. En milieu homogène, pour toute onde progressive, les rayons d'ondes sont des droites. (Dans le cas des ondes lumineuses, les rayons d'onde sont appelés rayons lumineux.)



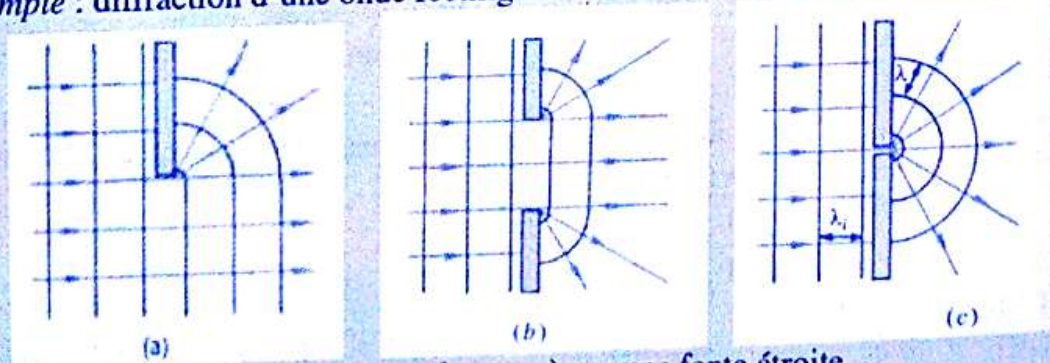
Rayons d'onde d'une onde circulaire

1.3 Diffraction- réflexion et réfraction

1.3.1 La diffraction

La diffraction est le phénomène de mise en défaut de la propagation rectiligne des ondes au voisinage immédiat d'un obstacle.

Exemple : diffraction d'une onde rectiligne.



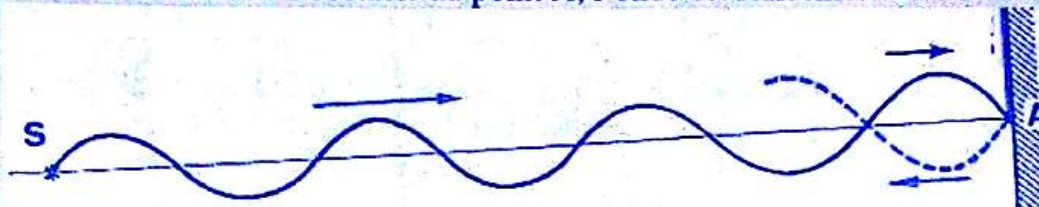
a) par un obstacle b) par une fente large c) par une fente étroite

La diffraction se fait sans changement de fréquence et sans changement de longueur d'onde mais modifie la forme de l'onde.

1.3.2 La réflexion

La réflexion est le phénomène de retour d'une onde dans le milieu de propagation dû à la rencontre d'un obstacle.

Exemple : Une onde transversale produite par une source S se propage le long d'une corde tendue. Au contact de l'obstacle au point A, l'onde est réfléchie.

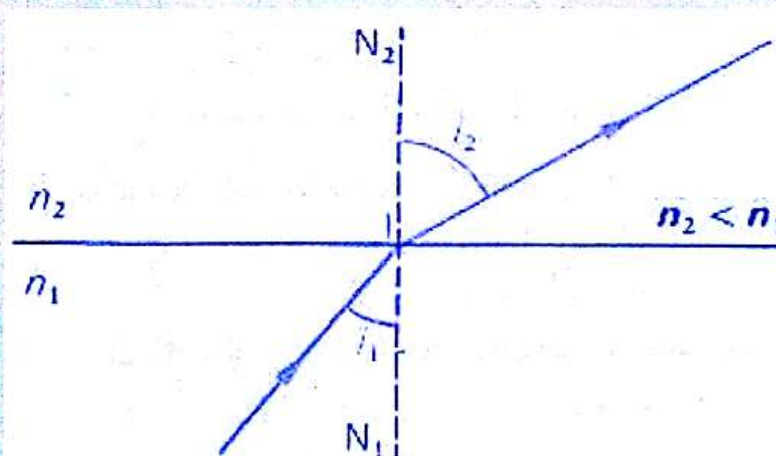


La réflexion se fait sans changement de fréquence et sans changement de longueur d'onde.

1.3.3 La réfraction

La réfraction est la modification de la direction de propagation qui accompagne la transmission d'une onde d'un milieu à un autre.

Exemple : transmission d'un rayon lumineux d'un milieu (1) d'indice de réfraction n_1 à un milieu (2) d'indice n_2 . Le rayon incident fait un angle i_1 avec la normale à la surface de séparation des deux milieux. Le rayon réfracté fait un angle i_2 avec la normale.



La transmission d'une onde se fait sans changement de la fréquence, mais avec modification de la longueur d'onde.

1.4 Nature vibratoire du son

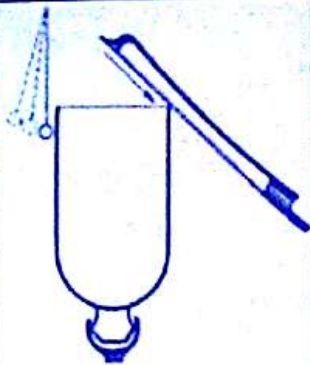
1.4.1 Activité

Matériel : une cloche ; un archet ; un pendule léger.

OBJECTIF : Mise en évidence de la nature vibratoire du son.

Manipulation

Faisons vibrer une cloche en la frottant par un archet. Ses vibrations font sautiller un léger corps placé à son contact et on entend un son.



Pendant plusieurs secondes le rebondissement de la petite balle prouve que la vibration se poursuit et le son continue de se faire entendre. Puis, dès que l'amplitude des vibrations devient très faible, l'œil voit encore le mouvement de la balle mais l'oreille ne perçoit plus rien.

Le son est donc dû à un mouvement vibratoire, mais pour être un émetteur sonore un oscillateur mécanique doit posséder une amplitude suffisante et une fréquence comprise entre certaines limites.

1.4.2 Production du son

Les sources sonores sont très variées. On peut utiliser :

- les tiges vibrantes (les diapasons)
- les cordes et tuyaux s (instruments de musique)
- les plaques et membranes (téléphone, haut-parleur, tambour)
- les sirènes, les sifflets, ...
- la voix humaine, le cri d'un animal ...

1.4.3 Célérité du son

Le son ne se propage pas dans le vide. Il se propage dans les solides, les liquides et les gaz.

La célérité du son dans un gaz est donnée par la formule de Laplace :

$$c = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{a_0 d} \frac{T}{T_0}}$$

γ est un coefficient qui ne dépend que de l'atomicité du gaz ($\gamma = 1,4$ pour les gaz diatomiques : $H_2, O_2, N_2, \text{air}, \dots$)

P_0 est la pression atmosphérique normale : $P_0 \approx 10^5 \text{ Pa}$

T_0 est la température normale : $T_0 = 273 \text{ K}$

T est la température absolue du gaz : $T = \theta + 273 \text{ K}$

a_0 est la masse volumique normale de l'air : $a_0 = 1,293 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

d est la densité du gaz par rapport à l'air : $d \approx \frac{M}{29}$

1.4.4 Facteurs influant sur la célérité du son dans un gaz

• Influence de la température

Pour un gaz déterminé dont la température absolue varie de T_1 à T_2 , la célérité du son

est proportionnelle à la racine carrée de la température absolue :

$$\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

• **Influence de la densité**

Pour des gaz différents, de même atomicité et pris à la même température, la célérité du son est inversement proportionnelle à la racine carrée de la densité :

$$\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{d_1}{d_2}}$$

Notions de Mathématiques

1 Formules trigonométriques

- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Conséquences :

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

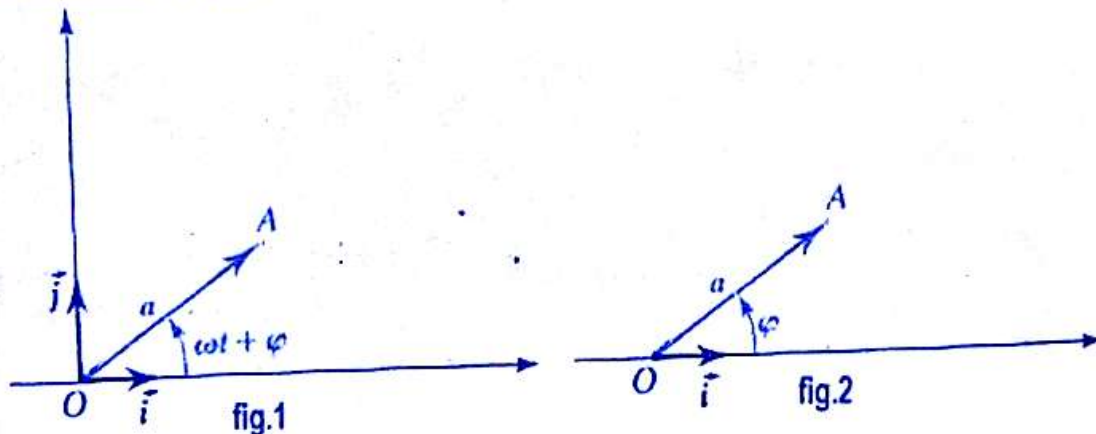
Remarque:

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad (\text{Avec } k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

2 Le vecteur tournant de Fresnel

Toute fonction sinusoïdale $x = a \cos(\omega t + \varphi)$, peut être considérée comme un vecteur tournant \overrightarrow{OA} dont le module est égal à l'amplitude a de la fonction sinusoïdale. L'angle que fait ce vecteur avec l'axe (o, \vec{i}) est la phase $\omega t + \varphi$ de la fonction sinusoïdale. (fig.1).



Pour étudier des vecteurs tournant à la même vitesse angulaire ω , on simplifie la représentation. Les vecteurs de Fresnel associés ne sont représentés qu'avec leur amplitude et leur phase (fig.2).

NB : L'angle φ est compté positivement dans le sens trigonométrique.

3 Somme de plusieurs fonctions sinusoïdales

3.1 Règle de Fresnel

La somme de plusieurs fonctions sinusoïdales peut être obtenue par la somme géométrique des vecteurs tournants correspondants.

3.2 Construction de Fresnel

Considérons deux fonctions sinusoïdales $y_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $y_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$.

Les vecteurs de Fresnel associés sont respectivement $\overrightarrow{OA_1}(a_1, \varphi_1)$ et $\overrightarrow{OA_2}(a_2, \varphi_2)$.

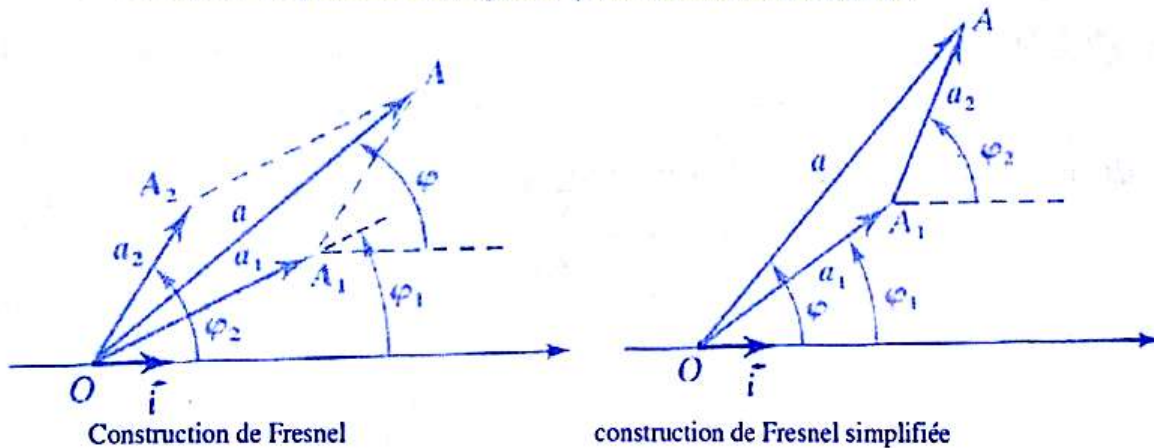
La somme $y = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ est une fonction sinusoïdale et peut s'écrire sous la forme : $y = a \cos(\omega t + \varphi)$.

En conséquence : $a \cos(\omega t + \varphi) = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

L'amplitude a et la phase φ du vecteur résultant \overrightarrow{OA} sont déterminées par la somme vectorielle des deux vecteurs tournants $\overrightarrow{OA_1}$ et $\overrightarrow{OA_2}$:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} \quad \dots$$

Cette somme géométrique n'est autre que la construction de Fresnel. Le vecteur \overrightarrow{OA} est porté par la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA_1}$ et $\overrightarrow{OA_2}$. Il suffit de mesurer l'amplitude a et la phase φ du vecteur résultant \overrightarrow{OA} .



Dans la pratique, on ne construit pas entièrement le parallélogramme. A partir de l'extrémité A_1 du vecteur $\overrightarrow{OA_1}$, on représente le vecteur $\overrightarrow{OA_2}$ (voir la construction simplifiée).

Exemple : Déterminons à l'aide de la construction de Fresnel la somme y de deux vibrations :

$$y = 2 \cos 100\pi t + 2 \cos \left(100\pi t - \frac{\pi}{2} \right)$$

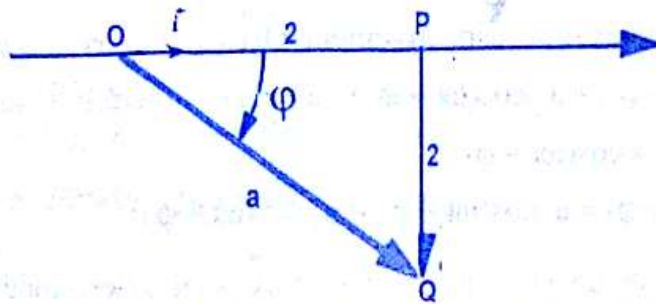
Réponse :

y est la somme de deux fonctions sinusoïdales. On peut donc écrire : $y = y_1 + y_2$

$y_1 = 2 \cos 100\pi t$ est représentée par le vecteur $\overrightarrow{OP}(2; 0)$ (voir la construction de Fresnel)

$y_2 = 2 \cos \left(100\pi t - \frac{\pi}{2} \right)$ est représentée par le vecteur $\overrightarrow{PQ} \left(2; -\frac{\pi}{2} \right)$.

Le vecteur résultant $\overline{OQ}(a; \varphi)$ représente $y = a \cos(100\pi t + \varphi)$



Déterminer l'amplitude a et la phase φ du vecteur résultant à l'aide du triangle rectangle OPQ .

Théorème de Pythagore :

$$\overline{OQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PQ}^2$$

soit :

$$a^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

D'où :

$$a = \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 4} = 2\sqrt{2}$$

Calcul de la phase :

$$\tan \varphi = -\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = -\frac{2}{2} = -1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

L'équation horaire de la vibration résultante est donc :

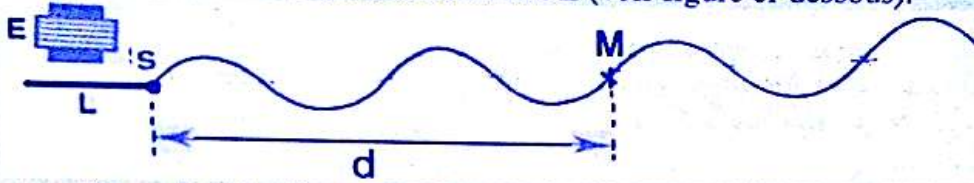
$$y = 2\sqrt{2} \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$

2 INTERFERENCES MECANIQUES

2.1 Propagation d'une onde sinusoïdale

2.1.1 Equation de vibration d'un point M

L'extrémité S d'une corde tendue horizontalement est solidaire d'une lame en acier L. La lame vibre sous l'action d'un électroaimant E (voir figure ci-dessous).



Supposons que l'équation de vibration de la source est :

$$y_S = a \cos \omega t$$

Les vibrations produites en O se propagent le long de la corde. L'élongation d'un point M de la corde situé à la distance d de la source S, à l'instant t, est identique à celle qu'avait le point S à l'instant $(t - \theta)$.

θ mesure la durée mise par le signal pour parcourir la distance $OM = d$. On l'appelle **retard de temps**. Sa valeur est $\theta = \frac{d}{c}$

c est la célérité de l'onde.

L'équation horaire du point M est donc :

$$y_M = a \cos \omega(t - \theta) = a \cos \omega \left(t - \frac{d}{c} \right)$$

soit
$$y_M = a \cos \left(\omega t - \frac{\omega d}{c} \right)$$

D'autre part, $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow y_M = a \cos \left(\omega t - \frac{2\pi d}{cT} \right)$

Puisque $\lambda = cT$,
$$y_M = a \cos \left(\omega t - \frac{2\pi d}{\lambda} \right)$$

2.1.2 Points en concordance de phase et points en opposition de phase

Considérons deux points de la corde M_1 et M_2 situés respectivement à la distance d_1 et à la distance d_2 de la source S. L'équation horaire du point M_1 est :

$$y_{M_1} = a \cos \left(\omega t - \frac{2\pi d_1}{\lambda} \right)$$

La phase de cette vibration est $\varphi_1 = -\frac{2\pi d_1}{\lambda}$

L'équation du point M_2 est $y_{M_2} = a \cos \left(\omega t - \frac{2\pi d_2}{\lambda} \right)$

Cette vibration a pour phase : $\varphi_2 = -\frac{2\pi d_2}{\lambda}$

Les deux points sont dits en concordance de phase ou tout simplement en phase s'ils ont à chaque instant la même élongation. Autrement dit, si leur différence de phase est égale à zéro : $\varphi_1 - \varphi_2 = 0 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Soit : $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$

Deux points sont dits en opposition de phase s'ils ont à chaque instant des élongations opposées. Autrement dit, si leur déphasage est égal à π :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi + 2k\pi$$

2.2 Interférences mécaniques

2.2.1 Principe de superposition de deux ondes de même nature

Lorsque deux signaux de même nature se superposent, la perturbation résultante y_M en un point M , est la somme algébrique des perturbations y_1 et y_2 que provoquerait chacun des signaux s'il intervenait seul au point M :

$$y_M = y_1 + y_2$$

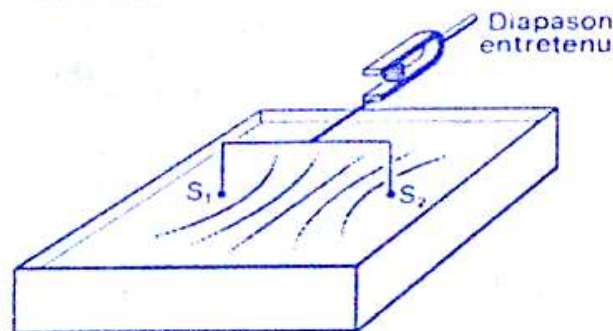
2.2.2 Activité : Interférences à la surface de l'eau

Matériel : cuve à eau ; diapason ; électro-aimant ; fourche munie de deux pointes.

OBJECTIF : Mise en évidence du phénomène d'interférences mécaniques

• Manipulation

Une fourche munie de deux pointes est fixée à l'une des branches d'un diapason. Les deux pointes trempent légèrement en S_1 et S_2 dans l'eau que contient une cuve.



Lorsque le diapason vibre, les points S_1 et S_2 constituent deux sources de vibrations sinusoïdales transversales de même période, de même amplitude, en phase. On aperçoit sur la surface libre du liquide des rides fixes qui ont la forme d'arcs d'hyperboles de foyers S_1 et S_2 . Ces rides sont appelées **lignes ou franges d'interférences**.

• Interprétation

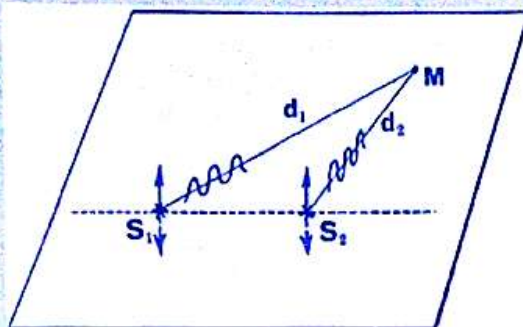
Lorsque le diapason vibre, les points S_1 et S_2 constituent deux sources de vibrations de même période qui se propagent à la surface de l'eau. La superposition de ces deux vibrations donne les franges d'interférences.

2.2.3 Equation de vibration d'un point

Supposons que l'équation de vibration du diapason soit :

$$y = a \cos \omega t$$

Les deux sources S_1 et S_2 vibrent suivant la même équation $y = a \cos \omega t$



Un point M de la surface de l'eau situé à la distance d_1 de S_1 , recevant uniquement les vibrations provenant de S_1 , aurait pour équation :

$$y_1 = a \cos \left(\omega t - \frac{2\pi d_1}{\lambda} \right)$$

Cette vibration a pour phase $\varphi_1 = -\frac{2\pi d_1}{\lambda}$

Le point M situé à la distance d_2 de S_2 , recevant uniquement les vibrations provenant de S_2 , aurait pour équation : $y_2 = a \cos \left(\omega t - \frac{2\pi d_2}{\lambda} \right)$

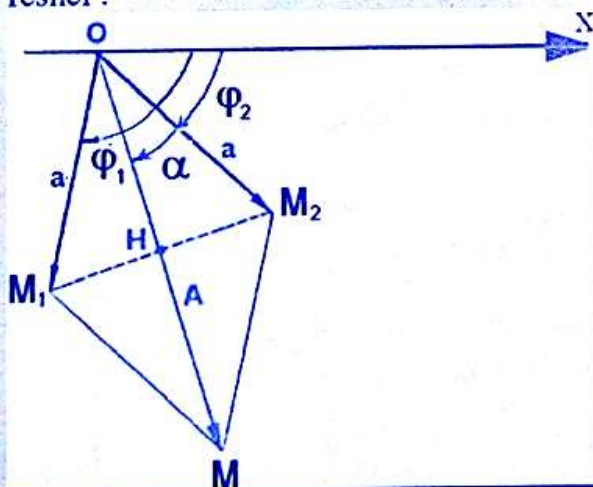
La phase de vibration est $\varphi_2 = -\frac{2\pi d_2}{\lambda}$

Conformément au principe de superposition, l'équation du point M est:

$$y_M = y_1 + y_2$$

$$\text{Soit : } y_M = a \cos \left(\omega t - \frac{2\pi d_1}{\lambda} \right) + a \cos \left(\omega t - \frac{2\pi d_2}{\lambda} \right) = A \cos(\omega t + \Phi)$$

L'amplitude A et la phase Φ de la vibration résultante seront déterminées par construction de Fresnel :



Le vecteur \overline{OM}_1 représente $y_1 = a \cos\left(\omega t - \frac{2\pi d_1}{\lambda}\right)$

Le vecteur \overline{OM}_2 représente $y_2 = a \cos\left(\omega t - \frac{2\pi d_2}{\lambda}\right)$

Le vecteur \overline{OM} représente $y_M = A \cos(\omega t + \Phi)$

Considérons le triangle rectangle OHM_2 :

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\Lambda}{2}}{a} = \frac{A}{2a} \Rightarrow A = 2a \cos \alpha$$

Par ailleurs :

$$\alpha = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1)$$

En conséquence :

$$A = 2a \cos \frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1)$$

La phase Φ représente l'angle que fait le vecteur résultant avec l'axe ox (origine des phases) :

$$\Phi = \varphi_2 + \alpha = \varphi_2 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \frac{2\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2}{2}$$

Soit :

$$\Phi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = -\frac{\pi}{\lambda}(d_1 + d_2)$$

Finalement :

$$y_M = 2a \cos \frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) \cos \left[\omega t - \frac{\pi}{\lambda}(d_1 + d_2) \right]$$

2.2.4 Aspect de la surface de l'eau

- **Positions des points d'amplitude maximale**

L'amplitude de la vibration résultante est maximale ($A = \pm 2a$) si :

$$\cos \frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = \pm 1$$

soit :

$$\frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

D'où :

$$d_2 - d_1 = k\lambda$$

Les points d'amplitude maximale constituent une famille d'hyperboles de foyers S_1 et S_2 .

Par ailleurs, si $k = 0$, nous obtenons : $d_2 - d_1 = 0 \Rightarrow d_2 = d_1$. Ces points sont situés sur la médiatrice du segment S_1S_2 .

- **Positions des points d'amplitude minimale (points immobiles)**

L'amplitude de la vibration résultante est nulle si :

$$2a \cos \frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = 0$$

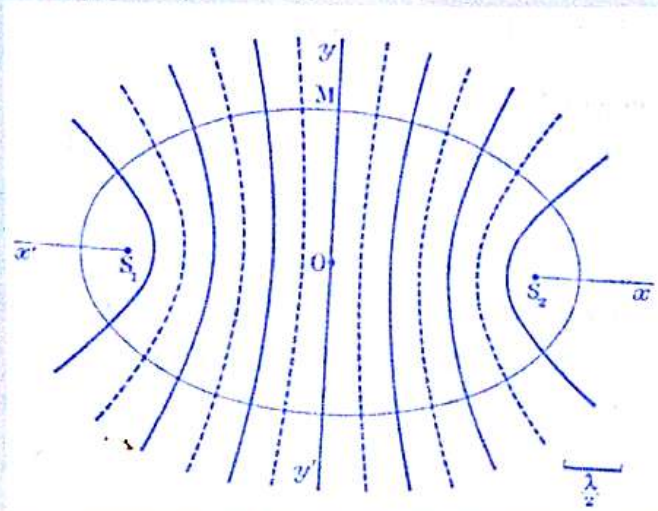
$$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1) = \frac{\pi}{2} + k'\pi$$

Ou encore :

$$\frac{d_2 - d_1}{\lambda} = \frac{1}{2} + k' \Rightarrow d_2 - d_1 = k'\lambda + \frac{\lambda}{2}$$

$$d_2 - d_1 = k'\lambda + \frac{\lambda}{2}$$

Si $k'=0$, on a : $d_2 - d_1 = \frac{\lambda}{2}$. Les points immobiles se trouvent sur un réseau d'hyperboles de foyers S_1 et S_2 , intercalés entre les hyperboles d'amplitude maximale.



2.2.5 Influence du déphasage entre les sources

Considérons par exemple le cas où S_1 et S_2 sont en opposition de phase. Dans ce cas, les positions des points d'amplitude résultante maximale et celles des points immobiles sont interverties par rapport au cas où S_1 et S_2 étaient en phase :

Pour les points d'amplitude maximale on aura : $d_2 - d_1 = k\lambda + \frac{\lambda}{2}$

Pour les points d'amplitude minimale : $d_2 - d_1 = k'\lambda$

La position des franges d'interférence dépend donc du déphasage entre les deux sources S_1 et S_2 . Si le déphasage varie au cours du temps, la position des franges varie également au cours du temps.

Deux sources sont dites cohérentes si leur déphasage reste constant, c'est-à-dire ne varie pas au cours du temps.

Deux sources sont dites synchrones si elles ont la même période.

Conclusion (conditions d'interférences mécaniques) :

Pour avoir le phénomène d'interférences les sources doivent être synchrones et cohérentes.

1_ Propagation d'une onde sinusoïdale le long d'un fil

L'extrémité S d'une lame vibrante est animée d'un mouvement rectiligne sinusoïdal vertical de fréquence $N = 100\text{Hz}$ et d'amplitude $a = 2\text{mm}$. En S est attachée l'extrémité d'un fil horizontal de 1m de longueur dont l'autre extrémité est fixée à un dispositif empêchant la réflexion des ondes. Des vibrations transversales se propagent alors sur le fil avec l'amplitude constante a et une célérité $c = 20\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. L'origine des dates est choisie à l'instant où S quitte sa position de repos dans le sens des élongations positives, le sens positif étant vers le haut.

1° Etablir l'équation horaire du mouvement de S.

2° Etablir l'équation horaire du mouvement du point M situé à la distance $d = 30\text{cm}$ de S. Quel est le déphasage entre les points S et M ?

Solution

1° Equation horaire du mouvement de S :

$$y_S = a \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = 2\text{mm} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\omega = 2\pi N = 200\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

D'après l'énoncé, lorsque $t = 0$, $y = 0$ et $v > 0$ (à la date $t = 0$, S quitte sa position d'équilibre dans le sens des élongations positives). Ainsi, nous avons :

$$0 = a \cos \varphi$$

$$\text{D'où : } \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Par ailleurs, la vitesse de S a pour expression :

$$v_S = \frac{dy_S}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{A } t = 0, \quad v_S = -a\omega \sin \varphi$$

$$\text{Si } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad, } \quad v_S = -a\omega \sin \frac{\pi}{2} = -a\omega < 0$$

$$\text{Si } \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad, } \quad v_S = -a\omega \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = a\omega > 0$$

$v_S > 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$. L'équation horaire du mouvement de S est donc :

$$y_S = 2 \cdot 10^{-3} \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

2° Equation horaire du mouvement de M

$$y_M = 2 \cdot 10^{-3} \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi d}{\lambda}\right)$$

$$\text{Soit : } y_M = 2 \cdot 10^{-3} \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi \times 30}{20}\right)$$

Ou encore :

$$y_M = 2 \cdot 10^{-3} \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{2} - 3\pi\right)$$

Par la suite

$$y_M = 2 \cdot 10^{-3} \cos\left(200\pi t - \frac{7\pi}{2}\right)$$

D'autre part :

$$\frac{7\pi}{2} = \frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2}$$

Ainsi, l'équation horaire du point M est :

$$y_M = 2 \cdot 10^{-3} \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Le déphasage entre M et S est : $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$. Les points M et S sont en opposition de phase.

2_ Interférences à la surface de l'eau

Un vibreur de fréquence $f = 20\text{Hz}$ est solidaire d'une fourche comportant deux pointes. Ces deux pointes frappent la surface de l'eau en deux points S_1 et S_2 qui constituent deux sources de vibrations sinusoïdales transversales en phase de même amplitude. La distance entre S_1 et S_2 est $d = 5\text{cm}$. La célérité des ondes à la surface de l'eau est $c = 0,36\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1° Déterminer les états vibratoires des points suivants :

$$M_1 \begin{cases} d_1 = 10\text{cm} \\ d_2 = 11,8\text{cm} \end{cases} \quad M_2 \begin{cases} d_1 = 8,1\text{cm} \\ d_2 = 5,4\text{cm} \end{cases} \quad M_3 \begin{cases} d_1 = 14,7\text{cm} \\ d_2 = 16,5\text{cm} \end{cases}$$

2° Deux des points précédents appartiennent à une frange d'interférence. Lesquels ? Quelle est la position du point d'intersection de cette frange avec le segment S_1S_2 .

3° Calculer le nombre de franges d'amplitude maximale et le nombre de franges d'amplitude minimale que l'on observe à la surface de l'eau.

Solution

1° Etats vibratoires des trois points :

L'état vibratoire d'un point M dépend de la différence de marche $d_2 - d_1$ des deux ondes qui interfèrent à ce point.

Si $d_2 - d_1 = k\lambda$ avec $k \in \mathbb{Z}$, le point M appartient à une frange d'amplitude maximale.

Si $d_2 - d_1 = k\lambda + \frac{\lambda}{2}$ le point M appartient à une frange d'amplitude minimale.

Comparons les différences de marche à la longueur d'onde λ :

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{0,36}{20} = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{m} = 1,8\text{cm}$$

En M_1 : $d_2 - d_1 = 11,8 - 10 = 1,8\text{cm} = \lambda$. M_1 est donc un point d'amplitude maximale.

En M_2 : $d_2 - d_1 = 5,4 - 8,1 = -2,7\text{cm}$

Donc : $\frac{d_2 - d_1}{\lambda} = \frac{-2,7}{1,8} = -1,5 \Rightarrow d_2 - d_1 = -1,5\lambda$

Ou encore : $d_2 - d_1 = -2\lambda + \frac{\lambda}{2} = k\lambda + \frac{\lambda}{2}$ Avec $k = -2$

M_2 est donc un point d'amplitude nulle.

En M_3 : $d_2 - d_1 = 16,5 - 14,7 = 1,8\text{cm} = \lambda$.

M_3 est donc un point d'amplitude maximale.

2° Les points M_1 et M_3 appartiennent à la même frange d'amplitude maximale.

Soit M le point d'intersection de cette frange avec le segment S_1S_2 . L'état d'interférence de M est défini par :

$$d_2 - d_1 = \lambda$$

Par ailleurs, M appartenant au segment S_1S_2 , donc :

$$d_1 + d_2 = d$$

On obtient donc le système d'équation :

$$\begin{cases} d_2 - d_1 = \lambda & (1) \\ d_1 + d_2 = d & (2) \end{cases}$$

En ajoutant (1) et (2) membre à membre, on obtient :

$$2d_2 = \lambda + d$$

d'où : $d_2 = \frac{\lambda + d}{2} = \frac{1,8 + 5}{2} = 3,4\text{cm}$

à partir de (2), on a : $d_1 = d - d_2 = 5 - 3,4 = 1,6\text{cm}$

3° Nombre de franges d'amplitude maximale :

La différence de marche des points d'amplitude maximale est telle que :

$$d_2 - d_1 = k\lambda$$

Les points d'intersections des franges d'amplitude maximale avec le segment S_1S_2 sont tels que :

$$d_1 + d_2 = d$$

On obtient donc le système d'équation :

$$\begin{cases} d_2 - d_1 = k\lambda & (1) \\ d_1 + d_2 = d & (2) \end{cases}$$

En ajoutant (1) et (2) membre à membre, on obtient :

$$2d_2 = k\lambda + d$$

D'où : $d_2 = \frac{k\lambda}{2} + \frac{d}{2}$

Par ailleurs : $0 < d_2 < d$

soit :
$$0 < \frac{k\lambda}{2} + \frac{d}{2} < d$$

ou encore :
$$-\frac{d}{2} < \frac{k\lambda}{2} < d - \frac{d}{2}$$

aussi :
$$-\frac{d}{2} < \frac{k\lambda}{2} < \frac{d}{2}$$

par la suite :
$$-d < k\lambda < d$$

aussi :
$$-\frac{d}{\lambda} < k < \frac{d}{\lambda}$$

AN :
$$-\frac{5}{1,8} < k < \frac{5}{1,8}$$

soit :
$$-2,78 < k < 2,78$$

$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

Il y a donc 5 franges d'amplitude maximale.

Nombre de franges d'amplitude minimale

Les points d'amplitude nulle sont tels que :

$$d_2 - d_1 = k'\lambda + \frac{\lambda}{2}$$

On obtient le système d'équation :

$$\begin{cases} d_2 - d_1 = k'\lambda + \frac{\lambda}{2} & (1) \\ d_1 + d_2 = d & (2) \end{cases}$$

En ajoutant (1) et (2) membre à membre, on obtient :

$$2d_2 = k'\lambda + \frac{\lambda}{2} + d$$

D'où :
$$d_2 = \frac{k'\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2}$$

Par ailleurs :
$$0 < d_2 < d$$

soit :
$$0 < \frac{k'\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} < d$$

ou encore :
$$-\frac{d}{2} < \frac{k'\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} < \frac{d}{2}$$

d'où :
$$-d < k'\lambda + \frac{\lambda}{2} < d$$

ou encore :
$$-d - \frac{\lambda}{2} < k'\lambda < d - \frac{\lambda}{2}$$

par la suite :
$$-\frac{d}{\lambda} - \frac{1}{2} < k' < \frac{d}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

$$\text{AN : } -\frac{5}{1,8} - \frac{1}{2} < k' < \frac{5}{1,8} - \frac{1}{2}$$

$$-3,28 < k' < 2,28$$

$$k' \in \mathbb{Z} \Rightarrow k' \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$$

Il y a 6 franges d'amplitude minimale.

3_ Interférences à la surface d'une nappe d'eau

On crée à la surface d'une nappe d'eau, en deux points O_1 et O_2 distants de 10cm, des vibrations sinusoïdales en phase, de fréquence $f = 10\text{Hz}$ et d'amplitude 1mm. La célérité des ondes à la surface de l'eau est $50\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

1° Déterminer sur le segment O_1O_2 , les points d'amplitude maximale.

2° Un point M se trouve à la distance $d_1 = 7,5\text{cm}$ de O_1 et $d_2 = 5\text{cm}$ de O_2 en dehors du segment O_1O_2 . Quel est son état vibratoire ?

Solution

1° Les points d'amplitude maximale sont tels que :

$$d_2 - d_1 = k\lambda. \text{ Avec } k \in \mathbb{Z}.$$

La longueur d'onde est : $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{50}{10} = 5\text{cm}$

Par ailleurs, sur le segment O_1O_2 on a :

$$d_1 + d_2 = O_1O_2$$

Ce qui nous donne le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} d_2 - d_1 = k\lambda & (1) \\ d_1 + d_2 = O_1O_2 & (2) \end{cases}$$

En ajoutant (1) et (2) membre à membre, on obtient :

$$2d_2 = k\lambda + O_1O_2$$

D'où : $d_2 = \frac{k\lambda}{2} + \frac{O_1O_2}{2}$

Soit : $d_2 = \frac{k \times 5}{2} + \frac{10}{2} = 2,5k + 5$

Par ailleurs : $0 < d_2 < O_1O_2$

De ce fait : $0 < 2,5k + 5 < 10$

Ou encore : $-5 < 2,5k < 10 - 5$

Par la suite : $-\frac{5}{2,5} < k < \frac{5}{2,5}$

Soit : $-2 < k < 2$

Ce qui conduit à $k = -1$; $k = 0$ et $k = 1$.

D'autre part : $d_2 = 2,5k + 5$

- si $k = -1$, $d_2 = 2,5\text{cm}$

- si $k = 0$, $d_2 = 5\text{cm}$

- si $k = 1$, $d_2 = 7,5\text{cm}$

2° Etat vibratoire du point M :

La différence de marche du point M est :

$$d_2 - d_1 = 5 - 7,5 = -2,5\text{cm}$$

En conséquence : $\frac{d_2 - d_1}{\lambda} = \frac{-2,5}{5} = -0,5$

D'où : $d_2 - d_1 = -0,5\lambda = -\lambda + \frac{\lambda}{2}$

La différence est donc de la forme : $d_2 - d_1 = k\lambda + \frac{\lambda}{2}$ avec $k = -1$. Le point M est donc un point immobile.

4_ Interférences à la surface de l'eau d'une cuve

Une lame reliée à un vibreur est munie d'une fourche dont les deux pointes disposées verticalement sont terminées par deux extrémités S_1 et S_2 affleurant au repos la surface de l'eau d'une cuve. La distance S_1S_2 est 5,3cm. Les points S_1 et S_2 sont animés de mouvements sinusoïdaux en phase, de fréquence $f = 25\text{Hz}$ et d'amplitude $a = 5\text{mm}$. La célérité des ondes à la surface de l'eau est $c = 20\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$. On admet que la surface de l'eau est suffisamment grande et qu'il n'y a pas de réflexion des ondes sur les bords du récipient.

1° Ecrire l'équation horaire des mouvements de S_1 et S_2 en précisant l'origine des dates choisie.

2° Décrire l'aspect de la surface de l'eau et interpréter le phénomène.

3° On considère un point M de la surface de l'eau situé à la distance $d_1 = 3,2\text{cm}$ de S_1 et à la distance $d_2 = 3\text{cm}$ de S_2 . L'onde progressive issue de S_1 tend à provoquer un déplacement y_1 de M et l'onde issue de S_2 un déplacement y_2 de M.

a) Déterminer les expressions des élongations $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

b) En utilisant la représentation vectorielle de Fresnel, déterminer l'équation horaire du point M. On admet que l'amplitude des vibrations provoquées par S_1 et S_2 reste constante.

c) Calculer l'élongation de M à la date $t = 2,5\text{s}$.

4° Combien y-a-t-il de points immobiles sur le segment S_1S_2 ? Préciser les positions de ces points par rapport à S_2 ou S_1 .

Solution

1° Equation horaire des mouvements de S_1 et S_2 :

$$y_{S_1} = y_{S_2} = y \text{ (y est l'équation horaire du vibreur)}$$

Par ailleurs : $y = a \cos(\omega t + \varphi)$

Conditions initiales choisies : à $t = 0$, $y = +a$.

Donc : $a = a \cos \varphi$

D'où : $\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

$$a = 5 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\omega = 2\pi f = 50\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'équation horaire de S_1 et S_2 est donc :

$$y = 5 \cdot 10^{-3} \cos 50\pi t$$

2° Aspect de la surface de l'eau :

On aperçoit sur la surface libre du liquide des rides fixes qui ont la forme d'arcs d'hyperboles de foyers S_1 et S_2 .

Interprétation : Lorsque la lame vibre, les points S_1 et S_2 constituent deux sources de vibrations de même période qui se propagent à la surface de l'eau. La superposition de ces deux vibrations donne les franges d'interférences.

3° a) Expressions des elongations :

$$y_1(t) = 5 \cdot 10^{-3} \cos\left(50\pi t - \frac{2\pi d_1}{\lambda}\right)$$

La longueur d'onde est : $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{20}{25} = 0,8 \text{ cm}$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 5 \cdot 10^{-3} \cos\left(50\pi t - \frac{2\pi \times 3,2}{0,8}\right) \\ &= 5 \cdot 10^{-3} \cos(50\pi t - 8\pi) \end{aligned}$$

$$8\pi = 2k\pi \equiv 0 \Rightarrow$$

$$y_1(t) = 5 \cdot 10^{-3} \cos 50\pi t$$

De même :

$$y_2(t) = 5 \cdot 10^{-3} \cos\left(50\pi t - \frac{2\pi d_2}{\lambda}\right)$$

$$y_2(t) = 5 \cdot 10^{-3} \cos\left(50\pi t - \frac{2\pi \times 3}{0,8}\right)$$

$$= 5 \cdot 10^{-3} \cos(50\pi t - 7,5\pi)$$

$$7,5\pi = 8\pi - 0,5\pi \equiv -0,5\pi = -\frac{\pi}{2}$$

En conséquence :

$$y_2(t) = 5 \cdot 10^{-3} \cos\left(50\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

b) Equation horaire du point M :

$$y_M = y_1(t) + y_2(t)$$

Soit :

$$y_M = 5 \cdot 10^{-3} \cos 50\pi t + 5 \cdot 10^{-3} \cos\left(50\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

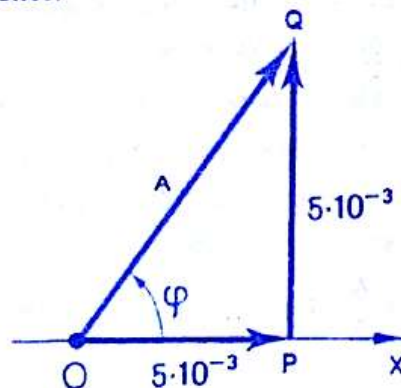
y_M est la somme de deux fonctions sinusoïdales. Elle est donc une fonction sinusoïdale et peut s'écrire :

$$y_M = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Donc :

$$A \cos(\omega t + \varphi) = 5 \cdot 10^{-3} \cos 50\pi t + 5 \cdot 10^{-3} \cos\left(50\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

L'amplitude A et la phase φ de la vibration résultante seront déterminées par la construction de Fresnel.



Appliquons le théorème de Pythagore au triangle OPQ :

$$\overline{OQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PQ}^2$$

Soit :

$$A^2 = (5 \cdot 10^{-3})^2 + (5 \cdot 10^{-3})^2 = 50 \cdot 10^{-6}$$

D'où :

$$A = \sqrt{50 \cdot 10^{-6}} = \sqrt{2 \times 25 \cdot 10^{-6}} = 5\sqrt{2} \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Considérons le rapport trigonométrique suivant du triangle OPQ :

$$\tan \varphi = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$$

Soit :

$$\tan \varphi = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}} = 1$$

D'où : $\varphi = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

L'équation horaire du point M est donc :

$$y_M = 5\sqrt{2} \cdot 10^{-3} \cos\left(50\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

c) Elongation de M à la date $t = 2,5\text{s}$:

$$y_M = 5\sqrt{2} \cdot 10^{-3} \cos\left(50\pi \times 2,5 + \frac{\pi}{4}\right)$$

Soit : $y_M = 5\sqrt{2} \cdot 10^{-3} \cos\left(125\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$$125\pi = 124\pi + \pi \Rightarrow y_M = 5\sqrt{2} \cdot 10^{-3} \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow y_M = -5\sqrt{2} \cdot 10^{-3} \cos \frac{\pi}{4} = -5\sqrt{2} \cdot 10^{-3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$y_M = -5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

4° Nombre de points immobiles sur S_1S_2

La différence de marche des points d'amplitude nulle est telle que :

$$d_2 - d_1 = k\lambda + \frac{\lambda}{2}$$

Pour un point du segment S_1S_2 , on a :

$$d_1 + d_2 = S_1S_2$$

On obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} d_2 - d_1 = k\lambda + \frac{\lambda}{2} & (1) \\ d_1 + d_2 = S_1S_2 & (2) \end{cases}$$

(1) et (2) $\Rightarrow 2d_2 = k\lambda + \frac{\lambda}{2} + S_1S_2$

D'où : $d_2 = \frac{(2k+1)\lambda}{4} + \frac{S_1S_2}{2}$

AN : $d_2 = \frac{(2k+1) \times 0,8}{4} + \frac{5,3}{2} = 0,4k + 2,85$

Par ailleurs : $0 < d_2 < S_1S_2$

Donc : $0 < 0,4k + 2,85 < 5,3$

Ou encore : $-2,85 < 0,4k < 5,3 - 2,85$

Par la suite : $-\frac{2,85}{0,4} < k < \frac{2,45}{0,4}$

Soit : $-7,1 < k < 6,1$

En conséquence k prend les valeurs : $-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Au total on a 14 points immobiles.

Les positions de ces points immobiles par rapport à S_2 :

$$d_2 = 0,4k + 2,85$$

$$\text{-- si } k = -7, d_2 = 0,05\text{cm}$$

$$\text{-- si } k = -6, d_2 = 0,45\text{cm}$$

$$\text{-- si } k = -5, d_2 = 0,85\text{cm}$$

$$\text{-- si } k = -4, d_2 = 1,25\text{cm}$$

$$\text{-- si } k = -3, d_2 = 1,65\text{cm}$$

$$\text{-- si } k = -2, d_2 = 2,05\text{cm}$$

$$\text{-- si } k = -1, d_2 = 2,45\text{cm}$$

$$\text{-- si } k = 0, d_2 = 2,85\text{cm}$$

$$\text{-- si } k = 1, d_2 = 3,25\text{cm}$$

$$\text{-- si } k = 2, d_2 = 3,65\text{cm}$$

$$\text{-- si } k = 3, d_2 = 4,05\text{cm}$$

$$\text{-- si } k = 4, d_2 = 4,45\text{cm}$$

$$\text{-- si } k = 5, d_2 = 4,85\text{cm}$$

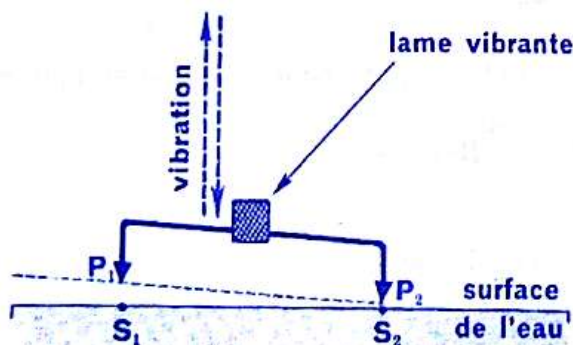
$$\text{-- si } k = 6, d_2 = 5,25\text{cm}$$

5_ Sources en opposition de phase

Un vibreur, vibrant à la fréquence $f = 100\text{Hz}$, émet des ondes circulaires à la surface de l'eau d'une cuve. La distance séparant deux crêtes consécutives est 3mm .

1° Calculer la célérité des ondes.

2° En deux points S_1 et S_2 de la surface de l'eau séparés de 6cm , on produit deux mouvements vibratoires transversaux de même fréquence $N = 50\text{Hz}$, en opposition de phase en faisant actionner deux pointes P_1 et P_2 avec une même lame vibrante (à cause d'une légère dissymétrie de montage, les deux pointes ne sont pas à égale distance de la surface de l'eau). La phase à l'origine de la vibration y_{S_1} est considérée comme nulle.



La vitesse de propagation de l'onde à la surface de l'eau est $v = 0,40\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

a) A l'aide de la construction de Fresnel, déterminer l'équation du mouvement d'un point M de la surface de l'eau, situé à $4,2\text{cm}$ de S_1 et à $5,2\text{cm}$ de S_2 en admettant que les vibrations provenant des deux sources ont au point M la même amplitude $a = 2\text{mm}$.

b) Déterminer le nombre de frange d'amplitude minimale et le nombre de frange d'amplitude maximale.

Solution

1° Célérité des ondes :

Nous avons : $\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow c = \lambda f$

Par ailleurs, la distance entre deux crêtes consécutives est la longueur d'onde : $\lambda = 3\text{mm}$

En conséquence : $c = 3 \cdot 10^{-3} \times 100 = 0,3\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$c = 0,3\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2° a) Les équations horaires des deux sources sont :

$$y_{S_1} = a \cos \omega t = 2 \cdot 10^{-3} \cos 100\pi t$$

$$y_{S_2} = a \cos(\omega t + \pi) = 2 \cdot 10^{-3} \cos(100\pi t + \pi)$$

Le point M, recevant uniquement les vibrations provenant de S_1 , aurait pour équation :

$$y_1 = 2 \cdot 10^{-3} \cos\left(100\pi t - \frac{2\pi d_1}{\lambda}\right)$$

$$\lambda = \frac{v}{N} = \frac{0,40}{50} = 0,8 \cdot 10^{-2} \text{m} = 0,8\text{cm}$$

$$y_1 = 2 \cdot 10^{-3} \cos\left(100\pi t - \frac{2\pi \times 4,2}{0,8}\right)$$

Soit : $y_1 = 2 \cdot 10^{-3} \cos(100\pi t - 10,5\pi)$

$$10,5\pi = 10\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Donc : $y_1 = 2 \cdot 10^{-3} \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$

Le point M, recevant uniquement les vibrations provenant de S_2 , aurait pour équation :

$$y_2 = 2 \cdot 10^{-3} \cos\left(100\pi t + \pi - \frac{2\pi d_2}{\lambda}\right)$$

Soit : $y_2 = 2 \cdot 10^{-3} \cos\left(100\pi t + \pi - \frac{2\pi \times 5,2}{0,8}\right)$

$$y_2 = 2 \cdot 10^{-3} \cos(100\pi t - 12\pi)$$

$$12\pi = 2k\pi = 0 \Rightarrow y_2 = 2 \cdot 10^{-3} \cos 100\pi t$$

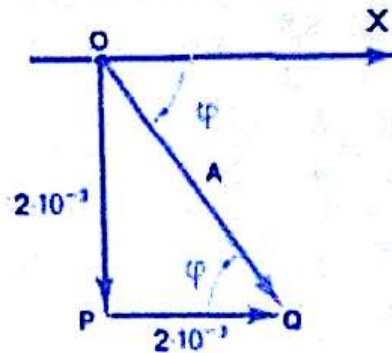
Principe de superposition :

$$y_M = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Donc : $y_M = A \cos(\omega t + \varphi) = 2 \cdot 10^{-3} \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot 10^{-3} \cos 100\pi t$

Donc : $y_M = A \cos(\omega t + \varphi) = 2 \cdot 10^{-3} \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot 10^{-3} \cos 100\pi t$

On obtient la représentation de Fresnel suivante :



Appliquons le théorème de Pythagore au triangle OPQ :

$$\overline{OQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PQ}^2$$

Soit : $A^2 = (2 \cdot 10^{-3})^2 + (2 \cdot 10^{-3})^2 = 8 \cdot 10^{-6}$

D'où : $A = \sqrt{8 \cdot 10^{-6}} = \sqrt{2 \times 4 \cdot 10^{-6}} = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-3} \text{ m}$

Considérons le rapport trigonométrique suivant du triangle OPQ :

$$\tan|\varphi| = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$$

Soit : $\tan|\varphi| = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 1$

D'où : $|\varphi| = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$

L'équation horaire du point M est donc :

$$y_M = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-3} \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$

b)

– Les deux sources étant en opposition de phase, la différence de marche d'un point d'amplitude maximale est telle que :

$$d_2 - d_1 = k\lambda + \frac{\lambda}{2}$$

D'autre part, les points d'intersections des franges d'amplitude maximale avec le segment S_1S_2 sont tels que :

$$d_1 + d_2 = S_1S_2$$

On obtient donc le système d'équation :

$$\begin{cases} d_2 - d_1 = k\lambda + \frac{\lambda}{2} & (1) \\ d_1 + d_2 = S_1S_2 & (2) \end{cases}$$

d'où :
$$d_2 = \frac{k\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{S_1 S_2}{2}$$

Par ailleurs :
$$0 < d_2 < S_1 S_2$$

donc :
$$0 < \frac{k\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{S_1 S_2}{2} < S_1 S_2$$

ou :
$$-\frac{S_1 S_2}{2} < \frac{k\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} < \frac{S_1 S_2}{2}$$

aussi :
$$-S_1 S_2 < k\lambda + \frac{\lambda}{2} < S_1 S_2$$

Par la suite :
$$-S_1 S_2 - \frac{\lambda}{2} < k\lambda < S_1 S_2 - \frac{\lambda}{2}$$

Finalement :
$$-\frac{S_1 S_2}{\lambda} - \frac{1}{2} < k < \frac{S_1 S_2}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

AN :
$$-\frac{6}{0,8} - \frac{1}{2} < k' < \frac{6}{0,8} - \frac{1}{2}$$

soit :
$$-8 < k < 7$$

$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Nous avons au total **14 franges d'amplitude maximale.**

- La différence de marche d'un point d'amplitude nulle est :

$$d_2 - d_1 = k'\lambda$$

Les points d'intersections des franges d'amplitude nulle avec le segment $S_1 S_2$ sont tels que :

$$d_1 + d_2 = S_1 S_2$$

On obtient donc le système d'équation :

$$\begin{cases} d_2 - d_1 = k'\lambda & (1) \\ d_1 + d_2 = S_1 S_2 & (2) \end{cases}$$

En ajoutant (1) et (2) membre à membre, on obtient :

$$2d_2 = k'\lambda + S_1 S_2$$

d'où :
$$d_2 = \frac{k'\lambda}{2} + \frac{S_1 S_2}{2}$$

par ailleurs :
$$0 < d_2 < S_1 S_2$$

soit :
$$0 < \frac{k'\lambda}{2} + \frac{S_1 S_2}{2} < S_1 S_2$$

ou encore
$$-\frac{S_1 S_2}{2} < \frac{k'\lambda}{2} < S_1 S_2 - \frac{S_1 S_2}{2}$$

aussi :
$$-\frac{S_1 S_2}{2} < \frac{k\lambda}{2} < \frac{S_1 S_2}{2}$$

par la suite : $-S_1 S_2 < k' \lambda < S_1 S_2$

et : $-\frac{S_1 S_2}{\lambda} < k' < \frac{S_1 S_2}{\lambda}$

AN : $-\frac{6}{0,8} < k' < \frac{6}{0,8}$

soit : $-7,5 < k' < 7,5$

$k' \in \mathbb{Z} \Rightarrow k' \in \{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

Nous avons au total **15 franges d'amplitude minimale.**

3 OPTIQUE PHYSIQUE

INTERFERENCES LUMINEUSES

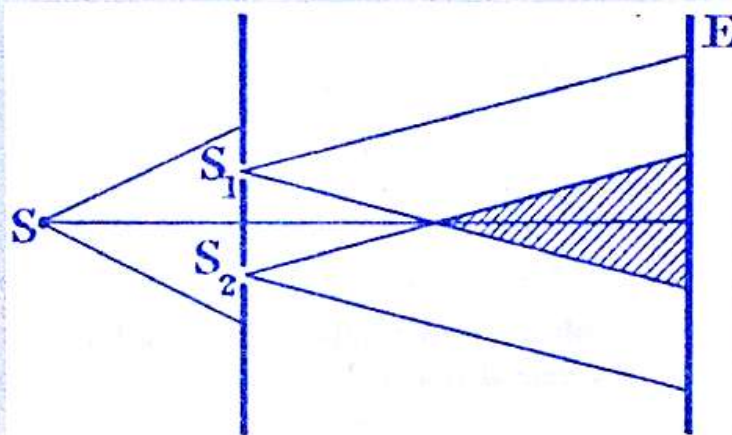
3.1 Activité 1 : Interférences en lumière monochromatique

Matériel : Source de lumière monochromatique ; fentes de Young ; écran.

OBJECTIF : Mise en évidence du phénomène d'interférences lumineuses.

• Manipulation

Deux fentes fines S_1 et S_2 sont éclairées par une source de lumière monochromatique S placée sur la médiatrice du segment S_1S_2 , joignant les deux fentes.



La lumière provenant de S est diffractée par les fentes S_1 et S_2 qui constituent ainsi deux sources secondaires. Sur un écran E parallèle au segment S_1S_2 , on voit dans la partie commune aux deux faisceaux diffractés, des bandes rectilignes, parallèles, alternativement brillantes et sombres ("la lumière ajoutée à la lumière a pu donner de l'obscurité en certains endroits"). Ces bandes, appelées franges d'interférences sont obtenues quelle que soit la position de l'écran dans la partie commune aux deux faisceaux diffractés. On dit qu'elles sont non localisées.

• Interprétation

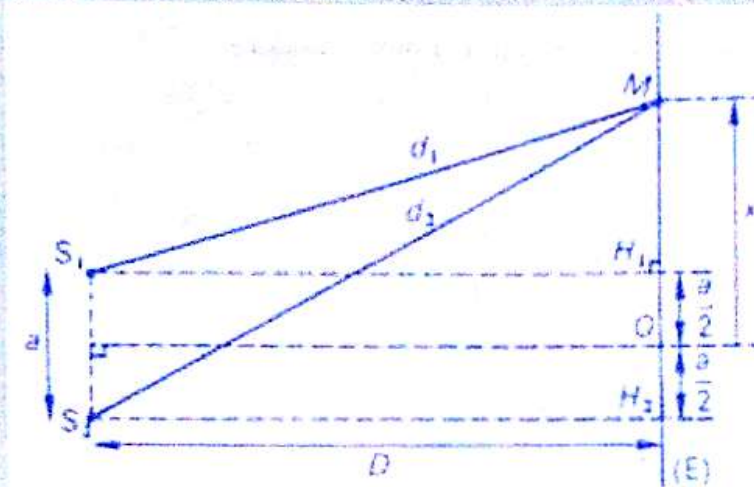
La lumière est un phénomène vibratoire. La source S produit une radiation monochromatique de longueur d'onde λ se propageant à la célérité c . Les fentes S_1 et S_2 constituent deux sources de vibrations synchrones et cohérentes de longueur d'onde λ . Dans la partie commune aux deux faisceaux diffractés, les deux vibrations se superposent : c'est le phénomène d'interférences lumineuses. Les franges brillantes correspondent aux franges d'amplitude maximale. Les franges obscures correspondent aux franges d'amplitude minimale.

3.2 Etude théorique

3.2.1 Différence de marche

Les deux sources secondaires S_1 et S_2 sont situées à la distance D de l'écran E . Leur distance est a . Soit O le point de l'écran situé sur la médiatrice du segment S_1S_2 . Un

point quelconque M de l'écran est repéré par sa position $OM = x$ (voir la figure suivante). Par ailleurs, le point M est situé à la distance d_1 de S_1 et à la distance d_2 de S_2 . La différence $\delta = d_2 - d_1$ est appelée **différence de marche**.



Appliquons le théorème de Pythagore au triangle S_1H_1M :

$$\overline{S_1M}^2 = \overline{S_1H_1}^2 + \overline{H_1M}^2$$

$$d_1^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = D^2 + x^2 - ax + \frac{a^2}{4}$$

Appliquons le théorème de Pythagore au triangle S_2H_2M :

$$\overline{S_2M}^2 = \overline{S_2H_2}^2 + \overline{H_2M}^2$$

$$d_2^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = D^2 + x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$$

Ainsi :

$$d_2^2 - d_1^2 = D^2 + x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - D^2 - x^2 + ax - \frac{a^2}{4} = 2ax$$

ou encore :

$$(d_2 + d_1)(d_2 - d_1) = 2ax$$

Par la suite :

$$d_2 - d_1 = \frac{2ax}{d_1 + d_2}$$

D'autre part :

$$d_1 + d_2 \approx 2D$$

En conséquence :

$$d_2 - d_1 = \frac{2ax}{2D} = \frac{ax}{D}$$

$$\boxed{\delta = \frac{ax}{D}}$$

On appelle ordre d'interférence, le rapport :

$$\boxed{P = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{ax}{\lambda D}}$$

3.2.2 Etats d'interférence**• Positions des franges brillantes**

Un point est situé sur une frange brillante si sa différence de marche est un nombre multiple de la longueur d'onde λ .

$$\delta = k\lambda \quad (k \text{ est un nombre entier})$$

soit :
$$\frac{ax}{D} = k\lambda$$

D'où :
$$x = k \frac{\lambda D}{a}$$

- Si $k = 0$, $x_0 = 0$. La frange centrale est brillante.

- Si $k = 1$, $x_1 = \frac{\lambda D}{a}$

- Si $k = 2$, $x_2 = 2 \frac{\lambda D}{a}$

On constate que :
$$x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = \frac{\lambda D}{a}$$

Deux franges brillantes consécutives sont séparées par $\frac{\lambda D}{a}$

Remarque :
$$x = k \frac{\lambda D}{a} \Rightarrow \frac{ax}{\lambda D} = k$$

Pour une frange brillante, l'ordre d'interférence est un nombre entier : $P = k$

• Positions des franges obscures

Un point est situé sur une frange sombre si sa différence de marche est un nombre impair de demi-longueur d'onde λ .

$$\delta = (2k'+1) \frac{\lambda}{2}$$

soit :
$$\frac{ax}{D} = (2k'+1) \frac{\lambda}{2}$$

D'où :
$$x = (2k'+1) \frac{\lambda D}{2a}$$

- $k' = 0$, $x'_0 = \frac{\lambda D}{2a}$

- $k' = 1$, $x'_1 = \frac{3\lambda D}{2a}$

- $k' = 2$, $x'_2 = \frac{5\lambda D}{2a}$

On constate que :
$$x'_2 - x'_1 = x'_1 - x'_0 = \frac{\lambda D}{a}$$

Deux franges obscures consécutives sont séparées de $\frac{\lambda D}{a}$

Remarque : $x = (2k'+1) \frac{\lambda D}{2a} \Rightarrow \frac{ax}{\lambda D} = k' + \frac{1}{2}$

Pour une frange obscure, l'ordre d'interférence est :

$$P = k' + \frac{1}{2}$$

3.2.3 Interfrange

L'interfrange i est la distance séparant deux franges consécutives de même nature :

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

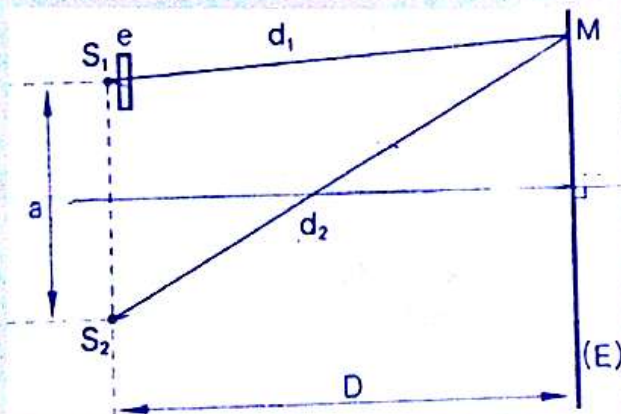
3.3 Déplacements des franges

3.3.1 Activité 2 : Source couverte

Objectif : Observer le déplacement des franges

• Manipulation

Recouvrons l'une des sources par une lame mince en verre d'indice de réfraction n et d'épaisseur e . On constate que **le système de franges se déplace du côté de la source couverte**.



Quand le faisceau issu de S_1 parcourt la distance e dans la lame, le second faisceau a parcouru la distance ne . Le rayon qui traverse la lame a donc un retard de marche égal à $ne - e = (n-1)e$. L'effet produit par la lame équivaut donc à un allongement de la distance d_1 qui devient $d'_1 = d_1 + (n-1)e$.

La nouvelle différence de marche est :

$$\begin{aligned} \delta' &= d_2 - d'_1 = d_2 - d_1 - (n-1)e \\ &= \frac{ax}{D} - (n-1)e \end{aligned}$$

$$\delta' = \frac{ax}{D} - (n-1)e$$

• Position de la frange centrale

La frange centrale se déplace d'une distance x_0 telle que :

$$\delta' = 0$$

soit :

$$\frac{ax_0}{D} - (n-1)e = 0$$

D'où :

$$x_0 = \frac{(n-1)eD}{a}$$

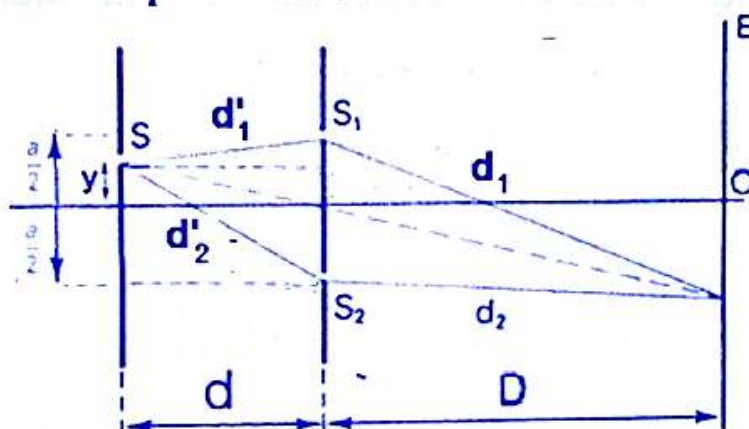
Toutes les franges se déplacent d'une distance x_0 du côté de la source couverte.

3.3.2 Activité 3 : déplacement de la source S

Objectif : Observer le déplacement des franges

• **Manipulation**

Déplaçons la source S d'une distance y parallèlement au plan des fentes S_1 et S_2 dans un plan situé à une distance d des fentes. On constate que **le système de franges se déplace en sens inverse du déplacement de S.**



La nouvelle différence de marche est :

$$\begin{aligned} \delta' &= (d_2 + d'_2) - (d_1 + d'_1) \\ &= (d_2 - d_1) + (d'_2 - d'_1) \\ &= \frac{ax}{D} + (d'_2 - d'_1) \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} d_1'^2 &= d^2 + \left(\frac{a}{2} - y\right)^2 = d^2 + \frac{a^2}{4} - ay + y^2 \\ d_2'^2 &= d^2 + \left(\frac{a}{2} + y\right)^2 = d^2 + \frac{a^2}{4} + ay + y^2 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$d_2'^2 - d_1'^2 = d^2 + \frac{a^2}{4} + ay + y^2 - d^2 - \frac{a^2}{4} + ay - y^2 = 2ay$$

Ou encore :

$$(d'_1 + d'_2)(d'_2 - d'_1) = 2ay$$

D'où :

$$d'_2 - d'_1 = \frac{2ay}{d'_1 + d'_2}$$

D'autre part :

$$d'_1 + d'_2 \approx 2d \Rightarrow d'_2 - d'_1 = \frac{ay}{d}$$

Par conséquent, la nouvelle différence de marche est :

$$\delta' = \frac{ax}{D} + \frac{ay}{d}$$

• **Position de la frange centrale**

La frange centrale se déplace d'une distance x_0 telle que : $\delta' = 0$

soit :

$$\frac{ax_0}{D} + \frac{ay}{d} = 0$$

D'où :

$$x_0 = -\frac{yD}{d}$$

Toutes les franges se déplacent d'une distance de $x_0 = \frac{yD}{d}$

3.4 Activité 4 : Interférences en lumière blanche

Matériel : Source de lumière blanche ; fentes de Young ; deux écrans ; un prisme.

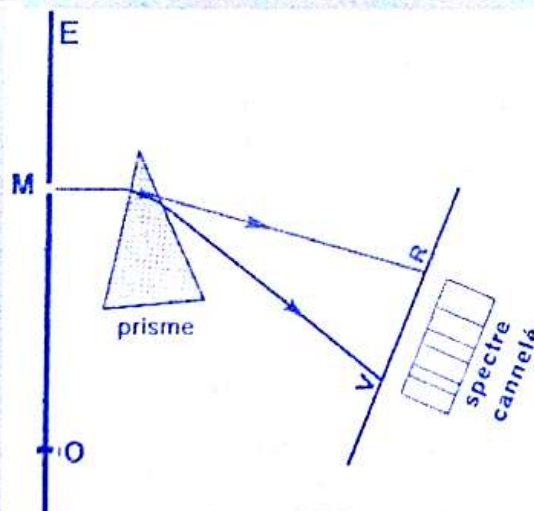
OBJECTIF : Observer les franges brillantes irisées et le blanc d'ordre supérieur.

• **Manipulation**

Quand on utilise une lumière blanche (lumière composée de plusieurs radiations monochromatiques), chaque radiation monochromatique donne son propre système de franges. On observe une frange centrale unique très blanche. De part et d'autre de la frange centrale, on obtient **des franges brillantes irisées**. Lorsqu'on s'éloigne de la frange centrale, le champ d'interférence prend une teinte d'un blanc impur appelé **blanc d'ordre supérieur**.

• **Analyse du blanc d'ordre supérieur**

Faisons une ouverture dans l'écran à une distance $OM = x$ de la frange centrale O , dans le blanc d'ordre supérieur. Un prisme permet d'analyser la lumière filtrée à travers l'ouverture.



Sur un deuxième écran on voit un spectre coupé de bandes noires appelées cannelures. Chaque bande noire correspond à une radiation manquante au point M.

Les radiations manquantes correspondent à des franges obscures au point M dans le blanc d'ordre supérieur. La différence de marche des franges obscures est :

$$\delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$$

Soit :
$$\frac{ax}{D} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$$

D'où :
$$\lambda = \frac{2ax}{(2k + 1)D}$$

Les longueurs d'ondes des radiations visibles sont comprises entre $0,4\mu\text{m}$ et $0,8\mu\text{m}$.

Donc :
$$0,4 \leq \frac{2ax}{(2k + 1)D} \leq 0,8$$

La connaissance de k permet de déterminer le nombre de radiations manquantes dans le blanc d'ordre supérieur.

1_ Nombre et longueurs d'ondes des cannelures noires

Une source S éclaire deux fentes fines S_1 et S_2 parallèles et distantes l'une de l'autre de 2mm. La source S se trouve sur la perpendiculaire au plan des fentes, à égale distance de chacune d'elles. Un écran E est placé à la distance $D = 3\text{m}$ du plan des fentes.

1° La source S émet une lumière monochromatique de longueur d'onde λ . Des franges d'interférences apparaissent sur l'écran et l'on compte 5 franges brillantes de part et d'autre de la frange centrale O, occupant dans leur ensemble une longueur de 9mm. En déduire la longueur d'onde λ .

2° On place devant la fente F_1 une lame à face parallèle d'épaisseur $e = 60\mu\text{m}$ et d'indice de réfraction $n = 1,5$. De combien et dans quel sens se déplace la frange centrale ?

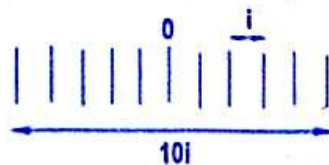
3° On enlève la lame et on éclaire maintenant avec une source de lumière blanche.

a) Qu'observe-t-on sur l'écran ?

b) On place la fente d'un spectroscope à 5mm de la frange centrale. Donner le nombre et les longueurs d'ondes des cannelures noires.

Solution

1° La longueur d'onde :



Quand on compte 5 franges brillantes de part et d'autre de la frange centrale, on obtient 10 interfranges.

Par conséquent : $10i = 9\text{mm}$

Donc : $i = \frac{9}{10} = 0,9\text{mm}$

Par ailleurs, $i = \frac{\lambda D}{a}$

On en déduit : $\lambda = \frac{ia}{D}$

Soit : $\lambda = \frac{0,9 \cdot 10^{-3} \times 2 \cdot 10^{-3}}{3} = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{m} = 0,6\mu\text{m}$

$$\boxed{\lambda = 0,6\mu\text{m}}$$

2° La frange centrale se déplace du côté de F_1 d'une distance x_0 telle que :

$$x_0 = \frac{(n-1)eD}{a}$$

Soit : $x_0 = \frac{(1,5-1) \times 60 \cdot 10^{-6} \times 3}{2 \cdot 10^{-3}} = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{m} = 4,5\text{cm}$

$$x_0 = 4,5 \text{ cm}$$

3° a) On observe un système d'interférences en lumière blanche. La frange centrale est blanche et brillante. De part et d'autre de la frange centrale, on voit quelques franges irisées, puis au-delà, le blanc d'ordre supérieur.

b) Les longueurs d'ondes des radiations éteintes au point défini par $x = 5 \text{ mm}$ sont données par la relation :

$$\lambda = \frac{2ax}{(2k+1)D} \quad (k \text{ entier})$$

Soit :

$$\lambda = \frac{2 \times 2 \cdot 10^{-3} \times 5 \cdot 10^{-3}}{(2k+1) \times 3} = \frac{20 \cdot 10^{-6}}{6k+3} \quad (\text{en mètres})$$

En micromètres,

$$\lambda = \frac{20}{6k+3}$$

Par ailleurs, les longueurs d'ondes des radiations visibles sont comprises entre $0,4 \mu\text{m}$ et $0,8 \mu\text{m}$.

Donc :

$$0,4 \leq \frac{20}{6k+3} \leq 0,8$$

Ou encore :

$$\frac{0,4}{20} \leq \frac{1}{6k+3} \leq \frac{0,8}{20}$$

En inversant, le sens de l'inégalité change :

$$\frac{20}{0,4} \geq 6k+3 \geq \frac{20}{0,8}$$

Ou encore :

$$\frac{20}{0,4} - 3 \geq 6k \geq \frac{20}{0,8} - 3$$

Soit :

$$47 \geq 6k \geq 22$$

D'où :

$$\frac{47}{6} \geq k \geq \frac{22}{6}$$

Finalement :

$$7,8 \geq k \geq 3,6$$

Ainsi, k peut prendre les valeurs : 4, 5, 6, 7.

Les longueurs d'ondes des cannelures noires sont donc :

$$\lambda = \frac{20}{6k+3}$$

$$\begin{cases} \lambda_4 = \frac{20}{6 \times 4 + 3} = 0,74 \mu\text{m} \\ \lambda_5 = \frac{20}{6 \times 5 + 3} = 0,60 \mu\text{m} \\ \lambda_6 = \frac{20}{6 \times 6 + 3} = 0,51 \mu\text{m} \\ \lambda_7 = \frac{20}{6 \times 7 + 3} = 0,44 \mu\text{m} \end{cases}$$

2_ Source lumineuse contenant deux radiations

On utilise le dispositif des fentes de Young pour produire des interférences lumineuses non localisées. Une fente F éclaire deux fentes fines F_1 et F_2 parallèles et distantes de $a = 2\text{mm}$. La fente F est placée sur la médiatrice du segment F_1F_2 . On observe les franges sur un écran placé parallèlement au plan des fentes et situé à une distance $D = 2\text{m}$ du milieu de F_1F_2 .

1° On éclaire le dispositif avec une radiation monochromatique de longueur d'onde λ .

a) Décrire le phénomène observé.

b) La distance entre le milieu de la frange centrale et le milieu de la sixième frange sombre est $d = 3,3\text{mm}$. En déduire la valeur de λ .

2° On éclaire maintenant le dispositif par une source lumineuse contenant deux radiations de longueurs d'ondes $\lambda_1 = 0,45\mu\text{m}$ et $\lambda_2 = 0,60\mu\text{m}$. Calculer les interfranges i_1 et i_2 des deux systèmes de franges. A Quelle distance de la frange centrale, les deux franges brillantes correspondant aux deux radiations coïncident pour la première fois ?

Solution

1° a) Sur l'écran, on voit dans la partie commune aux deux faisceaux diffractés, des bandes rectilignes, parallèles, alternativement brillantes et sombres. Ce sont les franges d'interférences. Ces franges sont obtenues quelle que soit la position de l'écran dans la partie commune aux deux faisceaux : **elles sont donc non localisées.**

b) La position d'une frange obscure est déterminée par la relation :

$$x = (2k + 1) \frac{\lambda D}{2a} \quad (k \text{ entier})$$

Pour la première frange obscure, $k = 0$

Pour la deuxième frange obscure, $k = 1$

Pour la sixième frange obscure, $k = 5$

En conséquence : $x = (2 \times 5 + 1) \frac{\lambda D}{2a} = 11 \frac{\lambda D}{2a}$

Soit :
$$x = 11 \frac{\lambda D}{2a}$$

D'où :
$$\lambda = \frac{2ax}{11D}$$

AN :
$$\lambda = \frac{2 \times 2 \cdot 10^{-3} \times 3,3 \cdot 10^{-3}}{11 \times 2} = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 0,6 \mu\text{m}$$

$$\lambda = 0,6 \mu\text{m}$$

2° Calculs des interfranges :

$$i_1 = \frac{\lambda_1 D}{a} = \frac{0,45 \cdot 10^{-6} \times 2}{2 \cdot 10^{-3}} = 0,45 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,45 \text{ mm}$$

$$i_1 = 0,45 \text{ mm}$$

$$i_2 = \frac{\lambda_2 D}{a} = \frac{0,60 \cdot 10^{-6} \times 2}{2 \cdot 10^{-3}} = 0,60 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,60 \text{ mm}$$

$$i_2 = 0,60 \text{ mm}$$

Première coïncidence des franges brillantes :

Puisque $i_2 > i_1$, pour que deux franges brillantes coïncident après la frange centrale, il faut que n interfranges i_2 recouvrent exactement $n + 1$ interfranges i_1 :

Soit :
$$n \cdot i_2 = (n + 1) i_1$$

Ou :
$$n \cdot i_2 = n i_1 + i_1$$

Par la suite :
$$n i_2 - n i_1 = i_1$$

Aussi :
$$n(i_2 - i_1) = i_1$$

D'où :
$$n = \frac{i_1}{i_2 - i_1}$$

AN :
$$n = \frac{0,45}{0,60 - 0,45} = 3$$

La distance x où coïncident exactement deux franges brillantes pour la première fois est donc :

$$x = n i_2 = 3 \times 0,60 = 1,8 \text{ mm}$$

$$x = 1,8 \text{ mm}$$

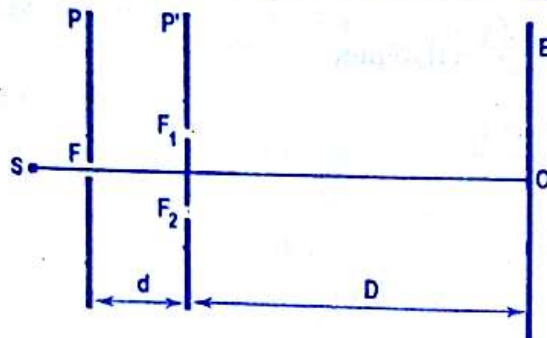
Remarque : la deuxième coïncidence se produit à $x = 2 \times 1,8 \text{ mm} = 3,6 \text{ mm}$ de la frange centrale.

3_ Déplacement de la fente source vers le haut

On réalise des interférences au moyen du dispositif représenté ci-dessous. F , F_1 et F_2 sont des fentes étroites pratiquées dans des écrans opaques P et P' . E est l'écran d'observation. Les trois écrans sont verticaux et parallèles. On désigne par a la

distance entre F_1 et F_2 , par d la distance entre P et P' et par D la distance entre P' et l'écran E .

Données numériques : $a = 1\text{mm}$, $d = 60\text{cm}$ et $D = 1\text{m}$.



1° La fente F étant initialement sur la médiatrice du segment F_1F_2 , on l'éclaire au moyen d'une source lumineuse monochromatique. On mesure la distance entre le milieu de la frange centrale affectée du numéro 0 et le milieu de la frange brillante affectée du numéro 7. On trouve $d = 3,43\text{mm}$. Déterminer :

a) l'interfrange i

b) la longueur d'onde λ de la radiation monochromatique utilisée.

2° On immerge le dispositif dans un liquide transparent d'indice $n = 1,5$. Calculer la nouvelle valeur i' de l'interfrange.

3° On replace le dispositif dans l'air puis on déplace verticalement la fente F vers le haut d'une distance $y = 1,5\text{mm}$.

a) Dire ce que l'on observe sur l'écran E et calculer le déplacement x_0 de la frange centrale.

b) Devant quelle fente doit on placer une lame transparente d'indice $n = 1,5$ pour que la frange centrale revienne à sa position initiale ? Quelle doit- être l'épaisseur de cette lame ?

4° On ramène la fente F à sa position initiale, à la même distance de F_1 et de F_2 . On enlève la lame puis on remplace la source monochromatique par une source de lumière blanche. Enfin on place la fente d'un spectroscopie à 4mm de la frange centrale. Quelles sont les radiations manquantes dans le spectre observé ? ($0,40\mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,8\mu\text{m}$ pour les radiations visibles).

Solution

1° a) La position des franges brillantes est déterminée par :

$$x = k \frac{\lambda D}{a} \quad (k \text{ entier})$$

Pour la première frange brillante à partir de la frange centrale, $k = 1$

Pour la septième frange brillante à partir de la frange centrale, $k = 7$

Donc :

$$d = 7 \frac{\lambda D}{a}$$

D'autre part :
$$i = \frac{\lambda D}{a}$$
 Par conséquent :
$$d = 7i$$
 D'où :
$$i = \frac{d}{7} = \frac{3,43}{7} = 0,49 \text{ mm}$$

$$i = 0,49 \text{ mm}$$

b) La longueur d'onde λ :

Nous avons :
$$i = \frac{\lambda D}{a}$$
 On en déduit :
$$\lambda = \frac{ia}{D}$$
 AN :
$$\lambda = \frac{0,49 \cdot 10^{-3} \times 10^{-3}}{1} = 0,49 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 0,49 \mu\text{m}$$

$$\lambda = 0,49 \mu\text{m}$$

2 La nouvelle valeur de l'interfrange :

La célérité de la radiation monochromatique dans l'air est c . Sa longueur d'onde a pour expression :

$$\lambda = cT$$

La célérité de cette même radiation monochromatique dans le liquide est c' . Sa longueur d'onde devient λ' telle que :

Ainsi :
$$\lambda' = c'T$$

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{c}{c'}$$

L'indice de réfraction du milieu est le rapport :

$$n = \frac{c}{c'}$$

Par conséquent :
$$\frac{\lambda}{\lambda'} = n$$

D'où :
$$\lambda' = \frac{\lambda}{n}$$

La nouvelle valeur de l'interfrange est donc :

$$i' = \frac{\lambda' D}{a} = \frac{\lambda D}{n \cdot a} = \frac{i}{n}$$

Soit :
$$i' = \frac{i}{n} = \frac{0,49}{1,5} = 0,33 \text{ mm}$$

$$i' = 0,33 \text{ mm}$$

3° a) Le système de frange se déplace vers le bas.

Déplacement de la frange centrale :

$$x_0 = \frac{yD}{d} = \frac{1,5 \cdot 10^{-3} \times 1}{60 \cdot 10^{-2}} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,5 \text{ mm}$$

$$x_0 = 2,5 \text{ mm}$$

Pour que la frange centrale revienne à sa position initiale on doit placer devant la fente F_1 la lame.

b) Epaisseur de la lame :

Nous avons :
$$x_0 = \frac{(n-1)eD}{a}$$

On en déduit :
$$e = \frac{ax_0}{(n-1)D} = \frac{10^{-3} \times 2,5 \cdot 10^{-3}}{(1,5-1) \times 1} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 5 \mu\text{m}$$

$$e = 5 \mu\text{m}$$

4° Longueurs d'ondes des radiations éteintes à $x = 4 \text{ mm}$:

Les longueurs d'ondes des radiations éteintes sont données par la formule :

$$\lambda = \frac{2ax}{(2k+1)D} \quad (k \text{ entier})$$

Soit :
$$\lambda = \frac{2 \times 10^{-3} \times 4 \cdot 10^{-3}}{(2k+1) \times 1} = \frac{8 \cdot 10^{-6}}{2k+1} \text{ (en mètres)}$$

En micromètres,
$$\lambda = \frac{8}{2k+1}$$

Par ailleurs, les longueurs d'ondes des radiations visibles sont comprises entre $0,4 \mu\text{m}$ et $0,8 \mu\text{m}$.

Donc :
$$0,4 \leq \frac{8}{2k+1} \leq 0,8$$

Ou encore :
$$\frac{0,4}{8} \leq \frac{1}{2k+1} \leq \frac{0,8}{8}$$

En inversant, le sens de l'inégalité change :

$$\frac{8}{0,4} \geq 2k+1 \geq \frac{8}{0,8}$$

Ou encore :
$$\frac{8}{0,4} - 1 \geq 2k \geq \frac{8}{0,8} - 1$$

Soit :
$$19 \geq 2k \geq 9$$

D'où ;
$$\frac{19}{2} \geq k \geq \frac{9}{2}$$

Finalement :
$$9,5 \geq k \geq 4,5$$

Ainsi, k peut prendre les valeurs : 5, 6, 7, 8, 9.

Les longueurs d'ondes des cannelures noires sont donc :

$$\lambda = \frac{8}{2k+1}$$

$$\lambda_5 = \frac{8}{2 \times 5 + 1} = 0,72 \mu\text{m}$$

$$\lambda_6 = \frac{8}{2 \times 6 + 1} = 0,61 \mu\text{m}$$

$$\lambda_7 = \frac{8}{2 \times 7 + 1} = 0,53 \mu\text{m}$$

$$\lambda_8 = \frac{8}{2 \times 8 + 1} = 0,47 \mu\text{m}$$

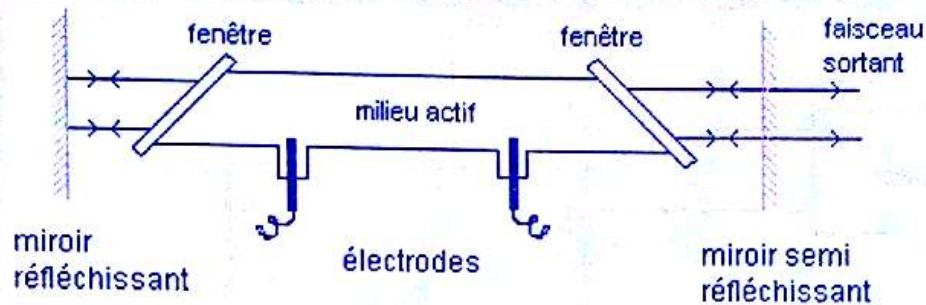
$$\lambda_9 = \frac{8}{2 \times 9 + 1} = 0,42 \mu\text{m}$$

4 OPTIQUE PHYSIQUE

LE RAYONNEMENT LASER

1_ Description sommaire du laser

Le laser (Light Amplification By Stimulated Emission of Radiation) comprend trois éléments essentiels :



- Une cavité contenant le milieu actif formé d'atomes ou de molécules, milieu dans lequel a lieu l'émission de lumière.
- Une source d'énergie qui permet d'exciter (pompage optique) le milieu actif afin qu'il émette la lumière. L'énergie nécessaire au pompage est fournie par décharge électrique (laser à gaz) ou flash lumineux (laser solide)
- Deux miroirs parallèles, l'un réfléchissant les ondes lumineuses, l'autre semi-réfléchissant afin que la lumière puisse sortir. La distance L entre le miroir réfléchissant et le miroir semi-réfléchissant est un multiple de la demi-longueur d'onde de la lumière émise :

2_ Propriétés du faisceau laser

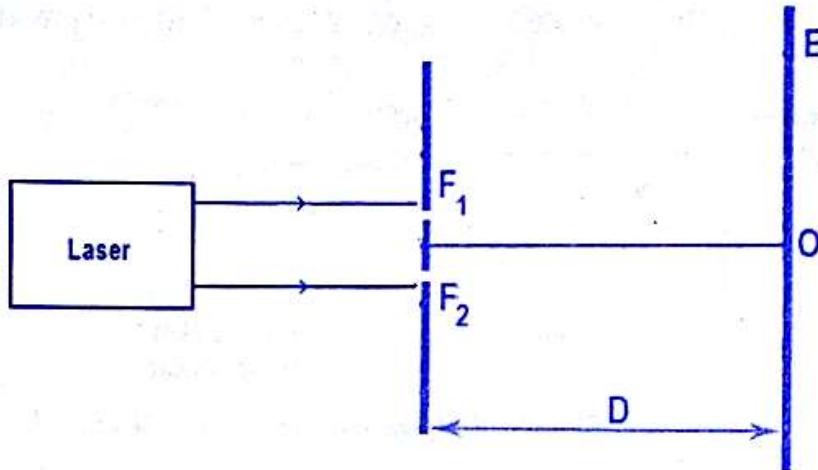
- La lumière issue d'un laser est pratiquement monochromatique (longueur d'onde très précise).
- La lumière laser est cohérente.
- Le faisceau laser est très peu divergent : il est très directif.
- La puissance des lasers est très variable : de quelques milliwatts pour les lasers de faible puissance, elle peut devenir très grande et atteindre 10^{15} W pour les lasers de grande puissance

3_ Applications du Laser

- Alignements et visées pour faciliter les constructions (tunnels, les ponts ...)
- Télémétrie (mesure de la distance Terre-Lune).
- Interférométrie.
- Lecture des CD audio ou vidéo.
- Lecture des codes barres.
- Télécommunications par laser.
- Fusion des matériaux.
- Chirurgie.

Interférométrie avec un laser

On réalise l'expérience des fentes de Young avec un laser. Les franges d'interférences sont observées sur un écran E disposé parallèlement au plan des fentes F_1 et F_2 , à la distance $D = 1\text{m}$ de ce plan. Le laser émet une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,589\mu\text{m}$.



1° On mesure la largeur de 20 interfranges consécutifs. On trouve $d = 4,21\text{mm}$. En déduire l'écartement a des fentes F_1 et F_2 .

2° On remplace le laser par une source S qui émet simultanément deux lumières monochromatiques, l'une de longueur d'onde $\lambda_1 = 0,61\mu\text{m}$, l'autre de longueur d'onde λ_2 inconnue. Les franges centrales des deux systèmes coïncident. Une nouvelle coïncidence entre les deux systèmes de franges se produit pour la dixième frange brillante correspondant à la longueur d'onde λ_1 et à la onzième frange brillante correspondant à la longueur d'onde λ_2 . Calculer λ_2 .

Solution

1° Ecartement des fentes :

$$d = 20i$$

Donc :

$$i = \frac{d}{20} = \frac{4,21}{20} = 0,21\text{mm} = 0,21 \cdot 10^{-3}\text{m}$$

Par ailleurs :

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

D'où :

$$a = \frac{\lambda D}{i}$$

AN : $\lambda = 0,589\mu\text{m} = 0,589 \cdot 10^{-6}\text{m}$

$$a = \frac{0,589 \cdot 10^{-6} \times 1}{0,21 \cdot 10^{-3}} = 2,8 \cdot 10^{-3}\text{m} = 2,8\text{mm}$$

$$\boxed{a = 2,8\text{mm}}$$

2° Longueur d'onde λ_2 :

La nouvelle coïncidence se produit en un point situé à la distance x de la frange centrale telle que :

$$\left. \begin{array}{l} x = 10 \frac{\lambda_1 D}{a} \\ x = 11 \frac{\lambda_2 D}{a} \end{array} \right\} \Rightarrow 10 \frac{\lambda_1 D}{a} = 11 \frac{\lambda_2 D}{a}$$

Soit :

$$10\lambda_1 = 11\lambda_2$$

D'où :

$$\lambda_2 = \frac{10\lambda_1}{11} = \frac{10 \times 0,61}{11} = 0,55 \mu\text{m}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 0,55 \mu\text{m}}$$

OSCILLATIONS LIBRES

1

OSCILLATEUR MECANIQUE DE TRANSLATION LE PENDULE ELASTIQUE

1.1 Définitions

1.1.1 Oscillateur mécanique

Un oscillateur mécanique est un système animé d'un mouvement périodique autour d'une position d'équilibre. Exemple : mouvement du balancier d'une horloge.

1.1.2 Pendule élastique

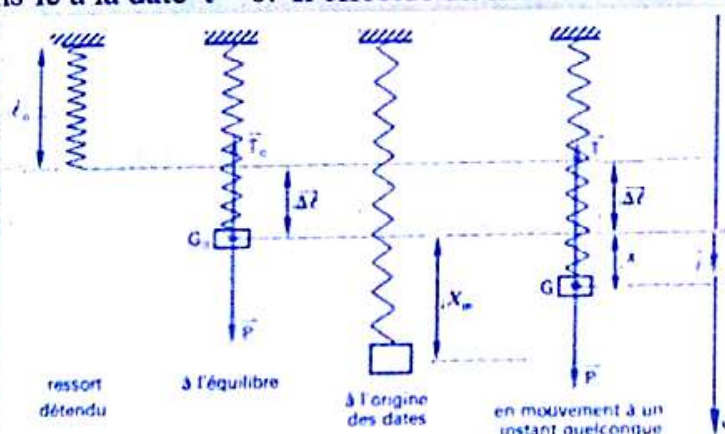
Un pendule élastique est un solide suspendu par un ressort et qui effectue des oscillations quand on l'écarte de sa position d'équilibre.

1.2 Equation horaire d'un pendule élastique

1.2.1 Equation différentielle du mouvement

Suspendons un solide de masse M à l'une des extrémités d'un ressort de longueur à vide ℓ_0 . Le ressort s'allonge de $\Delta\ell$. La direction de la verticale est orientée suivant l'axe (o, \vec{i}) dirigé vers le bas.

A l'équilibre, le centre d'inertie du solide occupe la position G_0 d'abscisse $x = 0$. Ecartons le solide vers le bas d'une distance X_m (son centre d'inertie est alors en G), puis lâchons-le à la date $t = 0$. Il effectue un mouvement oscillatoire.



Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au solide à l'équilibre puis en mouvement.

– A l'équilibre, le solide est soumis à l'action de son poids \vec{P} et à la tension du ressort \vec{T}_0 . La condition d'équilibre s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0}$$

Cette relation vectorielle devient, en projection suivant l'axe vertical (o, \vec{i}) :

$$P - T_0 = 0$$

D'autre part, la tension T_0 est proportionnelle à l'allongement $\Delta\ell$ du ressort : $T_0 = k\Delta\ell$
 k est une constante dépendant uniquement du ressort. On l'appelle constante de raideur du ressort. En conséquence :

$$P - k\Delta\ell = 0 \quad (1)$$

– Lorsque le solide est en mouvement et que son abscisse encore appelée élongation est x par rapport à sa position d'équilibre, l'allongement du ressort est $\Delta\ell + x$. La tension du ressort est alors $T = k(\Delta\ell + x)$. La relation fondamentale de la dynamique donne

alors :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Par projection sur l'axe \vec{i} , on obtient :

$$P - T = m\ddot{x}$$

soit :

$$P - k(\Delta\ell + x) = m\ddot{x}$$

ou encore :

$$P - k\Delta\ell - kx = m\ddot{x} \quad (2)$$

Compte tenu de (1), la relation (2) donne :

$$-kx = m\ddot{x}$$

soit :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Cette dernière relation qui fait intervenir une fonction et ses dérivées successives est appelée **équation différentielle**. Elle est du second ordre car elle fait intervenir la dérivée seconde. Elle est linéaire car l'accélération est proportionnelle et de signe contraire à l'élongation ($\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$). Ceci fait du pendule élastique **un oscillateur**

harmonique.

1.2.2 Solution de l'équation différentielle

Une solution de l'équation différentielle est que l'abscisse x , encore appelée élongation est une fonction sinusoïdale du temps :

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

X_m est l'amplitude du mouvement. ω_0 est la pulsation propre des oscillations. φ est appelée phase à l'origine.

1.2.3 Caractéristiques du mouvement

• Pulsation propre

La pulsation propre des oscillations est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- **Période propre**

La période propre des oscillations est :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

- **fréquence propre**

La fréquence propre des oscillations est :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

1.2.4 Etude énergétique

- **Energie potentielle élastique**

L'énergie potentielle élastique E_p d'un pendule élastique est, à chaque instant, proportionnelle au carré de son élongation x :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kX_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kX_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

- **Energie cinétique**

L'énergie cinétique E_c du pendule élastique animé d'une vitesse \bar{v} à un instant, est le demi-produit de sa masse m par le carré du module v de sa vitesse à cet instant.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

D'autre part : $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} \cdot kX_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot kX_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

- **Energie mécanique de vibration**

L'énergie mécanique de vibration E d'un pendule élastique est, à chaque instant la somme de son énergie potentielle élastique E_p et de son énergie cinétique E_c .

$$E = E_p + E_c$$

Soit :
$$E = \frac{1}{2}kX_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kX_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Par la suite :

$$E = \frac{1}{2} kX_m^2 \left[\underbrace{\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}_1 \right] = \frac{1}{2} kX_m^2$$

$$E = \frac{1}{2} kX_m^2$$

L'énergie mécanique de vibration du pendule élastique reste constant : elle se conserve.

$$\dot{E} = \text{Cte}$$

Conséquence de la conservation de l'énergie de vibration :

Nous avons :
$$E = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

Dérivons cette expression par rapport au temps. Nous obtenons :

$$\dot{E} = \frac{1}{2} m \times 2v\dot{v} + \frac{1}{2} k \times 2x\dot{x}$$

soit :
$$\dot{E} = m\dot{x}\dot{v} + kx\dot{x}$$

ou encore :
$$\dot{E} = \dot{x}(m\dot{v} + kx)$$

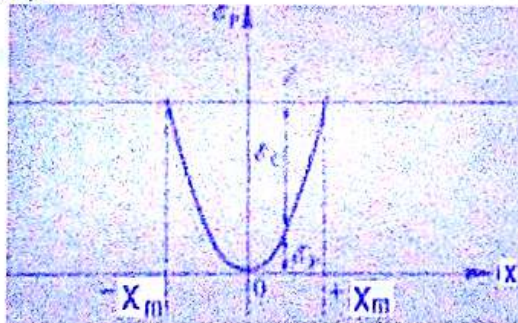
$E = \text{Cte} \Rightarrow \dot{E} = 0$:
$$\dot{x}(m\dot{v} + kx) = 0$$

$\dot{x} \neq 0 \Rightarrow$
$$m\ddot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

On retrouve ainsi l'équation différentielle du pendule élastique.

• Cuvette de potentielle

Traçons le graphe représentant les variations de l'énergie potentielle E_p en fonction de l'élongation x . On obtient une parabole dont la concavité est dirigée vers le haut. On dit que le pendule élastique est dans une cuvette de potentiel parabolique (ou puits de potentiel parabolique).



- si $x = \pm X_m$ $E_p = \frac{1}{2} kX_m^2 \Rightarrow E_p = E$. Donc $E_c = 0$

Lorsque le pendule est écarté au maximum de sa position d'équilibre, son énergie mécanique est uniquement sous forme d'énergie potentielle.

- si $x = 0$, $E_p = 0$. Donc $E_c = E$

Au passage à la position d'équilibre, l'énergie mécanique E est uniquement sous forme d'énergie cinétique.

Les vitesses du solide à la position d'équilibre sont :

$$v = \pm \omega_0 X_m$$

1_ Pendule élastique vertical

Un solide de masse $M = 500\text{g}$ est suspendu à l'extrémité libre d'un ressort de masse négligeable et constante de raideur $k = 20\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$. A partir de sa position d'équilibre, on tire verticalement le solide vers le bas d'une distance de 2cm puis on le lâche sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. (On prendra $\pi = \sqrt{10}$)

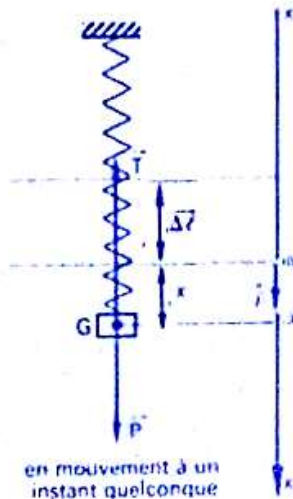
1° Déterminer l'équation horaire du mouvement; en déduire la nature du mouvement.

2° calculer la période propre T_0 et la fréquence propre f_0 .

3° Déterminer en fonction du temps les énergies cinétique E_c et potentielle E_p de l'oscillateur. Montrer que la somme $E_c + E_p$ est une constante.

Solution

1° Equation horaire :



Lorsque le solide est en mouvement et que son élongation est x par rapport à sa position d'équilibre, la relation fondamentale de la dynamique donne :

$$\vec{P} + \vec{T} = M\vec{a}$$

En projection sur l'axe \vec{i} , on obtient :

$$P - T = M\ddot{x}$$

Soit :

$$P - k(\Delta\ell + x) = M\ddot{x}$$

Ou encore:

$$\underbrace{P - k\Delta\ell}_0 - kx = M\ddot{x}$$

Par conséquent :

$$-kx = M\ddot{x}$$

Ou encore :

$$M\ddot{x} + kx = 0$$

Par la suite :

$$\ddot{x} + \frac{k}{M}x = 0$$

Cette équation différentielle admet comme solution générale :

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$X_m = 2\text{cm} = 2 \cdot 10^{-2}\text{m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{20}{0,5}} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = 2\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Conditions initiales : à $t = 0$, $x = X_m$

Donc : $X_m = X_m \cos \varphi$

D'où : $\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

L'équation horaire du mouvement est donc :

$$x = 2 \cdot 10^{-2} \cos 2\pi t$$

Le mouvement est rectiligne sinusoïdal.

2° La période propre est : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ s}$

La fréquence propre des oscillations est :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = 1 \text{ Hz}$$

$$T_0 = 1 \text{ s}$$

$$f_0 = 1 \text{ Hz}$$

3° L'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} M v^2$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -4\pi \cdot 10^{-2} \sin 2\pi t$$

Par conséquent : $E_c = \frac{1}{2} \times 0,5 \times 16\pi^2 \cdot 10^{-4} \sin^2 2\pi t = 4 \cdot 10^{-3} \sin^2 2\pi t$

$$E_c = 4 \cdot 10^{-3} \sin^2 2\pi t$$

L'énergie potentielle : $E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \times 20 \times 4 \cdot 10^{-4} \cos^2 2\pi t = 4 \cdot 10^{-3} \cos^2 2\pi t$

$$E_p = 4 \cdot 10^{-3} \cos^2 2\pi t$$

Vérification de la conservation de l'énergie mécanique

$$E_c + E_p = 4 \cdot 10^{-3} \sin^2 2\pi t + 4 \cdot 10^{-3} \cos^2 2\pi t$$

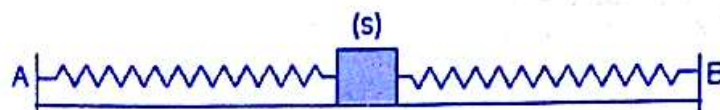
$$= 4 \cdot 10^{-3} (\sin^2 2\pi t + \cos^2 2\pi t) = 4 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$E_c + E_p = 4 \cdot 10^{-3} = \text{Cte}$$

2_ Association de deux ressorts identiques d'axes horizontaux

Deux ressorts identiques de masses négligeables et de constantes de raideur $k = 7,6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ sont accrochés à un solide (S) de masse $m = 0,56 \text{ kg}$. Le solide repose

sur une table horizontale et les deux ressorts sont fixés en A et B sur la table. La longueur à vide des ressorts est $\ell_0 = 15\text{cm}$. Lorsqu'ils sont accrochés à (S), leur longueur est $\ell = 27\text{cm}$.



On tire suivant l'axe (AB) le solide d'une distance $d = 12\text{cm}$ et on le lâche sans vitesse initiale. Les frottements sont considérés négligeables.

1° Etablir l'équation différentielle du mouvement.

2° calculer la période des oscillations et la vitesse maximale acquise par le solide.

3° calculer l'énergie mécanique de vibration de l'oscillateur ainsi constitué.

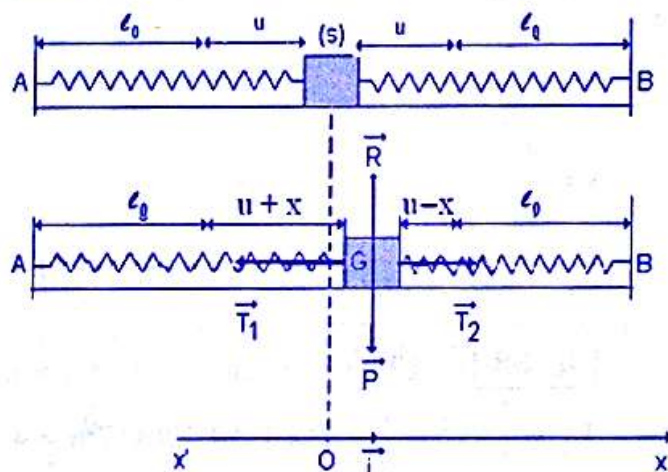
Solution

1° A l'équilibre, l'allongement des ressorts est :

$$u = 27\text{cm} - 15\text{cm} = 12\text{cm}$$

(Les deux ressorts sont tendus à l'équilibre).

Les forces qui s'exercent sur (S) sont : le poids \vec{P} , la réaction \vec{R} de la table et les tensions \vec{T}_1 et \vec{T}_2 , des deux ressorts.



Relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = M\vec{a}$$

soit, suivant l'axe horizontal (o, \vec{i}) :

$$T_1 - T_2 = M\ddot{x}$$

Lorsque l'élongation du centre d'inertie est x par rapport à la position d'équilibre, les tensions sont :

$$T_1 = k(u - x)$$

$$T_2 = k(u + x)$$

En conséquence, la projection suivant l'axe (o, \vec{i}) devient :

$$k(u - x) - k(u + x) = M\ddot{x}$$

ou encore : $ku - kx - ku - x = M\ddot{x}$

soit : $-2kx = M\ddot{x}$

Par la suite : $M\ddot{x} + 2kx = 0$

D'où : $\ddot{x} + \frac{2k}{M}x = 0$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{2k}{M}x = 0}$$

2° La pulsation propre est d'après l'équation différentielle

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M}} = \sqrt{\frac{2 \times 7,6}{0,56}} = 5,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

La période des oscillations est :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \times 3,14}{5,2} = 1,20 \text{ s}$$

La vitesse maximale est : $v_{\max} = \omega_0 X_m$

$$X_m = 12 \text{ cm} = 12 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Donc : $v_{\max} = 5,3 \times 12 \cdot 10^{-2} = 0,62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\boxed{T_0 = 1,20 \text{ s}}$$

$$\boxed{v_{\max} = 0,62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

3° L'énergie mécanique de vibration de cet oscillateur :

$$E = \frac{1}{2} K \cdot X_m^2$$

$$K = 2k = 2 \times 7,6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \Rightarrow E = \frac{1}{2} \times 15,2 \times (0,12)^2 = 0,11 \text{ J}$$

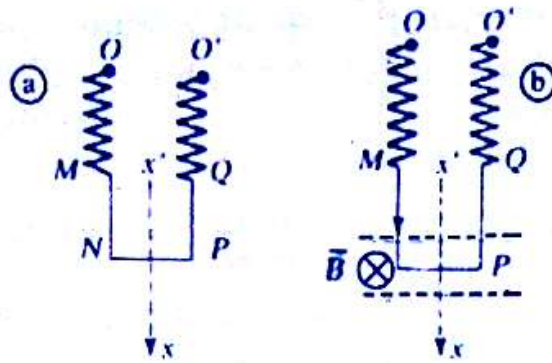
$$\boxed{E = 0,11 \text{ J}}$$

3_ Association de deux ressorts identiques d'axes verticaux

On dispose de deux ressorts identiques de masses négligeables et de constante de raideur k . Ils s'allongent de 2 cm sous une traction de 1N.

1° Calculer la valeur de k .

2° Avec une tige métallique, homogène et rigide, on réalise un cadre rectangulaire ouvert MNPQ de masse $m = 100 \text{ g}$, soudé aux extrémités des deux ressorts. On suspend l'ensemble par les deux extrémités libres des ressorts aux points o et o'. Les axes des ressorts sont verticaux, le brin NP de longueur $\ell = 10 \text{ cm}$ est horizontal. Les ressorts possèdent alors le même allongement (figure a). On tire le brin NP verticalement vers le bas d'une longueur de 4 mm puis, on le lâche sans vitesse initiale à un instant pris comme origine de dates.



Trouver l'équation horaire du mouvement effectué par le cadre.

3° Dans la région de l'espace où oscille le cadre, règne un champ magnétique uniforme \vec{B} horizontal, perpendiculaire au plan du cadre, de sens indiqué sur la figure b. La norme du champ est $B = 4 \cdot 10^{-1} \text{T}$. Au cours des oscillations, le brin NP ne sort jamais de la zone où règne le champ magnétique et les ressorts n'y entrent jamais. Déterminer l'expression de la force électromotrice induite dans le cadre en fonction du temps (préciser l'orientation du cadre).

Solution

1° Si \vec{F} est l'action mécanique qui provoque un allongement $x_0 = 2\text{cm}$ du ressort, alors :

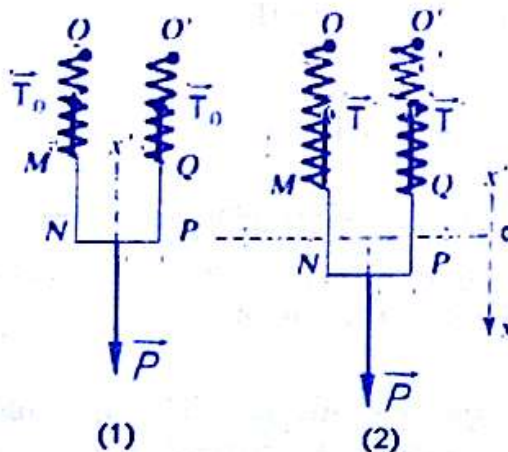
$$F = kx_0$$

D'où :

$$k = \frac{F}{x_0} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-2}} = 50 \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$k = 50 \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

2° Les forces appliquées au cadre pris comme système, sont : le poids \vec{P} et la tension des ressorts :



A l'équilibre (figure 1), la tension des ressorts est \vec{T}_0 . Le théorème du centre d'inertie s'écrit à l'équilibre est alors:

$$\vec{P} + 2\vec{T}_0 = \vec{0}$$

soit, suivant l'axe ox :

$$P - 2T_0 = 0$$

$$T_0 = k\Delta\ell \Rightarrow$$

$$P - 2k\Delta\ell = 0 \quad (1)$$

En mouvement, (figure2), lorsque l'abscisse du centre d'inertie est x par rapport à la position d'équilibre, la tension des ressorts est \bar{T} . Le théorème du centre d'inertie donne :

$$\bar{P} + 2\bar{T} = m\bar{a}$$

Suivant l'axe (\bar{o}, \bar{i}) , on obtient :

$$P - 2T = m\ddot{x}$$

D'autre part :

$$T = k(\Delta\ell + x)$$

Donc :

$$P - 2k(\Delta\ell + x) = m\ddot{x}$$

soit :

$$P - 2k\Delta\ell - 2kx = m\ddot{x} \quad (2)$$

Des relations (1) et (2), on retient :

$$-2kx = m\ddot{x}$$

soit :

$$m\ddot{x} + 2kx = 0$$

ou encore :

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$$

Cette équation différentielle admet comme solution générale :

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$X_m = 4\text{mm} = 4 \cdot 10^{-3} \text{m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 50}{0,1}} = \sqrt{100 \times 10} = 10\sqrt{10} = 10\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

à $t = 0, x = X_m \Rightarrow$

$$X_m = X_m \cos \varphi$$

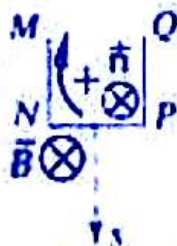
D'où :

$$\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

L'équation horaire du mouvement effectué par le cadre est :

$$x = 4 \cdot 10^{-3} \cos 10\pi t$$

3° Orientons le cadre dans le sens MQPN : le vecteur unitaire normal \bar{n} a même direction et même sens que le vecteur \bar{B} .



Lorsque le brin NP a parcouru dans le champ la distance x , le circuit embrase le flux $\Phi = BS$. Par ailleurs la surface balayée est $S = x\ell$.

Donc :

$$\Phi = Bx\ell$$

Par ailleurs :

$$x = 4 \cdot 10^{-3} \cos 10\pi t$$

En conséquence :

$$\Phi = 4 \cdot 10^{-3} B\ell \cos 10\pi t$$

soit :

$$\Phi = 4 \cdot 10^{-3} \times 4 \cdot 10^{-1} \times 10^{-1} \cos 10\pi t$$

$$\Phi = 16 \cdot 10^{-5} \cos 10\pi t$$

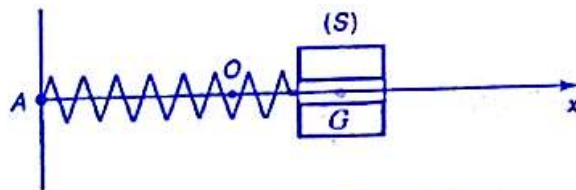
La f.é.m induite est :

$$\begin{aligned}
 e &= -\frac{d\Phi}{dt} = 10\pi \times 16 \cdot 10^{-5} \sin 10\pi t \\
 &= 10 \times 3,14 \times 16 \cdot 10^{-5} \sin 10\pi t \\
 &= 50,24 \cdot 10^{-4} \sin 10\pi t
 \end{aligned}$$

$$e = 50,24 \cdot 10^{-4} \sin 10\pi t$$

4_ Oscillations horizontales d'un ressort

On dispose d'un ressort à spires non jointives de masse négligeable et de raideur $k = 10,1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. On engage ce ressort sur une tige horizontale Ax : l'une de ses extrémités est fixée en A, l'autre est reliée à un cylindre creux S de masse $m = 0,12 \text{ kg}$ qui peut glisser le long de la tige. Les frottements sont négligeables. L'abscisse du centre d'inertie G de S est repérée par rapport à la position O de G à l'équilibre.



On écarte le cylindre de sa position d'équilibre et on le lâche à l'instant $t = 0$. Son abscisse est alors $x_0 = +2 \text{ cm}$ et sa vitesse est $v_0 = -0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- 1° En appliquant le principe de conservation de l'énergie mécanique, calculer les positions de G pour lesquelles la vitesse s'annule.
- 2° Etablir l'équation horaire du mouvement de G.

Solution

1° Positions de G pour lesquelles la vitesse s'annule :

L'énergie mécanique de vibration de cet oscillateur a pour expression :

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

L'énergie mécanique initiale est :

$$E_0 = \frac{1}{2} kx_0^2 + \frac{1}{2} mv_0^2$$

A l'instant final, la vitesse s'annule. L'énergie mécanique finale est donc :

$$E = \frac{1}{2} kx^2$$

Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_0 = E$$

Soit :
$$\frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

Ou encore :
$$kx_0^2 + mv_0^2 = kx^2$$

Par la suite :
$$x^2 = \frac{kx_0^2 + mv_0^2}{k}$$

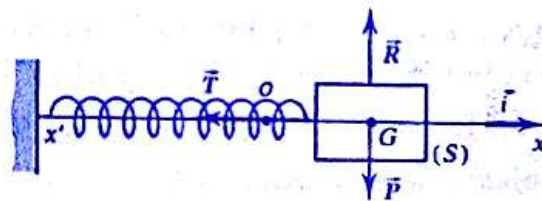
D'où :
$$x = \pm \sqrt{\frac{kx_0^2 + mv_0^2}{k}}$$

AN :
$$x = \pm \sqrt{\frac{10,1 \times (2 \cdot 10^{-2})^2 + 0,12 \times (-0,2)^2}{10,1}} = \pm 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$x = \pm 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

2°

Les forces appliquées au cylindre sont : le poids \vec{P} , la réaction \vec{R} de la tige et la tension \vec{T} du ressort.



La relation fondamentale de la dynamique donne :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = M\vec{a}$$

En projection sur l'axe \vec{i} , on obtient:

$$-T = M\ddot{x}$$

soit :
$$-kx = M\ddot{x}$$

ou encore :
$$M\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{M}x = 0$$

Cette équation différentielle admet comme solution :

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$X_m = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10,1}{0,12}} = 9,17 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\varphi = ?$$

Conditions initiales : à $t = 0$, $x_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ et $v_0 < 0$

Donc :
$$2 \cdot 10^{-2} = 3 \cdot 10^{-2} \cos \varphi$$

D'où :
$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^{-2}} = 0,6666 \Rightarrow \varphi = \pm 0,84 \text{ rad}$$

La vitesse du cylindre est :

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

En conséquence : $v_0 = -\omega_0 X_m \sin \varphi$

• si $\varphi = 0,84 \text{ rad}$, $v_0 = -\omega_0 X_m \sin 0,84 = -\omega_0 X_m \times 0,74 < 0$

• si $\varphi = -0,84 \text{ rad}$, $v_0 = -\omega_0 X_m \sin -0,84 = -\omega_0 X_m \times (-0,74) = 0,74 \omega_0 X_m > 0$

Donc : $\varphi = 0,84 \text{ rad}$

L'équation horaire du mouvement est :

$$x = 3 \cdot 10^{-2} \cos(9,17t + 0,84)$$

5_ Pendule élastique constitué de deux ressorts en série

On dispose de deux ressorts à spires non jointives R_1 et R_2 de constantes de raideur respectives $k_1 = 40 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et k_2 inconnue. On accroche à R_1 un solide (S) de masse $M = 100 \text{ g}$. A l'équilibre, le centre d'inertie de (S) est en G_0 . On déplace parallèlement vers le bas le solide d'une distance $G_0 G = X_m$ puis on le lâche sans vitesse initiale.

1° En prenant comme origine des dates l'instant où le solide passe au point d'abscisse $x = 3 \text{ cm}$ avec une vitesse $v = -0,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, déterminer l'équation horaire du mouvement de (S).

2° Calculer à l'instant $t = 3 \text{ s}$, la position et l'accélération du solide.

3° On associe au ressort R_1 , le ressort R_2 . A l'assemble on suspend le solide (S) comme l'indique la figure ci-dessous.



a) Le système étant à l'équilibre, trouver les expressions des allongements u_1 et u_2 respectivement de R_1 et de R_2 en fonction de la masse M et des raideurs k_1 et k_2 .

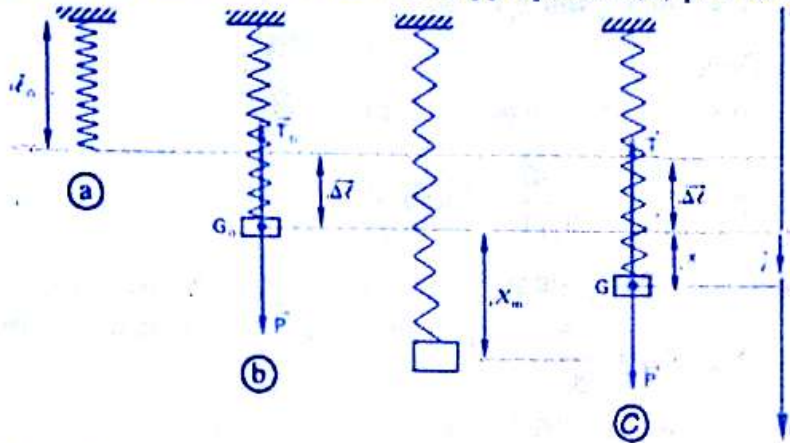
b) Déterminer la constante de raideur k du ressort équivalent qui, à l'équilibre, sous l'influence de (S) subirait un allongement $u = u_1 + u_2$.

c) On mesure la durée de 10 oscillations du solide, on trouve 4,082 s ; en déduire la valeur de k_2 .

Prendre $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Solution

1° Faisons le bilan des forces extérieures appliquées à (S) pris comme système.



A l'équilibre (figure b) le solide est soumis à l'action de son poids \vec{P} et à la tension \vec{T}_0 du ressort. La condition d'équilibre impose :

$$\vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0}$$

Soit, en projection suivant l'axe (o, \vec{i}) :

$$P - T_0 = 0$$

D'autre part, à l'équilibre la tension T_0 du ressort est proportionnelle à l'allongement $\Delta\ell$:

$$T_0 = k_1 \Delta\ell$$

En conséquence : $P - k_1 \Delta\ell = 0$

Lorsque le solide est en mouvement et que son élongation est x par rapport à sa position d'équilibre (figure c), l'allongement du ressort est $\Delta\ell + x$. La tension du ressort est alors $T = k_1(\Delta\ell + x)$.

La relation fondamentale de la dynamique donne :

$$\vec{P} + \vec{T} = M\vec{a}$$

Soit, suivant (o, \vec{i}) : $P - T = M\ddot{x}$

Donc : $P - k_1(\Delta\ell + x) = M\ddot{x}$

Par la suite : $P - k_1\Delta\ell - k_1x = M\ddot{x}$

$P - k_1\Delta\ell = 0 \Rightarrow -k_1x = M\ddot{x}$

soit : $M\ddot{x} + k_1x = 0$

D'où : $\ddot{x} + \frac{k_1}{M}x = 0$

Une solution de cette équation différentielle est :

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Conditions initiales :

• à $t = 0$, $x = 3 \cdot 10^{-2}$ m. Donc :

$$3 \cdot 10^{-2} = X_m \cos \varphi \quad (1)$$

La vitesse du solide a pour expression :

$$v = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

• à $t = 0$, $v = -0,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Donc :

$$-0,6 = -\omega_0 X_m \sin \varphi$$

Par ailleurs :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{M}} = \sqrt{\frac{40}{0,1}} = 20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

En conséquence :

$$-0,6 = -20 X_m \sin \varphi$$

D'où :

$$X_m \sin \varphi = \frac{0,6}{20}$$

Soit :

$$X_m \sin \varphi = 3 \cdot 10^{-2} \quad (2)$$

Des relations (1) et (2), il vient :

$$X_m \sin \varphi = X_m \cos \varphi$$

ou encore :

$$\sin \varphi = \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

D'après (2) :

$$X_m = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{\sin \varphi}$$

\Rightarrow

$$X_m = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2} \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

L'équation horaire du mouvement est donc :

$$x = 3\sqrt{2} \cdot 10^{-2} \cos\left(20t + \frac{\pi}{4}\right)$$

2° L'élongation à la date $t = 3$ s est :

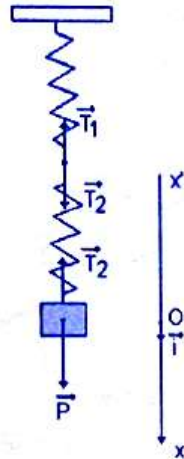
$$x_{(3)} = 3\sqrt{2} \cdot 10^{-2} \cos\left(20 \times 3 + \frac{3,14}{4}\right) = -1,9 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

L'accélération à la date $t = 3$ s est :

$$\ddot{x}_{(3)} = -\omega_0^2 x_{(3)} = (20)^2 \times 1,9 \cdot 10^{-2} = 7,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\begin{aligned} x_{(3)} &= -1,9 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ \ddot{x}_{(3)} &= 7,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

3° a) Expressions de u_1 et u_2 :



Le solide (S) pris comme système, est soumis à l'action de son poids \vec{P} et de la tension \vec{T}_2 , du ressort R_2 . La condition d'équilibre impose :

$$\vec{P} + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

Suivant l'axe (O, \vec{i}) on obtient :

$$P - T_2 = 0$$

soit : $Mg - T_2 = 0$

Donc : $T_2 = Mg$

D'autre part : $T_2 = k_2 u_2$

Par conséquent : $k_2 u_2 = Mg$

D'où : $u_2 = \frac{Mg}{k_2}$

Considérons maintenant le système $\{R_1, R_2\}$. Au point d'attache c, s'exercent les forces \vec{T}_1 et \vec{T}_2 . La condition d'équilibre s'écrit :

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

En conséquence : $T_1 = T_2$

Or : $T_1 = k_1 u_1$

Donc : $k_1 u_1 = T_2 = Mg$

D'où : $u_1 = \frac{Mg}{k_1}$

$$\boxed{u_1 = \frac{Mg}{k_1}}$$

$$\boxed{u_2 = \frac{Mg}{k_2}}$$

b) L'allongement u du ressort équivalent à l'association a pour expression :

$$u = \frac{Mg}{k} \quad (3)$$

D'autre part :

$$u = u_1 + u_2$$

soit :

$$u = \frac{Mg}{k_1} + \frac{Mg}{k_2}$$

Par la suite :

$$u = Mg \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \quad (4)$$

Des relations (3) et (4) il vient :

$$\frac{Mg}{k} = Mg \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$$

D'où :

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

ou encore :

$$\frac{1}{k} = \frac{k_2 + k_1}{k_1 \cdot k_2}$$

On en déduit :

$$k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$$

c) La période des oscillations est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}$$

D'où :

$$k = \frac{4\pi^2 M}{T^2}$$

$$\text{AN : } T = \frac{4,082}{10} = 0,4082\text{s et } \pi^2 = 10$$

$$k = \frac{4\pi^2 M}{T^2} = \frac{4 \times 10 \times 0,1}{(0,4082)^2} = 24\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

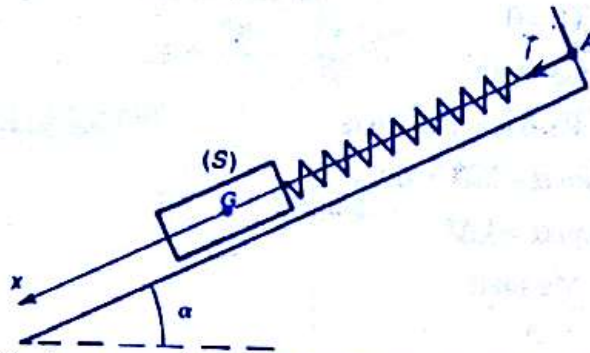
En conséquence :

$$k_2 = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 - k} = \frac{24 \times 40}{40 - 24} = 60\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$k_2 = 60\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

6_ Oscillations d'un ressort sur un plan incliné

Un solide de masse $M = 100\text{g}$ peut glisser sans frottement sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'horizontal. Il est attaché à l'extrémité inférieure d'un ressort à spires non jointives. L'autre extrémité du ressort est fixée en A à un support. La longueur à vide du ressort est $\ell_0 = 14\text{cm}$. On prendra $g = 10\text{USI}$.



1° Le solide (S) étant en équilibre, son centre d'inertie est en G_0 . Le ressort dont l'axe est parallèle à la ligne de plus grande pente a pris la longueur $\ell = 15\text{cm}$.

a) Représenter les forces qui s'exercent sur le solide et écrire la condition d'équilibre du solide sous forme vectorielle.

b) Projeter la relation vectorielle suivant l'axe (o, \vec{i}) et exprimer le coefficient de raideur du ressort en fonction de l'angle α , de la masse M , de l'allongement $\Delta\ell$ du ressort et de l'intensité du champ de pesanteur g . Calculer sa valeur numérique.

2° On écarte le solide de sa position d'équilibre vers le bas en amenant son centre d'inertie en G tel que $\overline{G_0G} = X_m \vec{i}$ avec $X_m = 4\text{cm}$. A la date $t = 0$, on abandonne le solide.

a) Déterminer l'équation horaire du mouvement ;

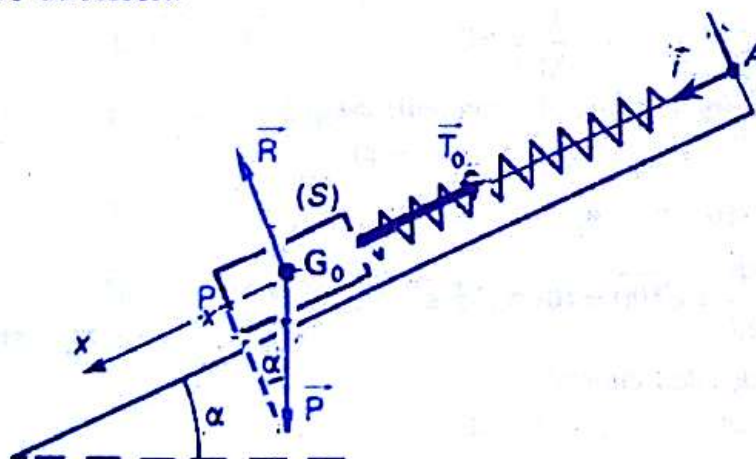
b) Calculer la période T et la fréquence des oscillations f .

c) Calculer l'énergie mécanique de vibration de l'oscillateur ; en déduire la vitesse maximale v_m acquise par le solide.

d) Trouver la vitesse lorsque l'élongation est égale à $2,5\text{ cm}$.

Solution

1° a) les forces qui s'exercent sur le solide à l'équilibre sont : le poids \vec{P} , la réaction \vec{R} du plan et la tension \vec{T}_0 du ressort.



Condition d'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_0 = \vec{0}$$

b) Suivant l'axe (o, \vec{i}) la relation vectorielle donne :

$$\begin{aligned}
 & P_x - T_0 = 0 \\
 T_0 = k\Delta\ell \Rightarrow & P_x - k\Delta\ell = 0 \\
 \text{Par ailleurs :} & P_x = P \sin \alpha = Mg \sin \alpha \\
 \text{Donc :} & Mg \sin \alpha - k\Delta\ell = 0 \\
 \text{Par suite :} & Mg \sin \alpha = k\Delta\ell \\
 \text{D'où :} & k = \frac{Mg \sin \alpha}{\Delta\ell}
 \end{aligned}$$

Application numérique :

$$M = 0,1 \text{ kg} ; \Delta\ell = \ell - \ell_0 = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$$

$$k = \frac{0,1 \times 10 \times 0,50}{10^{-2}} = 50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\boxed{k = 50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}$$

2° a) En mouvement, lorsque l'élongation de (S) est x par rapport à la position d'équilibre, la tension du ressort est $T = k(\Delta\ell + x)$.

Le théorème du centre d'inertie permet d'écrire :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = M\vec{a}$$

Suivant l'axe (o, \vec{i}) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & P - T = M\ddot{x} \\
 \text{soit :} & P_x - k(\Delta\ell + x) = M\ddot{x} \\
 \text{Par la suite :} & P_x - k\Delta\ell - kx = M\ddot{x} \\
 \text{Or :} & P_x - k\Delta\ell = 0 \quad (\text{condition d'équilibre}) \\
 \text{Par conséquent :} & -kx = M\ddot{x} \\
 \text{ou encore :} & M\ddot{x} + kx = 0 \\
 \text{Ainsi :} & \ddot{x} + \frac{k}{M}x = 0
 \end{aligned}$$

Une solution de cette équation différentielle est :

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$X_m = 4 \text{ cm} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{50}{0,1}} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Conditions initiales de l'énoncé :

$$\text{à } t = 0, x = X_m \Rightarrow X_m = X_m \cos \varphi$$

$$\text{D'où :} \quad \cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

L'équation horaire du mouvement est donc :

$$\boxed{x = 4 \cdot 10^{-2} \cos 10\sqrt{5}t}$$

b) La période propre des oscillations est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \times 3,14}{10 \times 2,23} = 0,28\text{s}$$

La fréquence propre est :

$$f = \frac{1}{T} = 3,55\text{Hz}$$

$$T = 0,28\text{s}$$

$$f = 3,55\text{Hz}$$

c) L'énergie mécanique de vibration de cet oscillateur :

$$E = \frac{1}{2} k X_m^2 = \frac{1}{2} \times 50 \times 16 \cdot 10^{-4} = 4 \cdot 10^{-2}\text{J}$$

$$E = 4 \cdot 10^{-2}\text{J}$$

L'énergie mécanique E est égale à chaque instant, la somme de l'énergie potentielle élastique E_p et de l'énergie cinétique E_c :

$$E = E_p + E_c$$

Si la vitesse est maximale, l'énergie potentielle élastique E_p est nulle. En conséquence l'énergie mécanique E est alors égale à l'énergie cinétique maximale $E_{c_{\max}}$:

$$E = \frac{1}{2} M v_{\max}^2$$

D'où :

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{M}}$$

soit :

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \times 4 \cdot 10^{-2}}{0,1}} = 0,89\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{\max} = 0,89\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

d) Nous avons :

$$E = E_p + E_c$$

soit :

$$E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} M v^2$$

ou encore :

$$E - \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} M v^2$$

Par la suite :

$$2E - k x^2 = M v^2$$

On en déduit la valeur absolue de la vitesse :

$$|v| = \sqrt{\frac{2E - k x^2}{M}}$$

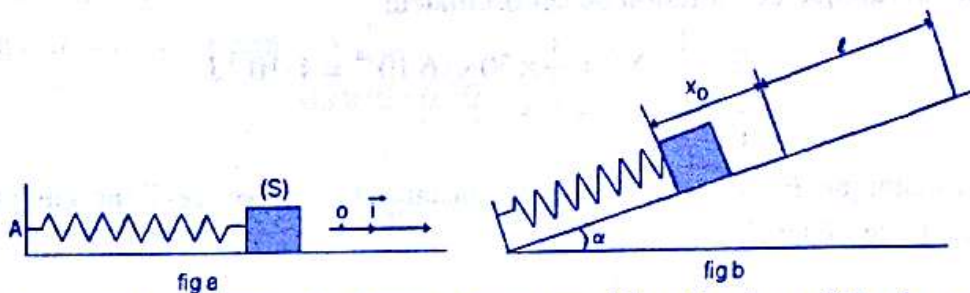
AN :

$$|v| = \sqrt{\frac{2 \times 4 \cdot 10^{-2} - 50 \times (2,5 \cdot 10^{-2})^2}{0,1}} = 0,70\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$|v| = 0,70 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

7_ Lancement d'un solide par un ressort le long d'un plan incliné

Un solide (S) de masse $m = 200\text{g}$ peut glisser sans frottement sur un banc horizontal. On le fixe à l'une des extrémités d'un ressort de masse négligeable et de raideur $k = 60\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$. L'autre extrémité du ressort est fixée à un point A. On repère la position du centre d'inertie G de S par son abscisse x sur l'axe (o, \vec{i}) : fig a.



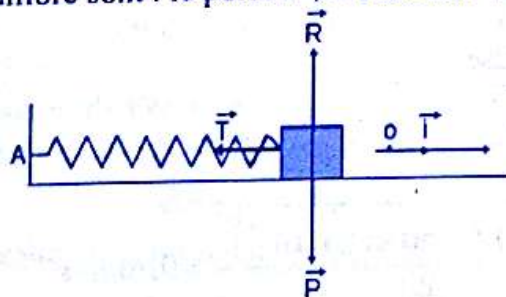
1° En allongeant le ressort on écarte le centre d'inertie du solide de sa position d'équilibre d'une distance $u = 4\text{cm}$ telle que $\vec{u} = +4\vec{i}$ puis on lâche le système sans vitesse initiale.

- Déterminer l'équation horaire du mouvement en prenant comme origine des dates l'instant où S passe pour la première fois par la position d'équilibre.
- Quelles sont l'abscisse et la vitesse du mobile à la date $t = 3\text{s}$.
- Calculer l'énergie mécanique de l'oscillateur ainsi constitué ; en déduire la vitesse maximale du solide.

2° Pour lancer un mobile de masse $M = 1\text{kg}$, le long d'un plan incliné de pente 2%, on se sert du ressort précédent. On comprime le ressort de $x_0 = 5\text{cm}$ quand il est en contact avec le mobile (fig.b). En lâchant le système, le mobile parcourt sur le plan incliné une longueur l avant de s'arrêter. Calculer l'intensité de la force de frottement \vec{f} supposée constante et colinéaire à la vitesse, qui s'exerce sur le mobile. On prendra $g = 10\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Solution

1° a) Les forces appliquées au solide quand son abscisse est x par rapport à la position à la position d'équilibre sont : le poids \vec{P} , la réaction \vec{R} du banc et la tension \vec{T} du ressort.



La relation fondamentale de la dynamique s'écrit donc :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Soit, après projection suivant l'axe (o, \vec{i}) :

$$-T = m\ddot{x}$$

ou encore :

$$-kx = m\ddot{x}$$

Par la suite :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Une solution de cette équation différentielle est :

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$X_m = 4 \text{ cm} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{60}{0,2}} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

à $t = 0$, $x = 0$ et $v < 0$. (La vitesse est négative à cette date car le solide se déplace dans le sens négatif des elongations) :

$$\text{Donc : } 0 = X_m \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = 0$$

$$\text{D'où : } \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\text{La vitesse de S est : } v = \frac{dx}{dt} = -X_m \omega \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{A } t = 0, v = -X_m \omega \sin \varphi$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } \varphi = \frac{\pi}{2}, v = -X_m \omega \sin \frac{\pi}{2} = -X_m \omega < 0 \\ \text{Si } \varphi = -\frac{\pi}{2}, v = -X_m \omega \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = X_m \omega > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad ,}$$

L'équation horaire du mouvement est donc :

$$x = 4 \cdot 10^{-2} \cos\left(10\sqrt{3}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

b) Abscisse du mobile à la date $t = 3\text{s}$

$$x_{(3)} = 4 \cdot 10^{-2} \cos\left(10\sqrt{3} \times 3 + \frac{\pi}{2}\right) = -3,96 \cdot 10^{-2} \text{ m} = -3,96 \text{ cm}$$

$$x_{(3)} = -3,96 \text{ cm}$$

Vitesse à la date $t = 3\text{s}$:

$$v = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{A } t = 3\text{s, on a : } v_{(3)} = -10\sqrt{3} \times 4 \cdot 10^{-2} \sin\left(10\sqrt{3} \times 3 + \frac{\pi}{2}\right) = 8,49 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{(3)} = 8,49 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) Energie mécanique de l'oscillateur :

$$E = \frac{1}{2} kX_m^2 = \frac{1}{2} \times 60 \times (4 \cdot 10^{-2})^2 = 4,8 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

$$E = 4,8 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

La vitesse est maximale quand l'énergie mécanique est égale à l'énergie cinétique :

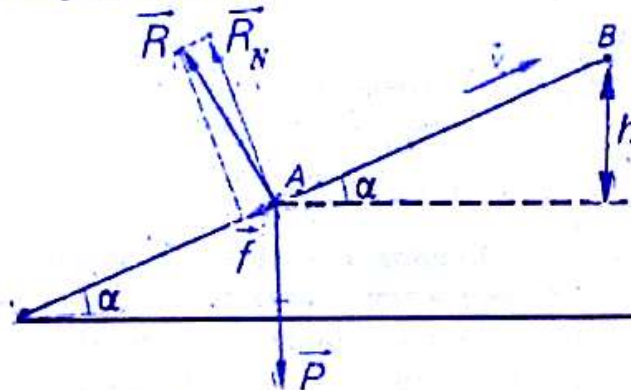
$$E = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

On en déduit :

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 4,8 \cdot 10^{-2}}{0,2}} = 0,69 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{\max} = 0,69 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2° Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au mobile entre le point de lancement et le point d'arrêt de longueur $AB = \ell$.



L'énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2} kx_0^2$ emmagasinée par le ressort est cédée au mobile sous forme d'énergie cinétique. Donc l'énergie cinétique initiale du mobile est :

$$E_{Ci} = \frac{1}{2} kx_0^2$$

A l'arrêt l'énergie cinétique finale est nulle :

$$E_{Cf} = 0$$

D'autre part, les forces appliquées au mobile sont : le poids \vec{P} et la réaction \vec{R} . Les composantes de la réaction sont \vec{R}_N et \vec{f} . La somme des travaux des forces appliquées est donc :

$$\sum W = W_{\vec{P}} + W_{\vec{R}}$$

soit :

$$\sum W = W_{\vec{P}} + W_{\vec{R}_N} + W_{\vec{f}}$$

La composante \vec{R}_N est perpendiculaire au déplacement. Le travail $W_{\vec{R}_N}$ de cette force est nul : $W_{\vec{R}_N} = 0$

En conséquence :

$$\sum W = W_{\vec{P}} + W_{\vec{f}}$$

Par ailleurs :

$$\begin{cases} W_p = -ph = -MgAB \sin \alpha = -Mgl \sin \alpha \\ W_f = -f \cdot AB = -fl \end{cases}$$

En conséquence :

$$\sum W = -Mgl \sin \alpha - fl$$

Conformément au théorème de l'énergie cinétique :

$$E_{Cf} - E_{Ci} = \sum W$$

soit :

$$0 - \frac{1}{2} kx_0^2 = -fl - Mgl \sin \alpha$$

Par la suite :

$$fl = \frac{1}{2} kx_0^2 - Mgl \sin \alpha$$

ou encore :

$$2fl = kx_0^2 - 2Mgl \sin \alpha$$

On en déduit :

$$f = \frac{kx_0^2 - 2Mgl \sin \alpha}{2l}$$

La pente 2% signifie :

$$\sin \alpha = \frac{2}{100} = 0,02$$

AN :

$$f = \frac{60 \times (5 \cdot 10^{-2})^2 - 2 \times 1 \times 10 \times 0,25 \times 0,02}{2 \times 0,25} = 0,1 \text{ N}$$

$$\boxed{f = 0,1 \text{ N}}$$

2 | OSCILLATEUR MECANIQUE DE ROTATION LE PENDULE DE TORSION

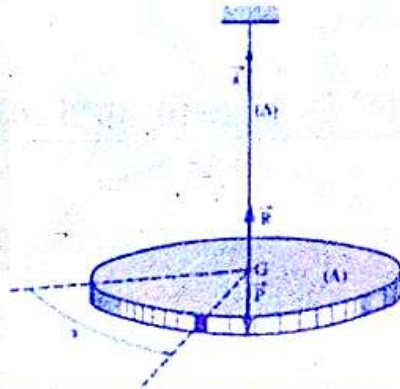
1 Définition

Un pendule de torsion est un solide fixé à un fil d'acier vertical passant par son centre d'inertie G et qui effectue des oscillations de torsion quand on l'écarte de sa position d'équilibre.

2 Equation horaire

2.1 Equation différentielle du mouvement

Considérons un disque homogène D , suspendu par un fil d'acier passant par son centre d'inertie G et qui effectue des oscillations de torsion. Le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe de rotation Δ symbolisé par le fil est J .



A une date t quelconque lorsque l'abscisse angulaire du disque est α par rapport à la position d'équilibre, les forces appliquées au disque sont :

- Le poids \vec{P} dont le moment par rapport à l'axe est $M_{\vec{P}/\Delta} = 0$
- La force \vec{R} exercée par le fil pour soutenir la barre, de moment $M_{\vec{R}/\Delta} = 0$. (Le poids \vec{P} et la réaction \vec{R} sont colinéaires à l'axe Δ . Les moments de ces forces par rapport à l'axe Δ sont donc nuls.)
- L'action développée par la torsion du fil sous forme d'un couple de rappel de moment $M_{C/\Delta}$ proportionnel et de signe contraire à l'élongation angulaire α : $M_{C/\Delta} = -C\alpha$. C est une constante dépendant uniquement du fil. On l'appelle **constante de torsion** du fil.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée au disque en rotation est :

$$\Sigma M = J\ddot{\alpha}$$

soit :

$$M_{\vec{P}/\Delta} + M_{\vec{R}/\Delta} + M_{C/\Delta} = J\ddot{\alpha}$$

Donc :

$$0 + 0 - C\alpha = J\ddot{\alpha}$$

ou encore :

$$J\ddot{\alpha} + C\alpha = 0$$

D'où :

$$\ddot{\alpha} + \frac{C}{J} \alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{C}{J} \alpha = 0$$

L'équation différentielle d'un pendule de torsion est linéaire et du second ordre.

2.2 Solution de l'équation différentielle

L'équation différentielle admet comme solution générale :

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

α_m est l'amplitude angulaire du mouvement. ω_0 est la pulsation propre des oscillations. φ est la phase à l'origine.

3 Caractéristiques

3.1 Pulsation propre

La pulsation propre des oscillations est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$$

3.2 Période propre

La période de propre est : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}$$

4 Etude énergétique

4.1 Energie potentielle élastique

L'énergie potentielle E_p d'un pendule de torsion est à chaque instant, proportionnelle au carré de son élongation angulaire α :

$$E_p = \frac{1}{2} C \alpha^2 = \frac{1}{2} C \alpha_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2} C \alpha_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

4.2 Energie cinétique

L'énergie cinétique E_c d'un pendule de torsion est, à chaque instant le demi-produit de son moment d'inertie J par le carré de sa vitesse angulaire $\dot{\alpha}$.

$$E_c = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} J \omega_0^2 \alpha_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0^2 = \frac{C}{J} \Rightarrow$$

$$E_c = \frac{1}{2} C \alpha_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

4.3 Energie mécanique de vibration

L'énergie mécanique E d'un pendule de torsion est à un instant, la somme de son énergie potentielle E_p et de son énergie cinétique E_c .

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2} C \alpha_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} C \alpha_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2} C \alpha_m^2 \left[\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \right] = \frac{1}{2} C \alpha_m^2$$

$$E = \frac{1}{2} C \alpha_m^2$$

L'énergie mécanique E du pendule de torsion se conserve : $E = \text{Cte}$

Conséquence de la conservation de l'énergie de vibration :

Nous avons : $E = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} C \alpha^2$

En dérivant cette expression par rapport au temps, nous obtenons :

$$\dot{E} = \frac{1}{2} J \times 2 \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + \frac{1}{2} C \times 2 \alpha \dot{\alpha}$$

soit : $\dot{E} = J \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + C \alpha \dot{\alpha}$

ou encore : $\dot{E} = \dot{\alpha} (J \ddot{\alpha} + C \alpha)$

$E = \text{Cte} \Rightarrow \dot{E} = 0 \Rightarrow \dot{\alpha} (J \ddot{\alpha} + C \alpha) = 0$

$\dot{\alpha} \neq 0 \Rightarrow J \ddot{\alpha} + C \alpha = 0$

On retrouve ainsi l'équation différentielle du pendule de torsion.

- si $\alpha = \pm \alpha_m$, $E_p = \frac{1}{2} C \alpha_m^2 \Rightarrow E_p = E$. Par conséquent : $E_c = 0$.

• Cuvette de potentiel

Lorsque le pendule est écarté au maximum de sa position d'équilibre, toute son énergie mécanique se retrouve sous forme d'énergie potentielle.

- si $\alpha = 0$, $E_p = 0 \Rightarrow E_c = E$.

Au passage à la position d'équilibre, l'énergie mécanique E est uniquement sous forme d'énergie cinétique.

Les vitesses du pendule de torsion à la position d'équilibre sont :

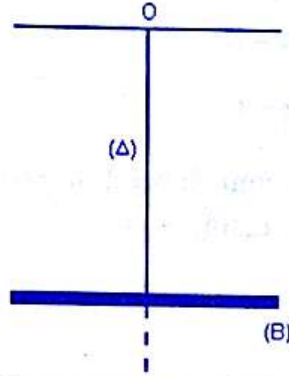
$$\dot{\alpha} = \pm \omega_0 \alpha_m$$

5 Analogie formelle entre grandeurs de rotation et grandeurs de translation

	Translation	rotation
Equation différentielle	$M\ddot{x} + kx = 0$	$J\ddot{\alpha} + C\alpha = 0$
Abscisse	X	A
Accélération	\ddot{x}	$\ddot{\alpha}$
Inertie	M	J
Elasticité	K	C

1_ Pendule de torsion constitué par une barre rectiligne

Un fil métallique vertical de constante de torsion C , fixé en O à un support, soutient une barre (B) horizontale qui peut prendre seulement un mouvement de rotation autour de l'axe Δ matérialisé par le fil. Le moment d'inertie de la barre par rapport à cet axe est J .



A partir de sa position d'équilibre, on fait tourner la barre d'un angle α_0 dans un sens choisi comme positif, puis on l'abandonne à la date $t = 0$ avec une vitesse de $-4,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. La période des oscillations est $T_0 = 0,8 \text{ s}$.

1° Etablir l'équation horaire du mouvement pris par la barre sachant qu'elle passe pour la première fois par sa position d'équilibre à la date $t = 0,1 \text{ s}$. En déduire α_0 .

2° Calculer :

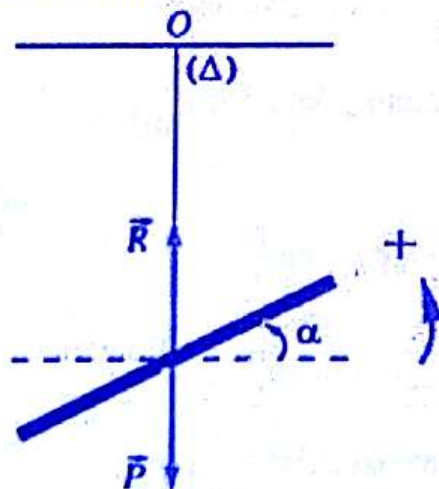
a) la vitesse angulaire maximale acquise par la barre ;

b) l'accélération angulaire maximale de la barre.

3° On fixe à la barre de part et d'autre de l'axe, à 10 cm de celui-ci deux solides ponctuelle de même masse $m = 30 \text{ g}$. La période des oscillations devient $T' = 1 \text{ s}$. En déduire la valeur du moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe Δ .

Solution

1° A un instant quelconque lorsque la barre est en mouvement, trois actions mécaniques s'exercent sur lui :



Le mouvement de rotation autour de l'axe Δ est régi par la relation :

$$\sum M_{\Delta} = J\ddot{\alpha}$$

Soit : $M_{\bar{P}/\Delta} + M_{\bar{R}/\Delta} + M_{C/\Delta} = J\ddot{\alpha}$

Donc : $0 + 0 - C\alpha = J\ddot{\alpha}$

ou encore : $J\ddot{\alpha} + C\alpha = 0$

D'où : $\ddot{\alpha} + \frac{C}{J}\alpha = 0$

Cette équation différentielle admet comme solution générale:

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0,8} = 2,5\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Conditions initiales : lorsque $t = 0, \alpha = 0$:

Soit : $0 = \alpha_m \cos(2,5\pi \times 0,1 + \varphi)$

$$2,5\pi \times 0,1 = 0,25\pi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 = \alpha_m \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)$$

Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 0$

D'où : $\frac{\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Pour le premier passage à la position d'équilibre, $k = 0$

Ainsi : $\frac{\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2}$

D'où : $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

D'autre part, la vitesse angulaire est :

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = -\omega_0 \alpha_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

soit : $\dot{\alpha} = -2,5\pi \alpha_m \sin\left(2,5\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

Lorsque $t = 0, \dot{\alpha} = -4,7 \Rightarrow$

$$-4,7 = -2,5\pi \alpha_m \sin \frac{\pi}{4}$$

D'où : $\alpha_m = \frac{4,7}{2,5 \times 3,14 \times 0,707} = 0,85 \text{ rad}$

Enfinement : $\alpha = 0,85 \cos\left(2,5\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

$$\text{A } t=0, \alpha = \alpha_0 \Rightarrow \alpha_0 = 0,85 \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\text{D'où : } \alpha_0 = 0,85 \times 0,707 = 0,60 \text{ rad}$$

$$\boxed{\alpha_0 = 0,60 \text{ rad}}$$

2° a) La vitesse angulaire maximale :

$$\dot{\alpha}_m = \omega_0 \alpha_m$$

$$\text{soit } \dot{\alpha}_m = 2,5\pi \times 0,85 = 6,67 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\boxed{\dot{\alpha}_m = 6,67 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

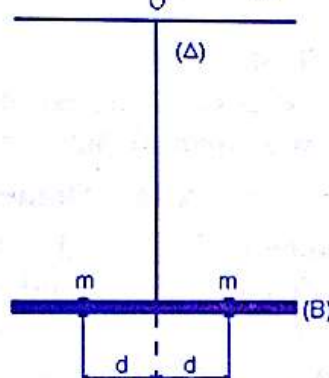
b) L'accélération angulaire maximale :

$$\ddot{\alpha}_m = \omega_0^2 \alpha_m$$

$$\text{soit : } \ddot{\alpha}_m = (2,5)^2 \pi^2 \times 0,85 = 52,38 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\boxed{\ddot{\alpha}_m = 52,38 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}}$$

3° Le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe Δ :



Le moment d'inertie d'une masse ponctuelle par rapport à l'axe Δ est $I = md^2$.

Le moment d'inertie J' de la barre et des masses ponctuelles est :

$$J' = J + 2md^2$$

$$\text{Par conséquent : } T' = 2\pi \sqrt{\frac{J + 2md^2}{C}}$$

$$\text{or : } T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}$$

Ainsi, après simplifications :

$$\left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \frac{J + 2md^2}{J}$$

$$\text{soit : } \left(\frac{T'}{T}\right)^2 = 1 + \frac{2md^2}{J}$$

$$\text{Autrement : } \left(\frac{T'}{T}\right)^2 - 1 = \frac{2md^2}{J}$$

Par la suite :
$$\frac{1}{(0,8)^2} - 1 = \frac{2md^2}{J}$$

Aussi :
$$0,56 = \frac{2md^2}{J}$$

On en déduit :
$$J = \frac{2md^2}{0,56}$$

AN :
$$J = \frac{2 \times 30 \cdot 10^{-3} \times (10 \cdot 10^{-2})^2}{0,56} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

2_ Pendule de torsion constitué par un disque homogène

Un disque D_1 , de rayon R est suspendu à un fil A_1O_1 qui passe par son centre O_1 . La constante de torsion du fil est C . Le moment d'inertie de D_1 par rapport à l'axe vertical passant par O_1 est J . On fait osciller le disque.

1° Trouver l'expression de la période T_1 des oscillations.

2° Un second disque D_2 , semblable au précédent, est muni à sa périphérie d'une jante de masse $m = 100\text{g}$. Il est suspendu par son centre O_2 à un fil A_2O_2 , de même constante de torsion que A_1O_1 . Donner l'expression de la période T_2 des oscillations de D_2 en fonction de R , m , J et C .

3° On fait osciller simultanément les deux disques. Pendant que D_1 effectue 51 oscillations, D_2 en effectue 50. Déterminer le moment d'inertie J de D_1 .

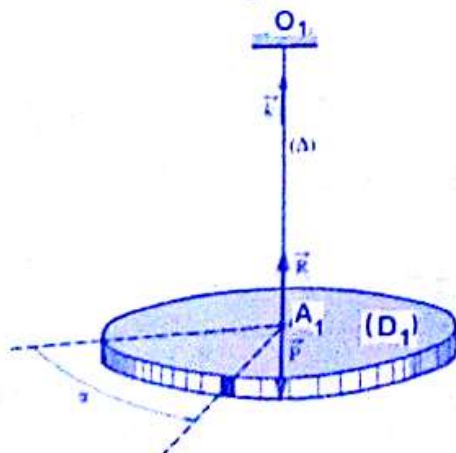
4° Les 51 oscillations de D_1 durent $3\text{mn}24\text{s}$; en déduire la valeur de la constante de torsion du fil.

Donnée: le moment d'inertie d'une jante par rapport à un axe passant par son centre est $I = mR^2$.

Solution

1° Relation fondamentale du solide en rotation :

$$\sum M_{\Delta} = J \cdot \ddot{\alpha}$$



soit : $M_{\bar{P}/\Delta} + M_{\bar{R}/\Delta} + M_{C/\Delta} = J\ddot{\alpha}$

ou encore : $0 + 0 - C\alpha = J\ddot{\alpha}$

Par la suite : $J\ddot{\alpha} + C\alpha = 0$

ou : $\ddot{\alpha} + \frac{C}{J}\alpha = 0$

$\omega = \sqrt{\frac{C}{J}} \Rightarrow T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$

2° Le moment d'inertie du système disque - jante par rapport à l'axe Δ est :

$$J' = J + mR^2$$

Par conséquent : $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J'}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{J + mR^2}{C}}$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J + mR^2}{C}}$$

3° D'après l'énoncé : $51T_1 = 50T_2$

Ainsi : $51 \times 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}} = 50 \times 2\pi\sqrt{\frac{J + mR^2}{C}}$

Après simplification : $51\sqrt{\frac{J}{C}} = 50\sqrt{\frac{J + mR^2}{C}}$

Par la suite : $(51)^2 J = (50)^2 (J + mR^2)$

soit : $2601J = 2500J + 2500mR^2$

D'où : $J = \frac{2500mR^2}{2601 - 2500} = \frac{2500mR^2}{101}$

Application numérique : $J = \frac{2500 \times 0,1 \times (0,2)^2}{101} = 9,9 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

$$J = 9,9 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

4° Nous avons : $T_1^2 = \frac{4\pi^2 J}{C} \Rightarrow C = \frac{4\pi^2 J}{T_1^2}$

$51T_1 = 3\text{mn}24\text{s} = 3 \times 60\text{s} + 24\text{s} = 204\text{s} \Rightarrow T_1 = \frac{204}{51} = 4\text{s}$

Ainsi : $C = \frac{4 \times 10 \times 9,9 \cdot 10^{-2}}{16} = 0,25 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$

$$C = 0,25 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$$

3 | OSCILLATEUR MECANIQUE DE ROTATION LE PENDULE PESANT

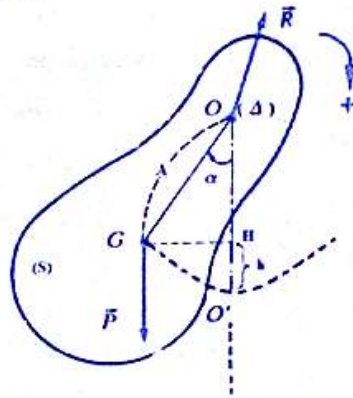
3.1 Le pendule pesant

3.1.1 Définition

Un pendule pesant ou pendule composé, est un solide qui oscille autour d'un axe fixe Δ ne passant pas par son centre d'inertie G , sous la seule action de la pesanteur.

3.1.2 Equation différentielle des petites oscillations

Considérons un solide (S) de masse M , mobile autour d'un axe Δ situé à la distance $OG = A$ de son centre d'inertie G . Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ est J . En l'absence de frottements, les seules forces qui agissent (S) sont : le poids \vec{P} et la réaction \vec{R} de l'axe.



Choisissons arbitrairement un sens positif de rotation autour de l'axe Δ . La relation fondamentale de la dynamique appliquée au solide (S) en rotation autour de l'axe Δ s'écrit :

$$\sum M_{\Delta} = J\ddot{\alpha}$$

$$M_{\vec{P}/\Delta} + M_{\vec{R}/\Delta} = J\ddot{\alpha}$$

soit :

La ligne d'action de la réaction rencontre l'axe Δ . Le moment de cette force par rapport à cet axe est donc nul : $M_{\vec{R}/\Delta} = 0$

En conséquence : $M_{\vec{P}/\Delta} = J\ddot{\alpha}$ (1)

Par ailleurs, par définition, le moment du poids par rapport à l'axe Δ est :

$$M_{\vec{P}/\Delta} = -P \cdot GH$$

D'après le triangle rectangle OGH, $GH = OG \cdot \sin \alpha = A \sin \alpha$

Par conséquent : $M_{\vec{P}/\Delta} = -PA \sin \alpha = -MgA \sin \alpha$ (2)

(1) et (2) ==> $J\ddot{\alpha} = -MgA \sin \alpha$

ou encore :

$$J\ddot{\alpha} + MgA \sin \alpha = 0$$

Par la suite :

$$\ddot{\alpha} + \frac{MgA}{J} \sin \alpha = 0$$

Cette équation différentielle n'est pas linéaire car l'accélération n'est pas

proportionnelle à l'élongation α mais plutôt à $\sin\alpha$. Cependant pour des oscillations de faibles amplitudes ($\alpha_m \leq 0,25\text{rad}$), $\sin\alpha \approx \alpha$, l'équation différentielle devient linéaire :

$$\ddot{\alpha} + \frac{MgA}{J} \alpha = 0$$

1.3 Pulsation propre et période propre

La pulsation propre du mouvement :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{MgA}{J}}$$

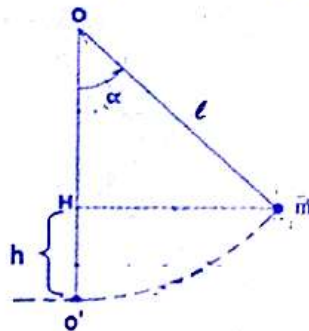
La période propre des oscillations est :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{MgA}}$$

3.2 Pendule simple

3.2.1 Définition

Un pendule simple est un point matériel suspendu par un fil et qui effectue des oscillations si on l'écarte de sa position d'équilibre.



3.2.2 Période propre

La période des oscillations d'un pendule simple de longueur ℓ est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

3.2.3 Les lois des pendules simples

La période d'un pendule simple est :

- indépendante de sa masse m
- indépendante de l'amplitude α_m des oscillations
- proportionnelle à la racine carrée de la longueur ℓ
- inversement proportionnelle à la racine carrée de l'accélération g de la pesanteur

3.2.4 Etude énergétique

• Energie potentielle de pesanteur

En prenant comme position de référence pour l'énergie potentielle le plan horizontal contenant le pendule à l'équilibre, l'énergie potentielle du système (terre-pendule)

est : $E_p = mgh$

D'autre part : $h = OO' - OH = \ell - \ell \cos \alpha$

Donc : $E_p = mg\ell(1 - \cos \alpha)$

• **Energie cinétique**

L'énergie cinétique d'un pendule simple animé d'une vitesse \vec{v} à un instant est le demi-produit de sa masse par le carré du module de sa vitesse :

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2$$

• **Energie mécanique**

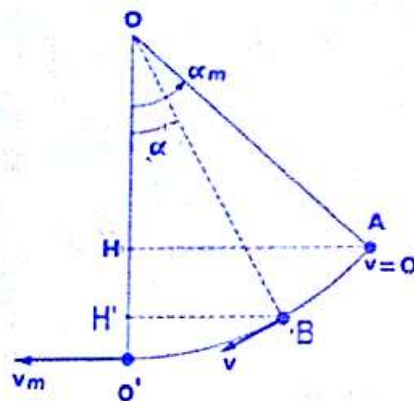
L'énergie mécanique totale E d'un pendule simple est à chaque instant, la somme de son énergie potentielle E_p et de son énergie cinétique E_c :

$$E = E_p + E_c$$

L'énergie mécanique du pendule simple est constante.

3.2.5 Vitesse d'un pendule simple

On écarte un pendule simple d'un angle α_m puis on l'abandonne sans vitesse initiale à partir d'un point A d'altitude $O'H = h$. Déterminons sa vitesse v au point B d'altitude $O'H' = h'$ et d'élongation α .



L'énergie mécanique initiale est :

$$E_{c_i} + E_{p_i} = mgh = mg\ell(1 - \cos \alpha_m)$$

L'énergie mécanique finale est :

$$E_{c_f} + E_{p_f} = \frac{1}{2} mv^2 + mgh' = \frac{1}{2} mv^2 + mg\ell(1 - \cos \alpha)$$

Conservation de l'énergie mécanique : $E_{c_i} + E_{p_i} = E_{c_f} + E_{p_f}$

Soit : $mg\ell(1 - \cos \alpha_m) = \frac{1}{2} mv^2 + mg\ell(1 - \cos \alpha)$

On en déduit :

$$v = \sqrt{2g\ell(\cos \alpha - \cos \alpha_m)}$$

A la position d'équilibre ($\alpha = 0$), la vitesse est maximale :

$$v_m = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \alpha_m)}$$

Cet exercice est réservé aux élèves de SE

Un pendule composé et un pendule simple ont la même période $T = 2\text{s}$. Le pendule composé oscille autour d'un axe Δ distant de son centre d'inertie de 20cm . Son moment d'inertie par rapport à cet axe est $J = 5 \cdot 10^{-2} \text{kg} \cdot \text{m}^2$. Le pendule simple est constitué d'un fil de masse négligeable à l'extrémité duquel est fixé un petit objet de masse $m = 30\text{g}$.

- 1° Calculer la masse du pendule pesant.
 - 2° Déterminer la longueur du pendule simple.
 - 3° On écarte le pendule simple de sa position d'équilibre d'un angle $\alpha_m = 45^\circ$ puis on le lâche sans vitesse initiale. Calculer :
 - a) l'énergie mécanique initiale du pendule simple.
 - b) l'énergie cinétique du pendule simple lorsque l'écartement du pendule est $\alpha = 20^\circ$. En déduire la vitesse du pendule à cet instant.
 - c) la vitesse à la position d'équilibre.
 - 4° Pour quelles valeurs de α les énergies potentielle et cinétique sont – elles égales ?
- Prendre : $\pi^2 = g = 9,8 \text{USI}$

Solution

1° La période du pendule composé est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{MgA}}$$

Ou encore :

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{J}{MgA}$$

On en déduit la masse : $M = \frac{4\pi^2 J}{T^2 g A} = \frac{4\pi^2 \times 5 \cdot 10^{-2}}{4 \times \pi^2 \times 20 \cdot 10^{-2}} = 0,25 \text{kg}$

$$\boxed{M = 0,25 \text{kg}}$$

2° La période du pendule simple est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Ou encore :

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{\ell}{g}$$

On en déduit la longueur du pendule :

$$\ell = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$$

$$\text{AN : } g = \pi^2 \quad \ell = \frac{4\pi^2}{4\pi^2} = 1\text{m}$$

$$\boxed{\ell = 1\text{m}}$$

3° a) L'énergie mécanique initiale est :

$$E_i = E_{p_i} + E_{c_i}$$

$$E_{c_i} = 0 \Rightarrow$$

$$E_i = E_{p_i} = mg\ell(1 - \cos \alpha_m)$$

AN :

$$E_i = 30 \cdot 10^{-3} \times 9,8 \times 1(1 - \cos 45^\circ) = 8,82 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

$$\boxed{E_i = 8,82 \cdot 10^{-2} \text{ J}}$$

b) L'énergie mécanique du pendule à l'instant final est :

$$E_f = E_{p_f} + E_{c_f} = mg\ell(1 - \cos \alpha) + E_{c_f}$$

Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_f = E_i$$

soit :

$$mg\ell(1 - \cos \alpha) + E_{c_f} = 8,82 \cdot 10^{-2}$$

D'où :

$$E_{c_f} = 8,82 \cdot 10^{-2} - mg\ell(1 - \cos \alpha)$$

AN :

$$E_{c_f} = 8,82 \cdot 10^{-2} - 30 \cdot 10^{-3} \times 9,8 \times 1(1 - \cos 20^\circ) = 6,82 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

Par ailleurs:

$$E_{c_f} = \frac{1}{2}mv^2$$

On en déduit:

$$v = \sqrt{\frac{2E_{c_f}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 6,82 \cdot 10^{-2}}{30 \cdot 10^{-3}}} = 2,13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\boxed{v = 2,13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

c) La vitesse du pendule simple à la position d'équilibre est :

$$v = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \alpha_m)} = \sqrt{2 \times 9,8 \times 1(1 - \cos 45^\circ)} = 2,42 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\boxed{v = 2,42 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

4° L'énergie potentielle du pendule simple est $E_p = mg\ell(1 - \cos \alpha)$

L'énergie cinétique du pendule simple est $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

D'autre part : $v^2 = 2g\ell(\cos \alpha - \cos \alpha_m) \Rightarrow E_c = mg\ell(\cos \alpha - \cos \alpha_m)$

$$E_p = E_c \Rightarrow$$

$$mg\ell(1 - \cos \alpha) = mg\ell(\cos \alpha - \cos \alpha_m)$$

ou encore :

$$1 - \cos \alpha = \cos \alpha - \cos \alpha_m$$

On en déduit :

$$\cos \alpha = \frac{1 + \cos \alpha_m}{2}$$

AN :

$$\cos \alpha = \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} = 0,85 \Rightarrow \alpha = \pm 30^\circ$$

$$\boxed{\alpha = \pm 30^\circ}$$

4 OSCILLATEUR ELECTRIQUE LE CIRCUIT OSCILLANT

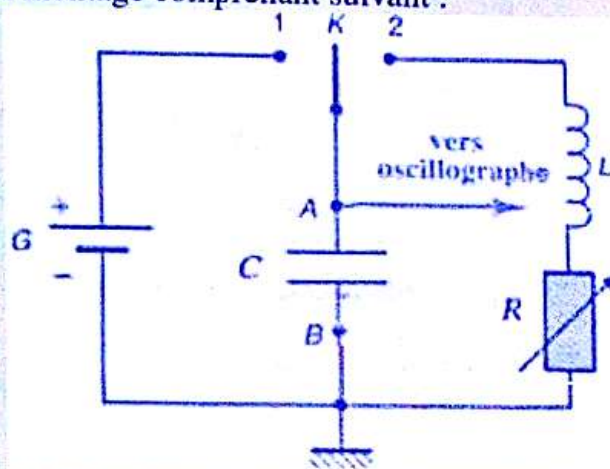
4.1 Activité : Décharge d'un condensateur à travers un circuit inductif

Matériel : Un générateur G de courant continu ; un condensateur de capacité C ; une bobine d'inductance L ; un conducteur ohmique de résistance R variable ; un interrupteur k à deux voies et un oscilloscope électronique.

OBJECTIF : Influence de la résistance sur la décharge

• Manipulation :

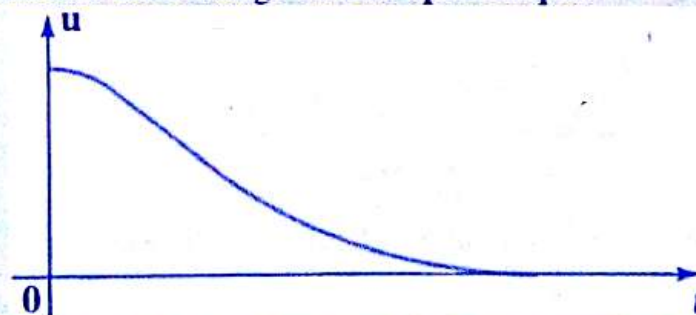
Réalisons un montage comprenant suivant :



Plaçons l'interrupteur k en position 1 : le condensateur se charge sous la tension U_0 du générateur. Basculons ensuite l'interrupteur de la position 1 à la position 2. Le condensateur se décharge à travers la bobine et la résistance. Un oscilloscope électronique permet de visualiser la variation de la tension u aux bornes du condensateur.

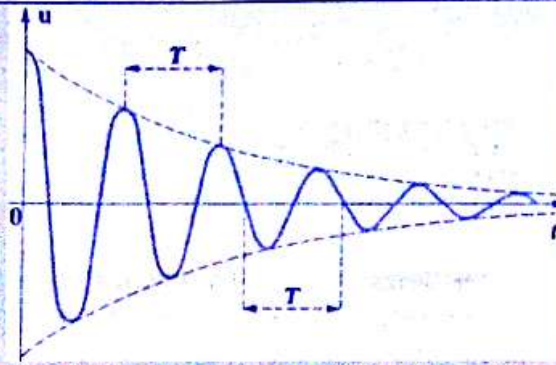
• Aspects des oscillogrammes

– Si la résistance R est très grande ($R \approx 2000\Omega$), il n'y a pas d'oscillations : la tension u garde un sens constant. La décharge est dite **apériodique**.



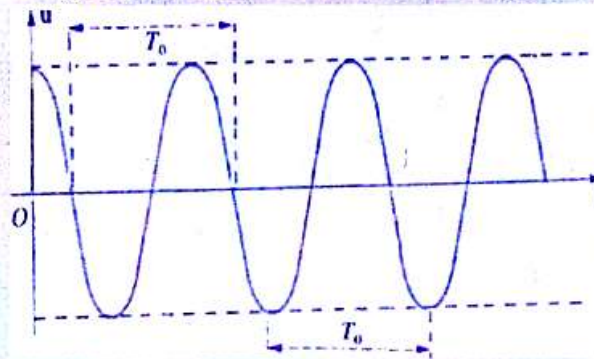
Décharge apériodique

– Si la résistance du circuit est faible ($R \approx 30\Omega$), le courant de décharge change périodiquement de sens. L'amplitude des oscillations diminue progressivement et finit par s'annuler. On obtient des **oscillations amorties** de pseudo-période T



Oscillations pseudo-périodiques

- Dans le cas idéal où la résistance du circuit est nulle, l'amplitude des oscillations reste constante. Les **oscillations sont libres** et le circuit est appelé **circuit oscillant** ou circuit LC de période propre T_0 .

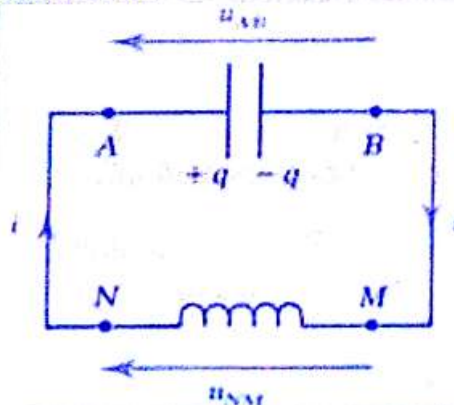


Oscillations périodiques

4.2 Etude théorique d'un circuit oscillant

4.2.1 Equation différentielle du circuit LC

Chargeons un condensateur de capacité C sous une tension U_0 et réunissons ses deux armatures A et B aux bornes M et N d'une bobine d'inductance L et de résistance négligeable. Choisissons un sens algébrique pour l'intensité : $i > 0$ si le courant traverse la bobine de M vers N .



La tension aux bornes du condensateur est le rapport de sa charge q à sa capacité C :

$$u_{AB} = \frac{q}{C}$$

La tension aux bornes de la bobine est :

$$u_{MN} = \frac{Ldi}{dt} \Rightarrow u_{NM} = -\frac{Ldi}{dt}$$

A chaque instant, on a : $u_{AB} = u_{NM}$

soit : $\frac{q}{C} = -\frac{Ldi}{dt}$

ou encore : $\frac{Ldi}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

Par ailleurs, l'intensité i est la dérivée de la charge q par rapport au temps :

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$$

Ainsi : $L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$

ou encore : $\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

L'équation différentielle est linéaire et du second ordre.

4.2.2 Solution de l'équation différentielle

L'équation différentielle admet comme solution générale :

$$q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Q_m est la charge initiale du condensateur : $Q_m = CU_0$

ω_0 est la pulsation propre

φ est la phase à l'origine

4.2.3 Caractéristiques du circuit

• Pulsation propre

La charge instantanée du condensateur est :

$$q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

L'intensité instantanée du courant est la dérivée de la charge q par rapport au temps :

$$i = \dot{q} = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

\ddot{q} est la dérivée de l'intensité i par rapport au temps est :

$$\ddot{q} = \frac{d\dot{q}}{dt} = -\omega_0^2 \underbrace{Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}_q$$

Soit : $\ddot{q} = -\omega_0^2 q$ (1)

D'après l'équation différentielle :

$$\ddot{q} = -\frac{1}{LC}q$$
 (2)

Des relations (1) et (2), on obtient :

$$-\omega_0^2 q = -\frac{1}{LC} q$$

Ou encore :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Finalement :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

• Période propre

La période propre des oscillations électriques est :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

• Fréquence propre

La fréquence propre d'un circuit LC est l'inverse de sa période propre :

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Les oscillations électriques sont des courants de hautes fréquences. Leurs fréquences varient entre 10^3 Hz et 10^9 Hz.

4.3 Energie électrique totale

4.3.1 Energie électrique

L'énergie électrique E_E emmagasinée dans le condensateur est :

$$E_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_m^2}{C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_E = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_m^2}{C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

4.3.2 Energie magnétique

L'énergie magnétique E_M emmagasinée dans la bobine est :

$$E_M = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \cdot L\omega_0^2 Q_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot L\omega_0^2 Q_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow E_M = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_m^2}{C} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_m^2}{C} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

4.3.3 Energie électrique totale

L'énergie électrique totale E d'un circuit oscillant est à chaque instant, la somme de son énergie électrique E_E et de son énergie magnétique E_M :

$$E = E_E + E_M$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_m^2}{C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_m^2}{C} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_m^2}{C} \left[\underbrace{\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}_1 \right]$$

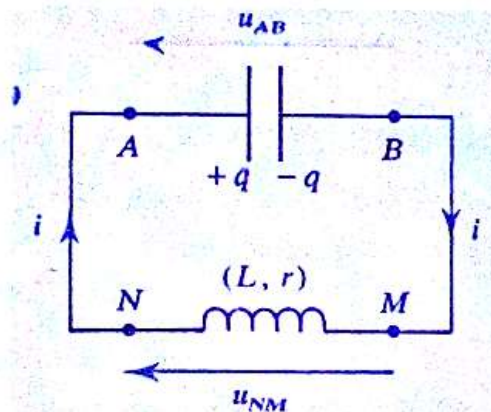
$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_m^2}{C}$$

L'énergie électrique totale E se conserve.

4.4 Circuit avec résistance : oscillations amorties

4.4.1 Equation différentielle

Soit un circuit comprenant une bobine d'inductance L et de résistance r associée à un condensateur de capacité C .



Orientons le circuit de M vers N à tout instant.

La tension aux bornes du condensateur est :

$$u_{AB} = \frac{q}{C}$$

La tension aux bornes de la bobine est :

$$u_{MN} = L \frac{di}{dt} + ri$$

Donc :

$$u_{NM} = -L \frac{di}{dt} - ri$$

A chaque instant nous avons :

$$u_{AB} = u_{NM}$$

soit :

$$\frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt} - ri$$

ou encore

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + ri = 0$$

D'où :

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + ri = 0 \quad (3)$$

ou encore :

$$\frac{di}{dt} + \frac{q}{LC} + \frac{ri}{L} = 0$$

L'équation différentielle d'un circuit amorti est donc :

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q + \frac{r}{L}\dot{q} = 0$$

4.4.2 Dissipation de l'énergie électrique totale

L'énergie électrique totale d'un circuit amorti a pour expression :

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2$$

Dérivons cette expression par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} \\ &= \frac{q}{C} i + Li \frac{di}{dt} \\ &= i \left(\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} \right) \end{aligned}$$

D'après l'équation (3) :

$$\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = -ri$$

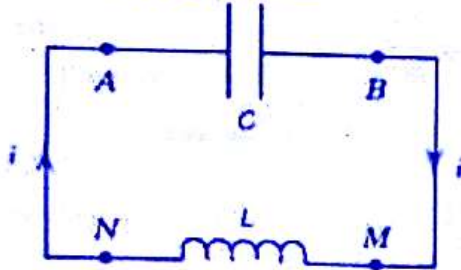
En conséquence :

$$\frac{dE}{dt} = -ri^2 < 0$$

L'énergie électrique totale **n'est donc pas constante : elle diminue**. L'énergie $W_r = -ri^2$ représente la puissance perdue dans le circuit et évacuée vers l'extérieur sous forme de chaleur.

1_ Décharge oscillante d'un condensateur

Un condensateur de capacité $C = 2\mu\text{F}$ est chargé sous une tension $U = 20\text{V}$. Dès que la charge est terminée, on relie les armatures de ce condensateur à une bobine d'inductance $L = 0,5\text{H}$ et de résistance négligeable. A un instant pris comme origine des temps, on ferme l'interrupteur K.



1° En comptant positivement l'intensité $i(t)$ quand le courant circule dans le sens indiqué sur le schéma, établir l'équation différentielle du circuit (on précise qu'à l'instant $t = 0$, l'armature A est chargée positivement).

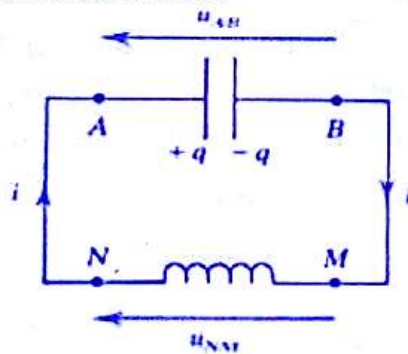
2° Calculer la pulsation propre ω_0 du circuit ainsi que la fréquence propre f_0 des oscillations.

3° Trouver les expressions de la charge du condensateur et de l'intensité du courant en fonction du temps $q(t)$ et $i(t)$.

4° Déterminer les expressions des fonctions $W_c(t)$ et $W_b(t)$ des énergies stockées dans le condensateur et dans la bobine. Montrer que ce système satisfait au principe de conservation de l'énergie.

Solution

1° Equation différentielle du circuit :



La tension aux bornes du condensateur est :

$$u_{AB} = \frac{q}{C}$$

La tension aux bornes de la bobine est :

$$u_{MN} = L \frac{di}{dt} \Rightarrow u_{NM} = -L \frac{di}{dt}$$

A chaque instant, on a : $u_{AB} = u_{NM}$

soit :
$$\frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt}$$

ou encore :
$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

D'autre part :
$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$$

En conséquence :
$$L \ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

D'où :
$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

AN :
$$\ddot{q} + \frac{1}{0,5 \times 2 \cdot 10^{-6}} q = \ddot{q} + 10^6 q = 0$$

$$\boxed{\ddot{q} + 10^6 q = 0}$$

2° La pulsation propre :

$\omega_0^2 = 10^6 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{10^6} = 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

La fréquence propre est : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{10^3}{6,28} = 159,23 \text{ Hz}$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_0 &= 1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ f_0 &= 159,23 \text{ Hz} \end{aligned}}$$

3° L'équation différentielle admet comme solution générale :

$$q(t) = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

La charge initiale du condensateur est : $Q_m = CU_0 = 2 \cdot 10^{-6} \times 20 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ C}$

Conditions initiales : à $t=0$, $q = Q_m \Rightarrow Q_m = Q_m \cos \varphi$

D'où : $\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

L'expression de la charge est donc :

$$\boxed{q(t) = 4 \cdot 10^{-5} \cos 10^3 t}$$

L'intensité i du courant est la dérivée de la charge par rapport au temps :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -4 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3 \sin 10^3 t = -4 \cdot 10^{-2} \sin 10^3 t$$

$$\boxed{i(t) = -4 \cdot 10^{-2} \sin 10^3 t}$$

4° L'énergie emmagasinée dans le condensateur est :

$$W_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 10^{-6}} \cos^2 10^3 t = 4 \cdot 10^{-4} \cos^2 10^3 t$$

soit :

$$\boxed{W_c = 4 \cdot 10^{-4} \cos^2 10^3 t}$$

L'énergie emmagasinée dans la bobine est :

$$W_b(t) = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \times 0,5 \times 16 \cdot 10^{-4} \sin^2 10^3 t = 4 \cdot 10^{-4} \sin^2 10^3 t$$

$$W_b(t) = 4 \cdot 10^{-4} \sin^2 10^3 t$$

L'énergie de vibration de ce système est :

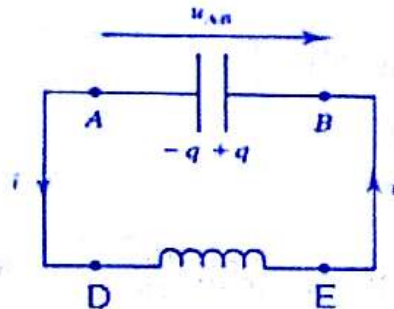
$$W = W_C(t) + W_b(t) = 4 \cdot 10^{-4} \cos^2 10^3 t + 4 \cdot 10^{-4} \sin^2 10^3 t = 4 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

$$W = 4 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

L'énergie totale est constante. Le système satisfait donc au principe de la conservation de l'énergie.

2_ Intensité initiale maximale dans un circuit LC

On réalise un circuit oscillant à l'aide d'un condensateur de capacité $C = 1 \text{ nF}$ et d'une bobine d'inductance $L = 0,1 \text{ H}$ et de résistance négligeable.



A l'instant $t = 0$, l'intensité est maximale et a pour valeur $I_m = 2 \text{ mA}$. Le sens positif arbitraire de circulation du courant est indiqué sur le schéma.

1° Exprimer en fonction du temps la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur.

2° a) A quel instant la charge q du condensateur est-elle pour la première fois maximale et positive ?

b) Calculer l'énergie présente dans le circuit à cette date.

Solution

1° La tension aux bornes du condensateur est :

$$u_{BA} = \frac{q}{C}$$

La tension aux bornes de la bobine est :

$$u_{DE} = L \frac{di}{dt} \Rightarrow u_{ED} = -L \frac{di}{dt}$$

A chaque instant, on a : $u_{BA} = u_{ED}$

soit :

$$\frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt}$$

ou encore :

$$\frac{L di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

Par la suite : $\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$

Equation différentielle dont une solution est $q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

L'intensité est, par définition :

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$I_m = \omega_0 Q_m \Rightarrow i = -I_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$I_m = 2 \text{ mA} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,1 \times 10^{-9}}} = 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{A } t = 0, i = I_m \Rightarrow I_m = -I_m \sin \varphi$$

$$\text{soit : } \sin \varphi = -1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\text{En conséquence : } i = -2 \cdot 10^{-3} \sin\left(10^5 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La tension aux bornes du condensateur est :

$$u(t) = u_{BA} = u_{ED}$$

Donc :

$$\begin{aligned} u(t) &= -L \frac{di}{dt} = L \times 10^5 \times 2 \cdot 10^{-3} \sin\left(10^5 t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0,1 \times 10^5 \times 2 \cdot 10^{-3} \sin\left(10^5 t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$u(t) = 20 \sin\left(10^5 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

2° a) La charge du condensateur est :

$$q(t) = Cu(t) = 10^{-9} \times 20 \sin\left(10^5 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

soit :

$$q(t) = 2 \cdot 10^{-8} \sin\left(10^5 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La charge maximale positive est $Q_m = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$.

$$q(t) = 2 \cdot 10^{-8} \Rightarrow 2 \cdot 10^{-8} = 2 \cdot 10^{-8} \sin\left(10^5 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{D'où : } \sin\left(10^5 t - \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Par la suite :

$$10^5 t - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi :

$$10^5 t = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Enfin :

$$t = \frac{\pi}{10^5} = 3,14 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

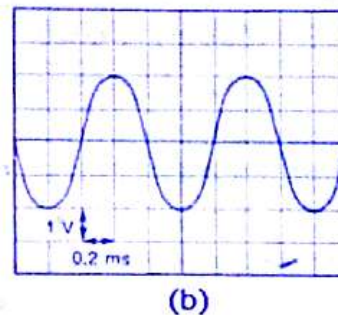
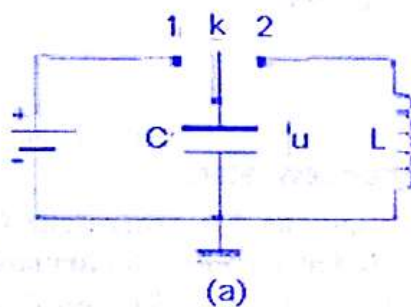
b) Energie présente à cette date :

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2} \times \frac{(2 \cdot 10^{-8})^2}{10^{-9}} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

$$W = 2 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

3_ Oscillogramme d'un circuit LC

On réalise le montage de la figure (a). La voie A d'un oscillographe est branchée aux bornes d'un condensateur de capacité $C = 0,1 \mu\text{F}$. Le calibre est de $1\text{V} \cdot \text{cm}^{-1}$. La base de temps de l'oscillographe est en position $0,2 \text{ms} \cdot \text{cm}^{-1}$. L'inductance L de la bobine est inconnue.



1° On place l'inverseur K en position 1. Que se passe-t-il pour le condensateur ?

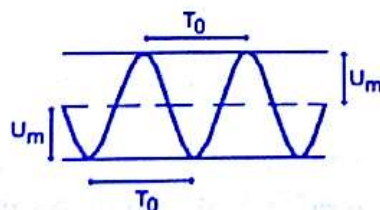
2° A l'instant $t = 0$, on bascule l'inverseur de la position 1 à la position 2. On observe alors sur l'écran la courbe de la figure (b). Quel phénomène représente-t-elle ? Déterminer sa période; en déduire l'inductance de la bobine.

3° Déterminer à partir de l'oscillogramme l'expression de la tension instantanée $u(t)$ aux bornes du condensateur.

Solution

1° Le condensateur se charge sous la tension imposée par le générateur.

2° Nous observons la décharge oscillante du condensateur. Par ailleurs, l'oscillogramme montre que la période T_0 s'inscrit sur 4 cm.



Donc, compte tenu de la base de temps :

$$T_0 = 4 \times 0,2 \text{ms} = 0,8 \text{ms} = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{s}$$

$$T_0 = 8 \cdot 10^{-4} \text{s}$$

D'autre part la période propre d'un circuit LC a pour expression :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow T_0^2 = 4\pi^2 LC$$

On en déduit :

$$L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C} = \frac{(8 \cdot 10^{-4})^2}{4 \times 10 \times 0,1 \cdot 10^{-6}} = 0,16 \text{H}$$

$$L = 0,16 \text{H}$$

3° La tension maximale U_m aux bornes du condensateur correspond à 2 cm sur l'écran de l'oscillographe. Soit, en tenant compte du calibre :

$$U_m = 2 \times 1 \text{V} = 2 \text{V}$$

La tension instantanée $u(t)$ a pour expression : $u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2 \times 3,14}{8 \cdot 10^{-4}} = 7850 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

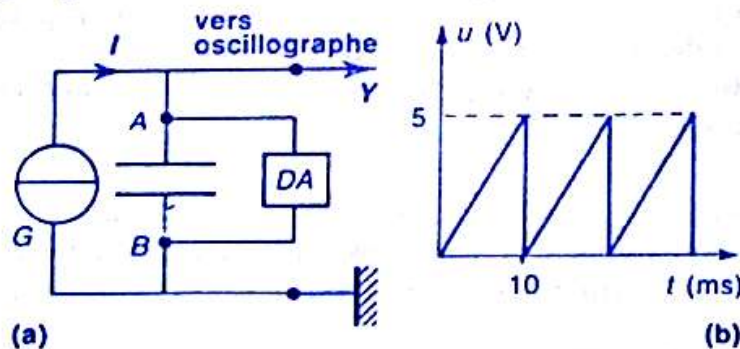
Conditions initiales : à $t = 0, u(t) = U_m \Rightarrow U_m = U_m \cos \varphi$

D'où : $\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

Finalement : $u(t) = 2 \cos 7850t$

4_ Charges et décharges successives du condensateur

On réalise le montage schématisé ci-dessous (figure a). Un générateur G débite un courant d'intensité constante $I = 1 \text{mA}$. Dès que la tension entre les armatures A et B du condensateur $u_{AB} = u(t)$ atteint la valeur maximale $u_m = 5 \text{V}$, un dispositif noté (DA) permet de décharger automatiquement et instantanément le condensateur. L'oscillographe permet d'observer les charges et les décharges successives (figure b).



1° Dédurre de l'oscillogramme l'expression de la tension u pour t compris entre 0 et 10ms.

2° Dans le même intervalle de temps, exprimer u en fonction de l'intensité I du courant débité par le générateur et de la capacité C du condensateur. Calculer C .

3° A la date $t = 6\text{ms}$, on isole le condensateur du circuit précédent et on l'associe à une bobine d'inductance $L = 0,5\text{H}$ et de résistance négligeable. Etablir l'expression de la charge du condensateur en fonction du temps $q(t)$. (Préciser l'origine des dates).

4° Exprimer en fonction du temps la tension aux bornes du condensateur $u(t)$ et l'intensité du courant $i(t)$ et montrer que l'intensité et la tension sont déphasées.

5° Déterminer l'énergie emmagasinée dans le condensateur quand l'intensité du courant est $i = 1\text{mA}$.

Solution

1° Dans l'intervalle de temps $0 \leq t \leq 10\text{ms}$, le graphe représentant la tension u est un segment de droite. Par conséquent, pendant cet intervalle de temps, la tension aux bornes du condensateur est de la forme : $u = at + b$ a et b sont des constantes à déterminer.

D'après la figure b, lorsque $t = 0$, $u = 0 \Rightarrow 0 = a \times 0 + b \Rightarrow b = 0$

Donc : $u(t) = at$

Par ailleurs, à $t = 10\text{ms}$, soit $10 \cdot 10^{-3}\text{s}$, $u = 5\text{V} \Rightarrow 5 = 10 \cdot 10^{-3}a$

D'où : $a = \frac{5}{10 \cdot 10^{-3}} = 500$

En conséquence : $u(t) = 5 \cdot 10^2 t$ (1)

$$\boxed{u(t) = 5 \cdot 10^2 t}$$

2° La tension aux bornes du condensateur est proportionnelle à la charge Q :

$$u(t) = \frac{Q}{C}$$

D'autre part, la charge Q est le produit de l'intensité I par le temps t : $Q = It$

En conséquence : $u(t) = \frac{It}{C}$ (2)

Les relations (1) et (2) permettent d'écrire :

$$\frac{It}{C} = 5 \cdot 10^2 t$$

Soit, après simplification:

$$\frac{I}{C} = 5 \cdot 10^2 \Rightarrow C = \frac{I}{5 \cdot 10^2}$$

$$I = 1\text{mA} = 10^{-3}\text{A} \quad C = \frac{10^{-3}}{5 \cdot 10^2} = 2 \cdot 10^{-6}\text{F} = 2\mu\text{F}$$

$$\boxed{C = 2\mu\text{F}}$$

3° La charge du condensateur a pour expression :

$$q(t) = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

La charge maximale est la charge à l'instant de la connexion :

$$Q_m = CU_{(6\text{ms})}$$

D'après (1) : $U_{(6ms)} = 5 \cdot 10^2 \times 6 \cdot 10^{-3} = 3V$

Donc : $Q_m = 2 \cdot 10^{-6} \times 3 = 6 \cdot 10^{-6} C$

La pulsation propre est : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0,5 \times 2 \cdot 10^{-6}}} = 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Prenons comme origine des dates l'instant de la connexion (à $t = 0, q = Q_m$) :

D'où : $Q_m = Q_m \cos \varphi$
 $\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

Ainsi : $q(t) = 6 \cdot 10^{-6} \cos 10^3 t$

4° La tension instantanée $u(t)$ est le quotient de la charge par la capacité :

$$u(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{6 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6}} \cos 10^3 t = 3 \cos 10^3 t$$

$$u(t) = 3 \cos 10^3 t$$

L'intensité instantanée $i(t)$ est la dérivée de la charge par rapport au temps :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -6 \cdot 10^{-3} \sin 10^3 t$$

$$-\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow i(t) = 6 \cdot 10^{-3} \cos\left(10^3 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

L'intensité est donc en avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur la tension.

$$\begin{aligned} u(t) &= 3 \cos 10^3 t \\ i(t) &= 6 \cdot 10^{-3} \cos\left(10^3 t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

5° L'énergie électrique totale est :

$$E = \frac{1}{2} C U_0^2$$

$U_0 = U_{(6ms)} = 3V$ $E = \frac{1}{2} \times 2 \cdot 10^{-6} \times 9 = 9 \cdot 10^{-6} J$

L'énergie emmagasinée dans la bobine est :

$$E_M = \frac{1}{2} L \cdot i^2 = \frac{1}{2} \times 0,5 \cdot 10^{-6} = 0,25 \cdot 10^{-6} J$$

Par ailleurs : $E = E_E + E_M \Rightarrow E_E = E - E_M$

soit : $E_E = 9 \cdot 10^{-6} - 0,25 \cdot 10^{-6} = 8,75 \cdot 10^{-6} J$

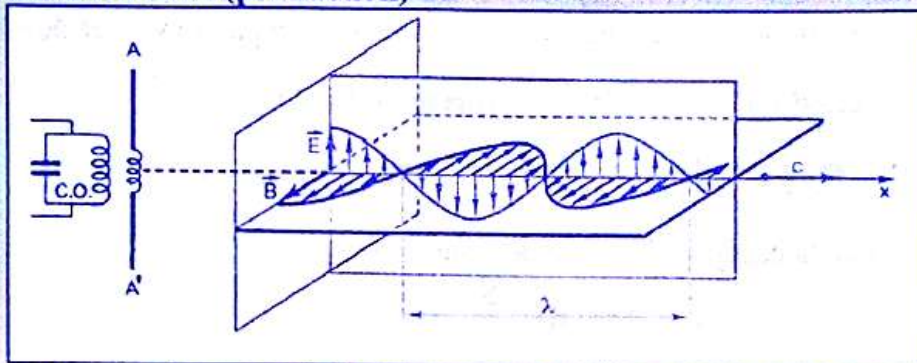
$$E_E = 8,75 \cdot 10^{-6} J$$

Les ondes électromagnétiques

1 Définition

Une onde électromagnétique est un signal constitué par la propagation simultanée d'un champ électrique et d'un champ magnétique tous périodiques, vibrant en synchronisme dans des directions perpendiculaires entre elles et perpendiculaires à la direction de propagation.

2 Mécanisme d'émission (production)



Considérons un circuit oscillant (C.O) à la fréquence propre f_0 . A proximité de ce circuit, disposons d'une **antenne** constituée par un conducteur rectiligne AA' portant en sa partie médiane une bobine. Autour de l'antenne se créent un champ électrique \vec{E} parallèle à l'antenne et un champ magnétique \vec{B} perpendiculaire à l'antenne. Les deux champs sont périodiques, de fréquence f_0 , et se propagent simultanément dans l'espace à la **célérité** c de la lumière, constituant ainsi une onde électromagnétique.

3 Longueur d'onde

La **longueur d'onde** λ d'une onde électromagnétique est la distance parcourue par cette onde au bout d'un temps égale à la période T_0 .

$$\lambda = \frac{c}{f_0} \quad (\text{c est la célérité de la lumière.})$$

4 Propriétés des ondes électromagnétiques

- Les ondes électromagnétiques sont transversales et polarisées (le vecteur \vec{E} est toujours parallèle au dipôle émetteur).
- Elles se réfléchissent sur les surfaces métalliques et subissent les phénomènes de réflexion et de diffraction.
- Elles se prêtent aux expériences d'interférences.

5 Classement des ondes électromagnétiques

- Les rayons γ : $\lambda \leq 0,01 \text{ nm}$ 1 nanomètre (nm) = 10^{-9} m
- Les rayons X : $0,01 \text{ nm} \leq \lambda \leq 10 \text{ nm}$
- Les radiations ultraviolettes : $10 \text{ nm} \leq \lambda \leq 0,4 \mu\text{m}$ 1 micromètre (μm) = 10^{-6} m
- Les radiations visibles : $0,4 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,8 \mu\text{m}$
- Les radiations infrarouges : $0,8 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,5 \text{ mm}$
- Les ondes hertziennes (radio, télévision, radar) : $\lambda > 0,5 \text{ mm}$

EXERCICE RESOLU

A l'entrée d'un récepteur radio se trouve un circuit (L, C) dont on règle la fréquence propre grâce à un condensateur variable constitué de plaques distantes de 0,4mm, dont la surface en regard peut varier de 3cm² à 30cm². L'inductance de la bobine est L = 1,5mH. Le circuit est accordé sur un émetteur lorsque la fréquence propre du circuit oscillant est égale à la fréquence de l'onde porteuse envoyée par l'émetteur.

1° Entre quelles valeurs varie la capacité C du condensateur ?

La capacité d'un condensateur plan dont la surface en regard est S et dont l'isolant a

pour épaisseur e, est : $C = 8,84 \cdot 10^{-12} \epsilon \frac{S}{e}$ (prendre $\epsilon = 1$)

2° Déterminer le domaine de fréquences des ondes pouvant être captées.

Réponses

1° L'expression de la capacité d'un condensateur plan est :

$$C = 8,84 \cdot 10^{-12} \frac{S}{e}$$

L'épaisseur du diélectrique est $e = 0,4\text{mm} = 0,4 \cdot 10^{-3}\text{m}$.

Les valeurs limites de la surface sont :

$$S_1 = 3\text{cm}^2 = 3 \cdot 10^{-4}\text{m}^2$$

$$S_2 = 30\text{cm}^2 = 30 \cdot 10^{-4}\text{m}^2$$

Les capacités correspondantes sont :

$$C_1 = \frac{8,84 \cdot 10^{-12} \times 3 \cdot 10^{-4}}{0,4 \cdot 10^{-3}} = 6,63 \cdot 10^{-12}\text{F}$$

$$C_2 = \frac{8,84 \cdot 10^{-12} \times 30 \cdot 10^{-4}}{0,4 \cdot 10^{-3}} = 66,3 \cdot 10^{-12}\text{F}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} C_1 = 6,63\text{pF} \\ C_2 = 66,3\text{pF} \end{array}}$$

2° La période propre d'un circuit (L, C) est :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

La fréquence propre des oscillations est alors :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Avec $C = C_1$, on a : $f_{01} = \frac{1}{2 \times 3,14 \sqrt{1,5 \cdot 10^{-3} \times 6,63 \cdot 10^{-12}}} = 1,59 \cdot 10^6\text{Hz}$

soit, en mégahertz (MHz) : $f_{01} = 1,59\text{MHz}$

Avec $C = C_2$, on obtient : $f_{0_2} = \frac{1}{2 \times 3,14 \sqrt{1,5 \cdot 10^{-3} \times 66,3 \cdot 10^{-12}}} = 0,5 \cdot 10^6 \text{ Hz}$

soit : $f_{0_2} = 0,5 \text{ MHz}$

Les fréquences des ondes électromagnétiques pouvant être captées par ce récepteur sont comprises entre 0,5 MHz et 1,59 MHz.

OSCILLATIONS FORCÉES

1 OSCILLATIONS MECANIQUES FORCÉES

1.1 Notion de vibrations forcées

Un oscillateur mécanique ou un oscillateur électrique (circuit RLC), est caractérisé par son état vibratoire de fréquence propre f_0 . Si par un dispositif approprié, nous lui imposons des oscillations de fréquence quelconque f , il effectue alors des oscillations forcées. Le dispositif est alors appelé **excitateur**. L'oscillateur mécanique (ou le dipôle électrique) est appelé **résonateur**.

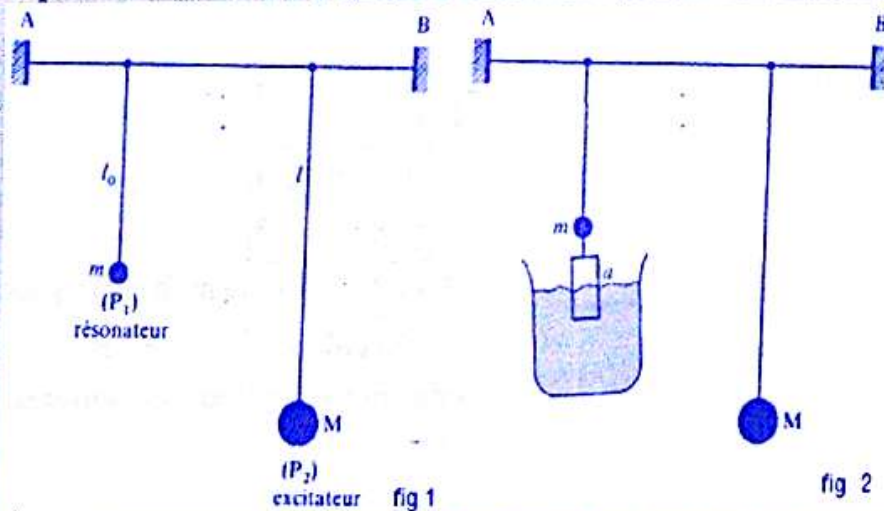
1.2 Activité : Pendules couplés

Matériel : pendule simple P_1 de masse faible m et de longueur ℓ_0 fixe ; pendule simple P_2 de masse importante M et de longueur ℓ variable ; fil élastique en acier et un chronomètre.

OBJECTIF : mise en évidence des oscillations forcées

• Manipulation

Suspendons les pendules simples P_1 et P_2 au fil élastique en acier fortement tendu entre deux points fixes A et B (fig.1).



Ecartons le pendule P_2 (excitateur) de sa position d'équilibre puis lâchons-le. Il effectue des oscillations de fréquence $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Le pendule P_1 (résonateur) initialement immobile, se met spontanément à osciller, **non avec sa fréquence propre**

$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell_0}}$ mais avec la fréquence propre f de P_2 . Le pendule P_2 (excitateur),

force le pendule P_1 (résonateur) à osciller, lui impose sa fréquence et ceci, par l'intermédiaire du couplage dû au fil élastique tendu.

• *Un oscillateur de fréquence propre f_0 (appelé résonateur), subit des oscillations forcées s'il oscille avec une fréquence f imposée par un autre oscillateur (appelé excitateur).*

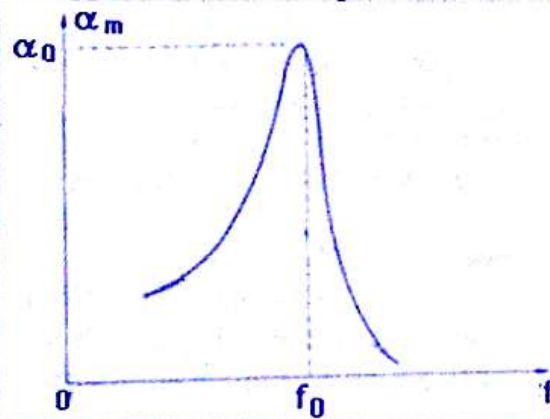
1.3 Phénomène de résonance

Faisons varier la fréquence f de l'excitateur et notons les valeurs de l'amplitude α_m des oscillations du résonateur (la modification de la longueur ℓ permet de faire varier f). Nous constatons que α_m passe par un maximum quand f a une valeur voisine de f_0 .

On dit qu'il ya **résonance**.

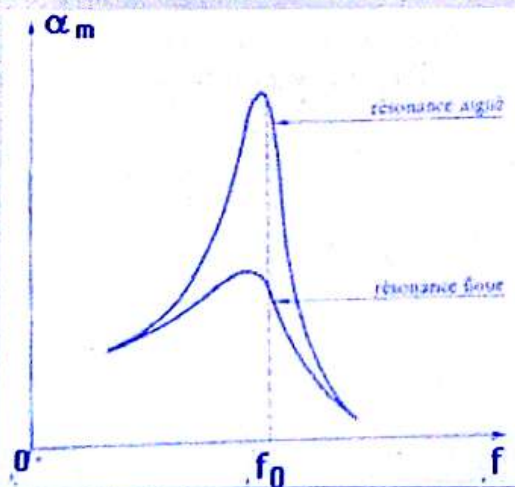
Un résonateur mécanique faiblement amorti entre en résonance d'amplitude lorsque la fréquence f d'excitation est voisine de sa fréquence propre f_0 .

La courbe représentant les variations de l'amplitude α_m en fonction de la fréquence f de l'excitateur est appelée courbe de réponse ou **courbe de résonance**.



1.4 Influence de l'amortissement

Lorsque le résonateur est **peu amorti** (résonateur dans l'air), le maximum d'amplitude α_0 à la résonance est très accentué : **la résonance est aiguë**.



La courbe de réponse possède un « pic aigu » correspondant à la fréquence propre f_0 .

L'amplitude de vibration du résonateur est des dizaines de fois supérieure à l'amplitude de vibration de l'excitateur. Le résonateur est dit alors **sélectif**.

Un résonateur est dit sélectif s'il oscille suffisamment pour une bande très réduite de fréquence.

Reprenons le même dispositif et amortissons le mouvement du résonateur à l'aide d'une palette a plongeant plus ou moins dans l'eau (fig.2). Le maximum d'amplitude α_0 à la résonance est très peu accentué : **la résonance est floue**. La courbe de réponse ne présente plus de « pic aigu » mais une « bosse » d'autant plus aplatie que l'amortissement est plus important.

Un résonateur est dit amorti s'il oscille sur une large bande de fréquence.

1.5 Applications et nuisances de la résonance

Le phénomène de résonance apparaît dans des domaines très variés de la vie courante et dans des applications technologiques de la physique : mécanique, électricité, électro-acoustique, etc. Limitons nous à quelques exemples.

– Les ponts suspendus

Les ponts suspendus peuvent être considérés comme des résonateurs. Si la fréquence d'un excitateur (par exemple une troupe marchant au pas, des rafales de vent...), s'accorde sur la fréquence propre du pont, il ya **résonance plus ou moins aiguë**. L'énergie accumulée par le pont peut être très grande et entraîner sa rupture.

– Les fréquencesmètres à lames vibrantes

UN fréquencesmètre sert à régler ou vérifier la fréquence des courants alternatifs à 50 Hz. C'est un oscillateur **sélectif**.

– Les récepteurs d'ondes hertziennes

Le circuit d'accord RLC d'un poste radio est mis en vibration forcée par l'intermédiaire de l'antenne qui capte toutes les ondes électromagnétiques émises par toutes les stations. La résistance du circuit étant faible, **la résonance en intensité est très aiguë**. En faisant varier la capacité du condensateur, on arrive à détecter tour à tour chaque station émettrice.

– Le haut-parleur

Un haut-parleur comprend une partie mobile conçue **très amortie** afin d'entrer en **résonance floue** sur un intervalle de fréquences relativement grand.

– **Le tympan** Le tympan de l'oreille vibre sur une large bande de fréquence (entre 20Hz et 20000Hz). Il est **amorti**.

Questions à réponse rapide

1

Classer les oscillateurs suivants entre oscillateurs sélectifs et oscillateur amorti :
Fréquencemètre ; pont suspendu ; poste TV ; haut-parleur ; microphone et tympan.

2

Le moment d'inertie d'un pendule de torsion est $J = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. La constante de torsion du fil est $C = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$. A quelle fréquence doit-on imposer des oscillations forcées à ce pendule de torsion pour qu'il oscille avec des vibrations d'amplitude maximale ?

Réponse :

La fréquence à imposer est la fréquence propre f_0 .

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{J}} = 0,27 \text{ Hz}$$

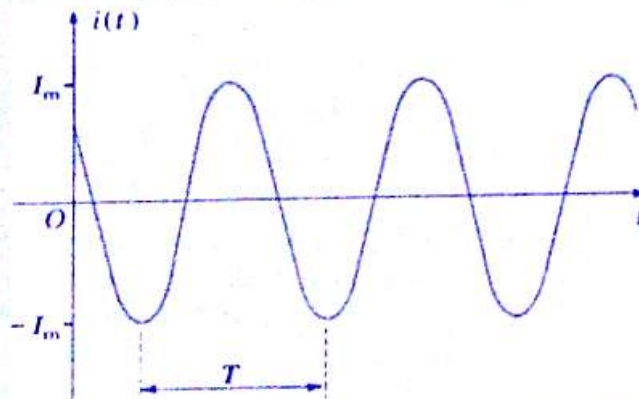
2 OSCILLATIONS ELECTRIQUES FORCEES

2.1 Le courant alternatif

2.1.1 Définition

Un courant alternatif sinusoïdal est un courant dont l'intensité i est une fonction sinusoïdale du temps.

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$



I_m est l'intensité maximale ; ω est la pulsation ; $(\omega t + \varphi)$ est la phase à la date t ; φ la phase à l'origine des dates.

La période d'un courant alternatif est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La fréquence est :

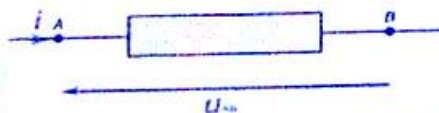
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

2.1.2 Grandeurs alternatives

• Phase de la tension par rapport à l'intensité

Considérons un dipôle AB parcouru par un courant alternatif d'intensité :

$$i = I_m \cos \omega t$$



La tension instantanée u_{AB} aux bornes de ce dipôle a pour expression :

$$u_{AB} = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

U_m est appelée tension maximale

φ est alors la phase de la tension par rapport à l'intensité.

Exemples :

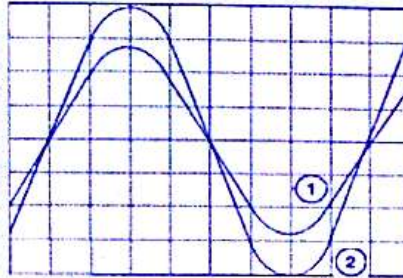
- La tension instantanée aux bornes d'un résistor est :

$$u_R(t) = Ri = RI_m \cos \omega t$$

Sa valeur maximale est $U_m = RI_m$. Sa phase est $\varphi = 0$ ($\varphi = 0$, on dit que la tension et l'intensité sont en phase).

Aux bornes d'un conducteur ohmique, la tension et l'intensité sont phase.

Un oscillographe bicourbe montre que la courbe de la tension et celle de l'intensité ne sont pas décalées.



- La tension instantanée aux bornes d'une inductance pure est :

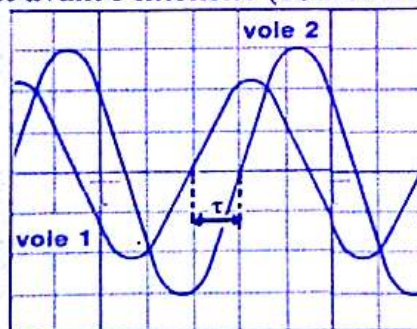
$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -LI_m \omega \sin \omega t = LI_m \omega \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$u_L(t) = LI_m \omega \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Sa valeur maximale est $U_m = LI_m \omega$. Sa phase est $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ($\varphi > 0$, on dit que la tension est en avance sur l'intensité).

Aux bornes d'une bobine non résistive, la tension est en avance sur l'intensité de $\frac{\pi}{2}$.

L'oscillographe bicourbe montre que **les deux courbes sont décalées** : la tension (courbe de la voie 1) est avant l'intensité (courbe de la voie 2).



L'intervalle τ entre les deux courbes est appelé **décalage temporel**.

$$\tau = \frac{\varphi}{\omega}$$

ou encore, en prenant $\omega = \frac{2\pi}{T}$ on obtient :

$$\tau = \frac{\varphi T}{2\pi}$$

– La tension instantanée aux bornes d'un condensateur est :

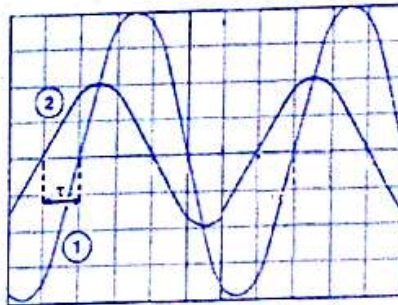
$$u_c(t) = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int I_m \cos \omega t dt = \frac{I_m}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$u_c(t) = \frac{I_m}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Sa valeur maximale est $U_m = \frac{I_m}{C\omega}$ Sa phase est $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ($\varphi < 0$, on dit que la tension est en retard sur l'intensité).

Aux bornes d'un condensateur, la tension est en retard sur l'intensité de $\frac{\pi}{2}$.

L'oscillographe bicourbe montre que l'intensité (courbe 2 est devant la tension (courbe 1).



• Phase de l'intensité par rapport à la tension

En choisissant l'origine des dates de façon que la tension $u_{AB}(t)$ s'écrive :

$u_{AB}(t) = U_m \cos \omega t$, l'intensité serait alors :

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi')$$

φ' est par définition la phase de l'intensité par rapport à la tension.

Par ailleurs : $\varphi' = -\varphi \Rightarrow$

$$i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$$

2.1.3 Valeurs efficaces

• Intensité efficace

L'intensité efficace d'un courant alternatif est égale à l'intensité I d'un courant continu qui, passant dans le même conducteur ohmique, y produirait pendant chaque période, le même dégagement de chaleur.

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Un ampèremètre alternatif mesure l'intensité efficace d'un courant alternatif.

• Tension efficace

Par extension, la tension efficace U aux bornes d'un dipôle est le quotient de la tension maximale U_m à ses bornes par $\sqrt{2}$:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Un voltmètre alternatif mesure la tension efficace aux bornes d'un dipôle.

• Impédance d'un dipôle

L'impédance Z d'un dipôle est le quotient de la tension maximale U_m à ses bornes par l'intensité maximale I_m du courant qui le parcourt :

$$Z = \frac{U_m}{I_m}$$

• Loi d'Ohm en courant alternatif

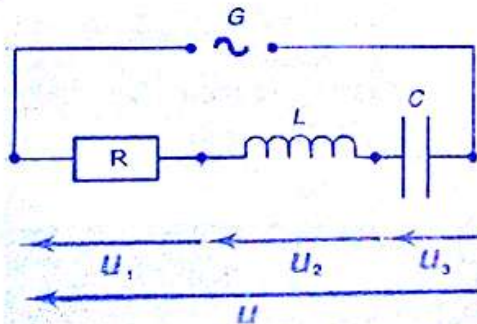
La tension efficace U aux bornes d'un dipôle, est le produit de son impédance Z par l'intensité efficace I du courant qui le traverse.

$$U = ZI$$

2.2 Circuit RCL en régime sinusoïdal forcé

2.2.1 Impédance du circuit

Considérons un circuit comprenant en série : un générateur G délivrant un courant alternatif d'intensité $i = I_m \cos \omega t$, un conducteur ohmique de résistance R , une bobine d'inductance L et de résistance négligeable, et un condensateur de capacité C (circuit RLC).



La tension instantanée aux bornes du dipôle AB est:

$$u = u_1 + u_2 + u_3 = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$= RI_m \cos \omega t + LI_m \omega \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{I_m}{C\omega} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Soit :

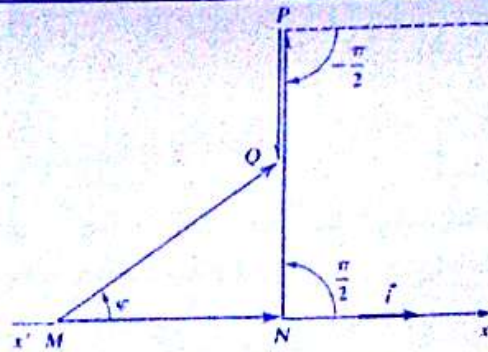
$$u = RI_m \cos \omega t + LI_m \omega \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{I_m}{C\omega} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

En conséquence :

$$RI_m \cos \omega t + LI_m \omega \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{I_m}{C\omega} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

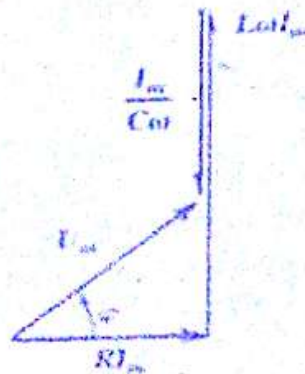
Supposons que : $L\omega I_m > \frac{1}{C\omega I_m} \Rightarrow L\omega > \frac{1}{C\omega}$

On obtient la construction de Fresnel suivante :



$$\overline{MN} = RI_m \quad \overline{NP} = L\omega I_m \quad \overline{PQ} = \frac{I_m}{C\omega} \quad \overline{MQ} = U_m$$

Plus simplement, cette construction de Fresnel est :



Appliquons le théorème de Pythagore au triangle rectangle MNQ :

$$\overline{MQ}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NQ}^2$$

$$U_m^2 = R^2 I_m^2 + \left(L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega} \right)^2$$

$$U_m^2 = I_m^2 \left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right]$$

$$U_m = I_m \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

L'impédance du circuit est $Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

- Si la bobine a une résistance r, l'impédance du circuit devient :

$$Z = \sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

– Si le circuit ne contient pas de condensateur (circuit RL), l'impédance est :

$$Z = \sqrt{(R + r)^2 + L^2 \omega^2}$$

– Si par contre le circuit ne contient pas de bobine (circuit RC), on obtient :

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}$$

– Si le circuit ne contient pas de résistance (circuit LC), l'impédance du circuit se réduit à :

$$Z = \sqrt{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \left|L\omega - \frac{1}{C\omega}\right|$$

2.2.2 Déphasage de la tension sur l'intensité

Triangle rectangle MNQ :

$$\tan \varphi = \frac{L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega}}{R I_m} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

$$\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

– Si la bobine a une résistance r , le déphasage serait alors :

$$\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R + r}$$

– Si le dipôle ne contient pas de bobine (circuit RC), le déphasage s'obtient par :

$$\tan \varphi = -\frac{1}{RC\omega}$$

– Si le dipôle ne contient pas de condensateur, alors :

$$\tan \varphi = \frac{L\omega}{R + r}$$

2.2.3 Effet d'inductance et effet de capacité

Nous avons :

$$\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

• Si $L\omega > \frac{1}{C\omega}$, $\tan \varphi > 0 \Rightarrow \varphi > 0$. La tension est en avance sur l'intensité. On dit que **l'effet d'inductance l'emporte sur l'effet de capacité.**

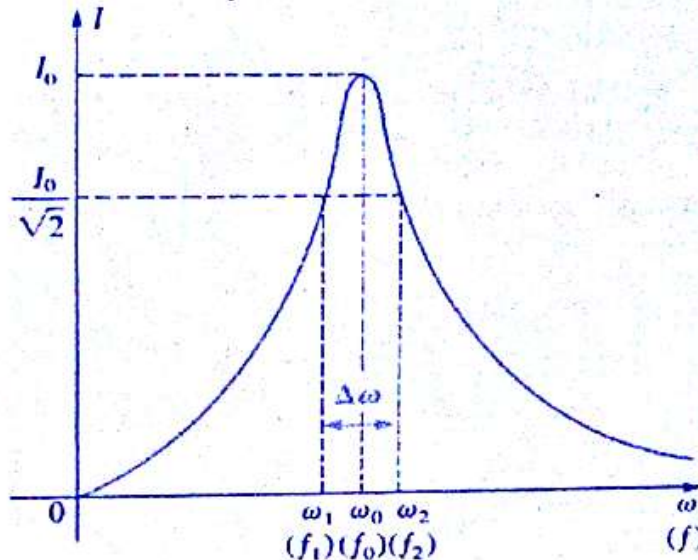
• Si $L\omega < \frac{1}{C\omega}$, $\tan \varphi < 0 \Rightarrow \varphi < 0$. La tension est en retard sur l'intensité. On dit que **l'effet de capacité l'emporte sur l'effet d'inductance.**

• Si $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, $\tan \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$. La tension et l'intensité sont en phase. Le circuit est dit alors en résonance électrique.

2.2.4 Courbe de résonance

• Caractéristiques de la résonance

Traçons la courbe représentant les variations de l'intensité efficace I en fonction de la pulsation ω ou de la fréquence f .



Si la fréquence imposée est égale à la fréquence propre f_0 du circuit (L C), l'intensité efficace est maximale et sa valeur est I_0 . La tension et l'intensité sont alors en phase et le circuit est en résonance d'intensité. La pulsation du courant à la résonance est ω_0 telle que :

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$$

soit :

$$LC\omega_0^2 = 1$$

D'où :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A la résonance, l'impédance du circuit est égale à sa résistance :

$$Z = R$$

Si U est la tension efficace aux bornes du générateur, l'intensité efficace du courant à la résonance est :

$$I_0 = \frac{U}{R}$$

Conclusion :

- A la résonance, l'impédance du circuit est minimale.
- A la résonance l'intensité efficace du courant est maximale.
- A la résonance l'intensité et la tension sont en phase.

• Bande passante et facteur de qualité

Il existe deux valeurs de la pulsation ω_1 et ω_2 pour lesquelles $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$. La différence des pulsations $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ est appelée **bande passante**.

$$\Delta\omega = \frac{R}{L}$$

Si la courbe la variation de l'intensité efficace I est fonction de la fréquence f , la bande passante est :

$$\Delta f = f_2 - f_1$$

On appelle facteur de qualité le rapport :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{L\omega_0}{R}$$

D'autre part :

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Rightarrow Q = \frac{1}{RC\omega_0}$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

Si la courbe de résonance est fonction de la fréquence f , le facteur de qualité s'obtient par la relation :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

Le facteur de qualité mesure l'acuité de la résonance : plus le facteur de qualité un important plus la résonance est aiguë.

2.3 Puissance moyenne

La puissance moyenne P consommée par un dipôle traversé par un courant alternatif d'intensité efficace I et ayant entre ses bornes une tension efficace U est :

$$P = UI \cos \varphi$$

La puissance apparente est :

$$P_s = UI$$

Le terme $\cos \varphi$ est appelé facteur de puissance

Par ailleurs :

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

D'où :

$$P = RI^2$$

Toute la puissance moyenne passe par effet joule dans la résistance.

En conséquence, si un appareil de puissance P est branché dans un secteur, l'intensité du courant qui le traverse est $I = \frac{P}{U \cos \varphi}$. Si le facteur de puissance est petit,

la société de distribution de l'électricité domestique EDM perd de l'énergie par effet joule dans les lignes de transport, énergie qui n'est pas enregistrée au compteur de l'utilisateur. Ceci constitue un préjudice financier pour la société de distribution d'électricité.

1_ Caractéristiques d'une bobine

Une bobine d'inductance L et de résistance r est d'abord alimentée par un générateur de tension continue $U_1 = 6V$. L'intensité du courant qui la traverse est $I_1 = 0,3A$. On l'alimente ensuite par un générateur de tension sinusoïdale, de valeur efficace $U_2 = 24V$ et de fréquence 50 Hz . L'intensité efficace du courant est alors $I_2 = 0,12A$.

1° Déterminer r et L .

2° On monte en série cette bobine avec un conducteur ohmique de résistance $R = 200\Omega$. Un générateur maintient aux bornes de l'ensemble une tension sinusoïdale $u = 80 \cos 100\pi t$. Trouver l'expression de l'intensité instantanée du courant qui traverse le circuit.

Solution

1° En courant continu, la loi d'Ohm aux bornes de la bobine :

$$U_1 = rI_1$$

D'où :
$$r = \frac{U_1}{I_1} = \frac{6}{0,3} = 20\Omega$$

Loi d'Ohm en courant alternatif :

$$U_2 = ZI_2$$

D'où :
$$Z = \frac{U_2}{I_2} = \frac{24}{0,12} = 200\Omega$$

D'autre part :
$$Z = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2}$$

Soit :
$$Z^2 = r^2 + (L\omega)^2$$

Ou encore :
$$L^2\omega^2 = Z^2 - r^2$$

Par la suite :
$$L^2 = \frac{Z^2 - r^2}{\omega^2} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{Z^2 - r^2}{\omega^2}}$$

$$\omega = 2\pi f = 2 \times 3,14 \times 50 = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

AN :
$$L = \sqrt{\frac{(200)^2 - (20)^2}{(314)^2}} = 0,63\text{H}$$

$$r = 20\Omega$$

$$L = 0,63\text{H}$$

2° L'intensité instantanée du courant a pour expression :

$$i = I_m \cos(100\pi t - \varphi)$$

L'impédance de ce circuit est :

$$Z' = \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega)^2} = \sqrt{(200+20)^2 + (0,63 \times 314)^2} = 295,85\Omega$$

Par définition :
$$Z' = \frac{U_m}{I_m} \Rightarrow I_m = \frac{U_m}{Z'} = \frac{80}{295,85} = 0,27 \text{ A}$$

La phase de la tension par rapport à l'intensité est φ telle que :

$$\tan \varphi = \frac{L\omega}{R+r} = \frac{0,63 \times 314}{220} = 0,8991$$

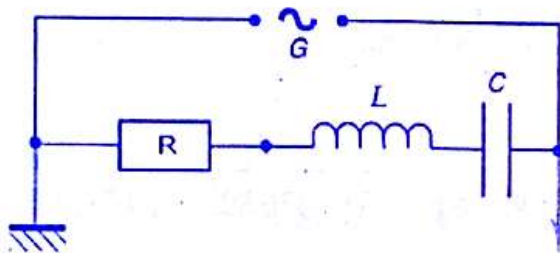
En conséquence :
$$\varphi = \tan^{-1}(0,8991) = 0,73 \text{ rad}$$

L'intensité instantanée du courant a donc pour expression :

$$i = 0,27 \cos(100\pi t - 0,73)$$

2_ Résonance par variation de fréquence

Un circuit comprend en série : un résistor de résistance $R = 40\Omega$, une bobine d'inductance $L = 0,13\text{H}$ et de résistance négligeable, et un condensateur de capacité C inconnue. Ce circuit est alimenté par un générateur G délivrant une tension sinusoïdale $u = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$, de fréquence N variable et de valeur efficace $U = 1\text{V}$.



1° On fait varier la fréquence du générateur et on constate que l'intensité efficace du courant est maximale pour une fréquence $N_0 = 600\text{Hz}$.

- Quel phénomène est ainsi mis en évidence ?
- Calculer l'impédance totale du circuit dans ce cas.
- Calculer la valeur efficace I_0 de l'intensité du courant qui parcourt le circuit.
- Déterminer la capacité C du condensateur.

2° On fixe maintenant la fréquence à la valeur $N = 630\text{Hz}$. On admet que $C = 0,53\mu\text{F}$.

- Calculer l'impédance Z du circuit.
- Quelle est l'intensité efficace I du courant qui traverse le circuit.
- Calculer les valeurs efficaces des tensions U_R , U_L et U_C aux bornes du résistor, de la bobine et du condensateur.

3° Trouver l'expression de l'intensité $i(t)$ qui traverse le circuit.

Solution

- Le phénomène observé est la résonance d'intensité.
- L'impédance du circuit à la résonance est égale à sa résistance :

$$Z = R = 40\Omega$$

$$\boxed{Z = 40\Omega}$$

c) Valeur de l'intensité efficace I_0 du courant à la résonance :

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{1}{40} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

$$\boxed{I_0 = 25 \cdot 10^{-3} \text{ A}}$$

d) La capacité C du condensateur :

A la résonance, on a : $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Rightarrow LC\omega_0^2 = 1$

D'où : $C = \frac{1}{L\omega_0^2}$

$\omega_0 = 2\pi N_0 \Rightarrow C = \frac{1}{4\pi^2 N_0^2 L} = \frac{1}{4 \times 10 \times (600)^2 \times 0,13} = 0,53 \cdot 10^{-6} \text{ F}$

$$\boxed{C = 0,53 \cdot 10^{-6} \text{ F}}$$

2° a) Impédance du circuit :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 2\pi N \\ L\omega = 2\pi N L = 514,33\Omega \\ \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\pi N C} = 476,89\Omega \end{array} \right\} \Rightarrow Z = \sqrt{(40)^2 + (514,33 - 476,89)^2} = 54,79\Omega$$

$$\boxed{Z = 54,79\Omega}$$

b) Intensité efficace I du courant :

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{1}{54,79} = 18,25 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

$$\boxed{I = 18,25 \cdot 10^{-3} \text{ A}}$$

c) Tension efficace aux bornes du résistor :

$$U_R = Z_R I$$

$Z_R = R \Rightarrow U_R = R I = 40 \times 18,25 \cdot 10^{-3} = 0,73 \text{ V}$

$$\boxed{U_R = 0,73 \text{ V}}$$

Tension efficace aux bornes de la bobine :

$$U_L = Z_L I$$

$Z_L = L\omega \Rightarrow U_L = L\omega I = 514,33 \times 18,25 \cdot 10^{-3} = 9,38 \text{ V}$

$$U_L = 9,38V$$

Tension efficace aux bornes du condensateur :

$$U_C = Z_C I$$

$$Z_C = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow$$

$$U_C = \frac{I}{C\omega} = 476,89 \times 18,25 \cdot 10^{-3} = 8,70V$$

$$U_C = 8,70V$$

3° La phase de la tension par rapport à l'intensité :

$$\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{514,33 - 476,89}{40} = 0,936$$

Donc :

$$\varphi = \tan^{-1}(0,936) = 0,75\text{rad}$$

$$\varphi = 0,75\text{rad}$$

Expression de l'intensité instantanée du courant :

$$i = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi + \varphi')$$

$$\omega = 2\pi N = 2\pi \times 630 = 1260\pi \text{ rad}$$

La phase de l'intensité par rapport à la tension est $\varphi' = -\varphi$

Ainsi :

$$i = I\sqrt{2} \cos(1260\pi t + \varphi - \varphi) = 18,25 \cdot 10^{-3} \sqrt{2} \cos 1260\pi t$$

$$i = 18,25 \cdot 10^{-3} \sqrt{2} \cos 1260\pi t$$

3 _ Résonance par variation d'inductance

Un circuit comprend en série : un conducteur ohmique de résistance $R = 16\Omega$, une bobine non résistive d'inductance L variable et un condensateur de capacité $C = 2 \cdot 10^{-5}F$. Un générateur maintient aux bornes de ce circuit une tension sinusoïdale $u = 220\sqrt{2} \cos 100\pi t$.

1° Calculer l'inductance L_0 de la bobine dans le cas particulier de la résonance.

2° Déterminer, pour $L = L_0$:

a) L'intensité efficace I_0 du courant. (0,5pt)

b) Les tensions efficaces U_L aux bornes de la bobine et U_C aux bornes du condensateur.

c) La puissance moyenne consommée dans le circuit.

3° Calculer, lorsque l'inductance prend la valeur $L = 1H$, le facteur de puissance du circuit.

4° On fait varier L et le facteur de puissance devient 0,866. Déterminer dans ces conditions :

a) Les valeurs possibles pour l'inductance.

b) L'intensité efficace I du courant.

c) Les tensions efficaces aux bornes U_R de la résistance et U_C aux bornes du condensateur ; en déduire la tension efficace U_L aux bornes de la bobine sachant que l'effet d'inductance l'emporte sur l'effet de capacité.

Solution

1° A la résonance, on a :

$$L_0\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow L_0C\omega^2 = 1$$

D'où :
$$L_0 = \frac{1}{C\omega^2}$$

$$\omega = 100\pi = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow L = \frac{1}{2 \cdot 10^{-5} \times (314)^2} = 0,5 \text{ H}$$

$$\boxed{L = 0,5 \text{ H}}$$

2° a) L'intensité efficace I_0 :

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{220}{16} = 13,75 \text{ A}$$

$$\boxed{I_0 = 13,75 \text{ A}}$$

b) Tension efficace aux bornes de la bobine :

$$U_L = Z_L I_0$$

$$Z_L = L_0\omega = 0,5 \times 314 = 157 \Omega \Rightarrow U_L = 157 \times 13,75 = 2158,75 \text{ V}$$

$$\boxed{U_L = 2158,75 \text{ V}}$$

Tension efficace aux bornes du condensateur :

$$U_C = Z_C I_0$$

$$Z_C = \frac{1}{C\omega} = L_0\omega = 157 \Omega \Rightarrow U_C = U_L = 2158,75 \text{ V}$$

$$\boxed{U_C = 2158,75 \text{ V}}$$

c) Puissance moyenne consommée :

$$P = RI_0^2 = 16 \times (13,75)^2 = 3025 \text{ W}$$

$$\boxed{P = 3025 \text{ W}}$$

3° Facteur de puissance quand $L = 1H$:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

D'autre part :
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$L\omega = 1 \times 314 = 314 \Omega$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{C\omega} &= \frac{1}{2 \cdot 10^{-5} \times 314} = 159,23 \Omega \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z = \sqrt{(16)^2 + (314 - 159,23)^2} = 155,59 \Omega$$

Par conséquent : $\cos \varphi = \frac{16}{155,59} = 0,1$

$$\boxed{\cos \varphi = 0,1}$$

4° a) Les valeurs possibles pour l'inductance :

Le nouveau facteur de puissance est :

$$\cos \varphi' = \frac{R}{Z'}$$

On en déduit : $Z' = \frac{R}{\cos \varphi'} = \frac{16}{0,866} = 18,47$

D'autre part : $Z' = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

Donc : $\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = 18,47$

Ou encore : $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = 18,47^2 - R^2$

Soit : $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = 18,47^2 - (16)^2 = 85,14$

D'où : $L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm \sqrt{85,14} = \pm 9,22$

1^{er} cas : $L_1\omega - \frac{1}{C\omega} = 9,22$

Soit : $L_1\omega = 9,22 + \frac{1}{C\omega}$

Ainsi : $L_1\omega = 9,22 + 159,23$

D'où : $L_1 = \frac{168,45}{\omega} = \frac{168,45}{314} = 0,53 \text{H}$

2^e cas : $L_2\omega - \frac{1}{C\omega} = -9,22$

Soit : $L_2\omega = -9,22 + \frac{1}{C\omega}$

Ainsi : $L_2\omega = -9,22 + 159,23$

D'où :
$$L_2 = \frac{150,01}{\omega} = \frac{150,01}{314} = 0,48H$$

$$\boxed{L_1 = 0,53H}$$

$$\boxed{L_2 = 0,48H}$$

b) L'intensité efficace I du courant :

$$I = \frac{U}{Z'} = \frac{220}{18,47} = 11,91A$$

$$\boxed{I = 11,91A}$$

c) Tension efficace U_R aux bornes de la résistance :

$$U_R = RI = 16 \times 11,91 = 190,56V$$

$$\boxed{U_R = 190,56V}$$

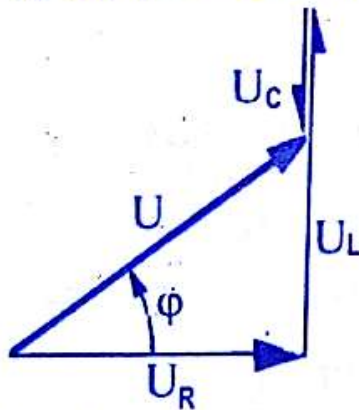
Tension efficace U_C aux bornes du condensateur :

$$U_C = Z_C I$$

$$Z_C = \frac{1}{C\omega} = 159,23\Omega \Rightarrow U_C = 159,23 \times 11,91 = 1896,42V$$

$$\boxed{U_C = 1896,42V}$$

Tension efficace U_L aux bornes de la bobine :



Théorème de Pythagore :

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2$$

Ou encore :

$$(U_L - U_C)^2 = U^2 - U_R^2$$

Soit :

$$(U_L - U_C)^2 = (220)^2 - (190,56)^2 = 12086,88$$

$$U_L - U_C = \sqrt{12086,88} = 109,94$$

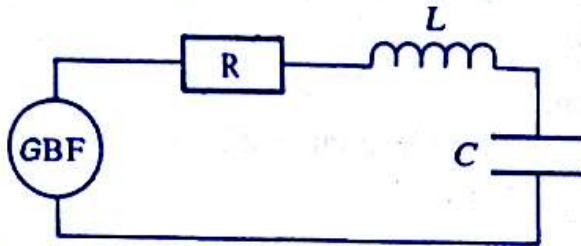
$$U_L = 109,94 + U_C = 109,94 + 1896,42 = 2006,36V$$

$$\boxed{U_L = 2006,36V}$$

4_ Dipôle RLC possédant une bobine pure

On considère un dipôle RLC où la bobine est pure. Les tensions efficaces aux bornes du résistor, de la bobine et du condensateur sont respectivement :

$$U_R = 8V; U_L = 2V \text{ et } U_C = 8V.$$



1° Dire en justifiant si l'intensité est en avance ou en retard sur la tension.

2° Calculer la tension efficace U aux bornes de l'ensemble du circuit.

3° Calculer l'impédance de chaque élément sachant que l'intensité maximale du courant qui parcourt le circuit vaut $I_m = 125\text{mA}$.

4° Calculer la fréquence du courant et la capacité du condensateur sachant que l'inductance de la bobine est $L = 0,02\text{H}$.

5° Quelle est la puissance moyenne consommée ?

6° Quelle serait l'expression de l'impédance si l'on supprimait la résistance ?

Calculer la valeur de cette impédance.

Solution

1° Les lois d'Ohm aux bornes de la bobine et du condensateur sont :

$$U_L = Z_L I = L\omega I$$

$$U_C = Z_C I = \frac{1}{C\omega} I$$

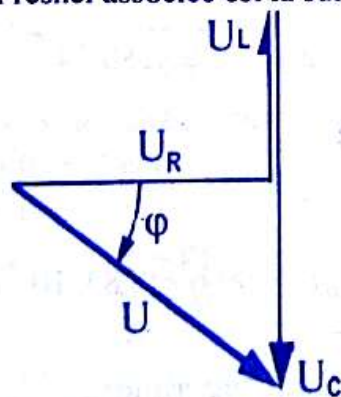
Par ailleurs :

$$\left. \begin{array}{l} U_L = 2V \\ U_C = 8V \end{array} \right\} \Rightarrow U_C > U_L \Rightarrow \frac{1}{C\omega} > L\omega$$

Donc l'effet de capacité l'emporte sur l'effet d'inductance. En conséquence $\varphi < 0$. La tension est en retard sur l'intensité (l'intensité est en avance sur la tension).

2° Tension efficace aux bornes de l'ensemble :

La construction de Fresnel associée est la suivante :



Théorème de Pythagore :

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2$$

D'où :
$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$

AN :
$$U = \sqrt{(8)^2 + (2 - 8)^2} = 10V$$

$$\boxed{U = 10V}$$

3° L'impédance de chaque élément :

L'intensité efficace du courant qui traverse le circuit est :

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{125 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2}} = 8,83 \cdot 10^{-2} A$$

Loi d'Ohm aux bornes de la résistance :

$$U_R = Z_R I \Rightarrow Z_R = \frac{U_R}{I} = \frac{8}{8,83 \cdot 10^{-2}} = 90,6\Omega$$

Loi d'Ohm aux bornes de la bobine :

$$U_L = Z_L I \Rightarrow Z_L = \frac{U_L}{I} = \frac{2}{8,83 \cdot 10^{-2}} = 22,65\Omega$$

Loi d'Ohm aux bornes du condensateur :

$$U_C = Z_C I \Rightarrow Z_C = \frac{U_C}{I} = \frac{8}{8,83 \cdot 10^{-2}} = 90,6\Omega$$

4° La fréquence du courant :

Nous avons : $Z_L = L\omega$

$\omega = 2\pi f \Rightarrow Z_L = 2\pi fL$

D'où :
$$f = \frac{Z_L}{2\pi L} = \frac{22,65}{2 \times 3,14 \times 0,02} = 180,24 \text{ Hz}$$

$$\boxed{f = 180,24 \text{ Hz}}$$

La capacité du condensateur :

$$Z_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\pi fC}$$

D'où :
$$C = \frac{1}{2\pi Z_C f} = \frac{1}{2 \times 3,14 \times 90,6 \times 180,24} = 9,75 \cdot 10^{-6} F$$

$$\boxed{C = 9,75 \cdot 10^{-6} F}$$

5° La puissance moyenne consommée :

$$P = RI^2$$

Or : $Z_R = R \Rightarrow P = Z_R I^2 = 90,6 \times (8,83 \cdot 10^{-2})^2 = 0,7W$

$$\boxed{P = 0,7W}$$

6° Expression de l'impédance si la bobine était supprimée :

L'impédance d'un circuit RLC est : $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

L'expression de l'impédance dans le circuit L,C est :

$$Z' = \left|L\omega - \frac{1}{C\omega}\right| = |Z_L - Z_C|$$

$$Z' = |Z_L - Z_C|$$

5_ Détermination de la nature d'un dipôle

Soit un dipôle électrique AB dont la nature exacte est inconnu. On sait qu'il peut être formé des éléments suivants :

Cas n°1 : une bobine de résistance R, d'inductance L

Cas n°2 : un conducteur ohmique de résistance R et un condensateur de capacité C en série.

Cas n°3 : un conducteur ohmique de résistance R

1° On alimente ce dipôle par une tension continue et on constate qu'un courant d'intensité constante le traverse. Montrer que le cas n°2 ne peut convenir.

2° On alimente maintenant le dipôle AB par une tension sinusoïdale de fréquence $f = 50\text{Hz}$ et on observe :

a) au wattmètre que la puissance moyenne dissipée dans AB est $P = 25\text{W}$.

b) à l'ampèremètre, que l'intensité efficace du courant dans AB est $I = 0,5\text{A}$.

c) au voltmètre, que la tension efficace aux bornes de AB est $U = 100\text{V}$.

Grâce à ces indications, déterminer la nature exacte du dipôle AB et ses grandeurs caractéristiques.

3° Le dipôle AB est placé en série avec un condensateur de capacité variable. L'ensemble est alimenté par la même tension sinusoïdale qu'au 2. Déterminer la valeur C' de la capacité pour que la tension et le courant soient en phase.

Solution

1° Un condensateur arrête le courant continu (pendant un bref instant le courant circule puis son intensité décroît et s'annule). Le cas n°2 ne convient donc pas.

2° Si le dipôle AB était une résistance pure (cas n°3), Le courant et la tension seraient en phase. La puissance moyenne consommée serait :

$$P = UI = 100 \times 0,5 = 50\text{W}$$

Puisque $P = 25\text{W}$, l'intensité et la tension ne sont pas en phase. Le dipôle AB est donc la bobine de résistance R et d'inductance L.

D'autre part, nous avons :

$$P = RI^2$$

On en déduit :

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{25}{(0,5)^2} = 100\Omega$$

L'impédance du dipôle AB est :

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{100}{0,5} = 200\Omega$$

Par ailleurs, l'impédance de cette bobine a pour formule :

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$$

ou encore :

$$Z^2 = R^2 + L^2\omega^2$$

D'où

$$L^2 = \frac{Z^2 - R^2}{\omega^2}$$

soit :

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow L = \frac{1}{314} \sqrt{(200)^2 - (100)^2} = 0,55 \text{ H}$$

$$\boxed{R = 100\Omega}$$

$$\boxed{L = 0,55 \text{ H}}$$

3° La tension et l'intensité sont en phase à la résonance. La capacité C'est telle que :

$$L\omega = \frac{1}{C'\omega}$$

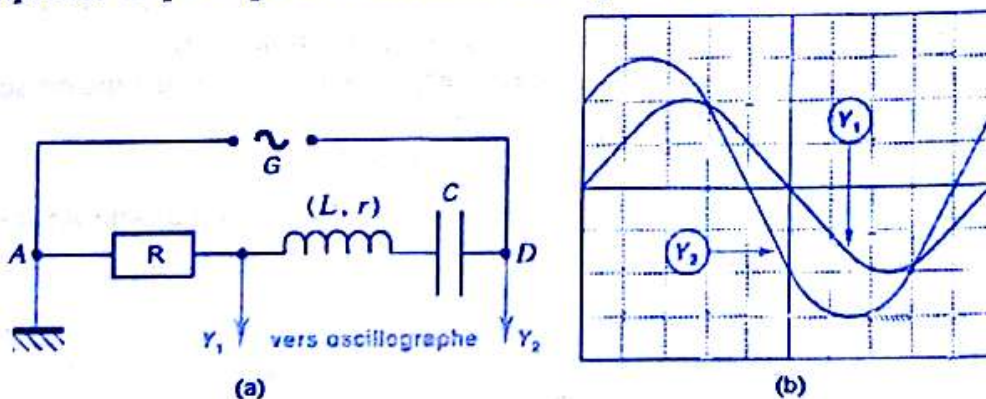
On en déduit :

$$C' = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{0,55 \times (314)^2} = 1,84 \cdot 10^{-5} \text{ F}$$

$$\boxed{C' = 1,84 \cdot 10^{-5} \text{ F}}$$

6_ Mesure d'un déphasage à l'aide d'un oscillographe

Un dipôle AD est constitué par l'association en série d'un conducteur ohmique de résistance $R = 40\Omega$, d'une bobine de résistance r et d'inductance L et d'un condensateur de capacité $C = 5\mu\text{F}$. Le dipôle est alimenté par un générateur de basse fréquence G qui impose une tension $u = U_m \cos \omega t$ (figure a).



Un oscillographe bicourbe permet de visualiser les tensions $u_1(t)$ aux bornes de R sur la voie Y1, et $u_2(t)$ aux bornes de AD sur la voie Y2. Les réglages de l'oscillographe sont les suivants :

- balayage : 1 ms par division
- voie Y_1 et Y_2 : 1V par division

L'oscillogramme est présenté sur la figure b

1° A partir de l'oscillogramme déterminer la période et la pulsation de la tension et du courant.

2° Déterminer les valeurs maximales U_m et I_m de la tension instantanée $u(t)$ aux bornes du circuit et de l'intensité instantanée. Calculer l'impédance du dipôle AD.

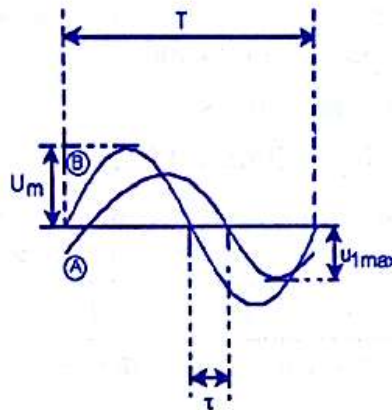
3° Toujours à l'aide de l'oscillogramme déterminer le déphasage entre la tension u et l'intensité et donner l'expression de cette intensité instantanée.

4° Calculer la puissance moyenne consommée dans le dipôle AD.

5° Déterminer la résistance et l'inductance de la bobine.

Solution

1° Le schéma ci-dessous est la représentation simplifiée de la figure (b). Cette représentation montre la tension maximale U_m et la période T du courant.



Une période occupe 10 divisions sur l'écran; soit, compte tenu du balayage (base des temps) :

$$T = 10 \times 1 \text{ms} = 10 \cdot 10^{-3} \text{s} = 10^{-2} \text{s}$$

$$\boxed{T = 10^{-2} \text{s}}$$

La pulsation est :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10^{-2}} = 200\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\boxed{\omega = 200\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

2° La tension maximale U_m est l'amplitude $(u_2)_{\max}$ de la tension $(u_2)(t)$.

$$U_m = (u_2)_{\max}$$

$(u_2)_{\max} = 3$ divisions. Compte tenu du calibre (sensibilité verticale) :

$$U_m = 3 \times 1\text{V} = 3\text{V}$$

$$\boxed{U_m = 3\text{V}}$$

Par ailleurs, la tension $(u_1)(t)$ est proportionnelle à l'intensité $i(t)$:

$$(u_1)(t) = Ri(t)$$

Sa valeur maximale est : $(u_1)_{\max} = RI_m$

L'intensité maximale est donc :

$$I_m = \frac{(u_1)_{\max}}{R}$$

$(u_1)_{\max} = 2$ divisions. Compte tenu du calibre $(u_1)_{\max} = 2 \times 1V = 2V$:

Par conséquent : $I_m = \frac{2}{40} = 5 \cdot 10^{-2} A$

$$I_m = 5 \cdot 10^{-2} A$$

L'impédance du dipôle AD est : $Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{3}{0,05} = 60\Omega$

$$Z = 60\Omega$$

3° Le décalage temporel est τ tel que :

$$\tau = \frac{|\varphi|}{\omega} \Rightarrow |\varphi| = \tau\omega$$

L'oscillogramme montre que τ occupe 1 division.

Compte tenu du balayage : $\tau = 1 \times 1ms = 10^{-3} s$

Par conséquent : $|\varphi| = 10^{-3} \times 200\pi = 0,628 rad$

Par ailleurs, l'oscillogramme montre que la tension aux bornes du dipôle AD est en avance de phase par rapport à l'intensité $i(t)$. Donc $\varphi > 0 \Rightarrow \varphi = 0,628 rad$

$$\varphi = 0,628 rad$$

La phase de l'intensité par rapport à la tension est $\varphi' = -\varphi$

Il en résulte : $i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi) = 5 \cdot 10^{-2} \cos(200\pi t - 0,628)$

$$i(t) = 5 \cdot 10^{-2} \cos(200\pi t - 0,628)$$

4° La puissance moyenne consommée par le dipôle AD est donnée par la relation :

$$P = UI \cos \varphi$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \text{ et } I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \Rightarrow P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = \frac{3 \times 0,05 \times 0,80}{2} = 6 \cdot 10^{-2} W$$

$$P = 6 \cdot 10^{-2} W$$

5° Résistance de la bobine :

$$\cos \varphi = \frac{R+r}{Z} \Rightarrow R+r = Z \cos \varphi$$

$$D'où : r = Z \cos \varphi - R = 60 \times 0,80 - 40 = 8\Omega$$

$$r = 8\Omega$$

La phase de la tension par rapport à l'intensité est φ telle que :

$$\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R+r}$$

Donc : $\tan 0,628 = \frac{628L - 318,47}{48}$

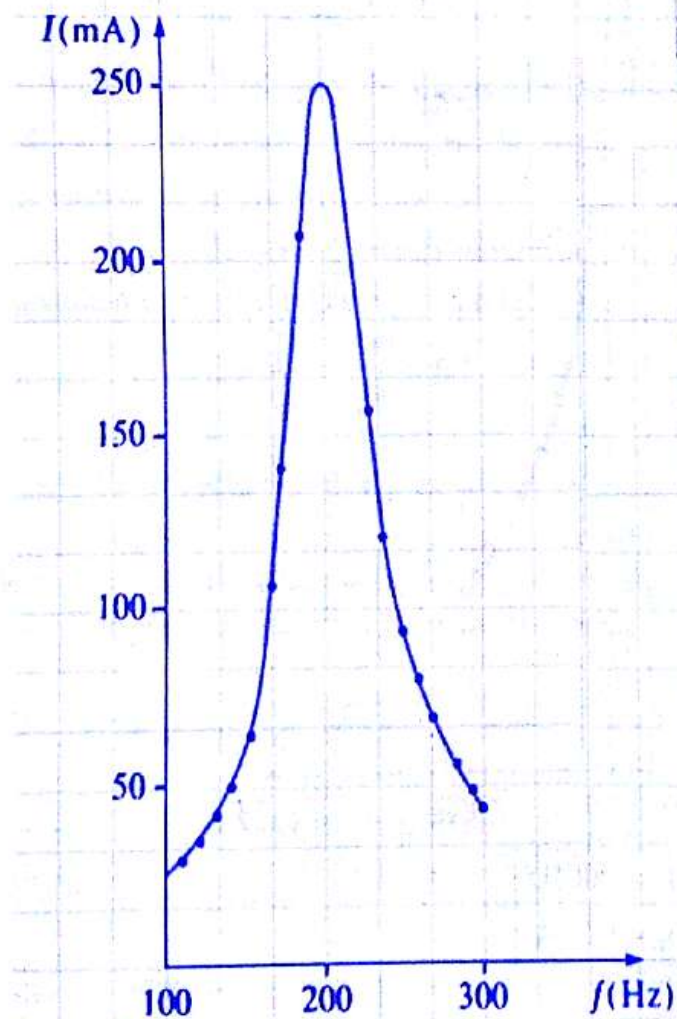
ou encore : $9,8 \cdot 10^{-3} \times 48 = 628L - 318,47$

On en déduit : $L = \frac{0,47 + 318,47}{628} = 0,50\text{H}$

$L = 0,50\text{H}$

7_ Courbe de résonance

Un circuit comprend, montés en série, un générateur de basses fréquences, un conducteur ohmique de résistance R , une bobine d'inductance L et de résistance négligeable et un condensateur de capacité $C = 3\mu\text{F}$. Le générateur délivre une tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 10\text{V}$, de fréquence f réglable. Pour des fréquences variant de 100 à 300Hz, on relève les valeurs correspondantes de l'intensité efficace I . La figure suivante représente les valeurs de I en fonction de f .



1° Déduire de la courbe, la fréquence f_0 et l'intensité efficace I_0 du courant à la résonance.

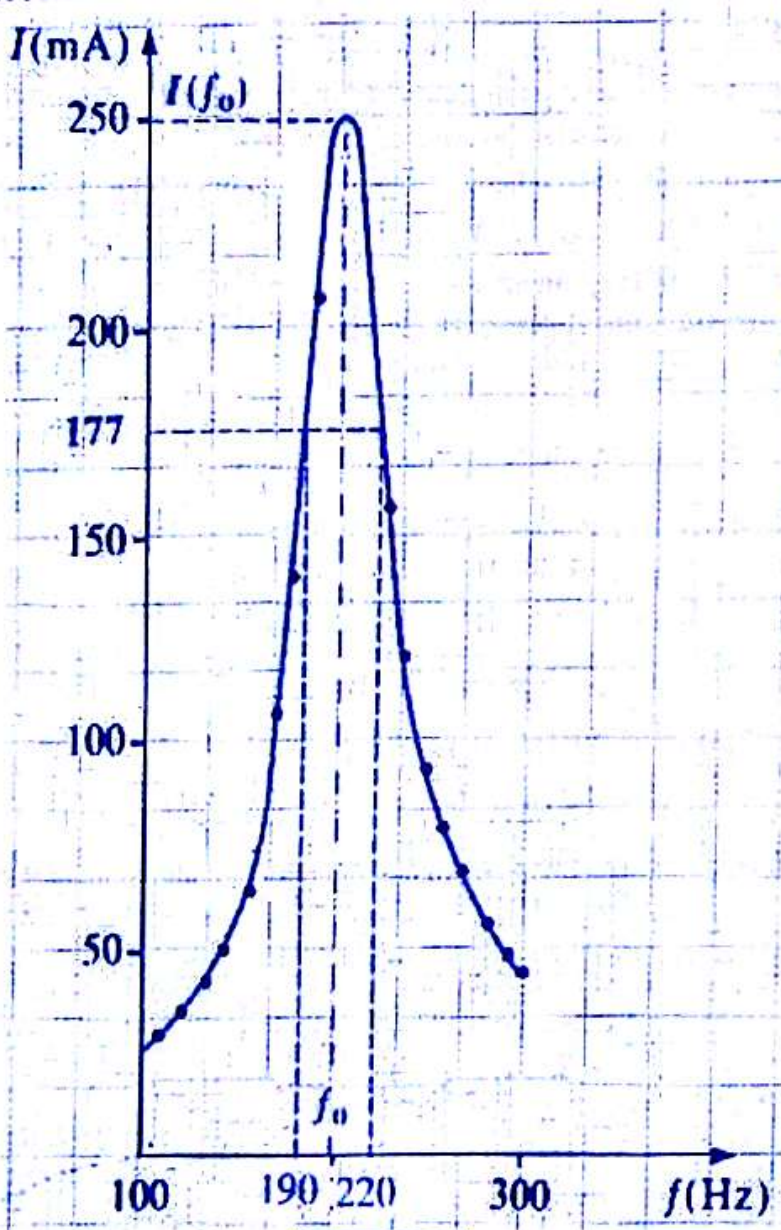
2° Exprimer L en fonction de C et f_0 . Calculer L.

3° Calculer R ainsi que la puissance maximale P_0 consommée par le circuit.

4° Déterminer la bande passante et le facteur de qualité du circuit.

Solution

1° La fréquence f_0 de résonance correspond à la valeur maximale I_0 de l'intensité efficace du courant. La lecture de la courbe donne en ordonnée $I_0 = 250\text{mA} = 0,25\text{A}$ et en abscisse $f_0 = 200\text{Hz}$.



$f_0 = 200\text{Hz}$
 $I_0 = 0,25\text{A}$

2° A la résonance on a :

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Rightarrow LC\omega_0^2 = 1$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \Rightarrow$$

$$4\pi^2 LCf_0^2 = 1$$

D'où :

$$L = \frac{1}{4\pi^2 Cf_0^2}$$

AN :

$$L = \frac{1}{4 \times 10 \times 3 \cdot 10^{-6} \times (200)^2} = 0,2\text{H}$$

$$L = 0,2\text{H}$$

3° A la résonance, l'impédance du circuit est $Z = R$. La tension efficace aux bornes du circuit est :

$$U = RI_0$$

D'où :

$$R = \frac{U}{I_0} = \frac{10}{0,25} = 40\Omega$$

La puissance maximale consommée par le circuit :

$$P_0 = RI_0^2 = 40 \times (0,25)^2 = 2,5\text{W}$$

$$R = 40\Omega$$

$$P_0 = 2,5\text{W}$$

4° La bande passante est l'intervalle de fréquences pour lequel l'intensité efficace est supérieure à $I_0/\sqrt{2}$. Les valeurs limites de la bande passante sont : $f_1 = 190\text{Hz}$ et $f_2 = 220\text{Hz}$. La largeur de la bande passante est :

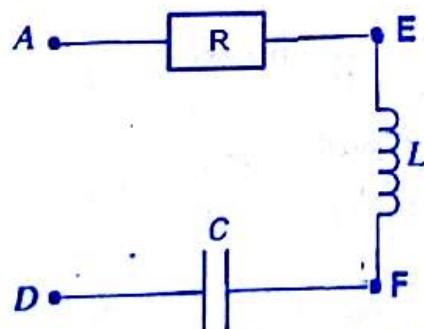
$$\Delta f = f_2 - f_1 = 220 - 190 = 30\text{Hz}$$

Le facteur de qualité du circuit est donné par la relation :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{200}{30} = 6,7$$

8_ Calcul d'un déphasage par construction de Fresnel

Un dipôle AD comprend en série, un conducteur ohmique de résistance R , une bobine d'inductance L et de résistance négligeable, et un condensateur de capacité C . Un générateur BF maintient entre ses bornes une tension sinusoïdale de pulsation ω réglable.



A l'aide d'un voltmètre, on a mesuré les tensions efficaces :

$$U_{AD} = 15\text{V}; U_{AE} = 7\text{V}; U_{EF} = 44\text{V}$$

D'autre part, la mesure de l'intensité efficace donne : $I = 350\text{mA}$. A l'aide d'un oscillographe bicourbe on a trouvé que la tension aux bornes du dipôle AD est en retard de phase par rapport à l'intensité.

1° Calculer R.

2° On pose φ la phase de la tension aux bornes de l'ensemble par rapport à l'intensité.

a) Représenter sur un diagramme de Fresnel les tensions instantanées $u_r(t)$, $u_L(t)$ et $u_C(t)$, respectivement aux bornes de la résistance, de la bobine et du condensateur.

b) Calculer φ et U_{FD} .

c) Calculer les impédances Z_L et Z_C de la bobine et du condensateur.

3° Un courant de pulsation $1413\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ traversant le circuit est en phase avec la tension aux bornes du circuit. En déduire L et C.

4° Calculer, dans les conditions de résonance, la puissance moyenne consommée par le dipôle.

Solution

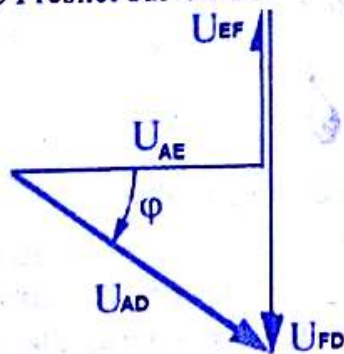
1° La loi d'Ohm aux bornes de la résistance s'écrit :

$$U_{AE} = RI$$

D'où :
$$R = \frac{U_{AE}}{I} = \frac{7}{350 \cdot 10^{-3}} = 20\Omega$$

$$R = 20\Omega$$

2° a) L'impédance du condensateur est supérieur à celle de la bobine, on obtient la construction de Fresnel suivante :



b) D'après le diagramme de Fresnel :

$$\cos \varphi = \frac{U_{AE}}{U_{AD}} = \frac{7}{15} = 0,4666$$

$$\cos \varphi = 0,4666 \Rightarrow \varphi = \cos^{-1} 0,4666 = -1,08\text{rad}$$

D'autre part :
$$\tan \varphi = \frac{U_{EF} - U_{FD}}{U_{AE}}$$

ou encore :
$$U_{AE} \tan \varphi = U_{EF} - U_{FD}$$

D'où :
$$U_{FD} = U_{EF} - U_{AE} \tan \varphi$$

soit : $U_{FD} = 44 - 7 \tan(-1,08) = 57,09V$

$$U_{FD} = 57,09V$$

c) La tension efficace aux bornes de la bobine :

$$U_{EF} = Z_L I$$

D'où : $Z_L = \frac{U_{EF}}{I} = \frac{44}{0,35} = 125,71\Omega$

La tension efficace aux bornes du condensateur :

$$U_{FD} = Z_C I$$

D'où : $Z_C = \frac{U_{ED}}{I} = \frac{57,09}{0,35} = 163,11\Omega$

$$Z_L = 125,71\Omega$$

$$Z_C = 163,11\Omega$$

3° Le courant et la tension sont en phase à la résonance. Donc :

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$$

soit : $LC\omega_0^2 = 1$ (1)

$$\omega_0 = 1413 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Par ailleurs : $Z_L = L\omega = 125,71\Omega$

D'où : $L = \frac{125,71}{\omega}$ (2)

De même : $\frac{1}{C\omega} = 163,11\Omega$

D'où : $C = \frac{1}{163,11\omega}$ (3)

Compte tenu des relations (2) et (3), la relation (1) donne :

$$\frac{125,71\omega_0^2}{163,11\omega^2} = 1$$

ou : $\omega^2 = \frac{125,71\omega_0^2}{163,11}$

Par la suite : $\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{125,71}{163,11}}$

soit : $\omega = 1413 \times \sqrt{\frac{125,71}{163,11}} = 1240,47 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\omega = 1240,47 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

D'après (2) : $L = \frac{125,71}{1240,47} = 0,10\text{H}$

D'après (3) : $C = \frac{1}{163,11 \times 1240,47} = 5 \cdot 10^{-6} \text{F} = 5\mu\text{F}$

$L = 0,1\text{H}$
 $C = 5\mu\text{F}$

4° A la résonance, l'impédance de l'ensemble est $Z = R$. L'intensité efficace est alors :

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{15}{20} = 0,75\text{A}$$

La puissance moyenne consommée est donc maximale :

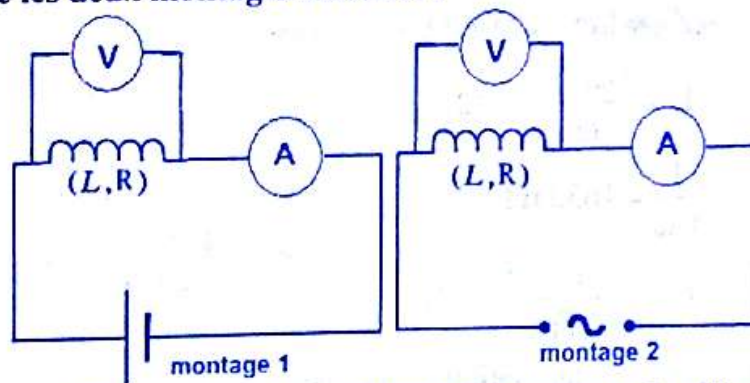
$$P_0 = RI_0 = 20 \times (0,75)^2 = 11,25\text{W}$$

$P_0 = 11,25\text{W}$

9_ Deux montages pour déterminer les caractéristiques d'une bobine

On dispose de dipôles suivants : un générateur de courant continu, un générateur de basse fréquence (GBF) dont la fréquence est maintenue à 50Hz, une bobine d'inductance L et de résistance R et un condensateur de capacité C variable.

1° On réalise les deux montages suivants :



Les indications de l'ampèremètre et du voltmètre sont alors les suivantes :

Montage 1 : $U_1 = 5\text{V}; I_1 = 250\text{mA}$

Montage 2 : $U_2 = 1\text{V}; I_2 = 19,5\text{mA}$

Déduire de ces expériences les valeurs de R et de L .

2° On monte en série : le GBF, la bobine et le condensateur. Le facteur de puissance de l'ensemble est égal à 0,80.

a) Quelles sont les valeurs possibles pour C ?

b) La puissance moyenne consommée est $P = 3,5\text{W}$. Calculer la valeur efficace U de la tension aux bornes de l'ensemble.

Solution

1° En courant continu (montage 1) la loi d'ohm aux bornes de la bobine s'écrit :

$$U_1 = RI_1$$

$$\text{D'où : } R = \frac{U_1}{I_1} = \frac{5}{250 \cdot 10^{-3}} = 20\Omega$$

En courant alternatif (montage 2) la loi d'ohm aux bornes de la bobine s'écrit :

$$U_2 = Z_b I_2$$

$$\text{D'où } Z_b = \frac{U_2}{I_2} = \frac{1}{19,5 \cdot 10^{-3}} = 51,28\Omega$$

$$\text{Par ailleurs : } Z_b = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}$$

$$\text{On en déduit : } L = \sqrt{\frac{Z_b^2 - R^2}{\omega^2}}$$

$$\omega = 2\pi f = 2 \times 3,14 \times 50 = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$L = \sqrt{\frac{(51,28)^2 - (20)^2}{(314)^2}} = 0,15\text{H}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} R = 20\Omega \\ L = 0,15\text{H} \end{array}}$$

2° a) Avec le condensateur on obtient un circuit (R, L, C) d'impédance :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\text{ou encore : } Z^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

$$\text{Donc : } \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = Z^2 - R^2$$

$$\text{Par conséquent : } L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$\text{D'autre part : } \cos \varphi = \frac{R}{Z} \Rightarrow Z = \frac{R}{\cos \varphi} = \frac{20}{0,8} = 25$$

$$\text{Ainsi : } L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm \sqrt{(25)^2 - 20^2} = \pm 15$$

$$\text{1}^{\text{er}} \text{ cas : } L\omega - \frac{1}{C\omega} = -15$$

$$\text{soit : } 0,15 \times 314 - \frac{1}{314 C_1} = -15$$

$$\text{Ou encore : } 47,1 + 15 = \frac{1}{314 C_1}$$

Par la suite : $C_1 = \frac{1}{62,1 \times 314} = 5,12 \cdot 10^{-5} \text{ F}$

2^e cas : $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 15$

soit : $47,1 - 15 = \frac{1}{314 C_2}$

D'où : $C_2 = \frac{1}{32,1 \times 314} = 9,92 \cdot 10^{-5} \text{ F}$

$$\boxed{\begin{matrix} C_1 = 5,12 \cdot 10^{-5} \text{ F} \\ C_2 = 9,92 \cdot 10^{-5} \text{ F} \end{matrix}}$$

b) Toute la puissance moyenne est consommée par effet Joule dans la résistance :

$$P = RI^2$$

On en déduit l'intensité efficace du courant qui parcourt le circuit

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{3,5}{20}} = 0,41 \text{ A}$$

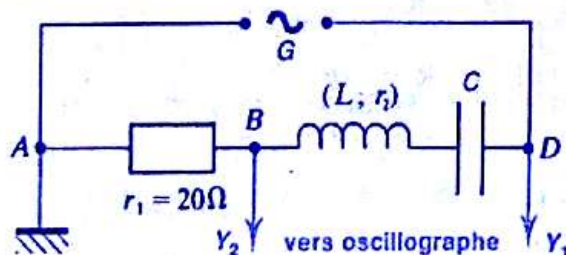
La tension efficace aux bornes de l'ensemble est :

$$U = ZI = 25 \times 0,41 = 10,25 \text{ V}$$

$$\boxed{U = 10,25 \text{ V}}$$

10_ Etude d'un dipôle AD à l'aide d'un oscillographe bicourbe

Un dipôle AD, comprend en série : un conducteur ohmique de résistance $r_1 = 20 \Omega$, une bobine d'inductance L et de résistance r_2 et un condensateur de capacité C comme l'indique la figure suivante :



1° On alimente l'ensemble par une tension alternative sinusoïdale u de période T , de pulsation ω et on branche un oscillographe bicourbe. La tension $u = u_{AD}$ est représentée sur l'écran de l'oscillographe (voie y_1). La tension u_{AB} est également représentée sur cet écran (voie y_2). Le balayage horizontal est réglé à $2 \text{ ms} \cdot \text{cm}^{-1}$. La sensibilité verticale est réglée sur $2 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$ pour la voie y_1 et sur $0,25 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$ pour la voie y_2 . On observe sur l'écran les courbes de la figure a.

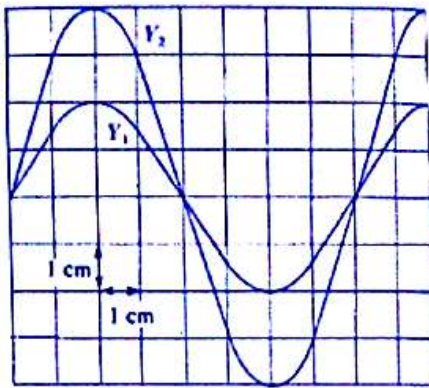


fig.a

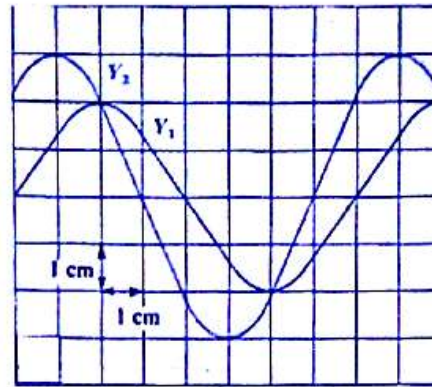


fig.b

a) A l'aide des courbes déterminer la période T et la pulsation ω .

b) Calculer la somme $R = r_1 + r_2$.

2° La bobine est remplacée par une résistance de valeur r_2 . On observe sur l'écran les courbes de la figure b avec les mêmes réglages que précédemment pour l'oscilloscope.

a) La tension u_{AD} est-elle en avance ou en retard de phase par rapport à u_{AB} ? Calculer la phase φ de la tension par rapport à l'intensité.

b) en déduire la valeur de la capacité C .

3° A partir des résultats des deux expériences déterminer L .

Solution

1° a) Les courbes montrent qu'une période s'inscrit sur 8cm. Donc, compte tenu de la base des temps :

$$T = 8 \times 2\text{ms} = 16\text{ms} = 16 \cdot 10^{-3}\text{s}$$

La pulsation est :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3,14}{16 \cdot 10^{-3}} = 392,5\text{rad/s}$$

$$T = 1,6 \cdot 10^{-2}\text{s}$$

$$\omega = 392,5\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La tension u_{AB} est proportionnelle à l'intensité. Par contre u_{AD} est la tension aux bornes du circuit. La figure (a) permet d'observer que les deux courbes sont en phase : il y a donc résonance d'intensité. L'impédance du circuit est donc :

$$Z = r_1 + r_2.$$

D'autre part :

$$Z = \frac{U_m}{I_m}$$

L'amplitude de la tension aux bornes de l'ensemble U_m s'inscrit sur 2cm (courbe y_1) ; soit, compte tenu de la sensibilité sur la voie y_2 :

$$U_m = 2 \times 2\text{V} = 4\text{V}$$

L'amplitude de l'intensité est donnée par :

$$I_m = \frac{(u_{AB})_{\max}}{r_1}$$

$(u_{AB})_{\max}$ s'inscrit sur 4 cm soit, compte tenu de la sensibilité sur la voie y_2 :

$$(u_{AB})_{\max} = 4 \times 0,25 = 1V$$

Donc :
$$I_m = \frac{1}{20} = 0,05A$$

Par la suite :
$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{4}{0,05} = 80\Omega$$

En conséquence :
$$r_1 + r_2 = Z = 80\Omega$$

$$\boxed{r_1 + r_2 = 80\Omega}$$

2° a) La tension u_{AD} est en retard de phase par rapport à la tension u_{AB} (fig b). Le décalage temporel τ s'inscrit sur 1cm. Soit, compte tenu du balayage (base des temps) :

$$\tau = 1 \times 2ms = 2 \cdot 10^{-3}s$$

D'autre part :
$$\tau = \frac{|\phi|}{\omega}$$

ou encore :
$$\tau = \frac{|\phi| \times T}{2\pi}$$

D'où :
$$|\phi| = \frac{2\pi \cdot \tau}{T} = \frac{2\pi \times 2 \cdot 10^{-3}}{16 \cdot 10^{-3}} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

Puisque u_{AD} est en retard sur u_{AB} la tension est en retard sur l'intensité donc :

$$\boxed{\phi = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}}$$

b) En circuit (R, C), on a :
$$\tan \phi = -\frac{1}{RC\omega}$$

On en déduit :
$$C = -\frac{1}{R\omega \tan \phi} = \frac{1}{80 \times 392 \times 1} = 3,18 \cdot 10^{-5} F$$

$$\boxed{C = 3,18 \cdot 10^{-5} F}$$

3° Avec la bobine (question n° 1), le circuit était en résonance d'intensité; donc :

$$L\omega = \frac{1}{C\omega}$$

ou encore

$$LC\omega^2 = 1$$

On en déduit :
$$L = \frac{1}{C\omega^2} = \frac{1}{3,18 \cdot 10^{-5} \times (392,5)^2} = 0,2H$$

$$\boxed{L = 0,2H}$$

11_ Tensions alternatives à la résonance

Un circuit comprend, montés en série, un conducteur ohmique de résistance $R = 20\Omega$, une bobine d'inductance L et de résistance négligeable, et un

condensateur de capacité $C = 4,2\mu\text{F}$. On applique aux bornes de ce circuit une tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 5\text{V}$ et de fréquence f réglable.

Pour une valeur F de f , les tensions efficaces U_R , U_L et U_C , respectivement aux bornes de la résistance, de la bobine et du condensateur sont telles que :

$$6U_R = U_L = U_C$$

1° En utilisant la construction de Fresnel, déterminer les valeurs de U_R , U_L et U_C .

2° Calculer :

a) l'intensité efficace I du courant qui traverse le circuit.

b) la fréquence F .

c) l'inductance de la bobine.

d) le facteur de qualité du circuit.

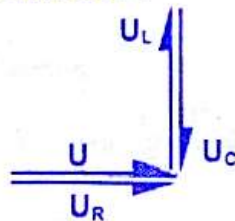
3° L'intensité instantanée du courant qui traverse le circuit a pour expression :

$$i = I\sqrt{2} \cos 2\pi Ft$$

Déterminer les expressions des tensions instantanées $u_R(t)$, $u_L(t)$ et $u_C(t)$ respectivement aux bornes de la résistance, de la bobine et du condensateur.

Solution

1° Les valeurs des tensions efficaces :



La tension efficace U aux bornes du circuit est telle que :

$$U = U_R = 5\text{V} \quad (\text{car } U_L - U_C = 0)$$

D'après l'énoncé :

$$U_L = U_C = 6U_R$$

Donc :

$$U_L = U_C = 6 \times 5 = 30\text{V}$$

$$U_L = 30\text{V}$$

$$U_C = 30\text{V}$$

$$U_R = 5\text{V}$$

2° a) Si $U_L = U_C$, le circuit est en résonance et son impédance est égale à la résistance R .

Donc :

$$I = \frac{U}{R} = \frac{5}{20} = 0,25\text{A}$$

$$I = 0,25\text{A}$$

b) La tension efficace aux bornes du condensateur s'écrit :

$$U_C = Z_C I$$

or :

$$Z_C = \frac{1}{C\omega}$$

En conséquence : $U_c = \frac{I}{C\omega}$

$\omega = 2\pi F \Rightarrow U_c = \frac{I}{2\pi CF}$

On en déduit : $F = \frac{I}{2\pi CU_c} = \frac{0,25}{2 \times 3,14 \times 4,2 \cdot 10^{-6} \times 30} = 316 \text{ Hz}$

$F = 316 \text{ Hz}$

c) La tension efficace aux bornes de la bobine est :

$U_L = Z_L I = L\omega I$

D'où : $L = \frac{U_L}{I\omega} = \frac{U_L}{2\pi FI} = \frac{30}{2 \times 3,14 \times 316 \times 0,25} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ H}$

$L = 6 \cdot 10^{-2} \text{ H}$

d) A la résonance, la tension aux bornes du condensateur est telle que :

$U_c = QU$

D'où : $Q = \frac{U_c}{U} = \frac{30}{5} = 6$

$Q = 6$

3° La tension instantanée aux bornes de la résistance est :

$u_R(t) = Ri$

soit : $u_R(t) = RI\sqrt{2} \cos 2\pi Ft = 20 \times 0,25\sqrt{2} \cos 2\pi \times 316t$

$u_R(t) = 5\sqrt{2} \cos 632\pi t$

La tension instantanée aux bornes de la bobine :

$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -2\pi FLI\sqrt{2} \sin 2\pi Ft = 2\pi FLI\sqrt{2} \cos\left(2\pi Ft + \frac{\pi}{2}\right)$

AN : $u_L(t) = 2 \times 3,14 \times 316 \times 6 \cdot 10^{-2} \times 0,25\sqrt{2} \cos\left(632t + \frac{\pi}{2}\right)$

$u_L(t) = 30\sqrt{2} \cos\left(632\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

La tension instantanée aux bornes du condensateur :

$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{I}{2\pi FC} \sqrt{2} \sin 2\pi Ft$
 $= \frac{I}{2\pi FC} \sqrt{2} \cos\left(2\pi Ft - \frac{\pi}{2}\right)$

$u_C(t) = 30\sqrt{2} \cos\left(632\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$

12_ Accord du circuit d'entrée d'un récepteur de radio

Un condensateur dont la capacité C est variable est monté en série avec une bobine d'inductance $L = 10^{-5} \text{H}$ et de résistance $R = 1\Omega$. Cet ensemble sert de circuit d'accord dans un récepteur radio. Une onde hertzienne reçue par l'antenne entretient aux bornes du circuit une tension sinusoïdale de valeur efficace constante. Le circuit est accordé lorsque l'intensité efficace a sa valeur maximale I_0 , ce que l'on obtient en faisant varier progressivement C .

1° Sachant que l'onde hertzienne a une longueur d'onde de 300m, en déduire sa fréquence f .

2° Pour quelle valeur C_0 de C obtient-on l'accord ?

3° La capacité C reste égale à C_0 . Le circuit est accordé tant que l'intensité ne devient pas inférieure à $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$. Déterminer les fréquences limites f_1 et f_2 ($f_2 > f_1$)

pour lesquelles le circuit peut encore être considéré comme accordé. En déduire la bande passante et le facteur de qualité du circuit.

La célérité de la lumière dans le vide est $c = 3 \cdot 10^8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Solution

1° Fréquence de l'onde hertzienne :

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{300} = 10^6 \text{ Hz}$$

$$\boxed{f = 10^6 \text{ Hz}}$$

2° Le circuit est accordé s'il est en résonance :

$$L\omega = \frac{1}{C_0\omega}$$

D'où :

$$C_0 = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L} = \frac{1}{4 \times 10 \times 10^{12} \times 10^{-5}} = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ F}$$

$$\boxed{C_0 = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ F}}$$

3° Il existe deux pulsations limites ω_1 et ω_2 pour lesquelles le circuit peut encore être considéré comme accordé. Les valeurs de ces pulsations sont obtenues en posant :

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

D'autre part, la loi d'Ohm aux bornes du circuit donne :

$$I = \frac{U}{Z}$$

En conséquence :

$$\frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{U}{Z}$$

Or, $I_0 = \frac{U}{R} \Rightarrow$

$$\frac{U}{R\sqrt{2}} = \frac{U}{Z}$$

ou encore :

$$\frac{1}{R\sqrt{2}} = \frac{1}{Z} \Leftrightarrow R\sqrt{2} = Z$$

Par la suite :

$$2R^2 = Z^2$$

soit :

$$2R^2 = R^2 + \left(L\omega' - \frac{1}{C_0\omega'} \right)^2$$

aussi :

$$\left(L\omega' - \frac{1}{C_0\omega'} \right)^2 = R^2$$

D'où :

$$L\omega' - \frac{1}{C_0\omega'} = \pm R$$

En posant $\omega' = x$, on obtient :

$$Lx - \frac{1}{C_0x} = \pm R$$

soit :

$$\frac{LC_0x^2 - 1}{C_0x} = \pm R$$

ou encore :

$$LC_0x^2 - 1 = \pm RC_0x$$

AN :

$$2,5 \cdot 10^{-14} x^2 - 1 = \pm 2,5 \cdot 10^{-9} x$$

1^{er} :

$$2,5 \cdot 10^{-14} x^2 + 2,5 \cdot 10^{-9} x - 1 = 0$$

$$\Delta = (2,5 \cdot 10^{-9})^2 + 4 \times 2,5 \cdot 10^{-14} = (3,16 \cdot 10^{-7})^2$$

La racine positive est $x_1 = \omega_1 = \frac{-2,5 \cdot 10^{-9} + 3,16 \cdot 10^{-7}}{2 \times 2,5 \cdot 10^{-14}} = 6,27 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

2^e cas :

$$2,5 \cdot 10^{-14} x^2 - 2,5 \cdot 10^{-9} x - 1 = 0$$

La racine positive est $x_2 = \omega_2 = \frac{2,5 \cdot 10^{-9} + 3,16 \cdot 10^{-7}}{2 \times 2,5 \cdot 10^{-14}} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Les fréquences limites sont :

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{6,27 \cdot 10^6}{2 \times 3,14} = 9,98 \cdot 10^5 \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{6,37 \cdot 10^6}{2 \times 3,14} = 1,01 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

Le circuit est accordé pour les fréquences comprises entre $9,98 \cdot 10^5 \text{ Hz}$ et $1,01 \cdot 10^6 \text{ Hz}$

La bande passante est :

$$\Delta f = f_2 - f_1 = 1,01 \cdot 10^6 - 9,98 \cdot 10^5 = 12 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

Le facteur de qualité :

$$\Delta f = 12 \text{ kHz}$$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

$$f_0 = f = 10^6 \text{ Hz} \Rightarrow$$

$$Q = \frac{10^6}{12 \cdot 10^3} = 833,33$$

$$Q = 833,33$$

PHYSIQUE ONDULATOIRE ET CORPUSCULAIRE

1 EFFET PHOTOELECTRIQUE

1.1 Définition

On appelle effet photoélectrique, l'extraction d'électrons de la matière sous l'action d'un rayonnement électromagnétique convenable.

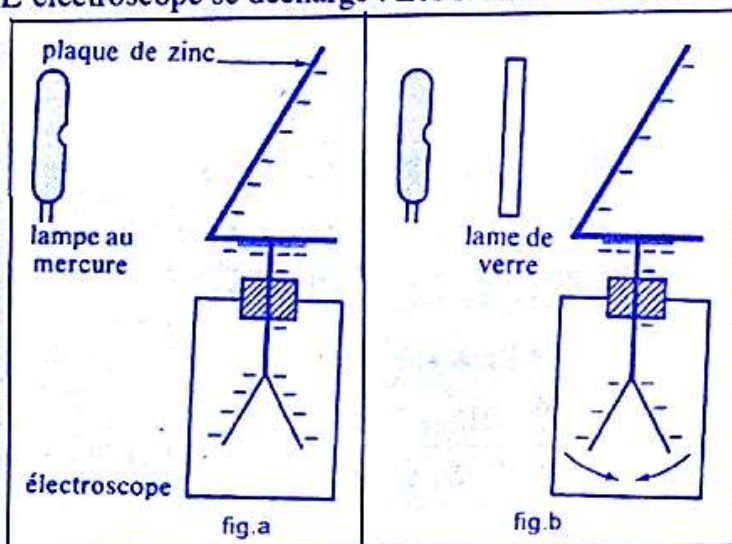
1.2 Activité 1 : Expérience de Hertz

Matériel : plaque de zinc électrisée ; électroscope ; lampe au mercure ; lame de verre.

1.2.1 Manipulation

OBJECTIF : Mise en évidence de l'effet photoélectrique

Une plaque de zinc fraîchement nettoyée est soudée à la tige d'un électroscope. Chargeons négativement le conducteur constitué par la plaque de zinc et l'électroscope. Les feuilles de l'électroscope s'écartent. Eclairons ensuite la plaque par une lampe à vapeur de mercure S (la lampe à vapeur de mercure émet une lumière riche en radiation ultraviolette). L'électroscope se décharge : Les feuilles de l'électroscope retombent (fig.a)



Recommençons l'expérience après avoir intercalé entre la source de lumière S et la plaque de zinc une lame de verre opaque aux radiations ultraviolettes (fig.b). Le phénomène ne se produit plus. Par contre si nous utilisons une lame de quartz transparente aux radiations ultraviolettes, l'électroscope se décharge.

1.2.2 Interprétation

L'illumination de la plaque de zinc a provoqué l'apparition de charges positives dans le métal. Les radiations ultraviolettes ont donc expulsé des électrons de la plaque de zinc. Cette émission d'électrons constitue l'effet photoélectrique.

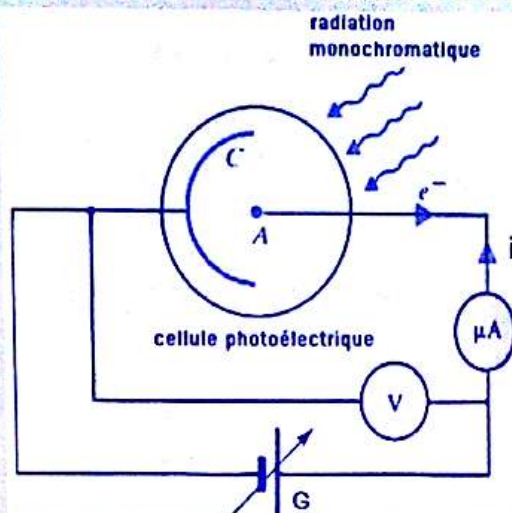
1.3 Activité 2 : Expérience de Millikan

Matériel : cellule photoélectrique ; microampèremètre ; générateur de courant continu ; voltmètre.

1.3.1 Manipulation

OBJECTIF : Enoncer les lois de l'émission photoélectrique

Réalisons un circuit comprenant en série : un générateur de courant continu G de tension réglable, une **cellule photoélectrique** et un microampèremètre. La cellule photoélectrique est constituée d'une ampoule en verre où règne un vide poussé. A l'intérieur de l'ampoule, on dispose de deux électrodes : L'anode A et la cathode C. L'anode est un fil métallique. La cathode est une plaque métallique servant de support à un métal pur déposé en couche mince. Un voltmètre mesure la tension U_{AC} entre l'anode et la cathode.



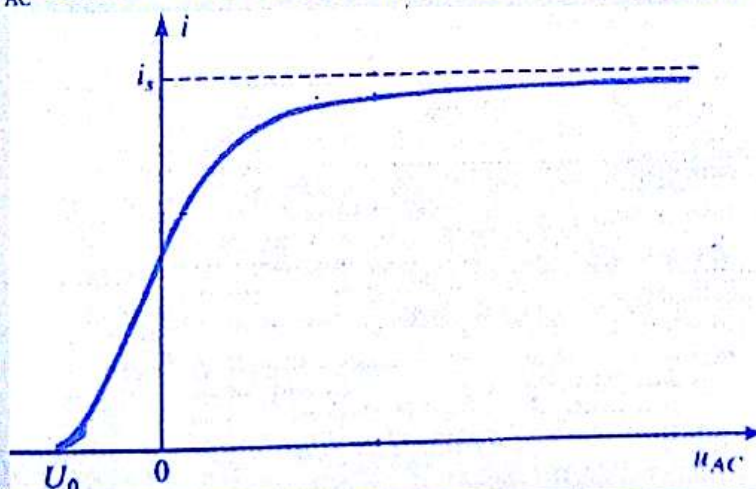
1.3.2 Résultats expérimentaux

• Seuil photoélectrique

– Eclairons la cellule en lumière monochromatique de longueur d'onde λ . Le microampèremètre n'indique aucun courant si la fréquence ν de la radiation est inférieure à une valeur limite ν_0 caractéristique du métal déposé sur la cathode. ν_0 est appelée **seuil de fréquence**. Le seuil de longueur d'onde est $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$. Par contre, si $\nu > \nu_0 (\Rightarrow \lambda < \lambda_0)$, il ya circulation d'un courant photoélectrique.

• Le courant photoélectrique

– La longueur d'onde de la radiation monochromatique tombant sur la cellule est $\lambda < \lambda_0$. Traçons la courbe représentant les variations du courant photoélectrique i en fonction de la tension U_{AC} existant entre l'anode et la cathode. On obtient le graphe suivant :

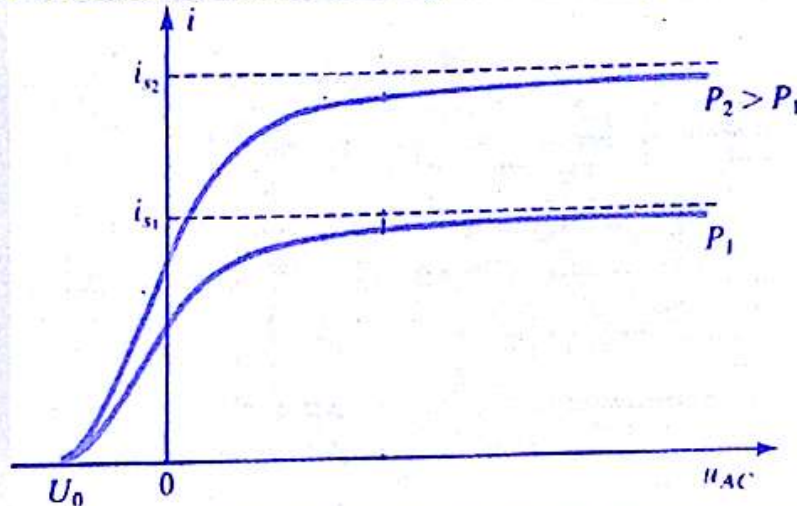


Nous remarquons que :

si $U_{AC} = 0$, l'intensité i n'est pas nulle. Elle est nulle pour une tension négative U_0 appelée **potentiel d'arrêt**.

si nous augmentons U_{AC} , i augmente et tend vers une valeur limite i_s appelée **courant de saturation**.

– En agissant sur l'éclat de la source lumineuse, nous faisons varier la puissance du faisceau. Nous obtenons les courbes de la figure ci-dessous pour différentes puissances.



Nous constatons que l'intensité du courant de saturation augmente avec la puissance transportée par le faisceau lumineux.

• **Energie cinétique maximale**

Avec la tension négative U_0 , les électrons sont freinés entre la cathode et l'anode. La vitesse initiale des électrons est donc maximale. Par conséquent l'énergie cinétique initiale est maximale :

$$E_{C_{max}} = \frac{1}{2} m v_{max}^2$$

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'électron entre la cathode et l'anode donne :

$$\frac{1}{2} m v_{max}^2 = e |U_0|$$

D'où :

$$E_{C_{max}} = e |U_0|$$

$e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$; $m = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$ (masse de l'électron)

1.3.3 Les lois de l'émission photoélectrique (lois de Lenard)

– *L'émission photoélectrique ne se produit que si la longueur d'onde λ de la radiation monochromatique incidente est inférieure à une valeur limite λ_0 caractéristique du métal.*

– *L'intensité du courant de saturation est proportionnelle à la puissance lumineuse transportée par le faisceau lumineux reçu par la cathode.*

– *L'énergie cinétique maximale des électrons émis par la cathode est indépendante de la puissance du faisceau monochromatique incident.*

1.4 Théorie des Photons (Albert Einstein)

1.4.1 Hypothèse d'Einstein

Un faisceau de lumière monochromatique de fréquence ν , transporte de l'énergie sous forme de corpuscules de masses nulles appelées photons. L'énergie W transportée par chaque photon est proportionnelle à la fréquence ν .

$$W = h\nu$$

h est la constante de Planck ($h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$)

L'énergie $W_0 = h\nu_0$ est appelée travail d'extraction.

Par ailleurs : $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} \Rightarrow W_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$

c est la célérité de la lumière dans le vide ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

1.4.2 Energie cinétique maximale

Lorsqu'un photon arrache un électron d'un métal, son énergie $h\nu$ sert à fournir le travail d'extraction $h\nu_0$ et à communiquer à l'électron l'énergie cinétique maximale $E_{C_{\max}}$:

$$h\nu = h\nu_0 + E_{C_{\max}}$$

D'où : $E_{C_{\max}} = h\nu - h\nu_0$

soit : $E_{C_{\max}} = W - W_0$

1.4.3 Potentiel d'arrêt

Nous avons, d'une part : $E_{C_{\max}} = h\nu - h\nu_0$

D'autre part : $E_{C_{\max}} = e|U_0|$

En conséquence : $e|U_0| = h\nu - h\nu_0$

D'où : $|U_0| = \frac{h\nu - h\nu_0}{e}$

$$|U_0| = \frac{h\nu - h\nu_0}{e}$$

1.5 Applications pratiques de l'effet photoélectrique

• La cellule photoélectrique est utilisée comme :

- **interrupteur crépusculaire** permettant, entre autre l'allumage automatique des feux d'une automobile ou la fermeture automatique des portes électriques
- **détecteur de passage** devant un faisceau de lumière (qui peut être de l'infrarouge)
- **luxmètre** (appareil permettant de mesurer l'intensité lumineuse)

• Le panneau solaire est une association de **cellules photovoltaïques**. Une cellule photovoltaïque est un composant électronique qui, exposé à la lumière produit entre ses bornes une tension électrique de l'ordre de 0,5V. En associant un très grand nombre de cellules on constitue une batterie solaire.

1_ Radiation susceptible d'extraire des électrons du potassium

La cathode d'une cellule photoélectrique à vide est recouverte de potassium pour lequel le travail d'extraction d'un électron est $W_0 = 2,2\text{eV}$.

1° La lumière verte (longueur d'onde $\lambda_1 = 0,546\mu\text{m}$) et la lumière jaune (longueur d'onde $\lambda_2 = 0,578\mu\text{m}$) peuvent-elles extraire des électrons de ce métal ?

2° On éclaire la cellule avec une radiation de couleur verte.

a) Calculer la vitesse maximale des électrons émis.

b) La différence de potentiel entre l'anode et la cathode étant de 30V, calculer la vitesse avec laquelle les électrons atteindront l'anode.

On donne : constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

masse de l'électron : $m = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$

charge de l'électron : $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Solution

1° La longueur d'onde seuil est :

$$\lambda_0 = \frac{hc}{W_0}$$

$W_0 = 2,2\text{eV}$. Par ailleurs, 1 électronvolt (eV) = $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$:

Donc : $W_0 = 2,2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} = 3,52 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

En conséquence : $\lambda_0 = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{3,52 \cdot 10^{-19}} = 0,564 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

soit, en micromètre ($1\mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$) : $\lambda_0 = 0,564\mu\text{m}$

Il y a extraction d'électron si $\lambda < \lambda_0$

$\lambda_1 < \lambda_0$ Donc il ya extraction avec la lumière verte

$\lambda_2 > \lambda_0$ Il n'y a pas d'extraction avec la lumière jaune

2° a) La vitesse initiale des électrons est maximale. Par ailleurs, selon la théorie des photons, l'énergie cinétique maximale est :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = h\nu - h\nu_0$$

soit : $\frac{1}{2}mv_0^2 = W - W_0$

or : $W = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{0,546 \cdot 10^{-6}} = 3,63 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

En conséquence : $\frac{1}{2}mv_0^2 = 3,63 \cdot 10^{-19} - 3,52 \cdot 10^{-19} = 1,1 \cdot 10^{-20} \text{ J}$

soit :
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 1,1 \cdot 10^{-20}$$

D'où :
$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 1,1 \cdot 10^{-20}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,1 \cdot 10^{-20}}{0,91 \cdot 10^{-30}}} = 1,55 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_0 = 1,55 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Appliquons le théorème de l'énergie cinétique aux électrons entre l'anode et la cathode :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = eU$$

ou encore :
$$v^2 - v_0^2 = \frac{2eU}{m}$$

On en déduit :
$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m} + v_0^2} = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 30}{0,91 \cdot 10^{-30}} + (1,55 \cdot 10^5)^2}$$

$$v = 3,25 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2_ Potentiel d'arrêt – rendement quantique

On dispose d'une cellule photoélectrique au potassium. L'énergie d'extraction d'un électron du potassium est $W_0 = 2,25\text{eV}$. On éclaire la cellule par une radiation monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,49\mu\text{m}$.

1° Calculer la vitesse maximale avec laquelle les électrons quittent la cathode.

2° Calculer le potentiel d'arrêt.

3° La puissance rayonnante reçue par la cathode est $P = 9 \cdot 10^{-7}\text{W}$. On constate que l'intensité du courant de saturation dans le circuit de la cellule est $i_s = 4 \cdot 10^{-8}\text{A}$. En déduire le rendement quantique de la cellule, c'est-à-dire le rapport du nombre d'électrons émis au nombre de photons reçus pendant le même temps.

Solution

1° Nous avons :
$$E_{c\text{max}} = W - W_0$$

L'énergie d'un photon incident est :

$$W = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{0,49 \cdot 10^{-6}} = 4,05 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Le travail d'extraction est : $W_0 = 2,25\text{eV} = 2,25 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Par conséquent :
$$E_{c\text{max}} = 4,05 \cdot 10^{-19} - 3,6 \cdot 10^{-19} = 0,45 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

D'autre part :
$$E_{c\text{max}} = \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2$$

D'où :
$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2E_{c\text{max}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 0,45 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 3,14 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{\max} = 3,14 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2° La tension négative U_0 qui annule le courant photoélectrique est le potentiel d'arrêt :

$$|U_0| = \frac{E_{C\max}}{e} = \frac{0,46 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,28 \text{ V}$$

$$|U_0| = 0,28 \text{ V}$$

3° Le nombre d'électrons émis par seconde est :

$$n = \frac{i_s}{e} = \frac{4 \cdot 10^{-8}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,5 \cdot 10^{11}$$

Soit N , le nombre de photons reçus par seconde. L'énergie de ces N photons est donnée par la relation :

$$P = Nh\nu = \frac{Nhc}{\lambda}$$

On en déduit :

$$N = \frac{P\lambda}{hc} = \frac{9 \cdot 10^{-7} \times 0,49 \cdot 10^{-6}}{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8} = 2,22 \cdot 10^{12}$$

Le rendement quantique est : $\rho = \frac{n}{N} = \frac{2,5 \cdot 10^{11}}{2,22 \cdot 10^{12}} = 0,11 = 11\%$

$$\rho = 11\%$$

3_ Expression du potentiel d'arrêt en fonction de la fréquence

Une radiation monochromatique de longueur d'onde 360nm, éclaire la cathode de potassium d'une cellule photoélectrique. On établit la tension $U = V_A - V_C$ entre l'anode et la cathode, tension qui peut prendre plusieurs valeurs.

L'énergie minimale à fournir pour extraire un électron du potassium est $W_0 = 2,26 \text{ eV}$.

1° Quelle est la condition nécessaire à l'extraction d'un électron de la cathode ? fait-elle intervenir la radiation lumineuse, sa puissance, sa fréquence ou la tension U ?

2° Calculer :

- l'énergie cinétique et la vitesse maximales de chaque électron à sa sortie du métal.
- la valeur absolue de U_0 , potentiel d'arrêt de la cellule, valeur de U pour laquelle le courant de cette cellule est annulé.

3° Montrer que : $|U_0|$ est une fonction linéaire de la fréquence ν de la radiation. Calculer la fréquence pour laquelle U_0 est nul. Quelle est la signification de cette fréquence ?

Solution

1° La condition nécessaire à l'extraction d'un électron de la cathode fait intervenir la fréquence de la radiation lumineuse : la fréquence ν de la radiation incidente doit être supérieure à la fréquence seuil ν_0 caractéristique du métal.

2° a) L'énergie cinétique maximale de chaque électron à la sortie du métal est :

$$E_{C_{\max}} = W - W_0$$

L'énergie d'un photon de la radiation monochromatique utilisée est :

$$W = hv = h \frac{c}{\lambda}$$

$$W = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{360 \cdot 10^{-9}} = 5,51 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Le travail d'extraction est $W_0 = 2,26 \text{ eV} = 2,26 \times 1,6 \cdot 10^{-19} = 3,61 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

L'énergie cinétique maximale est donc :

$$E_{c_{\max}} = 5,51 \cdot 10^{-19} - 3,61 \cdot 10^{-19} = 1,9 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

La vitesse maximale de l'électron à la sortie de la cathode :

$$\frac{1}{2} m v_{\max}^2 = E_{c_{\max}}$$

D'où :

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2E_{c_{\max}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,9 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 6,46 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E_{C_{\max}} = 1,9 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\ v_{\max} = 6,46 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{array}}$$

b) Valeur absolue de U_0 (potentiel d'arrêt) :

$$|U_0| = \frac{E_{c_{\max}}}{e} = \frac{1,9 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,18 \text{ V}$$

$$\boxed{|U_0| = 1,18 \text{ V}}$$

3° Expression de $|U_0|$ en fonction de la fréquence :

Nous avons, d'une part : $E_{C_{\max}} = e|U_0|$

D'autre part : $E_{c_{\max}} = hv - hv_0 = hv - W_0$

Par conséquent : $e|U_0| = hv - W_0$

D'où :

$$|U_0| = \frac{hv - W_0}{e} = \frac{hv}{e} - \frac{W_0}{e}$$

soit :

$$|U_0| = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ v}}{1,6 \cdot 10^{-19}} - \frac{3,61 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 4,13 \cdot 10^{-15} \text{ v} - 2,26$$

$$\boxed{|U_0| = 4,13 \cdot 10^{-15} \text{ v} - 2,26}$$

$$U_0 = 0 \Rightarrow 0 = 4,13 \cdot 10^{-15} \text{ v} - 2,26$$

D'où :

$$v = \frac{2,26}{4,13 \cdot 10^{-15}} = 5,47 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Cette valeur de la fréquence est la fréquence seuil ν_0 .

2 NIVEAUX D'ENERGIE DANS LES ATOMES

2.1 Postulats de Bohr

– L'énergie emmagasinée par un atome ne peut prendre que certaines valeurs particulières formant ainsi une suite discontinue : on dit que l'énergie des atomes est quantifiée.

L'atome dans son état fondamental (atome à la température ambiante) a une énergie minimale E_1 . Lorsqu'un atome possède une énergie $E_n > E_1$, il est dans un état dit excité. [Excitation électrique, excitation par absorption de photon, par choc avec particule etc.]

– Tout atome excité a tendance à revenir spontanément vers un état d'énergie inférieure plus stable. Le passage de l'état d'énergie E_n vers l'état d'énergie E_p , est appelé transition, Cette transition s'accompagne de l'émission d'un photon de fréquence $\nu_{n,p}$. L'énergie de ce photon est :

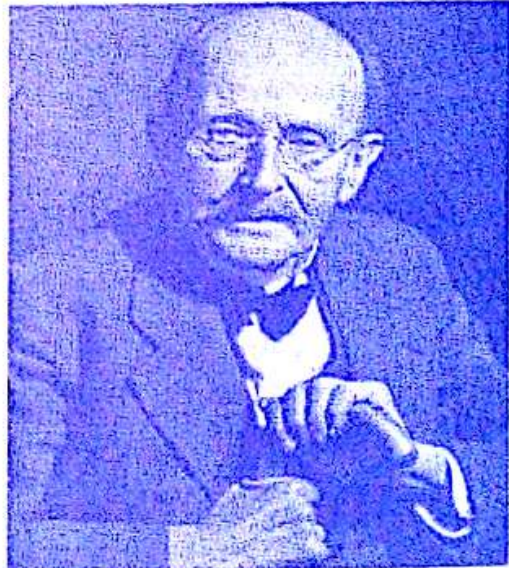
$$E_n - E_p = h\nu_{n,p}$$

h est la constante de Planck ($h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$)



Niels Bohr (1885- 1962)

Physicien Danois, il perfectionna en 1913 le modèle planétaire proposé par Rutherford et donna une interprétation du spectre de l'hydrogène en postulant que l'énergie de l'atome était quantifiée.



Max Planck (1858- 1947)

Physicien Allemand, prix Nobel en 1918.

2.2 Application à l'atome d'hydrogène

2.2.1 Niveaux d'énergie dans l'atome d'hydrogène

Les valeurs possibles de l'énergie E_n pour un atome d'hydrogène sont, en électronvolts (eV) :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}$$

n est appelé nombre quantique principal et peut prendre toutes les valeurs entières

1, 2, 3, ..., ∞.

- Si $n = 1$, on a : $E_1 = -13,6 \text{ eV}$ (état fondamental)
- Si $n = 2$, on a : $E_2 = -3,40 \text{ eV}$ (premier état excité)
- Si $n = 3$, on a : $E_3 = -1,51 \text{ eV}$ (deuxième état excité)
- Si n est infini, $E_\infty = 0$. L'atome est dit dans l'état ionisé.

On appelle énergie d'ionisation E_i l'énergie minimale nécessaire pour arracher à l'atome d'hydrogène son électron :

$$E_i = E_\infty - E_1 = 13,6 \text{ eV}$$

2.2.2 Longueur d'onde associée à un photon émis

La transition du niveau d'énergie E_n vers le niveau d'énergie E_p ($n > p$) s'accompagne de l'émission d'un photon de fréquence $\nu_{n,p}$, de longueur d'onde :

$$\lambda_{n,p} = \frac{c}{\nu_{n,p}}$$

$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (c est la célérité de la lumière dans le vide).

D'autre part :

$$\nu_{n,p} = \frac{E_n - E_p}{h}$$

En conséquence :

$$\lambda_{n,p} = \frac{hc}{E_n - E_p}$$

$$\lambda_{n,p} = \frac{hc}{E_n - E_p}$$

Remarque : la formule de Balmer donne :

$$\frac{1}{\lambda_{n,p}} = R_H \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

R_H est la constante de Rydberg ($R_H = 1,0967 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$).

$\sigma = \frac{1}{\lambda_{n,p}}$ est appelé nombre d'onde.

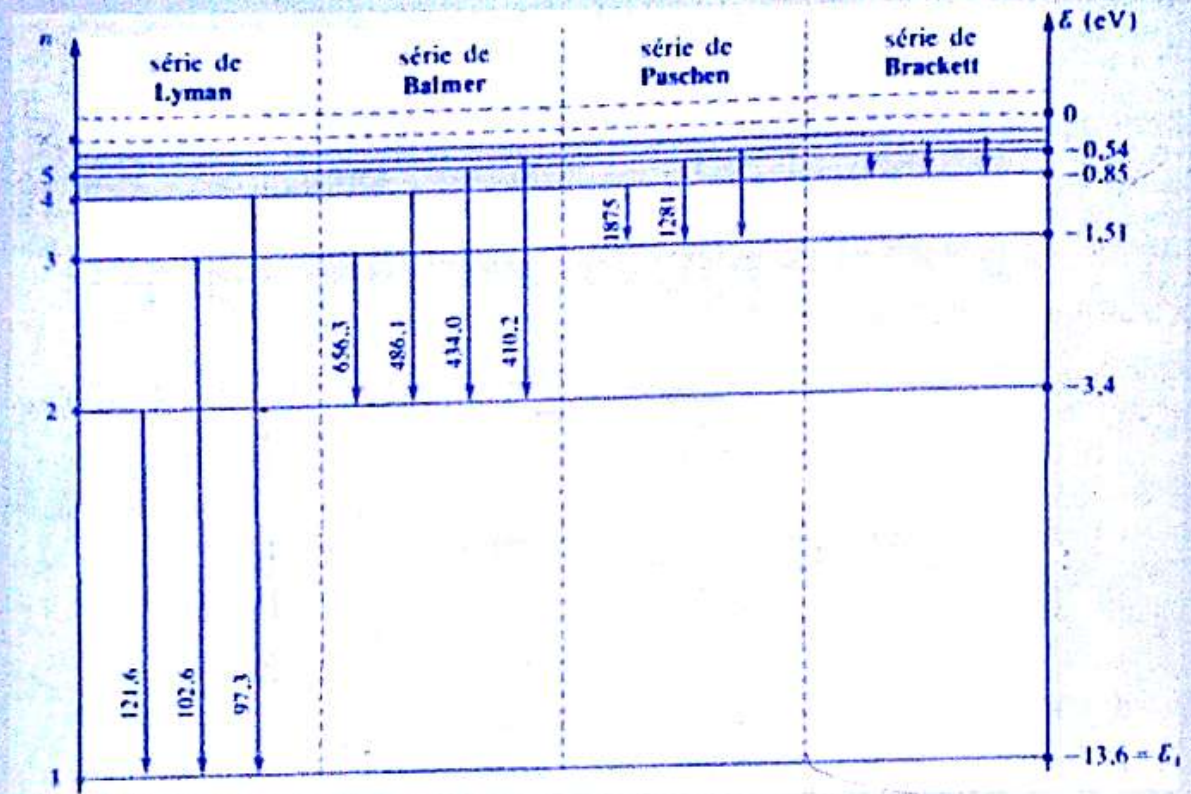
2.2.3 Séries de raies d'émission

Une série correspond à des transitions qui aboutissent au même niveau d'énergie. Ainsi, la série de **Lyman** comporte les raies de transition aboutissant au niveau fondamental ($p = 1$). Elle est formée de **radiations ultraviolettes** de longueurs d'ondes $\lambda_{2,1}$, $\lambda_{3,1}$, $\lambda_{4,1}$ etc.

La série de **Balmer** comporte les raies de transitions aboutissant au premier état excité ($p = 2$). Elle est formée de **radiations visibles** de longueurs d'ondes $\lambda_{3,2}$, $\lambda_{4,2}$, $\lambda_{5,2}$ etc.

La série de Paschen comporte les raies de transitions aboutissant au deuxième état

excité ($p = 3$). Cette série est formée de **radiations infrarouges** de longueurs d'ondes $\lambda_{4,3}$, $\lambda_{5,3}$, $\lambda_{6,3}$ etc. On obtient ainsi le diagramme énergétique de l'atome d'hydrogène :



1_ Radiations de la série de Balmer

Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}$$

E_n est en électronvolts (ev) et n est un nombre entier naturel non nul.

1° Quelle est l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène ?

2° Etablir l'expression littérale de la fréquence des radiations émises lorsque cet atome passe d'un état excité tel que $n > 2$ à l'état $n = 2$ (radiations de la série de Balmer)

3° L'analyse du spectre d'émission de l'atome d'hydrogène révèle la présence de radiations de longueur d'onde 656 nm (H_α) ; 486 nm (H_β) ; 434 nm (H_γ). Déterminer à quelles transitions correspondent ces radiations de la série de Balmer.

Données :

constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Solution

1° L'énergie d'ionisation est l'énergie minimale E_i nécessaire pour arracher à l'atome d'hydrogène son électron :

$$E_i = E_\infty - E_1 = 13,6 \text{ eV}$$

$$\boxed{E_i = 13,6 \text{ eV}}$$

2° L'énergie d'un photon de fréquence $\nu_{n,2}$ émis lors d'une transition entre deux niveaux d'énergie E_n et E_2 est :

$$h\nu_{n,2} = E_n - E_2$$

soit :

$$h\nu_{n,2} = -\frac{13,6}{n^2} + \frac{13,6}{4}$$

D'où :

$$\nu_{n,2} = \frac{13,6}{h} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

soit, en unités du système international sachant que : $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

$$\nu_{n,2} = \frac{13,6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{6,62 \cdot 10^{-34}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\boxed{\nu_{n,2} = 3,29 \cdot 10^{15} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)}$$

3° Nous avons :

$$\nu_{n,2} = 3,29 \cdot 10^{15} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

soit :

$$\nu_{n,2} = \frac{3,29 \cdot 10^{15}}{4} - \frac{3,29 \cdot 10^{15}}{n^2}$$

ou :

$$v_{n,2} = 0,822 \cdot 10^{15} - \frac{3,29 \cdot 10^{15}}{n^2}$$

Par la suite :

$$\frac{3,29 \cdot 10^{15}}{n^2} = 0,822 \cdot 10^{15} - v_{n,2}$$

Aussi :

$$\frac{n^2}{3,29 \cdot 10^{15}} = \frac{1}{0,822 \cdot 10^{15} - v_{n,2}}$$

Il s'en suit :

$$n^2 = \frac{3,29 \cdot 10^{15}}{0,822 \cdot 10^{15} - v_{n,2}}$$

D'où :

$$n = \sqrt{\frac{3,29 \cdot 10^{15}}{0,822 \cdot 10^{15} - v_{n,2}}}$$

La fréquence $v(\alpha)$ correspondant à la radiation H_α est :

$$v(\alpha) = \frac{c}{\lambda(\alpha)}$$

$\lambda(\alpha) = 656 \cdot 10^{-9} \text{ m} \Rightarrow v(\alpha) = \frac{3 \cdot 10^8}{656 \cdot 10^{-9}} = 4,57 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

Par conséquent :

$$n(\alpha) = \sqrt{\frac{3,29 \cdot 10^{15}}{0,822 \cdot 10^{15} - 4,57 \cdot 10^{14}}} = 3$$

H_α correspond donc à la première transition de fréquence $v_{3,2}$

De même :

$$v(\beta) = \frac{c}{\lambda(\beta)} = \frac{3 \cdot 10^8}{486 \cdot 10^{-9}} = 6,17 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Par la suite :

$$n(\beta) = \sqrt{\frac{3,29 \cdot 10^{15}}{0,822 \cdot 10^{15} - 6,17 \cdot 10^{14}}} = 4$$

H_β correspond donc la deuxième transition de la série de Balmer de fréquence $v_{4,2}$

Finalement :

$$v(\gamma) = \frac{c}{\lambda(\gamma)} = \frac{3 \cdot 10^8}{434 \cdot 10^{-9}} = 6,91 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$n(\gamma) = \sqrt{\frac{3,29 \cdot 10^{15}}{0,822 \cdot 10^{15} - 6,91 \cdot 10^{14}}} = 5$$

H_γ correspond donc à la troisième transition de la série de Balmer de fréquence $v_{5,2}$

2_ Niveaux d'énergie quantifiés de l'atome d'hydrogène

Les niveaux d'énergie quantifiés de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}$$

Avec E_n en électronvolt et n , entier supérieur ou égal à 1.

1° Quelle est l'énergie cinétique minimale d'un électron, capable de provoquer par choc l'excitation d'un atome d'hydrogène de son état fondamental ($n = 1$) à son premier niveau excité ($n = 2$) ?

2° l'atome d'hydrogène précédemment excité revient à l'état fondamental ($n = 1$) avec émission d'une onde lumineuse. Quelle est sa longueur d'onde ?

3° Etablir la relation littérale donnant la fréquence des ondes lumineuses émises lorsque des atomes d'hydrogène préalablement excités, passent d'un état d'énergie caractérisé par $n > 2$ à l'état d'énergie caractérisé par $n = 2$. Calculer la plus grande longueur d'onde des ondes lumineuses émises dans ce cas.

Constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Solution

1° L'énergie cinétique minimale d'un électron capable de provoquer par choc l'excitation d'un atome d'hydrogène de son état fondamental à son premier niveau excité est :

$$E_c = E_2 - E_1$$

soit :
$$E_c = -\frac{13,6}{2^2} + \frac{13,6}{1^2}$$

D'où :
$$E_c = -3,4 + 13,6 = 10,2 \text{ eV}$$

Soit, en joules :
$$E_c = 10,2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} = 1,63 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$$E_c = 1,63 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

2° Longueur d'onde de la radiation émise :

$$E_2 - E_1 = \frac{hc}{\lambda}$$

D'où :
$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1}$$

soit :
$$\lambda = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{1,63 \cdot 10^{-18}} = 0,12 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 0,12 \mu\text{m}$$

$$\lambda = 0,12 \mu\text{m}$$

3° Expression de la fréquence :

$$E_n - E_2 = h\nu$$

soit :
$$-\frac{13,6}{n^2} + \frac{13,6}{2^2} = h\nu$$

ou encore :
$$13,6 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) = h\nu$$

D'où :
$$\nu = \frac{13,6}{h} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Posons :
$$\Lambda = \frac{13,6}{h}$$

Sa valeur dans le système d'unités international est :

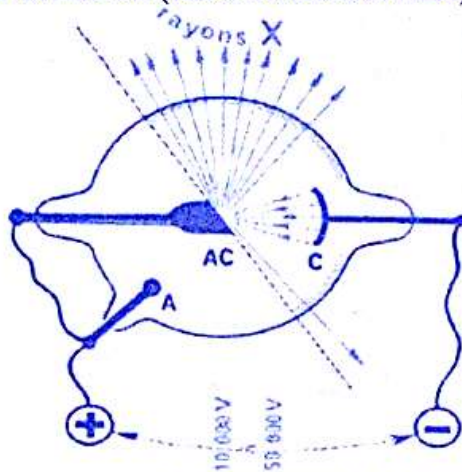
$$\Lambda = \frac{13,6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{6,62 \cdot 10^{-34}} = 3,28 \cdot 10^{15}$$

Par conséquent :
$$v = 3,28 \cdot 10^{15} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$v = 3,28 \cdot 10^{15} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

3 LES RAYONS X

1 Mécanisme d'émission (tube de CROOKES)



Dans un tube en verre où règne un vide poussé, on dispose de deux électrodes : l'anode A et la cathode C. Un bloc de métal en tungstène appelé anti-cathode AC, est maintenu au même potentiel que l'anode A.

En établissant entre l'anode et la cathode une tension de l'ordre de 10000 à 50000V, des électrons quittent la cathode et viennent frapper l'anti-cathode. Un rayonnement invisible se propage de l'anti-cathode à la suite de ce bombardement : ce sont les rayons X.

2 Propriétés des rayons X

- Ils se propagent en lignes droites et traversent aisément de nombreux corps qui arrêtent la lumière : bois, carton, matières plastiques, métaux plus ou moins épais.
- Ils sont invisibles, provoquent la fluorescence de certains corps : certaines substances placées sur leur trajet, dans l'obscurité deviennent fluorescentes.
- Ils ionisent les gaz.
- Ils impressionnent les émulsions photographiques.
- Ils provoquent l'émission photoélectrique.

3 Nature du rayonnement X

Les rayons X sont des photons de grande énergie associés à des ondes électromagnétiques de longueurs d'ondes comprises entre 0,01nm et 10nm.

4 Applications

- Radiographie en médecine et en douanes (lutte contre la fraude douanière).
- L'industrie applique la radiographie aux pièces usinées, assemblées, ou fondues pour déceler les cassures et les failles.
- La cristallographie utilise la diffraction des rayons X.

EXERCICE RESOLU

1° Quelle est l'énergie d'un photon X de longueur d'onde 0,01nm ? (Exprimer le résultat en électronvolt).

2° On obtient des raies d'émission de rayons X en bombardant certains métaux par des électrons accélérés sous une tension U. Calculer la tension minimale nécessaire pour faire apparaître la raie $\lambda_K = 0,0619\text{nm}$ du molybdène.

Constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Charge de l'électron : $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Réponses

1° L'énergie d'un photon X de longueur d'onde λ est :

$$W = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{0,01 \cdot 10^{-9}} = 1,99 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

En électronvolt (eV), $W = \frac{1,99 \cdot 10^{-14}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 124,38 \cdot 10^3 \text{ eV}$

$$W = 124,38 \text{ keV}$$

2° La tension minimale U :

L'énergie cinétique des électrons arrivant sur le métal est :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = eU$$

Cette énergie cinétique doit être supérieure ou égale à l'énergie de photon X de longueur d'onde λ_K :

$$eU \geq \frac{hc}{\lambda_K}$$

D'où :

$$U \geq \frac{hc}{e\lambda_K}$$

AN :

$$U \geq \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,0619 \cdot 10^{-9}} = 20,052 \cdot 10^3 \text{ V}$$

La tension minimale est :

$$U = 20,052 \cdot 10^3 \text{ V}$$

PHYSIQUE ATOMIQUE ET NUCLEAIRE

1 LE NOYAU ATOMIQUE

1.1 Composition du noyau

L'atome est constitué d'un noyau central et des électrons. Le noyau, encore appelé **nucléide**, est composé de particules appelés **nucléons**. On distingue deux types de nucléons : les **protons** et les **neutrons**. On désigne par **Z** le nombre des protons d'un noyau et par **N** le nombre des neutrons.



Sir Ernest Rutherford

Né le 30 Août 1871 à Brightwater en Nouvelle Zelande, il décède le 19 Octobre 1937 à Cambridge en Angleterre. Il est considéré comme le Père de la Physique nucléaire.

On appelle **nombre de charge (ou numéro atomique)** d'un élément, le nombre **Z** des protons d'un noyau de cet élément.

On appelle **nombre de masse**, le nombre **A** des **nucléons** : $A = Z + N$

Par conséquent le nombre de neutrons est donc : $N = A - Z$

Le noyau d'un élément chimique de symbole **X**, de numéro atomique **Z**, est représenté par A_ZX . **A** est le nombre des nucléons.

Exemple : le nucléide ${}^{238}_{92}\text{U}$ a pour élément chimique associé l'uranium de symbole **U** et de numéro atomique $Z = 92$. Le nombre de protons de ce noyau est $Z = 92$. Le nombre de neutrons est $N = A - Z = 238 - 92 = 146$

1.2 Isotopes

On appelle isotopes, des nucléides qui ont même numéro atomique mais de nombre de masse différent.

Exemples : ${}^1_1\text{H}$, ${}^2_1\text{H}$ et ${}^3_1\text{H}$ sont des isotopes d'hydrogène

${}^{234}_{92}\text{U}$, ${}^{235}_{92}\text{U}$ et ${}^{238}_{92}\text{U}$ sont des isotopes d'uranium

1.3 Unité de masse atomique

L'unité de masse atomique, de symbole **u**, est la douzième de la masse de l'isotope 12 du carbone.

$$1u = \frac{12 \cdot 10^{-3} (\text{kg})}{12 \times 6,022 \cdot 10^{23}} = 1,66055 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$1u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Exemples : les masses du proton et du neutron sont, respectivement en unité de masse

atomique : $m_p = 1,007276u$ et $m_N = 1,008665u$. Leurs valeurs en kilogrammes sont :

$$m_p = 1,007276 \times 1,66 \cdot 10^{-27} = 1,6720 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_N = 1,008665 \times 1,66 \cdot 10^{-27} = 1,6743 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

1.4 Défaut de masse

La masse m d'un noyau est inférieure à la somme des masses de ses nucléons pris séparément. La différence Δm de la masse d'un noyau à la somme des masses de ses nucléons est appelée **défaut de masse**.

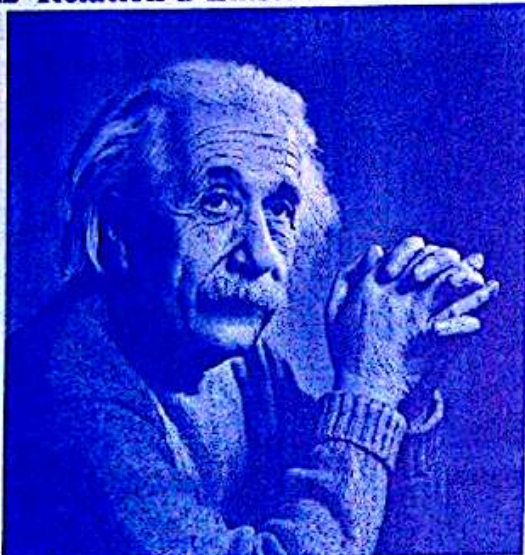
$$\Delta m = m - Zm_p + (A - Z)m_N$$

1.5 Energie de liaison du noyau

1.5.1 Définition

L'énergie de liaison d'un noyau au repos, est l'énergie qu'il faut fournir pour séparer les nucléons qui le constituent, ceux-ci se trouvant au repos dans l'état final.

1.5.2 Relation d'Einstein



Albert Einstein (1879- 1955)

Physicien Allemand, il élabore la théorie de la relativité et énonce la formule d'équivalence de la masse et de l'énergie.

L'énergie de liaison E_l d'un noyau liée à son défaut de masse Δm et à la célérité c de la lumière dans le vide par la formule d'Einstein :

$$E_l = |\Delta m|c^2$$

c est la célérité de la lumière dans le vide.

$$|\Delta m| = Zm_p + (A - Z)m_N$$

D'où :

$$E_l = [Zm_p + (A - Z)m_N]c^2$$

Le quotient $\frac{E_l}{A}$ est l'énergie de liaison par nucléon.

EXERCICE RESOLU

1° Calculer l'énergie de liaison de la particule α (noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}^{2+}$) de masse $m_\alpha = 4,00150\text{u}$. Donner le résultat en MeV.

On donne :

$$m_p = 1,007276\text{u} ; m_N = 1,008665\text{u}.$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$1\text{MeV} = 10^6 \text{ eV}$$

2° En déduire l'énergie de liaison par nucléon de la particule α .

3° On forme un noyau d'hélium au repos à partir de 2 neutrons et 2 protons séparés au repos. Calculer la variation de masse de l'ensemble des particules et l'énergie libérée par cette transformation.

Réponses

1° Energie de liaison du noyau d'hélium :

$$E_l = |\Delta m|c^2$$

$$|\Delta m| = 2m_p + (4 - 2)m_N - m_\alpha = 2 \times 1,007276 + 2 \times 1,008665 - 4,00150 = 30,38 \cdot 10^{-3} \text{ u}$$

En kilogrammes est : $\Delta m = 30,38 \cdot 10^{-3} \times 1,66 \cdot 10^{-27} = 5,04 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$

En conséquence : $E_l = \Delta mc^2 = 5,04 \cdot 10^{-29} \times (3 \cdot 10^8)^2 = 4,53 \cdot 10^{-12} \text{ J}$

En électronvolt (eV) : $E_l = \frac{4,53 \cdot 10^{-12}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 28,31 \cdot 10^6 \text{ eV} = 28,31 \text{ MeV}$

$$\boxed{E_l = 28,31 \text{ MeV}}$$

2° Energie de liaison par nucléon :

$$\frac{E_l}{A} = \frac{28,31}{4} = 7,08 \text{ MeV}$$

$$\boxed{\frac{E_l}{A} = 7,08 \text{ MeV}}$$

3° La variation de masse est :

$$\Delta m = m_\alpha - (2m_p + (4 - 2)m_N) = -30,38 \cdot 10^{-3} \text{ u}$$

$$\boxed{\Delta m = -30,38 \cdot 10^{-3} \text{ u}}$$

Il y a diminution de masse, ou défaut de masse. L'énergie totale se conservant, cela correspond à une énergie libérée de 28,31 MeV.

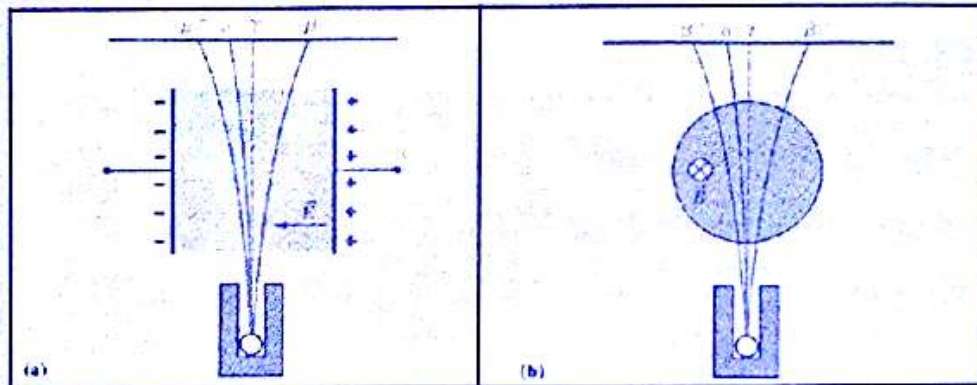
2 LES REACTIONS NUCLEAIRES

2.1 Les réactions nucléaires spontanées

2.1.1 Emissions radioactives

Les noyaux d'un certain nombre d'atomes naturels ou artificiels, se décomposent en émettant d'une part des particules, et d'autre part un rayonnement électromagnétique : le rayonnement γ . Ce phénomène est appelé **radioactivité**. La transformation est appelée **désintégration**.

Les particules ont été identifiées par l'étude de leur déviation dans un champ électrique \vec{E} (fig.a) ou dans un champ magnétique \vec{B} (fig.b). On distingue trois sortes de particules : les particules α , les particules β^- et les particules β^+ .

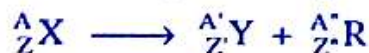


Séparations des particules émises par un mélange de substances radioactives

Les particules α sont des noyaux d'hélium ${}^4_2\text{He}^{2+}$ de masse $m_\alpha = 4,00150\text{u}$ et de charge $q = +3,2 \cdot 10^{-19}\text{C}$. Les particules β^- sont des électrons ${}^0_{-1}\text{e}$ de masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31}\text{kg}$ et de charge négative $q = -1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$. Les particules β^+ sont des positons ${}^0_{+1}\text{e}$ de masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31}\text{kg}$ et de charge positive $q = +1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$. Au rayonnement γ , sont associés des photons de très haute énergie.

2.1.2 Les lois de conservation en radioactivité

Dans toute désintégration radioactive, un noyau-père ${}^A_Z\text{X}$ se transforme en noyau-fils ${}^{A'}_{Z'}\text{Y}$ avec émission d'une particule ${}^{A''}_{Z''}\text{R}$ suivant l'équation bilan :



Au cours de cette transformation, il ya :

- Conservation du nombre total des nucléons :

$$\boxed{A = A' + A''}$$

- Conservation de la charge électrique :

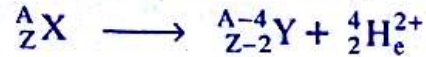
$$\boxed{Z = Z' + Z''}$$

- Conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie totale relativiste.

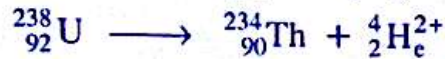
2.1.3 Les différentes sortes de radioactivité naturelle

• La radioactivité α

C'est une désintégration au cours de laquelle le noyau-père se transforme en noyau-fils avec émission d'un noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}^{2+}$ appelé particule α :



Exemple :



L'énergie libérée au cours d'une désintégration α est :

$$E = |\Delta m|c^2$$

Le défaut de masse Δm , est la différence de la somme des masses du noyau fils m_Y et de la particule α (m_α) à la masse m_X du noyau-père.

$$\Delta m = m_Y + m_\alpha - m_X \quad (\Delta m < 0)$$

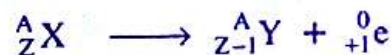
• La radioactivité β^-

C'est une désintégration au cours de laquelle le noyau-père se transforme en noyau-fils en émettant un électron ${}^0_{-1}\text{e}$:



• La radioactivité β^+

Au cours de cette désintégration le noyau-père se transforme en noyau-fils avec émission d'un positon ${}^0_{+1}\text{e}$:



• Désexcitation γ

Certains noyaux créés sont dans un état excité. Leur retour à l'état fondamental se fait avec émission d'un ou plusieurs photons de lumière (rayonnement γ). La désexcitation γ accompagne donc souvent les radioactivités α , β^- ou β^+ .

2.1.4 Famille radioactive

Si le noyau-fils créé est instable, il se désintègre à son tour à un autre radioélément qui, lui aussi pourrait se transformer en un autre noyau. La suite de désintégrations radioactives ne s'arrêtera qu'avec la formation d'un noyau stable. On appelle **famille radioactive**, l'ensemble des radioéléments qui proviennent du même noyau-père.

2.1.5 Evolution temporelle d'une substance radioactive

• Loi de décroissance

Considérons un échantillon comportant N_0 noyaux radioactifs à une date prise comme origine des dates. Soient N et $N+dN$ les nombres de noyaux présents aux dates t et $t+dt$ (dN est négatif). Entre ces deux instants, le nombre dN de noyaux désintégrés est proportionnel au nombre N de noyaux non désintégrés :

$$dN = -\lambda N dt$$

λ est une constante positive appelée constante radioactive du nucléide pour la

désintégration observée. Son unité est s^{-1} .

Par conséquent :
$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

Par intégration de cette dernière équation, on obtient :

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt$$

Soit :
$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \Rightarrow N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Le nombre N de noyaux présents à une date t est donc :

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

• **Période radioactive**

La **période** ou **demi-vie** T d'un radioélément est le temps au bout duquel la moitié des noyaux présents initialement est désintégrée.

Nous avons :
$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Si $N = \frac{N_0}{2}$, $t = T \Rightarrow \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}$

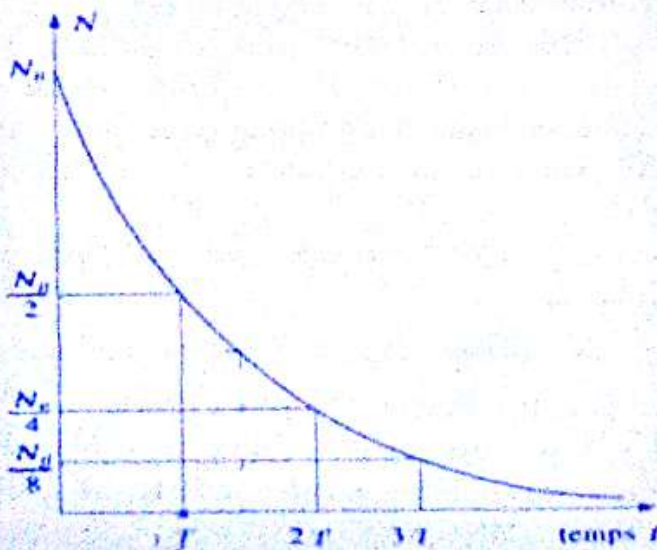
soit :
$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T} \Leftrightarrow 2 = e^{\lambda T}$$

Par la suite :
$$\ln 2 = \lambda T \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

• **Courbe de décroissance radioactive**

La courbe représentative de N en fonction du temps est appelée courbe de décroissance radioactive.



courbe exponentielle de décroissance radioactive

• Activité

On appelle **activité** A , le nombre moyen de désintégrations par seconde. (L'activité est l'opposé de la dérivée du nombre moyen de noyaux N par rapport au temps).

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

L'activité à l'instant initial est : $A_0 = \lambda N_0$

En conséquence :

$$A = A_0 e^{-\lambda t}$$

L'activité s'exprime en becquerel (Bq) quand le temps t est en secondes.

1Bq = 1 désintégration par seconde

2.2 Les réactions nucléaires provoquées

2.2.1 Définition

Une réaction nucléaire provoquée est une transformation obtenue par interaction entre noyaux ou par interaction entre un noyau et une particule.

On distingue deux sortes de radioactivité artificielle : la fusion nucléaire et la fission nucléaire.

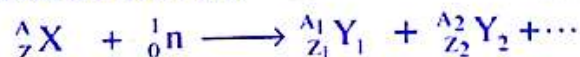
2.2.2 La fusion nucléaire

La fusion nucléaire est une transformation au cours de laquelle deux noyaux légers s'assemblent pour former un noyau un peu plus lourd en éjectant une particule.



2.2.3 La fission nucléaire

La fission nucléaire est la coupure d'un noyau très lourd par un projectile nucléaire qui est en général un neutron.



2.3 Applications de la radioactivité

- Archéologie : datation par le carbone-14
- Industrie : l'image d'une pièce métallique soumise à un rayonnement γ révèle et décèle des défauts de fabrication.
- Médecine :
 - Traitement des tumeurs cancéreuses par irradiation : le rayonnement γ émis par un corps radioactif permet de détruire les cellules localisées dans la tumeur cancéreuse.
 - Les radionucléides sont utilisés comme **traceurs**. Par exemple, si une personne absorbe l'iode 131, on pourra suivre le cheminement de l'iode au cours de son assimilation et contrôler le fonctionnement de la glande thyroïde.
- Domaines civils et militaires : production d'électricité et fabrications d'armes nucléaires (bombe atomique et bombe H).

1_ Famille radioactive

Le radium $^{226}_{88}\text{Ra}$ est un nucléide qui, à la suite de désintégrations successives de type α et β^- , conduit à un isotope stable de plomb $^{206}_{82}\text{Pb}$. On obtient une famille radioactive dont les éléments sont notés dans le tableau ci-dessous :

$^{226}_{88}\text{Ra}$	$^{222}_{86}\text{Rn}$	$^{210}_{84}\text{Po}$	$^{206}_{82}\text{Pb}$
------------------------	------------------------	------------------------	------------------------

1° La première désintégration est du type α . Ecrire l'équation-bilan de cette désintégration.

2° Déterminer les nombres de désintégration du type α et du type β^- permettant de passer du noyau $^{226}_{88}\text{Ra}$ au noyau $^{206}_{82}\text{Pb}$.

3° On considère le radon 222 comme un gaz parfait ; sa période est $T = 3,8$ jours. Une ampoule contient $0,2\text{cm}^3$ de radon 222 à la pression $P = 0,1\text{bar}$ et à la température de 30°C .

- a) Quelle est la constante radioactive du radon 222 ?
- b) Calculer l'activité initiale de cette ampoule.
- c) Que devient cette activité à la date $t = T$?

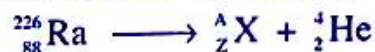
Données : constante d'Avogadro: $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{mol}^{-1}$

constante des gaz parfaits: $R = 8,32 \text{USI}$

Prendre: $1\text{bar} = 10^5 \text{Pa}$

Solution

1° L'équation générale de la première désintégration s'écrit :



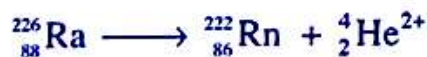
Traduisons la conservation du nombre des nucléons :

$$226 = A + 4 \Rightarrow A = 226 - 4 = 222$$

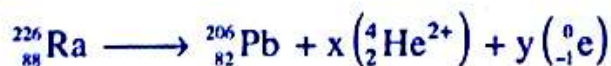
Traduisons la conservation de la charge électrique :

$$88 = Z + 2 \Rightarrow Z = 88 - 2 = 86$$

Le nucléide formé est donc le radon-222. L'équation bilan de la désintégration s'écrit donc :



2° Soient x le nombre de désintégrations du type α et y le nombre de désintégrations du type β^- . L'équation-bilan traduisant le passage du radium 226 au plomb 206 s'écrit :



Les équations de conservation donnent :

$$226 = 206 + 4x \Rightarrow x = \frac{226 - 206}{4} = 5$$

$$88 = 82 + 2x - y \Rightarrow y = 82 + 2 \times 5 - 88 = 4$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$$

3° a) La période a pour expression :

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

$$T = 3,8 \text{ j. Soit, en heures : } T = 3,8 \times 24 = 91,2 \text{ h}$$

$$\text{En secondes : } T = 91,2 \times 3600 = 3,28 \cdot 10^5 \text{ s}$$

$$\text{Donc : } \lambda = \frac{\ln 2}{3,28 \cdot 10^5} = 2,11 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

$$\lambda = 2,11 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

b) Déterminons d'abord le nombre de moles n du radon 222 contenu dans l'ampoule.

L'équation d'état des gaz parfaits est :

$$PV = nRT$$

$$\text{D'où : } n = \frac{PV}{RT}$$

$$\text{AN : } P = 0,1 \text{ bar} = 0,1 \cdot 10^5 \text{ Pa ; } V = 0,2 \text{ cm}^3 = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 ; T = 273 + 30^\circ = 303 \text{ K}$$

$$n = \frac{0,1 \cdot 10^5 \times 0,2 \cdot 10^{-6}}{8,32 \times 303} = 7,93 \cdot 10^{-7} \text{ mol}$$

Par ailleurs, le nombre de noyaux présents dans 1 mol de radon est $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$.
Par conséquent le nombre de noyaux contenu dans l'ampoule à l'instant initial est :

$$N_0 = n \times 6,02 \cdot 10^{23}$$

$$\text{soit : } N_0 = 7,93 \cdot 10^{-7} \times 6,02 \cdot 10^{23} = 4,77 \cdot 10^{17} \text{ noyaux}$$

L'activité à l'instant initial est :

$$A_0 = \lambda N_0$$

$$\text{soit : } A_0 = 2,11 \cdot 10^{-6} \times 4,77 \cdot 10^{17} = 10^{12} \text{ Bq}$$

$$A_0 = 10^{12} \text{ Bq}$$

c) L'activité varie suivant la loi :

$$A = A_0 e^{-\lambda t}$$

L'activité à la date $t = T$:

$$A = A_0 e^{-\lambda T}$$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \Rightarrow A = A_0 e^{-\ln 2} = A_0 e^{\ln \frac{1}{2}} = \frac{A_0}{2} = \frac{10^{12}}{2} = 5 \cdot 10^{11} \text{ Bq}$$

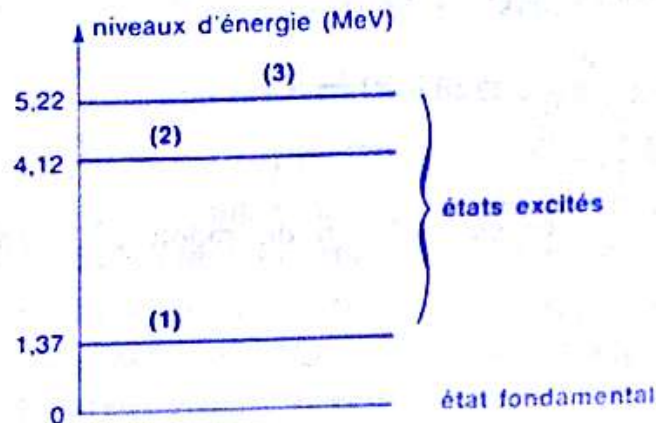
$$A = 5 \cdot 10^{11} \text{ Bq}$$

2_ Désintégration du nucléide ${}^{24}_{11}\text{Na}$

Le nucléide ${}^{24}_{11}\text{Na}$ est radioactif β^- . Sa désintégration donne le nucléide ${}^{24}_{12}\text{Mg}$.

1° Ecrire l'équation bilan de cette désintégration en indiquant les lois de conservation à respecter.

2° Le noyau fils peut apparaître sous différents états excités correspondant au diagramme des énergies suivant :



Quelles sont les longueurs d'onde des photons émis lors de la désexcitation des noyaux fils d'un état excité au niveau fondamental ?

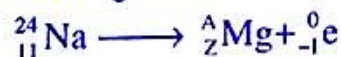
On donne : constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

1 mégaelectronvolt (MeV) = 10^6 eV

Solution

1° Equation bilan de la désintégration :



- Conservation du nombre total des nucléons :

$$24 = A + 0 \Rightarrow A = 24$$

- Conservation de la charge électrique :

$$11 = Z - 1 \Rightarrow Z = 11 + 1 = 12$$

D'où l'équation bilan : ${}^{24}_{11}\text{Na} \longrightarrow {}^{24}_{12}\text{Mg} + {}^0_{-1}\text{e}$

2° La transition du premier état excité d'énergie $E_1 = 1,37 \text{ MeV}$, à l'état fondamental d'énergie $E_0 = 0$, s'accompagne de l'émission d'un photon de

fréquence ν_1 , de longueur d'onde $\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1}$. L'énergie de ce photon est :

$$E_1 - E_0 = h\nu_1$$

$$E_0 = 0 \Rightarrow$$

$$E_1 = h\nu_1 = \frac{hc}{\lambda_1}$$

D'où :
$$\lambda_1 = \frac{hc}{E_1}$$

AN : $E_1 = 1,37 \text{ Mev} = 1,37 \cdot 10^6 \text{ ev}$. Sa valeur en joules est :

$$E_1 = 1,37 \cdot 10^6 \times 1,6 \cdot 10^{-19} = 2,192 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

En conséquence :
$$\lambda_1 = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{2,192 \cdot 10^{-13}} = 9,06 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

$$\lambda_1 = 9,06 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

• Longueur d'onde du photon émis lors de la transition du deuxième état excité d'énergie $E_2 = 4,12 \text{ Mev}$, à l'état fondamental :

$$\lambda_2 = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{4,12 \cdot 10^6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}} = 3,01 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

$$\lambda_2 = 3,01 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

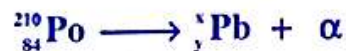
• Longueur d'onde du photon émis lors de la transition du troisième état excité d'énergie $E_3 = 5,22 \text{ Mev}$, à l'état fondamental :

$$\lambda_3 = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{5,22 \cdot 10^6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,38 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

$$\lambda_3 = 2,38 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

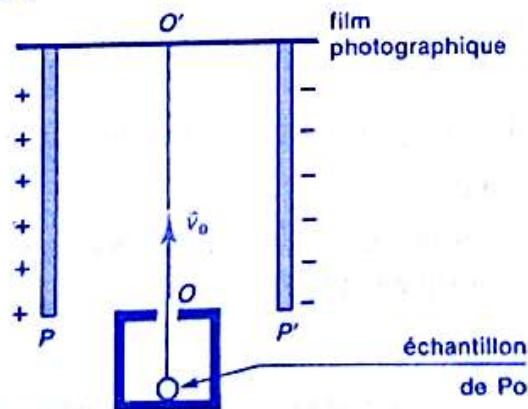
3_ Désintégration du polonium-210

Le polonium 210 est radioactif. L'équation bilan de sa désintégration s'écrit:



1° Indiquer, en les justifiant, les valeurs de x et y.

2° Pour déterminer l'énergie cinétique des particules α émises, on dévie un faisceau de ces particules par le champ électrostatique uniforme \vec{E} existant entre deux plaques P et P'



La vitesse d'entrée \vec{v}_0 des particules est orthogonale au champ. La différence de potentiel $V_P - V_{P'}$ est positive. La norme du champ est $E = 5 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Un film photographique est placé à la sortie des plaques, à 10 cm du point d'entrée O.

a) Reproduire la figure en indiquant le sens de \vec{E} et l'allure de la trajectoire des particules α .

b) Un impact est observé sur le film à 4,7mm du point O'. En déduire l'énergie cinétique (en Mev) des particules α correspondantes lors de leur émission par l'échantillon radioactif.

3° Calculer (en Mev) l'énergie libérée par la désintégration α étudiée.

4° Interpréter la différence entre les résultats numériques des questions 2 et 3 sachant qu'on observe simultanément l'émission d'un rayonnement γ .

Calculer la longueur d'onde du rayonnement γ .

Données :

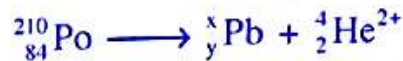
$$m_{\text{Po}} = 209,9368u; m_{\text{Pb}} = 205,9295u; m_{\alpha} = 4,00105u$$

$$\text{constante de Planck : } h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$\text{célérité de la lumière dans le vide : } c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Solution

1° Les particules α sont des noyaux d'hélium ${}^4_2\text{He}^{2+}$. L'équation de la désintégration s'écrit donc :



La conservation du nombre des nucléons impose :

$$210 = x + 4$$

D'où :

$$x = 210 - 4 = 206$$

La conservation de la charge électrique permet d'écrire :

$$84 = y + 2$$

D'où :

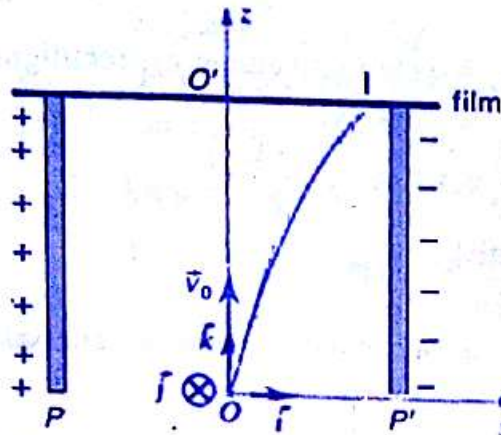
$$y = 84 - 2 = 82$$

$$x = 206$$

$$y = 82$$

2° a) Pour étudier la trajectoire des particules α , nous allons choisir un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié aux plaques, supposé galiléen, tel que $\vec{v}_0 = v_0 \vec{k}$. D'autre part, le trièdre $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct.

Les particules α , de charges positives sont entraînées dans le sens du champ. Elles sont donc déviées vers la plaque négative.



b) Les forces qui s'exercent sur chaque particule α sont : le poids et la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$. Le poids est négligeable devant la force électrique. D'après la relation fondamentale de la dynamique :

$$q\vec{E} = m\vec{a}$$

D'où:
$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

Les coordonnées de l'accélération dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont :

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = \frac{qE_x}{m} \\ a_y = \frac{qE_y}{m} \\ a_z = \frac{qE_z}{m} \end{cases}$$

Par ailleurs, le vecteur champ électrique \vec{E} est parallèle et de même sens que l'axe (o, \vec{i}) . Donc : $E_x = E$; $E_y = 0$ et $E_z = 0$. Par conséquent les coordonnées de l'accélération sont :

$$\vec{a} \begin{pmatrix} a_x = \frac{qE}{m} \\ a_y = 0 \\ a_z = 0 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de la vitesse initiale \vec{v}_0 sont :

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = 0 \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = v_0 \end{cases}$$

Projetons le mouvement suivant les axes de coordonnées :

- suivant ox : $\left(a_x = \frac{qE}{m} \text{ et } v_{0x} = 0 \right)$ le mouvement est rectiligne et uniformément

varié d'équation horaire : $x = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t = \frac{qE}{2m} t^2$

$$x = \frac{qE}{2m} t^2 \quad (1)$$

- suivant oy : $(a_y = 0 \text{ et } v_{0y} = 0.)$ Pas de mouvement suivant oz . Donc :

$$y = 0 \quad (2)$$

- suivant oz : $(a_z = 0 \text{ et } v_{0z} = v_0)$ le mouvement est rectiligne uniforme d'équation horaire : $z = v_{0z} t = v_0 t \quad (3)$

En éliminant t entre les équations (1) et (3), on obtient l'équation de la trajectoire des particules α :

D'après (3): $t = \frac{z}{v_0} \quad (4)$

Compte tenu de (4) l'équation (1) donne :

$$x = \frac{qEz^2}{2mv_0^2}$$

D'autre part, l'énergie cinétique d'une particule α lors de son émission est :

$$E_c = \frac{1}{2} mv_0^2$$

ou encore:

$$2E_c = mv_0^2$$

Par conséquent t:

$$x = \frac{qEz^2}{4E_c}$$

On en déduit :

$$E_c = \frac{qEz^2}{4x}$$

Application numérique :

$$q = 2e = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C} ; x = OI = 4,7 \text{ mm} = 4,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$z = 10 \text{ cm} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$E_c = \frac{3,2 \cdot 10^{-19} \times 5 \cdot 10^6 \times (10^{-1})^2}{4 \times 4,7 \cdot 10^{-3}} = 8,51 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

En électronvolts,

$$E_c = \frac{8,51 \cdot 10^{-13}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 5,32 \cdot 10^6 \text{ eV}$$

1 mégaelectronvolt (Mev) = 10^6 ev. Donc : $E_c = 5,32 \text{ Mev}$

$$\boxed{E_c = 5,32 \text{ MeV}}$$

3° L'énergie libérée lors de la désintégration du polonium 210 est

$$E = |\Delta m|c^2$$

Le défaut de masse est : $\Delta m = m_{\text{Pb}} + m_{\alpha} - m_{\text{Po}}$

soit : $\Delta m = 205,9295 + 4,00150 - 209,9368 = -0,0058u$

En kilogrammes, $|\Delta m| = 0,0058 \times 1,66 \cdot 10^{-27} = 9,63 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$

En conséquence : $E = 9,63 \cdot 10^{-30} \times (3 \cdot 10^8)^2 = 8,67 \cdot 10^{-13} \text{ J}$

soit, en électronvolts : $E = \frac{8,62 \cdot 10^{-13}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 5,42 \cdot 10^6 \text{ eV} = 5,42 \text{ MeV}$

$$\boxed{E = 5,42 \text{ MeV}}$$

4° L'énergie libérée est supérieure à l'énergie cinétique. La différence s'explique par le fait que le noyau de plomb Pb créé se trouve dans un état excité Pb*. Ce noyau émet un photon γ en retombant dans l'état fondamental. L'énergie du photon γ est:

$$E - E_c = \frac{hc}{\lambda}$$

D'où : $\lambda = \frac{hc}{E - E_c}$

soit : $\lambda = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{8,67 \cdot 10^{-13} - 8,51 \cdot 10^{-13}} = 1,24 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

$$\boxed{\lambda = 1,24 \cdot 10^{-11} \text{ m}}$$

4_ Fission nucléaire

Sous l'action d'un neutron incident, d'énergie cinétique faible, un noyau d'uranium ${}_{92}^{235}\text{U}$ éclate en produisant deux nucléides stables ${}_{40}^{91}\text{Zr}$ et ${}_{58}^{142}\text{Ce}$, ainsi que des neutrons et des électrons.

1° Ecrire l'équation bilan de la réaction nucléaire en rappelant les lois de conservation utilisées.

2° En négligeant l'énergie cinétique du neutron incident, calculer en MeV, l'énergie libérée lors de la fission d'un noyau d'uranium 235.

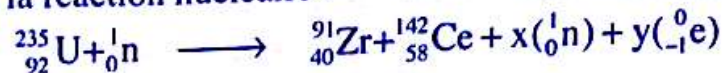
Les énergies de liaison par nucléon sont de 7,70 MeV pour l'uranium; 8,80 MeV pour le nucléide ${}_{40}^{91}\text{Zr}$ et 8,45 MeV pour le noyau ${}_{58}^{142}\text{Ce}$.

3° Calculer l'énergie libérée par cette réaction nucléaire lorsqu'un kilogramme d'uranium 235 se désintègre.

Constante d'Avogadro : $N = 6,02 \cdot 10^{23}$

Solution

1° Equation bilan de la réaction nucléaire :



Conservation du nombre des nucléons :

$$235 + 1 = 91 + 142 + x$$

D'où :

$$x = 236 - 233 = 3$$

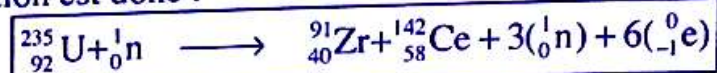
Conservation de la charge électrique :

$$92 = 40 + 58 - y$$

soit :

$$y = 98 - 92 = 6$$

L'équation de la réaction est donc :



2° L'énergie ΔE libérée lors de la fission d'un noyau d'uranium 235 est la somme des énergies ΔE_1 nécessaire pour séparer les 235 nucléons de l'uranium et ΔE_2 pour former les nucléides ${}_{40}^{91}\text{Zr}$ et ${}_{58}^{142}\text{Ce}$ à partir des protons et des neutrons séparés :

$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2$$

soit :

$$\Delta E = E_r(\text{U}) - E_r(\text{Zr}) - E_r(\text{Ce})$$

$$\Delta E = 235 \times 7,70 - 91 \times 8,80 - 142 \times 8,45 = -191,2 \text{ MeV}$$

$$\boxed{\Delta E = -191,2 \text{ MeV}}$$

3° L'énergie libérée par la fission d'un noyau d'uranium 235 est :

$$|\Delta E| = 191,2 \text{ MeV} = 191,2 \cdot 10^6 \text{ eV.}$$

En joules,

$$|\Delta E| = 191,2 \cdot 10^6 \times 1,6 \cdot 10^{-19} = 3,06 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

L'énergie libérée par la réaction d'une mole d'uranium est :

$$|\Delta \mathcal{E}| = 3,06 \cdot 10^{-11} \times 6,02 \cdot 10^{23} = 1,84 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

La quantité de matière en moles de 1 kilogramme (1000g) d'uranium 235 est :

$$n = \frac{1000}{235} = 4,26 \text{ mol}$$

L'énergie libérée par la fission de 1kg d'uranium est par conséquent :

$$\mathcal{E} = n|\Delta \mathcal{E}| = 4,26 \times 1,84 \cdot 10^{13} = 7,84 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = 7,84 \cdot 10^{13} \text{ J}}$$

CHIMIE ORGANIQUE

1 STEREOCHIMIE

1.1 Rappels

1.1.1 Isomérisation

On appelle isomères, des composés qui ont même formule brute, mais de formules développées différentes.

Exemple :

$\text{CH}_3\text{-CH}_2\text{OH}$ et $\text{CH}_3\text{-O-CH}_3$ sont des isomères de la formule brute $\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$.

1.1.2 Les différentes sortes d'isomérisation plane

On distingue trois sortes d'isomérisation de constitution : l'isomérisation de chaîne, l'isomérisation de position et l'isomérisation de fonction.

• *On appelle isomères de chaîne, des isomères qui ne diffèrent que par la structure de leurs chaînes carbonées.*

Exemple : deux isomères de chaîne de $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$

$\text{CH}_3\text{-CH}_2\text{-CH}_2\text{-CH}_2\text{-OH}$ (chaîne linéaire)

$\text{CH}_3\text{-CH(CH}_3\text{)-CH}_2\text{-OH}$ (chaîne ramifiée)



• *On appelle isomères de position, des isomères dont les molécules diffèrent par la position d'une même fonction chimique sur la même chaîne carbonée.*

Exemple : deux isomères de position de $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$

$\text{CH}_3\text{-CH}_2\text{-CH}_2\text{-CH}_2\text{OH}$ (alcool primaire)

$\text{CH}_3\text{-CH}_2\text{-CHOH-CH}_3$ (alcool secondaire)

• *On appelle isomères de fonction, des isomères dont les molécules diffèrent par la nature de leur fonction chimique.*

Exemple : deux isomères de fonction de $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$

$\text{CH}_3\text{-CH}_2\text{-CH}_2\text{-CH}_2\text{OH}$ (fonction alcool)

$\text{CH}_3\text{-CH}_2\text{-O-CH}_2\text{-CH}_3$ (éther-oxyde)

1.1.2 Le carbone tétraédrique

• Définition

Un carbone tétraédrique est un atome de carbone qui échange quatre liaisons simples avec quatre atomes distincts.

• Représentation spatiale

Le carbone tétraédrique se trouve au centre d'un tétraèdre régulier dont les sommets sont occupés par les quatre voisins.

Pour représenter sur un plan un atome de carbone tétraédrique, on a l'habitude de représenter les liaisons selon les conventions suivantes ;

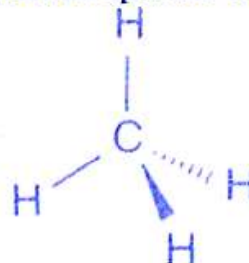
– un **trait plein** représente une liaison entre deux atomes situés dans le plan de la figure.

– un **triangle allongé plein** représente une liaison entre un atome dans le plan de la figure et un atome au dessus de ce plan.

– un **triangle allongé hachuré** représente une liaison entre un atome dans le plan de la figure et un atome en arrière de ce plan.

Exemple :

La molécule du méthane CH_4 possède un atome de carbone tétraédrique. Sa représentation spatiale est la suivante :



1.2 Stéréochimie

1.2.1 Définition

La stéréochimie est l'étude de la structure spatiale des molécules.

Les **stéréo-isomères** sont des composés de même constitution qui ne diffèrent que par la disposition de leurs atomes dans l'espace.

1.2.2 Généralités

• Conformation

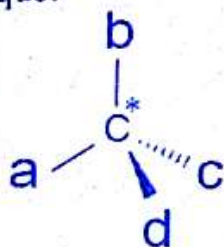
On appelle **conformations** d'une molécule, les différentes structures spatiales qu'elle peut prendre par suite de rotations autour de ses liaisons simples.

• Configuration

Une **configuration** d'une molécule de constitution définie, est une disposition de ses atomes dans l'espace, sans tenir compte des dispositions qui ne diffèrent que par rotations autour d'une ou plusieurs liaisons simples.

• Carbone asymétrique

Un **carbone asymétrique** est un atome de carbone tétraédrique lié à quatre atomes ou groupes tous différents. Dans une formule on marque habituellement le carbone asymétrique par un astérisque.



• Chiralité

La **chiralité** est la propriété d'un objet de ne pas être superposable à son image dans un miroir.

Toute molécule présentant un atome de carbone asymétrique est chirale.

1.2.3 Les différents groupes de stéréo-isomères

On distingue deux groupes de stéréo-isomères : les **isomères de configuration** et les **isomères de conformation**.

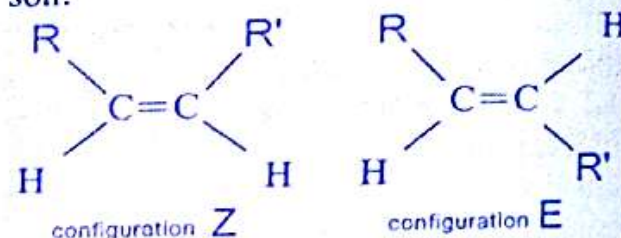
• Isomérisation de configuration

On distingue deux types d'isomérisation de configuration : l'isomérisation **Z/E** et

l'**énantiomérisation** encore appelée isomérisation optique.

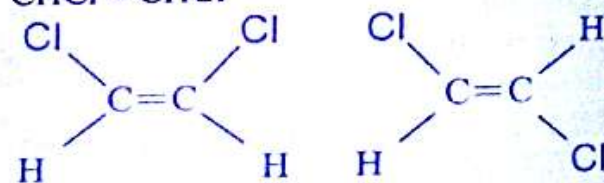
- Isomérisation Z/E (isomérisation géométrique)

Les alcènes de formule générale $R-CH=CH-R'$ peuvent avoir deux configurations qui dépendent des positions des deux atomes d'hydrogène portés par la double liaison. On a la **configuration Z** (Zusammen) si les deux atomes d'hydrogène portés par la double liaison sont placés d'un même côté ; la **configuration est dite E** (Entgegen) si les deux atomes d'hydrogène sont de part et d'autre de la double liaison.



Exemple :

Configurations du 1,2-dichloroéthylène
 $CHCl=CHCl$



(Z) 1,2-dichloroéthylène (E) 1,2-dichloroéthylène

- Enantiomérisation (isomérisation optique)

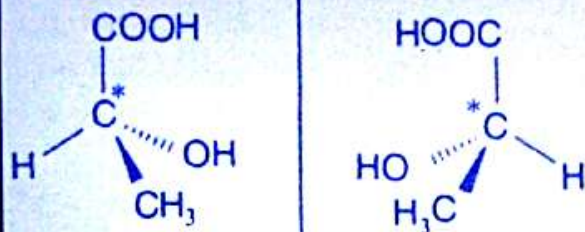
L'**énantiomérisation** est la relation existant entre deux isomères de configuration, image l'un de l'autre dans un miroir et non superposables.

On appelle **énantiomères** un couple d'isomères de configuration, images l'un de l'autre dans un miroir et non superposables.

A toute formule plane comportant un atome de carbone asymétrique, correspond un couple d'énantiomères.

Exemple :

$CH_3-^*CHOH-COOH$ (acide lactique) présente deux énantiomères qui sont :

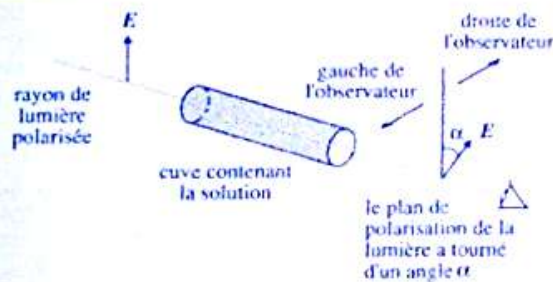


Un mélange racémique est un mélange en quantités égales de deux énantiomères.

Activité optique

On dit qu'une substance est optiquement active, ou encore qu'elle possède un pouvoir rotatoire, si elle peut faire tourner le plan de polarisation de la lumière.

Pour un observateur recevant le rayon lumineux dans l'œil, le plan de polarisation est dévié vers sa droite ou vers sa gauche.



Rotation du plan de polarisation de la lumière par une solution

Si on dispose de deux solutions de même concentration de deux énantiomères, l'une provoquera la rotation du plan de polarisation de la lumière vers la droite d'un certain angle α , et l'autre, dans les mêmes conditions, provoquera la rotation du plan de polarisation de la lumière du même angle α vers la gauche.

L'angle α est proportionnel à la longueur l de la cuve et à la concentration c de la solution. Sa formule est donnée par la loi de Biot.

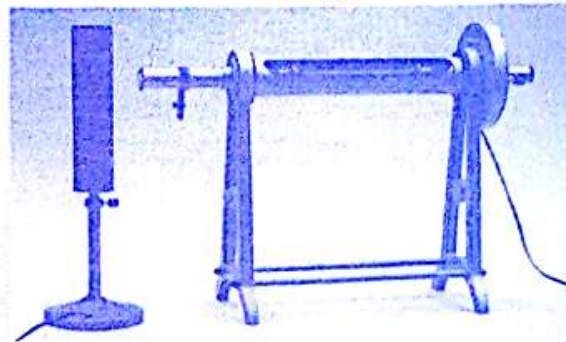
$$\alpha = [\alpha] \cdot c \cdot l$$

$[\alpha]$ est appelé pouvoir rotatoire spécifique.

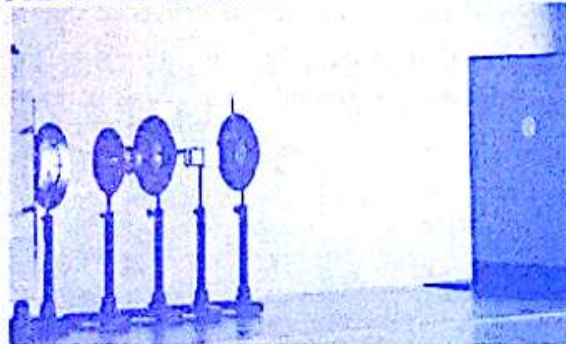
On appelle dextrogyre l'énantiomère provoquant la rotation de la lumière polarisée vers la droite de l'observateur.

On appelle lévogyre l'énantiomère provoquant la rotation de la lumière polarisée vers la gauche de l'observateur.

Si M est une molécule chirale, son énantiomère dextrogyre est noté M·(+), et son énantiomère lévogyre M·(-).



Polarimètre de Laurent

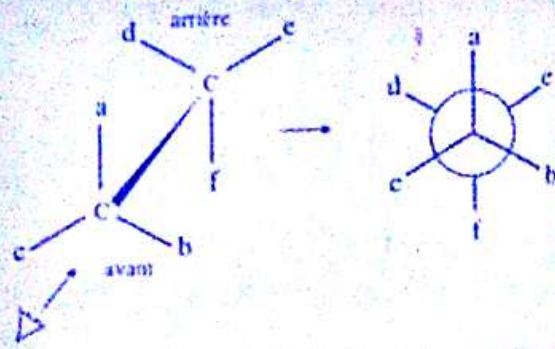


On appelle diastéréoisomères, un couple d'isomères de configuration dont les molécules ne sont pas images l'une de l'autre dans un miroir.

• Isomérisation de conformation

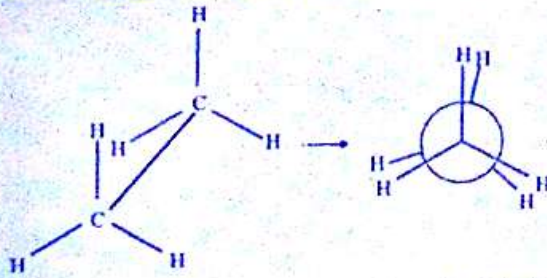
- Représentation de Newman d'une molécule

On regarde une molécule le long d'une liaison simple C—C et on projette ce que l'on voit sur un plan en imaginant un disque opaque au milieu de la liaison C—C et centré sur celle-ci.



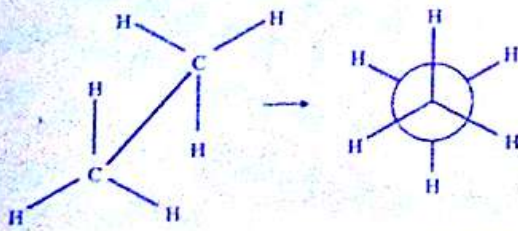
Conformations de l'éthane $\text{CH}_3\text{—CH}_3$
 Par rotation autour de la liaison C—C, la molécule d'éthane peut donner plusieurs configurations.

Si les atomes d'hydrogène de la molécule sont les uns en face des autres, la conformation est **éclipsée**.



conformation éclipsée

Si les atomes d'hydrogène sont éloignés les uns des autres, la conformation est dite **étoilée** ou **décalée**.



conformation étoilée

La conformation étoilée est la plus stable (c'est dans cette conformation que les molécules d'éthane se trouveront le plus souvent).

Les **conformères** ou **isomères de conformations**, sont deux molécules identiques dans des conformations différentes.

1_ Configurations du pent-3-ène-2-ol

On s'intéresse aux différentes configurations que peut prendre le pent-3-ène-2-ol de formule $\text{CH}_3\text{-CH}=\text{CH-CHOH-CH}_3$

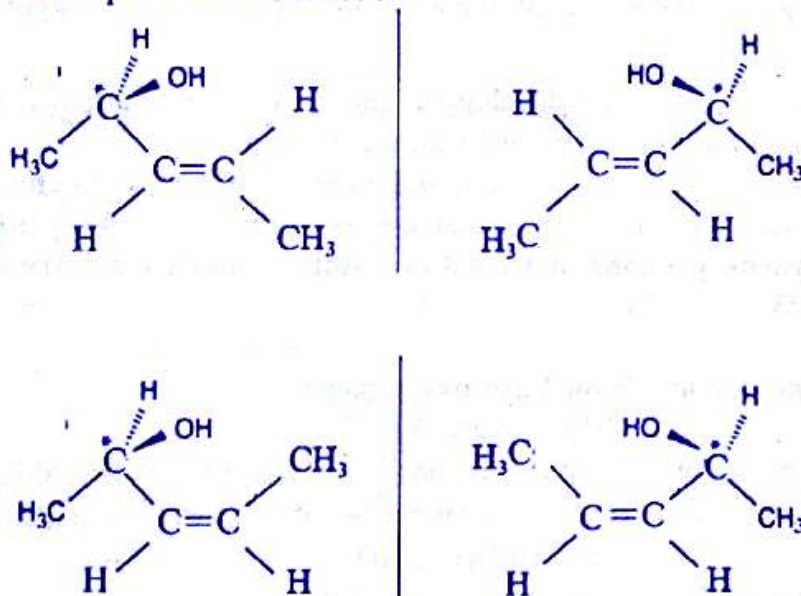
1° Sous combien de configurations différentes cette molécule peut-elle exister ? Représenter et nommer les configurations autour de la double liaison.

2° On traite la molécule par du dihydrogène en présence d'un catalyseur le nickel. On obtient un composé X. Sous combien de configurations la molécule X peut-elle exister ? Représenter ces configurations.

3° On traite X par une solution de dichromate de potassium acidifiée par l'acide sulfurique. On obtient le composé Y. Quelle réaction le corps X subit-il ? Sous combien de configurations différentes la molécule Y peut-elle exister ?

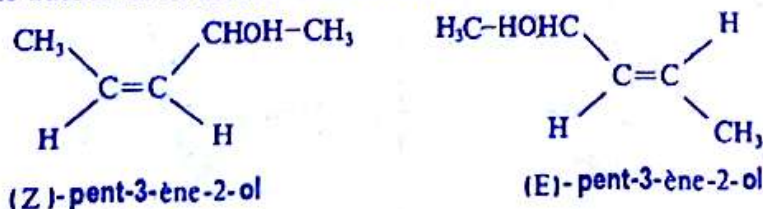
Solution

1° La molécule du pent-3-ène-2-ol possède une double liaison éthylénique et un carbone asymétrique. Avec la double liaison nous avons l'isomérie Z/E. A chaque isomère (Z ou E) correspond un couple d'énantiomères :

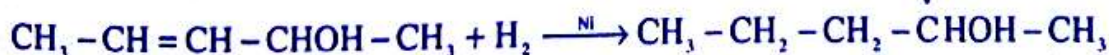


Donc la molécule du pent-3-ène-2-ol peut exister sous quatre configurations.

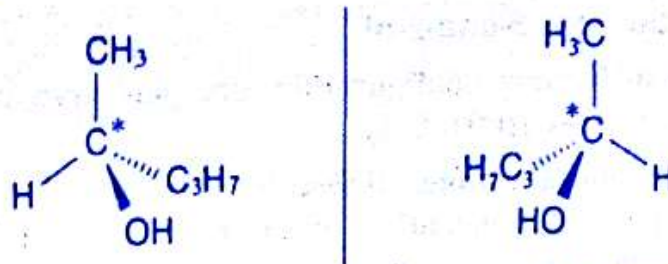
Les configurations autour de la double liaison sont :



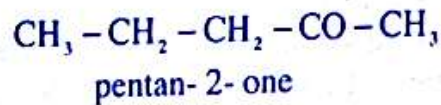
2° Traité par du dihydrogène, le pent-3-ène-2-ol donne un composé saturé : le pentan-2-ol qui possède un atome de carbone asymétrique :



Le pentan-2-ol peut exister sous la forme de 2 énantiomères :



3° Le pentan-2-ol subit une oxydation ménagée. Le composé Y obtenu est une cétone : le pentan-2-one.



Y est une molécule achirale à une seule configuration.

2_ Stéréochimie du 2-hydroxypropanal

1° On s'intéresse aux différentes configurations de la molécule du 2-hydroxypropanal de formule brute $\text{C}_3\text{H}_6\text{O}_2$.

a) Quelle est la formule semi-développée du 2-hydroxypropanal ? Indiquer les différentes fonctions chimiques présentes dans cette molécule.

b) Cette molécule est-elle chirale ? Pourquoi ? Si oui représenter ses énantiomères.

2° Faire les représentations de Newman des conformations que peut prendre la molécule du 2-hydroxypropanal par rotation autour de la liaison entre les atomes de carbone n°2 et n°3.

Solution

1° a) Formule semi- développée du 2-hydroxypropanal :

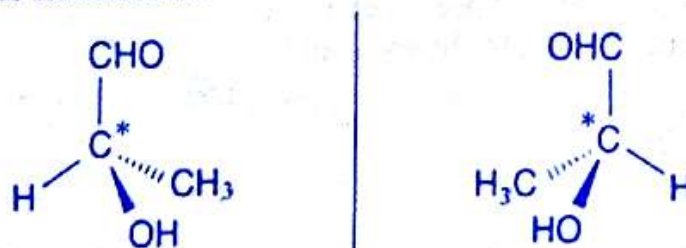


Les fonctions chimiques présentes sont : la fonction alcool et la fonction aldéhyde.

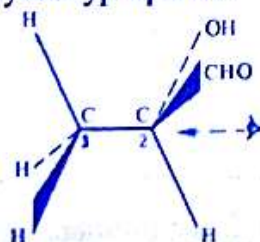
b) La molécule est chirale parce qu'elle contient un atome de carbone asymétrique.



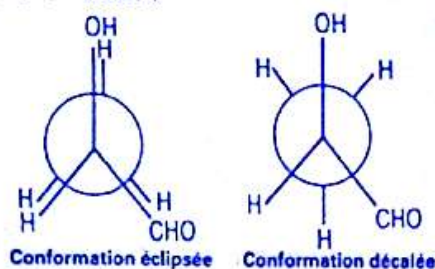
Représentations des énantiomères :



2° Les conformations du 2-hydroxypropanal :



Représentations de Newman :



3_ Stéréo-isomères d'un alcène

Un alcène de formule C_nH_{2n} présentant deux stéréo-isomères A et A', conduit par hydratation, à un composé oxygéné B renfermant en masse 21,6% d'oxygène.

1° Déterminer la formule brute de B.

2° Ecrire toutes les formules semi développées possibles par B et nommer chacune d'elles.

3° Quelle formule semi développée convient à B sachant que sa molécule est chirale ?

4° Représenter et nommer les stéréo-isomères A et A'.

Solution

1° L'hydratation d'un alcène C_nH_{2n} conduit à un alcool selon l'équation bilan :



Soit M la masse molaire de l'alcool de formule $C_nH_{2n+2}O$. Dans une mole d'un tel composé on a 16 grammes d'oxygène, d'où :

$$\frac{16}{\%O} = \frac{M}{100}$$

D'où :

$$M = \frac{16 \times 100}{\%O}$$

AN :

$$M = \frac{1600}{21,6} = 74 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

D'autre part:

$$M(C_nH_{2n+2}O) = 12n + 2n + 2 + 16 = 14n + 18$$

Donc :

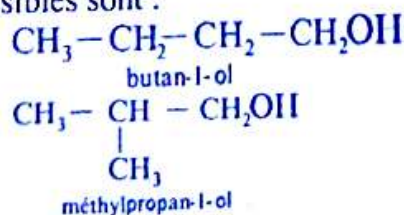
$$74 = 14n + 18$$

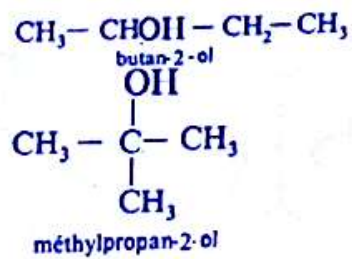
d'où:

$$n = \frac{74 - 18}{14} = 4$$

B a donc pour formule brute $C_4H_{10}O$

2° Les alcools isomères possibles sont :

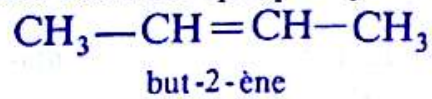




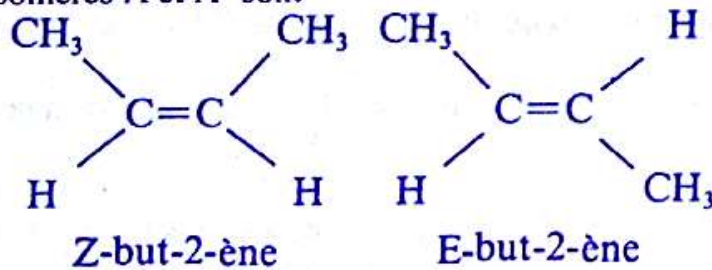
3° La molécule de B est chirale. Elle possède donc un carbone asymétrique. La formule qui convient est :



4° L'alcène correspondant est le but-2-ène qui, par hydratation donne un seul alcool :



Les deux stéréo-isomères A et A' sont



2 LES ALCOOLS

2.1 Définition

Un alcool est un composé organique possédant un groupe hydroxyle $-OH$ lié à un atome de carbone tétragonal.

L'atome de carbone qui porte le groupe $-OH$ est appelé **carbone fonctionnel**.

La formule générale des alcools est $R-OH$, où R est un groupe carboné.

Si, en plus R est un groupe alkyle $C_nH_{2n+1}-$, l'alcool est dit saturé. La formule générale des alcools saturés est $C_nH_{2n+1}OH$. Leur formule brute est $C_nH_{2n+2}O$.

2.2 Les différentes classes des alcools

On distingue trois classes d'alcools : les alcools primaires, les alcools secondaires et les alcools tertiaires.

– Un alcool est primaire si un seul groupe carboné R est lié au carbone fonctionnel.

La formule générale des alcools primaires est $R-CH_2OH$

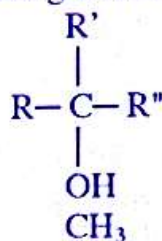
Exemple : $CH_3-CH_2-CH_2OH$ (propan-1-ol)

– Un alcool est secondaire si deux groupes carbonés R et R' sont liés au carbone fonctionnel. La formule générale des alcools secondaires est $R-CHOH-R'$

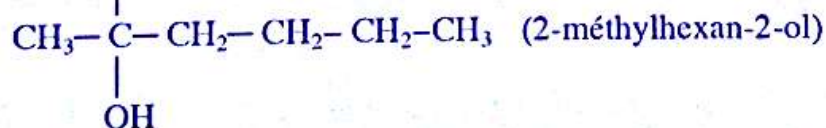
Exemple : $CH_3-CHOH-CH-CH_2-CH_3$ (3-méthylpentan-2-ol)



– Un alcool est tertiaire si trois groupes carbonés R , R' et R'' sont liés au carbone fonctionnel. La formule générale des alcools tertiaires est :



Exemple :



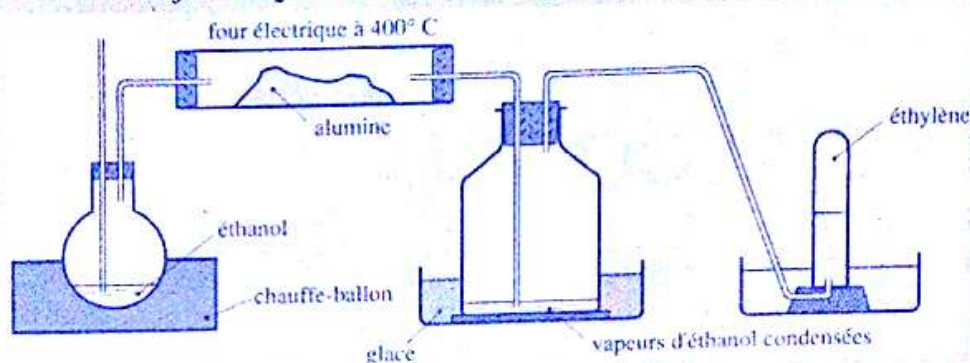
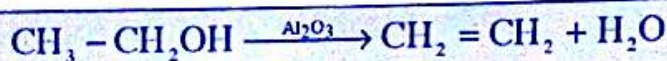
2.3 Réactions des alcools

2.3.1 Déshydratations des alcools

Les alcools subissent deux types de déshydratation : la déshydratation intramoléculaire et la déshydratation intermoléculaire.

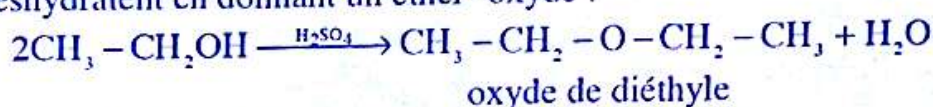
– **Déshydratation intramoléculaire**

En présence d'alumine Al_2O_3 vers $400^\circ C$, la déshydratation d'un alcool conduit à un alcène.



- Déshydratation intermoléculaire

Par chauffage modéré vers 140°C en présence d'acide sulfurique concentré, les alcools se déshydratent en donnant un éther- oxyde :



2.4 Oxydations des alcools

2.4.1 Oxydation totale : combustion

Comme la plupart des composés organiques, les alcools brûlent dans l'air suivant une réaction **très exothermique** d'équation générale :

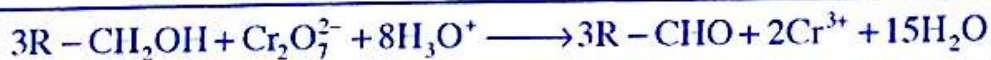
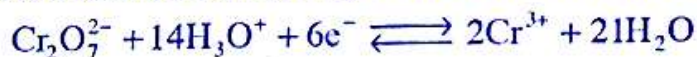


2.4.2 Oxydations ménagées des alcools

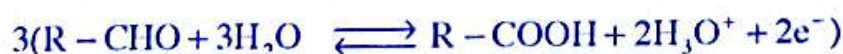
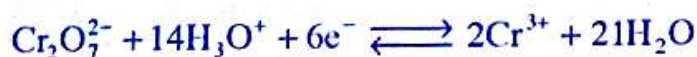
Les oxydants comme le dichromate de potassium $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ ou le permanganate de potassium KMnO_4 , en milieu acide transforment les alcools en substances variées. Le produit de la réaction est fonction de la classe de l'alcool.

- Action du dichromate de potassium sur un alcool primaire

Un alcool primaire est transformé en **aldéhyde** $\text{R}-\text{CHO}$ suivant l'équation bilan :

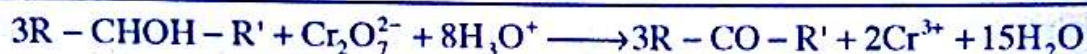
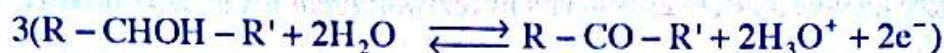
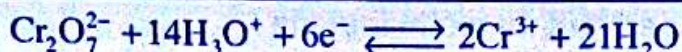


En présence d'un excès d'oxydant, l'aldéhyde est transformé en **acide carboxylique** $\text{R}-\text{COOH}$:



- Action du dichromate de potassium sur un alcool secondaire

L'oxydation ménagée d'un alcool secondaire conduit à une **cétone** $\text{R}-\text{CO}-\text{R}'$ suivant l'équation bilan :



- Action du dichromate de potassium sur un alcool tertiaire

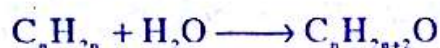
Un alcool tertiaire ne subit pas d'oxydation ménagée : un alcool tertiaire **ne donne rien**.

NB :

- En présence d'un aldéhyde ou d'une cétone, la **2,4-dinitrophénylhydrazine (DNPH)** donne un précipité jaune.
- La **liqueur de Fehling** donne avec un aldéhyde un précipité rouge mais est sans action sur une cétone.
- Le **nitrate d'argent ammoniacal** encore appelé **réactif de Tollens** (ou **réactif de Schiff**), incolore devient rose violacé en présence d'un aldéhyde mais est sans action sur une cétone.

2.5 Obtention des alcools

L'hydratation d'un alcène en présence d'acide sulfurique conduit à un alcool selon l'équation:

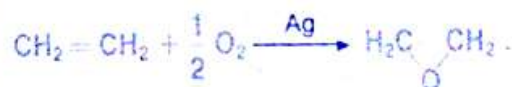


On obtient généralement un mélange de deux alcools de classes différentes (On obtient en grande quantité l'alcool de la classe la plus élevée et des traces de l'autre).

2.6 Les polyalcools

Un polyalcool ou polyol, est un composé organique possédant plusieurs groupes hydroxyles $-\text{OH}$ liés à des carbones tétraédriques.

2.6.1 L'éthan-1,2-diol ou glycol $\text{CH}_2\text{OH} - \text{CH}_2\text{OH}$ est obtenu à partir de l'éthylène. On obtient d'abord l'oxyde d'éthyle :



L'hydratation de l'oxyde d'éthyle conduit au glycol :



Il sert à la fabrication de polyesters (macromolécules utilisées comme fibres textiles). Les dérivés nitrés du glycol sont des explosifs. Le glycol est aussi utilisé comme antigel (en ajoutant du glycol à l'eau, celle-ci reste liquide à une température inférieure à 0°C).

- Le propan-1,2,3-triol ou glycérol $\text{CH}_2\text{OH} - \text{CHOH} - \text{CH}_2\text{OH}$

Le glycérol est utilisé dans l'industrie des cosmétiques. Il sert également à la fabrication d'explosifs.

1_ Les alcools dérivant du méthylbutane

Quatre alcools A, B, C et D dérivent formellement du méthylbutane.

1° Ecrire les formules semi-développées possibles de ces quatre alcools en précisant leurs noms.

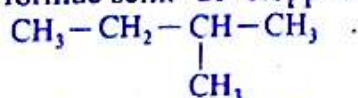
2° a) A partir des renseignements indiqués dans le tableau ci-dessous identifier les alcools A, B, C et D en justifiant les réponses.

Alcool	Stéréochimie	Produits obtenus par oxydation ménagée	Tests des produits d'oxydation	
			DNPH	Liqueur de Fehling
A	carbone asymétrique	A'	Précipité jaune	Précipité rouge
B	carbone asymétrique	B'	Précipité jaune	Rien
C		C'	Précipité jaune	Précipité rouge
D				

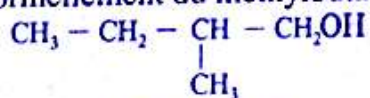
b) Quelles sont les formules semi-développées des produits A' ; B' et C' ?

Solution

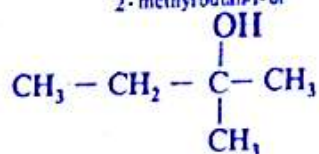
1° Le méthylbutane a pour formule semi-développée :



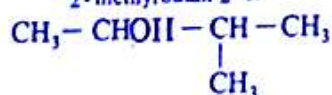
Les alcools qui dérivent formellement du méthylbutane sont :



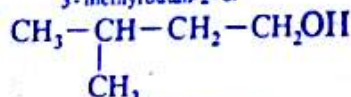
2-méthylbutan-1-ol



2-méthylbutan-2-ol

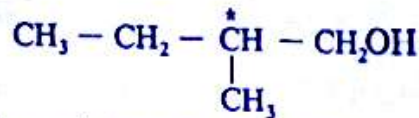


3-méthylbutan-2-ol



3-méthylbutan-1-ol

2° a) A est un alcool primaire qui donne par oxydation ménagée un aldéhyde (un aldéhyde réagit avec la DNPH et la liqueur de Fehling). En plus A possède un atome de carbone asymétrique. A est donc le 2-méthylbutan-1-ol :



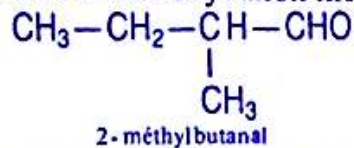
B est un alcool secondaire qui donne par oxydation ménagée une cétone (une cétone réagit avec la DNPH mais est sans action sur la liqueur de Fehling). En plus B possède un atome de carbone asymétrique : c'est le 3-méthylbutan-2-ol



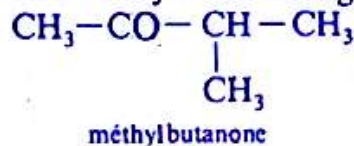
C est un alcool primaire ne possédant pas de carbone asymétrique : le 3-méthylbutan-1-ol

D est un alcool tertiaire qui ne donne rien par oxydation ménagée : le 2-méthylbutan-2-ol

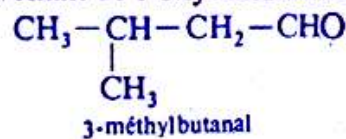
b) A' est l'aldéhyde provenant de l'oxydation ménagée du 2-méthylbutan-1-ol :



B' est la cétone dérivant de l'oxydation ménagée du 3-méthylbutan-2-ol :



C' est l'aldéhyde provenant de l'oxydation ménagée du 3-méthylbutan-1-ol :



2_ Isomères d'un alcool A de formule $\text{C}_x\text{H}_y\text{O}$

Un composé A de formule $\text{C}_x\text{H}_y\text{O}$, contient en masse 64,86% de carbone. Sa densité de vapeur est $d = 2,55$.

1° Trouver la formule brute de A.

2° A est un alcool.

a) Ecrire les formules semi-développées possibles.

b) A est optiquement actif. Quelle est sa formule développée ? Représenter ses stéréo-isomères.

c) Quelle masse d'un produit B obtient-on si on oxyde 29,6g de A par le dichromate de potassium en excès en milieu acide ?

$$M(\text{H}) = 1\text{g} \cdot \text{mol}^{-1} ; M(\text{C}) = 12\text{g} \cdot \text{mol}^{-1} ; M(\text{O}) = 16\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Solution

1° 1° La formule brute :

$$M = 29d = 29 \times 2,55 = 74\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\frac{12x}{\%C} = \frac{M}{100} \Rightarrow x = \frac{\%C \times M}{1200} = \frac{64,86 \times 74}{1200} = 4$$

D'autre part :

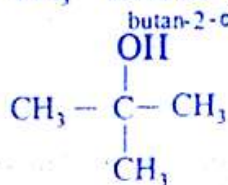
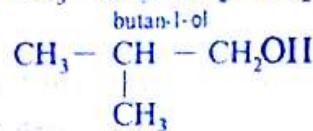
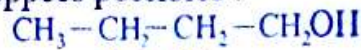
$$M(C_xH_yO) = 74$$

Soit : $12x + y + 16 = 74$

$$y = 74 - 12 \times 4 - 16 = 10$$

La formule brute de A est $C_4H_{10}O$

b) Les formules semi-développées possibles :

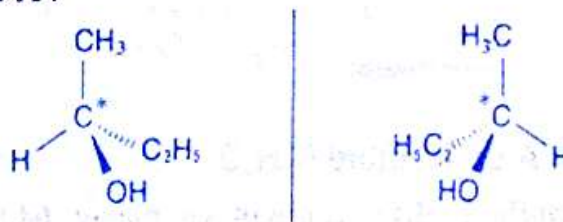


méthylpropan-2-ol

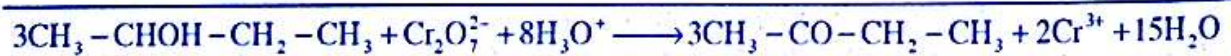
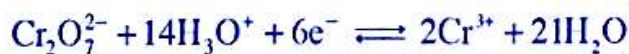
2° a) A est optiquement actif. Sa molécule contient un atome de carbone asymétrique. A est donc le butan-2-ol :



Les stéréo-isomères de A :



Masse du produit B



(A)

(B)

Stœchiométrie :

$$\frac{n_A}{3} = \frac{n_B}{3} \Rightarrow n_A = n_B$$

soit :

$$\frac{m(A)}{M(A)} = \frac{m(B)}{M(B)}$$

D'où :

$$m(B) = \frac{m(A) \times M(B)}{M(A)} = \frac{29,6 \times 72}{74} = 28,8g$$

$$m(B) = 28,8g$$

3_ Combustion complète d'un composé de formule C_xH_yO

La combustion complète de 3,6g d'un composé organique liquide A de formule brute C_xH_yO dégage de la vapeur d'eau et un volume $V = 4,8L$ de dioxyde de carbone.

1° Ecrire l'équation bilan de la réaction en fonction de x et y.

2° La densité de vapeur de ce composé est $d = 2,48$. Déterminer x et y ; en déduire la formule brute de A.

3° Si l'on verse quelques gouttes de la substance A dans un tube à essai contenant de la 2,4-dinitrophénylhydrazine (DNPH), on obtient un précipité jaune.

a) Quelles sont les formules semi-développées que l'on peut envisager pour A? Indiquer également les noms des produits correspondant à chaque formule.

b) Par oxydation de A par le dichromate de potassium en milieu acide, on obtient un composé organique B à chaîne carbonée ramifiée. En déduire le nom de A et écrire l'équation bilan de cette réaction d'oxydation. Nommer le composé B.

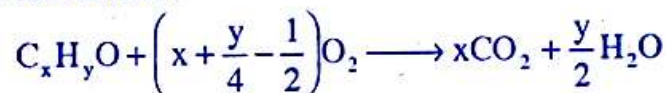
Données :

Volume molaire des gaz dans les conditions de l'expérience : $V_m = 24L \cdot mol^{-1}$

$M(H) = 1g \cdot mol^{-1}$; $M(C) = 12g \cdot mol^{-1}$; $M(O) = 16g \cdot mol^{-1}$

Solution

1° Equation bilan de la réaction :



2° Stœchiométrie :

$$\frac{n(C_xH_yO)}{1} = \frac{n(CO_2)}{x}$$

soit :

$$\frac{m(C_xH_yO)}{M(C_xH_yO)} = \frac{n(CO_2)}{x}$$

Par ailleurs :

$$M(C_xH_yO) = 29d = 29 \times 2,48 = 72g \cdot mol^{-1}$$

et :

$$n(CO_2) = \frac{V}{V_m} = \frac{4,8}{24} = 0,2mol$$

Par conséquent, la stœchiométrie donne :

$$\frac{3,6}{72} = \frac{0,2}{x}$$

ou encore :

$$3,6x = 0,2 \times 72$$

On en déduit :

$$x = \frac{0,2 \times 72}{3,6} = 4$$

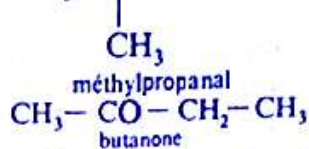
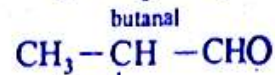
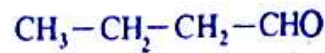
$$M(C_xH_yO) = 72g \cdot mol^{-1} \Rightarrow 12x + y + 16 = 72$$

$$\text{Soit : } 12 \times 4 + y + 16 = 72$$

$$\text{D'où : } y = 72 - 48 - 16 = 8$$

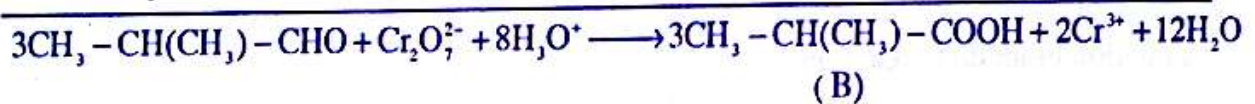
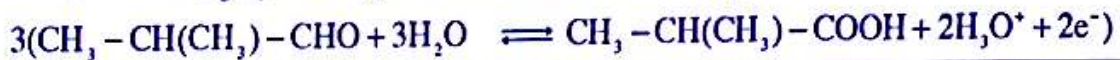
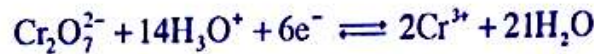
La formule brute de A est donc : C_4H_8O

3° a) Le test positif à la DNPH prouve que : A est un aldéhyde ou une cétone. Les formules semi-développées possibles sont donc :



b) Une cétone ne subit pas d'oxydation ménagée. A est donc un aldéhyde à chaîne carbonée ramifiée : le méthylpropanal.

L'équation bilan de la réaction d'oxydation de A par le dichromate de potassium s'écrit :



B est l'acide méthylpropanoïque.

4_ Identifications des contenus de quatre flacons

On veut identifier les contenus A, B, C et D de quatre flacons dont on a perdu les étiquettes, mais dont on sait qu'ils contenaient un alcool, un aldéhyde, une cétone et un acide carboxylique. On réalise une série de tests dont les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Réactifs	Couleurs des réactifs	Tests sur les contenus des flacons			
		A	B	C	D
$Cr_2O_7^{2-}$ en milieu acide	Solution orange	Solution orange	Solution verte	Solution verte	Solution Orange
DNPH	Solution jaune	Solution jaune	Solution jaune	Précipité jaune	Précipité jaune
Réactif de Schiff	Solution incolore	Solution incolore	Solution incolore	Solution rose-violette	Solution Incolore
Liqueur de Fehling	Solution bleue	Solution bleue	Solution bleue	Précipité rouge brique	Solution bleue

1° Déterminer les fonctions chimiques des corps A, B, C et D.

2° L'action du dichromate de potassium en milieu acide sur B conduit à la formation de C et A. Par ailleurs, B et D contiennent chacun trois atomes de carbone. Donner les formules semi-développées et les noms de A, B, C et D.

Solution

1° A ne subit pas d'oxydation ménagée et ne réagit pas avec la DNPH. C'est donc un acide carboxylique.

B réagit avec le dichromate mais ne réagit pas avec la DNPH. C'est donc un alcool.

C subit l'oxydation ménagée et réagit positivement avec la DNPH, le réactif de Schiff et la liqueur de Fehling. C'est donc un aldéhyde.

D ne subit pas d'oxydation ménagée. Par contre, le test positif à la DNPH prouve que c'est une cétone.

2° Les formules semi-développées et les noms :

A: $\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{COOH}$
acide propanoïque

B: $\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2\text{OH}$
propan-2-ol

C: $\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CHO}$
propanal

D: $\text{CH}_3 - \text{CO} - \text{CH}_3$
propanone

5_ Oxydation ménagée d'un alcool secondaire

Un composé organique A, ne renferme que du carbone, de l'hydrogène et de l'oxygène. La combustion complète de 3,2 g de cette substance a donné 7g de dioxyde de carbone et 3,87 g d'eau. Par ailleurs, la densité de vapeur de A est $d = 2,07$.

1° Déterminer la composition centésimale de A ; en déduire sa formule moléculaire.

2° Le composé A réagit sur du sodium avec un fort dégagement de dihydrogène. Quelle est la fonction chimique de A ? Ecrire les formules semi développées possibles pour A.

3° L'oxydation de A par le dichromate de potassium en milieu acide conduit à un composé organique B, ne réagissant ni avec le réactif de Tollens (nitrate d'argent ammoniacal), ni avec la liqueur de Fehling, mais seulement avec la DNPH.

a) Quelle est la fonction chimique de B ? En déduire la formule et le nom de A.

b) Ecrire l'équation bilan traduisant l'oxydation de A par le dichromate de potassium.

Solution

1° La masse de carbone m_C contenu dans l'échantillon de masse $m_S = 3,2$ g est :

$$m_C = \frac{12 \times m_{\text{CO}_2}}{44} = \frac{12 \times 7}{44} = 1,9\text{g}$$

Pourcentage en carbone :

$$\%C = \frac{m_C \times 100}{m_S} = \frac{1,9 \times 100}{3,2} = 59,37$$

La masse d'hydrogène contenu dans l'échantillon de masse $m_S = 3,2$ g.

$$m_H = \frac{2 \times m_{\text{H}_2\text{O}}}{18} = \frac{2 \times 3,87}{18} = 0,43\text{g}$$

Pourcentage en hydrogène :

$$\%H = \frac{m_H \times 100}{m_S} = \frac{0,43 \times 100}{3,2} = 13,43$$

Pourcentage en oxygène :

$$\%O = 100 - (\%C + \%H)$$

$$\%O = 100 - (59,37 + 13,43) = 27,2$$

$\%C = 59,37$
$\%H = 13,43$
$\%O = 27,2$

La formule moléculaire $\text{C}_x\text{H}_y\text{O}_z$ de A est obtenue par les rapports de proportionnalité :

$$\frac{12x}{\%C} = \frac{y}{\%H} = \frac{16z}{\%O} = \frac{M}{100}$$

La masse molaire de A est :

$$M = 29d = 29 \times 2,07 = 60,03$$

Ainsi :

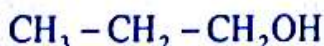
$$\frac{12x}{59,37} = \frac{60,03}{100} \Rightarrow x = \frac{59,37 \times 60,03}{1200} = 3$$

$$\frac{y}{13,43} = \frac{60,03}{100} \Rightarrow y = \frac{13,43 \times 60,03}{100} = 8$$

$$\frac{16z}{27,2} = \frac{60,03}{100} \Rightarrow z = \frac{27,2 \times 60,03}{1600} = 1$$

La formule brute de A est donc : $\text{C}_3\text{H}_8\text{O}$

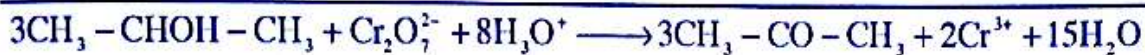
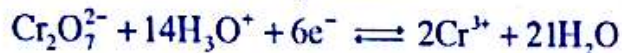
2° Les fonctions chimiques possibles sont : fonction alcool et fonction éther-oxyde. La réaction avec le sodium indique que A est un alcool. Les formules semi développées possibles sont donc :



3° a) Le test positif à la DNPH montre que B est une cétone ou un aldéhyde ; puisque B ne réagit ni avec le réactif de Tollens ni avec la liqueur de Fehling, B est donc une cétone ; par conséquent A est un alcool secondaire. Sa formule est donc :



b) L'équation bilan de la réaction d'oxydation :



6_ Action du sodium sur un alcool primaire aromatique

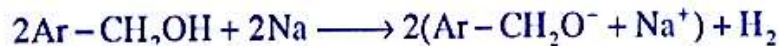
On fait réagir 5,4 g d'un alcool primaire aromatique A avec un excès de sodium. Il se dégage 0,56L de dihydrogène mesuré dans les conditions normales de température et de pression.

1° Déterminer la masse molaire puis la formule semi développée de l'alcool A; préciser son nom.

2° On fait réagir A sur du permanganate de potassium en milieu acide. On obtient un produit B qui rosit le réactif de Schiff, puis un solide blanc cristallisé C. Ecrire les formules semi développées de B et C.

Solution

1° Un alcool primaire est aromatique s'il contient un groupe aromatique noté Ar. Sa formule générale est donc $\text{Ar} - \text{CH}_2\text{OH}$. L'équation bilan de sa réaction avec le sodium s'écrit :



Le volume molaire des gaz dans les CNTP étant $V_m = 22,4\text{L}$, nous avons par stœchiométrie :

$$\frac{m_A}{2M_A} = \frac{V_{\text{H}_2}}{V_m}$$

soit:
$$\frac{5,4}{2M_A} = \frac{0,56}{22,4}$$

Ou encore:
$$5,4 \times 22,4 = 2M_A \times 0,56$$

On en déduit:
$$M_A = \frac{5,4 \times 22,4}{2 \times 0,56} = 108\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

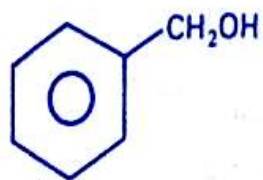
$$\boxed{M_A = 108\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

Par ailleurs :
$$M_A = M(\text{Ar}) + M(\text{C}) + 3M(\text{H}) + M(\text{O})$$

soit:
$$108 = M(\text{Ar}) + 12 + 3 + 16$$

D'où:
$$M(\text{Ar}) = 108 - 31 = 77\text{g} \cdot \text{mol}^{-1} \Rightarrow \text{Ar est donc : } \text{C}_6\text{H}_5 -$$

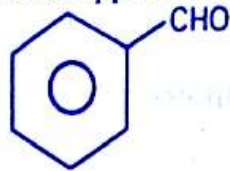
Par conséquent la formule de A est :



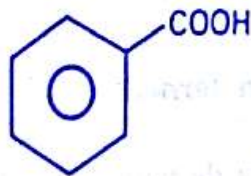
Phénylméthanol

2° Par action d'un oxydant comme le permanganate de potassium en milieu acide nous obtenons d'abord un aldéhyde puis un acide carboxylique.

(B) est le phénylméthanal encore appelé benzaldéhyde :



(C) est l'acide benzoïque :



3 LES AMINES

3.1 Définition

Une amine est un composé organique dérivant formellement de l'ammoniac NH_3 , par remplacement de un, deux ou trois atomes d'hydrogènes par un, deux ou trois groupes carbonés.

3.2 Les différentes classes des amines

On distingue trois classes d'amines: les amines primaires, les amines secondaires et les amines tertiaires.

– Une amine est primaire lorsque l'atome d'azote est directement lié à un seul groupe carboné R. La formule générale des amines primaires est $R-NH_2$

Exemple : $CH_3-CH_2-NH_2$ (éthanamine)

– Une amine est secondaire lorsque l'atome d'azote est directement lié à deux groupes carbonés R et R'. La formule générale des amines secondaires est $R-NH-R'$

Exemple : $CH_3-NH-CH_2-CH_3$ (N-méthyléthanamine)

– Une amine est tertiaire lorsque l'atome d'azote est directement lié à trois groupes carbonés R, R' et R". La formule générale des amines tertiaires est $R-N-R'$

|
R"

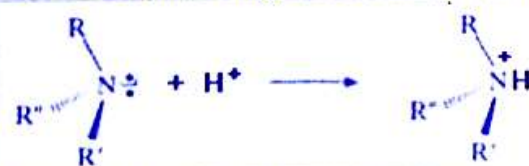
Exemple : $CH_3-N-CH_2-CH_3$ (N,N-diméthyléthanamine)

|
CH₃

3.3 Propriétés des amines

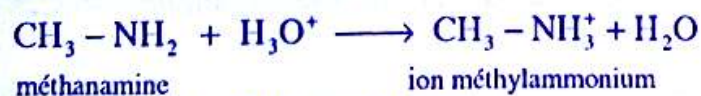
3.3.1 Caractère basique des amines

Grâce au doublet électronique de l'azote, les amines peuvent fixer un proton H^+ .



Les amines sont donc des bases.

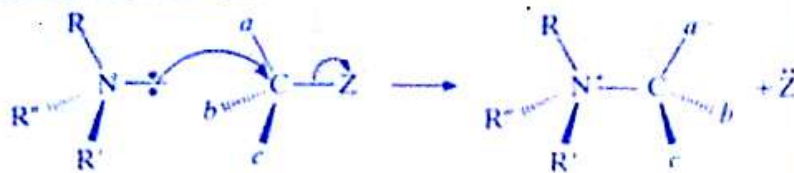
Exemple :



3.3.2 Propriété nucléophile des amines

Les liaisons C-Z de certaines molécules, où Z est un atome ou groupe beaucoup plus électro-négatif que que l'atome de carbone, (par exemple Z peut être Cl, I, Br, F) sont légèrement polarisées. L'atome de carbone possède une légère charge

positive et l'atome Z une légère charge négative ($\overset{\delta+}{C}-\overset{\delta-}{Z}$). Dans ces conditions, le doublet électronique de l'azote est attiré par l'atome de carbone. L'atome d'azote se fixe au carbone et parallèlement l'atome Z est déplacé.



3.4 Obtentions des amines

3.4.1 Méthode d'Hofmann

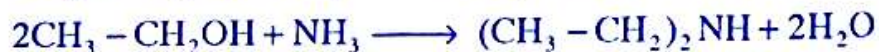
On fait agir un halogénure R-X sur l'ammoniac en solution dans l'alcool. Il se forme un mélange des trois classes d'amine.



L'acide HX formé donne des sels avec les trois classes d'amine. On obtient un mélange complexe que l'on traite par la soude pour régénérer les trois classes d'amines. Une distillation fractionnée permet de séparer les trois amines.

3.4.2 Méthode de Sabatier

On fait passer un mélange d'alcool et d'ammoniac sur la thorine vers 300°C. On obtient les trois classes d'amines.



3.5 Utilisations des amines

- La méthanimine sert à la fabrication des produits organiques et des produits pharmaceutiques.

- L'éthanamine est utilisé dans la fabrication des produits phytosanitaires ou organiques, de colorants. C'est un solvant extractif pour le raffinage d'huiles minérales ou végétales.

- L'aniline $\text{C}_6\text{H}_5 - \text{NH}_2$ entre dans la composition de nombreux colorants.

1_ Action du 1-chlorobutane sur une amine tertiaire

On fait réagir une amine tertiaire saturée A, avec du 1-chlorobutane en solution dans l'éther. On obtient un précipité blanc B.

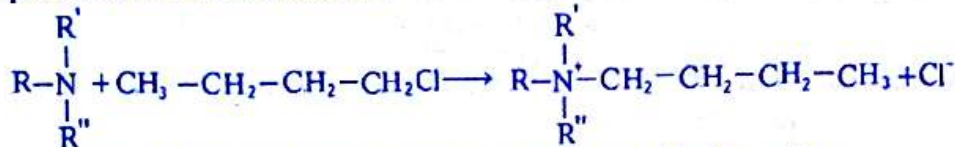
1° Ecrire l'équation bilan de la réaction. Quelle propriété des amines cette réaction met-elle en évidence ?

2° Une solution aqueuse de l'amine A, de concentration $c = 0,4 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ a été obtenue en dissolvant 20,2 g d'amine pour 500 cm^3 de solution. Quelle est la masse molaire de A ?

3° L'analyse du précipité B montre qu'il s'agit d'un solide ionique chiral. Que peut-on conclure concernant les groupes alkyles liés à l'azote dans la molécule B ? Déterminer la formule brute de A, sa formule semi développée et son nom.

Solution

1° Equation bilan de la réaction :



Cette réaction met en évidence le caractère nucléophile des amines.

2° Déterminons d'abord le nombre de moles de l'amine :

Par définition : $C = \frac{n}{V} \Rightarrow n = CV$

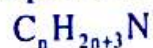
Le volume de la solution est $V = 500 \text{ cm}^3 = 500 \cdot 10^{-3} \text{ L} = 0,5 \text{ L}$

Par conséquent : $n = 0,4 \times 0,5 = 0,2 \text{ mol}$

Par ailleurs : $n = \frac{m}{M} \Rightarrow M = \frac{m}{n} = \frac{20,2}{0,2} = 101$

$$M = 101 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

3° La formule brute générale pour une amine saturée quelle que soit sa classe est :



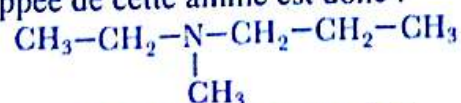
$M = 101 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \Rightarrow 12n + 2n + 3 + 14 = 101$

soit : $14n + 17 = 101$

D'où : $n = \frac{101-17}{14} = 6$

La formule brute est donc : $\text{C}_6\text{H}_{15}\text{N}$

Le précipité B étant chiral, les trois groupes alkyles sont différents : $\text{R} \neq \text{R}' \neq \text{R}''$. La formule semi développée de cette amine est donc :



(N-éthyl-N-méthylpropanamine)

2_ Détermination de la formule d'une amine

Pour déterminer la formule d'une amine saturée, on soumet à l'analyse 15g de cette amine; on obtient 2,9 grammes d'azote.

1° Sachant que la formule d'une amine saturée est $C_nH_{2n+3}N$, déterminer la masse molaire de l'amine et en déduire sa formule brute.

2° Donner les différentes formules semi développées possibles en se limitant aux amines primaires et tertiaires.

3° L'amine en question ne réagit pas avec un chlorure d'acyle. Quel est le nom de cette amine ?

4° Par action de l'iodométhane sur l'amine on obtient un précipité. Ecrire l'équation bilan de la réaction et indiquer la propriété des amines mise en jeu dans cette réaction.

Données : $M(H) = 1g \cdot mol^{-1}$; $M(C) = 12g \cdot mol^{-1}$; $M(N) = 14g \cdot mol^{-1}$

Solution

1° Dans une mole d'amine saturée de masse M, il y a 14g d'azote, d'où :

$$\frac{14}{\%N} = \frac{M}{100}$$

ou encore:

$$\frac{14}{m(N)} = \frac{M}{m(C_nH_{2n+3}N)}$$

soit:

$$\frac{14}{2,9} = \frac{M}{15}$$

D'où:

$$M = \frac{15 \times 14}{2,9} = 72,41g \cdot mol^{-1}$$

$$M = 72,41g \cdot mol^{-1}$$

D'autre part:

$$M(C_nH_{2n+3}N) = 12n + 2n + 3 + 14$$

Donc :

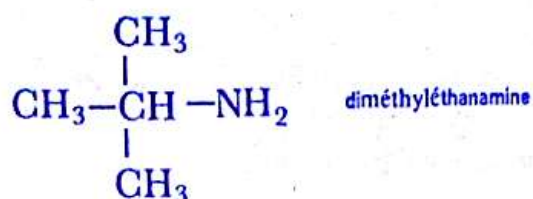
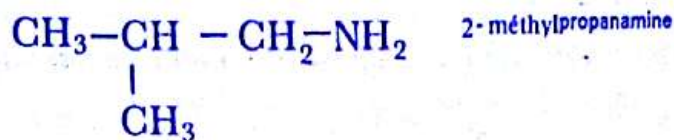
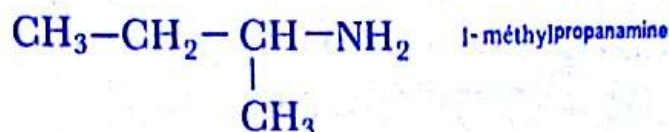
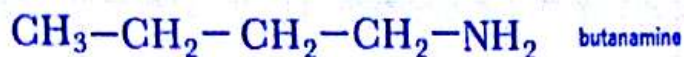
$$72,41 = 14n + 17$$

D'où:

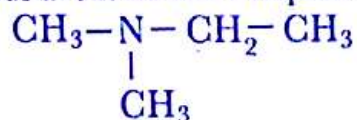
$$n = \frac{72,41 - 17}{14} = 4$$

L'amine a pour formule brute $C_4H_{11}N$

2° Les amines primaires isomères possibles :

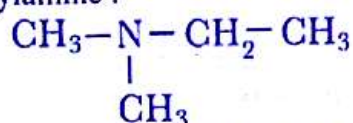


Comme amine tertiaire nous avons un seul composé :

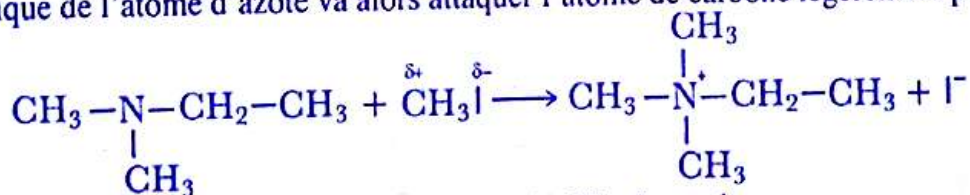


N,N-diméthyléthanamine

3° L'amine en question est une amine tertiaire qui ne réagit pas avec un chlorure d'acyle. C'est la N,N-diméthyléthylamine :



4° La liaison carbone-iode dans la molécule de l'iodométhane est polarisée du fait de la différence d'électronégativité entre les atomes de carbone et d'iode. Le doublet électronique de l'atome d'azote va alors attaquer l'atome de carbone légèrement positif :

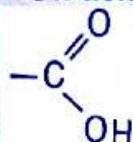


Cette réaction met en évidence le caractère nucléophile des amines.

4 LES ACIDES CARBOXYLIQUES ET LEURS DERIVES

4.1 Les acides carboxyliques

Un acide carboxylique est un composé organique contenant le groupe carboxyle



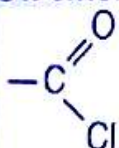
La formule générale des monoacides carboxyliques est R-COOH.

Un monoacide carboxylique est dit saturé si R est un groupe alkyle. La formule générale des monoacides carboxyliques saturés est $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}\text{COOH}$. Leur formule brute est $\text{C}_n\text{H}_{2n}\text{O}_2$.

4.2 Les chlorures d'acyles

4.2.1 Définition

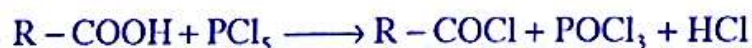
Un chlorure d'acyle est un composé organique comportant un groupe acyle



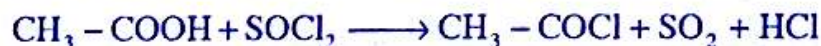
La formule générale des chlorures d'acyles est R-COCl.

4.2.2 Passage des acides carboxyliques aux chlorures d'acyles

On obtient un chlorure d'acyle en faisant réagir un acide carboxylique avec un réactif chlorurant comme le chlorure de thionyle SOCl_2 , le pentachlorure de phosphore PCl_5 et le trichlorure de phosphore PCl_3 . Les équations bilans sont:



Exemple :



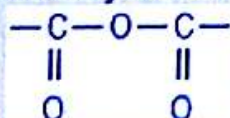
acide éthanoïque

chlorure d'éthanoyle

4.3 Les anhydrides d'acides

4.3.1 Définition

Un anhydride d'acide est un composé organique dont le groupe caractéristique est :



La formule générale des anhydrides d'acides est : R-CO-O-CO-R

4.3.2 Passage des acides aux anhydrides d'acides

- Par chauffage d'un acide en présence du déca-oxyde de tétraphosphore P_4O_{10} , on obtient un anhydride d'acide.

1_ Passage d'un acide carboxylique à un anhydride d'acide

On désigne par A, un acide carboxylique à chaîne carbonée saturée. En estérifiant cet acide par de l'éthanol on obtient un composé organique B de masse molaire $M = 102 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

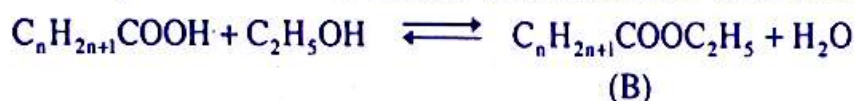
1° Ecrire l'équation bilan de la réaction de l'éthanol avec un acide carboxylique à chaîne carbonée saturée.

2° Déterminer les formules semi développées de A et B et nommer ces composés.

3° Par chauffage de A en présence d'un déshydratant, on obtient un composé C. Ecrire la formule semi développée de C et donner son nom.

Solution

1° La formule générale d'un acide carboxylique à chaîne carbonée saturée est $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}\text{COOH}$. L'équation-bilan de la réaction de l'éthanol avec un tel acide s'écrit :



2° Nous avons : $M(\text{B}) = 102 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

soit : $12n + 2n + 1 + 3 \times 12 + 2 \times 16 + 5 = 102$

Par la suite : $14n + 74 = 102$

D'où : $n = \frac{102 - 74}{14} = 2$

La formule moléculaire de (A) est :

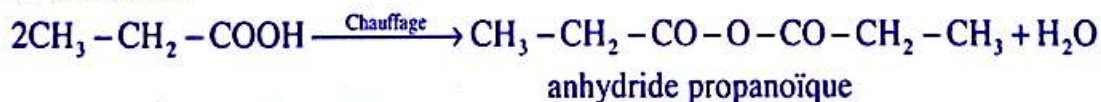
A est $\text{C}_2\text{H}_5\text{COOH}$. Sa formule brute (ou formule moléculaire) est donc : $\text{C}_3\text{H}_6\text{O}_2$

Sa formule semi développée et son nom sont :



(B) est : $\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{COOCH}_2 - \text{CH}_3$ propanoate d'éthyle

3° Par chauffage d'un acide carboxylique en présence d'un déshydratant on obtient un anhydride d'acide :



2_ Hydrolyse d'un ester

Un ester de formule moléculaire $\text{C}_x\text{H}_y\text{O}_2$ contient en masse 62,06% de carbone et 10,34% d'hydrogène.

1° Déterminer x et y

2° Par hydrolyse de cet ester, on obtient du méthanol et un acide carboxylique A qui comporte en α de la fonction acide, un groupe méthyle. Quels sont la formule semi développée et le nom de cet acide ?

3° On fait réagir l'ammoniac sur l'acide A. On obtient un carboxylate d'ammonium B qui, par chauffage se déshydrate pour donner un composé organique C. Ecrire les formules semi développées et les noms de B et C.

Solution

1° Déterminons d'abord le pourcentage en oxygène de l'ester

$$\begin{aligned} \%O &= 100 - (\%C + \%H) \\ &= 100 - (62,06 + 10,34) = 27,6 \end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait que :

$$\frac{12x}{C\%} = \frac{y}{H\%} = \frac{16z}{O\%}$$

La formule moléculaire de l'ester indique que : $z = 2$. En conséquence nous avons :

$$\frac{12x}{62,06} = \frac{16 \times 2}{27,6}$$

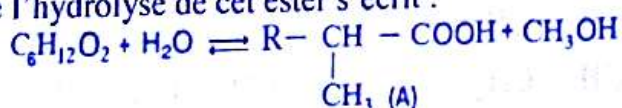
D'où :
$$x = \frac{32 \times 62,06}{12 \times 27,6} = 5,9 \approx 6$$

De même :
$$\frac{y}{10,34} = \frac{32}{27,6}$$

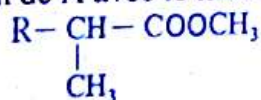
Donc :
$$y = \frac{10,34 \times 32}{27,6} = 11,9 \approx 12$$

$$\begin{array}{|c|} \hline x = 6 \\ \hline y = 12 \\ \hline \end{array}$$

2° L'équation bilan de l'hydrolyse de cet ester s'écrit :



L'ester produit par la réaction de A avec le méthanol est :

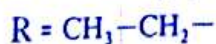


En conséquence :

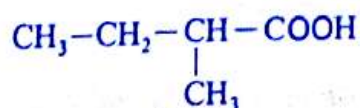


Par identifications, on obtient : $R = C_2H_5 -$

soit :

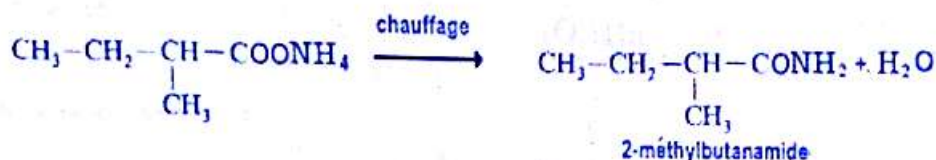
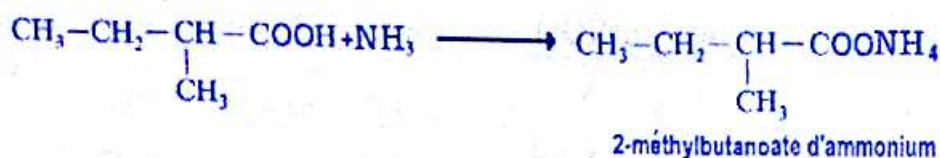


L'acide A est donc :



acide 2-méthylbutanoïque

3° L'action de l'ammoniac sur un acide carboxylique conduit à un carboxylate d'ammonium qui, par chauffage donne un amide :

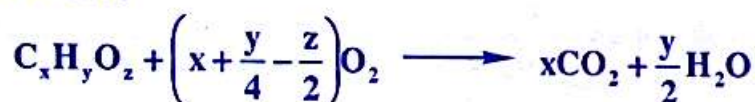


3_ Stœchiométrie d'une réaction d'hydrolyse

L'hydrolyse d'un ester E donne deux composés organiques A et B.

1° Quelles sont les fonctions chimiques de ces deux corps.

2° La combustion complète d'une mole de A de formule $\text{C}_x\text{H}_y\text{O}_z$, nécessite 6 moles de dioxygène. On obtient 90g d'eau et 176g de dioxyde de carbone. L'équation bilan de la réaction s'écrit :



a) Déterminer la formule moléculaire de A et préciser sa fonction chimique.

b) Quels sont la formule semi-développée et le nom de A sachant que sa molécule est chirale.

c) L'oxydation ménagée de A conduit à un composé A'. Ecrire la formule semi-développée de A' et donner son nom.

3° Le composé B réagit avec le chlorure de thionyle pour donner du chlorure d'éthanoyle. En déduire les formules semi-développées et les noms de B et de l'ester E.

Solution

1° L'hydrolyse d'un ester donne un acide carboxylique et un alcool. Les fonctions chimiques de A et B sont la fonction acide carboxylique et la fonction alcool.

2° a) Formule moléculaire de A

Stœchiométrie :

$$\frac{n_A}{1} = \frac{n(\text{O}_2)}{x + \frac{y}{4} - \frac{z}{2}} = \frac{n(\text{CO}_2)}{x} = \frac{n(\text{H}_2\text{O})}{\frac{y}{2}}$$

Les nombres de moles sont :

$$n_A = 1 \text{ mol}$$

$$n(\text{O}_2) = 6 \text{ mol}$$

$$n(\text{CO}_2) = \frac{m(\text{CO}_2)}{M(\text{CO}_2)} = \frac{176}{44} = 4 \text{ mol}$$

$$n(\text{H}_2\text{O}) = \frac{m(\text{H}_2\text{O})}{M(\text{H}_2\text{O})} = \frac{90}{18} = 5 \text{ mol}$$

On a :
$$\frac{n_A}{1} = \frac{n(\text{CO}_2)}{x}$$

soit :
$$1 = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 4$$

On a aussi :
$$\frac{n_A}{1} = \frac{n(\text{H}_2\text{O})}{\frac{y}{2}}$$

ou encore :
$$\frac{n_A}{1} = \frac{2n(\text{H}_2\text{O})}{y}$$

soit :
$$1 = \frac{2 \times 5}{y} \Rightarrow y = 10$$

On a enfin :
$$\frac{n_A}{1} = \frac{n(\text{O}_2)}{x + \frac{y}{4} - \frac{z}{2}}$$

soit :
$$1 = \frac{6}{4 + \frac{10}{4} - \frac{z}{2}}$$

ou encore :
$$4 + \frac{10}{4} - \frac{z}{2} = 6$$

Par la suite :
$$\frac{10}{4} - \frac{z}{2} = 2$$

Aussi :
$$\frac{10}{4} - 2 = \frac{z}{2}$$

En réduisant au même dénominateur :

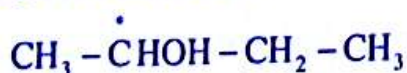
$$\frac{10 - 2 \times 4}{4} = \frac{z}{2}$$

D'où :
$$\frac{2}{4} = \frac{z}{2} \Rightarrow z = \frac{4}{4} = 1$$

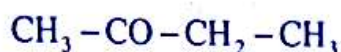
La formule moléculaire de A est donc : $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$

La molécule de A possède un seul atome d'oxygène et sa chaîne carbonée est saturée. A est donc l'alcool et B est un acide carboxylique.

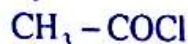
b) La molécule de A étant chirale, elle possède un atome de carbone asymétrique. L'alcool qui lui correspond est le butan-2-ol :



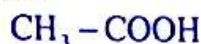
c) A est un alcool secondaire. Son oxydation ménagée conduit à une cétone. A' est donc le butanone :



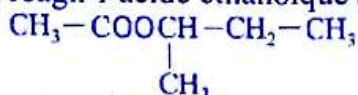
3° Le composé B réagit sur du chlorure de thionyle pour donner le chlorure d'éthanoyle encore appelé chlorure d'acétyl :



B est donc l'acide éthanoïque :



L'ester E obtenu en faisant réagir l'acide éthanoïque avec le butan-2-ol est :



éthanoate de 1-méthylpropyle

4_ Passage d'un alcool à un amide

Un alcool saturé A, contient en masse 64,86% de carbone et 13,50% d'hydrogène.

1° Déterminer sa formule brute et trouver les formules semi développées possibles.

2° Par action du dichromate de potassium en milieu acide, A donne un composé B capable de réagir avec la liqueur de Fehling puis un autre composé organique C possédant une chaîne ramifiée. Identifier A, B et C.

3° On fait agir le chlorure de thionyle sur C. On obtient entre autre un composé organique D. Ecrire l'équation bilan de la réaction et nommer le composé D.

4° On fait réagir D avec l'ammoniac. Déterminer la formule semi développée et le nom du composé obtenu.

Données : $M(\text{H}) = 1\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M(\text{C}) = 12\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M(\text{O}) = 16\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Solution

1° La formule générale d'un alcool saturé est $\text{C}_n\text{H}_{2n+2}\text{O}$. Il y a donc $12n$ grammes de carbone et $2n + 2$ grammes d'hydrogène dans une mole d'un tel alcool, d'où :

$$\frac{12n}{\%C} = \frac{2n+2}{\%H}$$

soit:
$$\frac{12n}{64,86} = \frac{2n+2}{13,51}$$

Par la suite:
$$12n \times 13,51 = 64,86(2n+2)$$

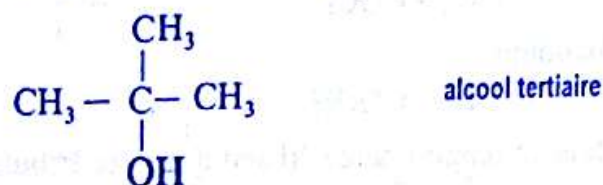
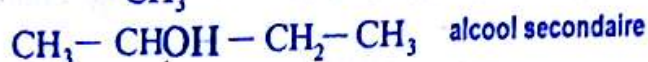
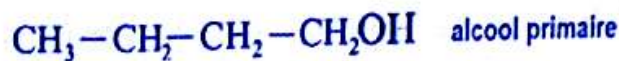
Et :
$$162n = 129,72n + 129,72$$

encore :
$$n(162 - 129,72) = 129,72$$

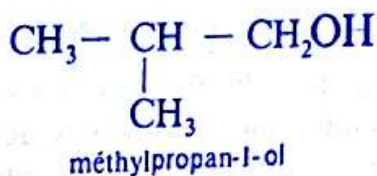
D'où:
$$n = \frac{129,72}{32,28} = 4$$

La formule brute de l'alcool est $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$

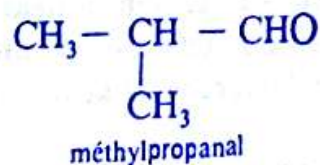
Les formules semi développées possibles sont :



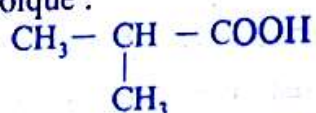
2° (A) est un alcool primaire qui, par action des oxydants comme le dichromate de potassium en milieu acide donne un aldéhyde (B) capable de réagir avec la liqueur de Fehling, puis un acide carboxylique (C). Par ailleurs, la chaîne carbonée de l'acide carboxylique étant ramifiée, celle de l'alcool l'est aussi. A est donc l'alcool primaire à chaîne ramifiée :



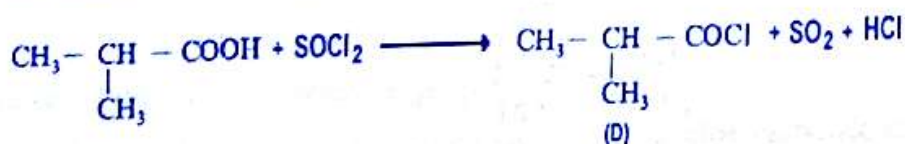
B est le méthylpropanal :



C est l'acide méthylpropanoïque :



3° L'action du chlorure de thionyle sur un acide carboxylique conduit à un chlorure d'acyle :



D est le chlorure de méthylpropanoyle.

4° En faisant réagir de l'ammoniac sur un chlorure d'acyle, on obtient une amide :

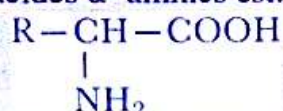


Le composé obtenu est le méthylpropanamide.

5 LES ACIDES α -AMINES

5.1 Définition

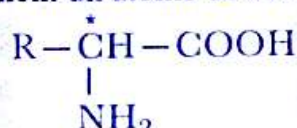
On appelle acide α -aminé, tout composé organique comportant sur un même atome de carbone une fonction acide carboxylique $-\text{COOH}$ et fonction amine $-\text{NH}_2$. La formule générale des acides α -aminés est:



5.2 Configurations des acides α -aminés

5.2.1 Chiralité

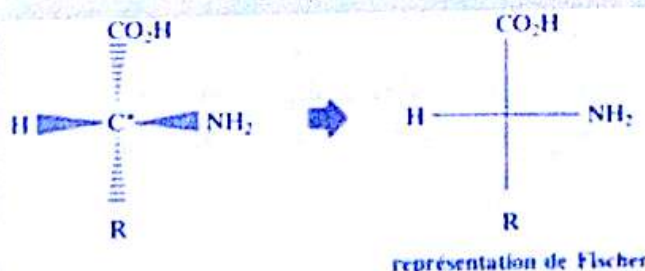
Toutes les molécules d'acides α -aminés, à l'exception de l'acide 2-amino éthanique (glycine) contiennent un atome de carbone asymétrique.



Les molécules de ces acides α -aminés sont donc chirales. A la formule plane d'un acide α -aminé correspondent deux molécules énantiomères, c'est à dire images l'une de l'autre dans un miroir et non superposables.

5.2.2 Représentation de Fischer

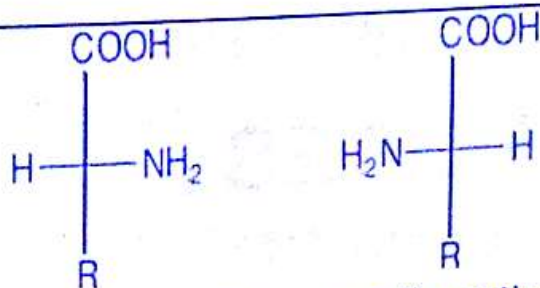
Pour représenter les molécules d'acides α -aminés, les chimistes utilisent une projection sur un plan appelée projection de Fischer. Dans cette projection, la carbone asymétrique est "sous entendu".



5.2.3 Configurations D et L

La représentation de Fischer permet de définir deux configurations pour les acides α -aminés : la configuration D et la configuration L.

La molécule est de configuration D si le groupe $-\text{NH}_2$ figure à droite dans la représentation de Fischer. Elle est de configuration L si le groupe $-\text{NH}_2$ figure à gauche dans le représentation de Fischer.



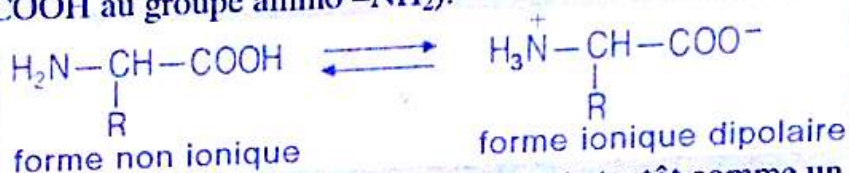
configuration D

configuration L

Un acide α -aminé de configuration D a pour énantiomère l'acide α -aminé de configuration L de même constitution.

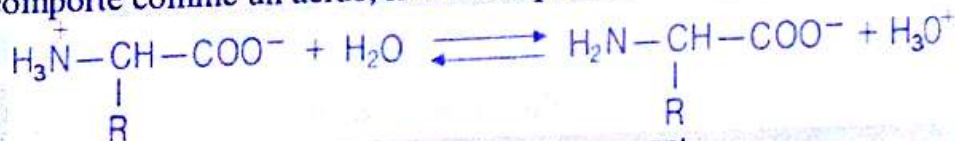
5.3 Propriétés acido-basiques

En solution aqueuse, les acides α -aminés se présentent sous la forme d'un ion dipolaire appelé **amphion** ou **zwitterion** (on a un transfert de proton du groupe carboxyle $-\text{COOH}$ au groupe amino $-\text{NH}_2$).

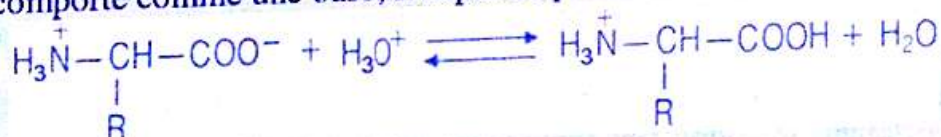


L'amphion a un caractère **amphotère** (il se comporte tantôt comme un acide, tantôt comme une base).

- S'il se comporte comme un acide, il cède un proton H^+ :



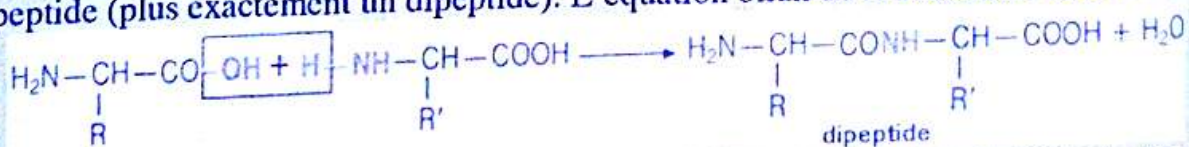
- S'il se comporte comme une base, il capte un proton H^+ :



5.4 Synthèses des peptides

5.4.1 Liaison peptidique

La réaction entre deux acides α -aminés s'effectue avec élimination d'une molécule d'eau à partir du groupement $-\text{OH}$ de la fonction acide carboxyle de l'un et d'un atome d'hydrogène de la fonction amine de l'autre. La molécule obtenue est un peptide (plus exactement un dipeptide). L'équation bilan de la réaction s'écrit :



On appelle **liaison peptidique**, le groupe $-\text{CONH}-$ qui résulte de l'élimination d'une molécule d'eau entre deux acides α -aminés.

5.4.2 Les polypeptides et les protéines

- Un **polypeptide** est un composé dont la molécule est constituée d'un enchaînement d'acides α -aminés reliés par des liaisons peptidiques.

- Une **protéine** est un polypeptide contenant plus de 50 molécules d'acides α -aminés. Les protéines assurent des fonctions biologiques très diverses.

1_ Formule développée plane d'un acide α -aminé

Un acide α -aminé A a pour formule moléculaire $C_3H_7O_2N$.

1° Quels sont sa formule semi-développée et son nom ?

2° En utilisant la projection de Fischer, représenter les configurations de la D de A et de la L de A.

3° On élimine une molécule de dioxyde de carbone sur une molécule de A. On obtient alors une amine B.

a) Ecrire l'équation bilan de la réaction et préciser le nom et la classe de B.

b) Existe-t-il d'autres amines ayant même formule brute que B ? Si oui, donner pour chacune d'elles la formule semi-développée, la classe et le nom.

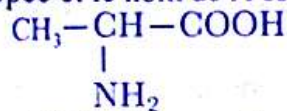
4° On fait réagir le chlorure d'éthanoyle sur l'amine B.

a) Ecrire l'équation bilan de la réaction. Quelle est la fonction du corps organique obtenu ? Préciser son nom.

b) Cette réaction met en jeu un caractère nucléophile. Quel atome présente ce caractère ?

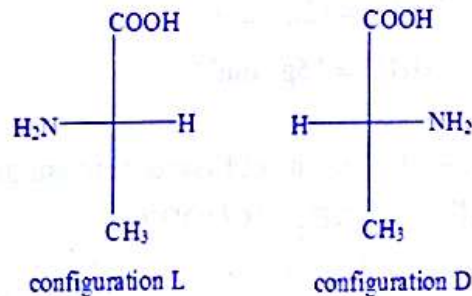
Solution

1° La formule semi-développée et le nom de A est :

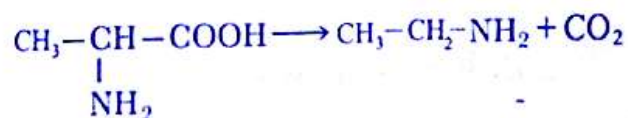


acide 2-aminopropanoïque

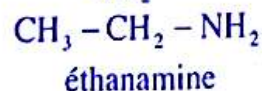
2° Représentations des configurations de A :



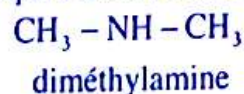
3° a) La réaction d'élimination d'une molécule de CO_2 par un acide α -aminé conduit à une amine primaire :



B est :

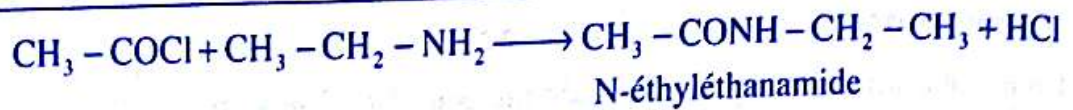


b) Il existe une seule amine qui a même formule brute que l'éthanamine. Il s'agit de :



La diméthylamine est une amine secondaire.

4° a) Réaction entre l'éthanamine et le chlorure d'éthanoyle :



Le corps organique obtenu est une amide monosubstituée
 b) C'est l'atome d'azote qui constitue un centre nucléophile.

2_ Synthèse d'un peptide

La leucine et l'isoleucine sont deux acides α -aminés de formule $\text{R} - \text{CH}(\text{NH}_2) - \text{COOH}$ dont les groupes alkyles R diffèrent. Le groupe alkyle de la leucine est noté R_L , celui de l'isoleucine R_I . La masse molaire des deux acides α -aminés est $M = 131 \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

1° Déterminer la formule brute du groupe alkyle.

2° Les groupes R_L et R_I possédant chacun une seule ramification, la leucine possède un atome de carbone asymétrique et l'isoleucine en comporte deux.

a) Ecrire la formule semi développée de chacun des deux acides α -aminés.

b) Donner les représentations de Fischer des configurations de la L-leucine et de la D-leucine (pour ne pas alourdir l'écriture on symbolisera, dans cette question et les suivantes les groupes alkyles par R_L et R_I).

3° a) Montrer que la réaction de condensation de la leucine sur l'isoleucine conduit formellement à deux peptides P_1 et P_2 .

b) En fait, la réalisation expérimentale conduit à quatre peptides. Pourquoi ?

4° On désire synthétiser un des peptides P_1 . Indiquer succinctement quels sont les moyens expérimentaux qui permettent de n'obtenir que P_1 .

On donne: $M(\text{H}) = 1 \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M(\text{C}) = 12 \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$

$M(\text{N}) = 14 \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M(\text{O}) = 16 \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Solution

1° Le groupe alkyle est $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}$ - . La leucine et l'isoleucine ont pour formule :



Par conséquent :

$$M = 12n + 2 \times 12 + 2n + 5 + 14 + 2 \times 16$$

soit :

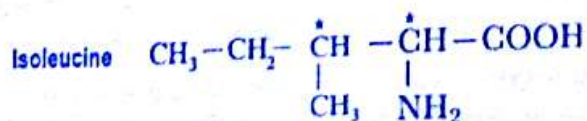
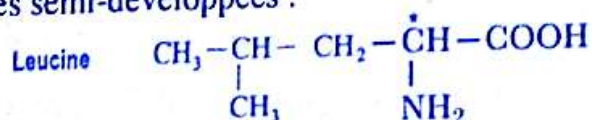
$$131 = 14n + 75$$

D'où :

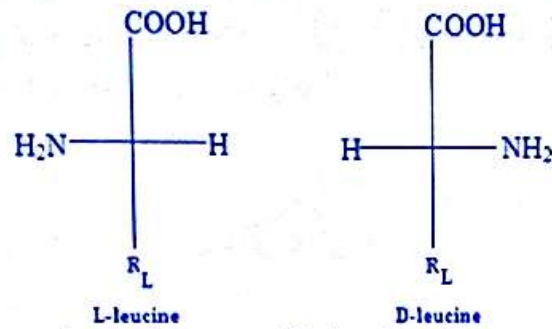
$$n = \frac{131 - 75}{14} = 4$$

R est donc le groupe : C_4H_9 -

2° a) Les formules semi-développées :

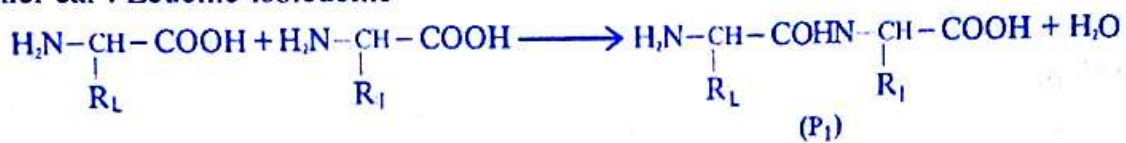


b) Le couple d'énantiomères de la leucine :

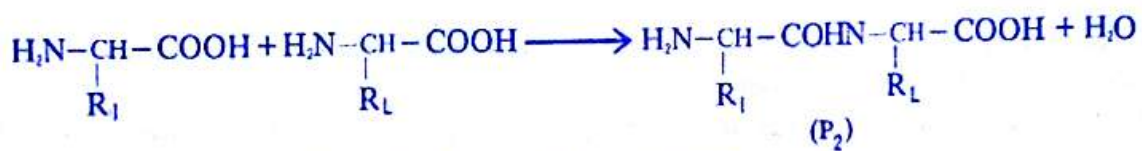


3° a) La réaction de condensation avec élimination d'eau, se produisant entre le groupe carboxyle $-\text{COOH}$ de l'un des aminoacides et le groupe amine de l'autre acide α -aminé offre deux possibilités :

Premier cas : Leucine-isoleucine



Deuxième cas : isoleucine-leucine



b) Le mélange réactionnel contient les peptides suivants :

Leucine - isoleucine

Leucine - leucine

Isoleucine - leucine

Isoleucine - isoleucine

L'expérience conduit donc à quatre peptides.

4° Si l'on désire synthétiser P₁ seulement, il faut empêcher la formation de P₂. Pour cela il faut :

- bloquer le groupe $-\text{COOH}$ de l'isoleucine en l'estérifiant par un alcool
- bloquer le groupe $-\text{NH}_2$ de la leucine par l'action d'un chlorure d'acyle.

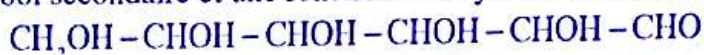
Activer le groupe $-\text{COOH}$ de la leucine en le transformant en chlorure d'acyle par action de SOCl_2 ou de PCl_5 .

- enfin, on libère les fonctions amine et acide précédemment bloquées.

6 | LE GLUCOSE

6.1 Structure

De formule brute $C_6H_{12}O_6$, la molécule du glucose contient une fonction alcool primaire, quatre fonctions alcool secondaire et une fonction aldéhyde. Sa formule semi développée est:

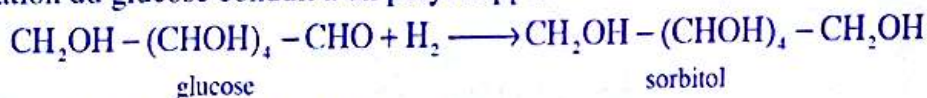


Il est facilement décomposé par la chaleur.

6.2 Propriétés dues à la fonction aldéhyde

6.2.1 Hydrogénation

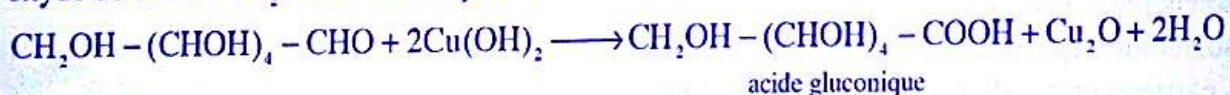
L'hydrogénation du glucose conduit à un polyol appelé sorbitol.



6.2.2 réduction de la liqueur de Fehling

Chauffons légèrement un mélange de glucose et de liqueur de Fehling. Il se forme un précipité rouge brique d'oxyde de cuivre Cu_2O . Le glucose est transformé en acide gluconique.

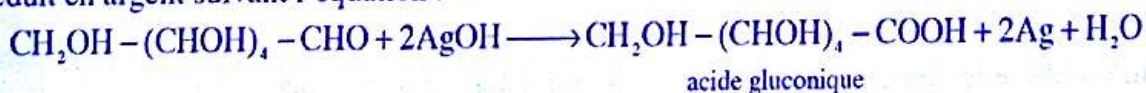
La liqueur de Fehling se comporte comme l'hydroxyde de cuivre $Cu(OH)_2$. Il est réduit en oxyde de cuivre Cu_2O suivant l'équation:



6.2.3 réduction du nitrate d'argent ammoniacal

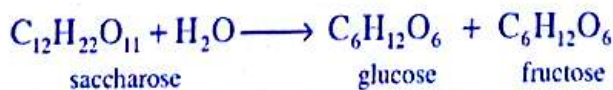
Un mélange de glucose et de nitrate d'argent ammoniacal est chauffé modérément. Il se dépose une mince couche d'argent au fond du bocal contenant le mélange. Le glucose est transformé en acide gluconique.

Le nitrate d'argent ammoniacal se comporte comme l'hydroxyde d'argent $AgOH$. Il est réduit en argent suivant l'équation :

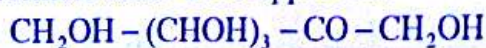


6.3 Obtention du glucose

L'hydrolyse du sucre ordinaire (sucre de canne ou de betterave) conduit au glucose et au fructose :



Le fructose comporte 2 fonctions alcools primaires, 3 fonctions alcools secondaires et une fonction cétone. Sa formule semi-développée est :



Exercice résolu

L'hydrolyse du sucre ordinaire, le saccharose conduit au glucose et au fructose.

1° Ecrire l'équation bilan de la réaction.

2° Donner les formules semi-développées du glucose et du fructose en indiquant les noms des fonctions chimiques portées par ces deux composés.

3° Pour déterminer le taux de sucre dans le sang d'une personne, on procède à un prélèvement de 100cm^3 de son sang. On fait attaquer le glucose contenu dans les 100cm^3 par un excès de liqueur de Fehling. Il se forme $0,40\text{g}$ d'un précipité d'oxyde cuivreux Cu_2O .

a) Ecrire l'équation bilan de la réaction qui se produit puis calculer la masse du glucose contenu dans le prélèvement sanguin.

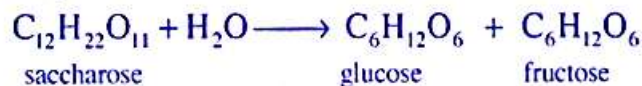
b) Sachant que le taux normal de sucre dans le sang humain est $1\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$, peut-on dire que cette personne souffre de diabète ?

Données : $M(\text{H}) = 1\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$; $M(\text{C}) = 12\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$

$M(\text{O}) = 16\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$; $M(\text{Cu}) = 63,5\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$

Solution

1° Réaction d'hydrolyse du saccharose :

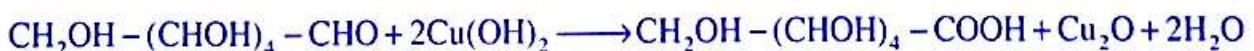


2° Les formules semi-développées sont :

Glucose $\text{CH}_2\text{OH} - (\text{CHOH})_4\text{CHO}$: 1 fonct° alcool primaire ; 4 fonct° alcool secondaire et 1 fonct° aldéhyde.

Fructose $\text{CH}_2\text{OH} - (\text{CHOH})_3 - \text{CO} - \text{CH}_2\text{OH}$: 2 fonct° alcool primaire ; 3 fonct° alcool secondaire et 1 fonct° cétone.

3° a) Réduction de la liqueur de Fehling par le glucose :



Masse du glucose contenu dans le prélèvement :

Stœchiométrie :

$$\frac{n_{\text{gluc}}}{1} = \frac{n_{\text{Cu}_2\text{O}}}{1}$$

ou encore :

$$\frac{m_{\text{gluc}}}{M_{\text{gluc}}} = \frac{m_{\text{Cu}_2\text{O}}}{M_{\text{Cu}_2\text{O}}}$$

On en déduit la masse du glucose :

$$m_{\text{gluc}} = \frac{M_{\text{gluc}} \times m_{\text{Cu}_2\text{O}}}{M_{\text{Cu}_2\text{O}}}$$

soit :

$$m_{\text{gluc}} = \frac{180 \times 0,40}{143} = 0,50\text{g}$$

$$\boxed{m_{\text{gluc}} = 0,50\text{g}}$$

b) Dépistage du diabète

La quantité de sucre contenu dans 1 litre soit, 1000cm^3 de sang est déterminée facilement par la règle de trois :

$$\begin{array}{l} 100\text{cm}^3 \longrightarrow 0,50\text{g de sucre} \\ 1000\text{cm}^3 \longrightarrow x \end{array}$$

D'où :

$$x = \frac{1000 \times 0,50}{100} = 5\text{g/L}$$

Le taux normal de sucre étant 1g/L , la personne souffre de diabète.

7 | LES POLYMERES SYNTHETIQUES

7.1 La polyaddition

7.1.1 Définition

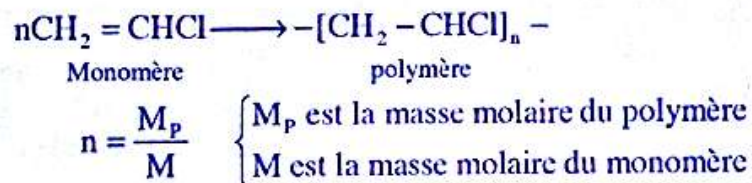
La polyaddition est l'addition de plusieurs molécules insaturées sans élimination de molécules simples comme H_2O ; HCl etc.

7.1.2 La polymérisation

La polymérisation est l'addition de molécules insaturées identiques. Le composé insaturé initial est appelé monomère.

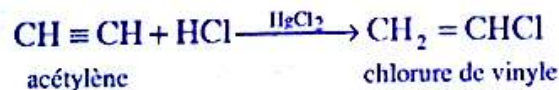
Un polymère est une molécule engendrée par la répétition d'une petite unité structurale appelée motif. Le nombre n de motif d'un polymère est appelé indice de polymérisation (ou degré de polymérisation) :

Exemple :



7.1.3 Obtention d'un monomère : le chlorure de vinyle

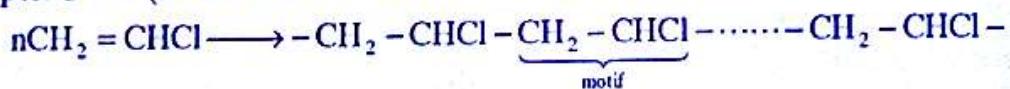
Vers 200°C , en présence de chlorure de mercure HgCl_2 , l'addition du chlorure d'hydrogène sur l'acétylène, conduit au monochloroéthène encore appelé chlorure de vinyle $\text{CH}_2 = \text{CHCl}$.



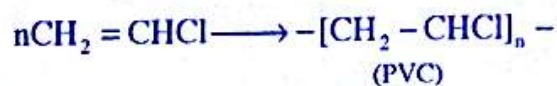
7.1.4 Exemples de polyadditions

• Le polychlorure de vinyle (PVC)

L'addition de plusieurs molécules de chlorure de vinyle donne le polychlorure de vinyle encore appelé PVC. (Le monomère est le chlorure de vinyle).

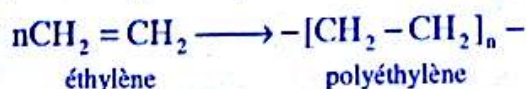


ou encore :



• Le polyéthylène

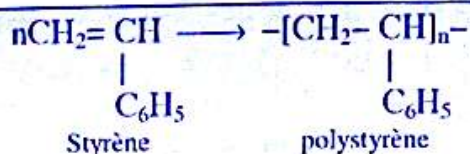
Le monomère est l'éthylène $\text{CH}_2 = \text{CH}_2$:



• Le polystyrène

Le monomère utilisé est le styrène $\text{CH}_2 = \text{CH}$:





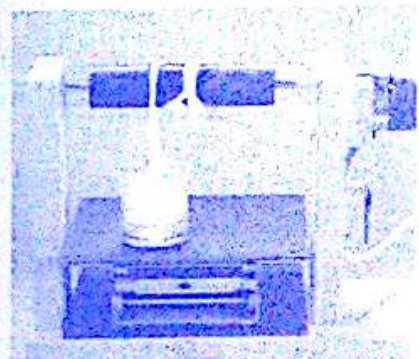
7.2 La polycondensation

7.2.1 Définition

La polycondensation est l'addition de plusieurs molécules polyfonctionnelles avec élimination de molécules simples comme H_2O ; HCl etc.

7.2.2 Activité : une réaction de polycondensation

Matériel : bécher ; solution de chlorure d'adipyle ; solution du 1,6-diaminohexane ; solution de tétrachlorure de carbone ; baguette en verre ; cylindre tournant.

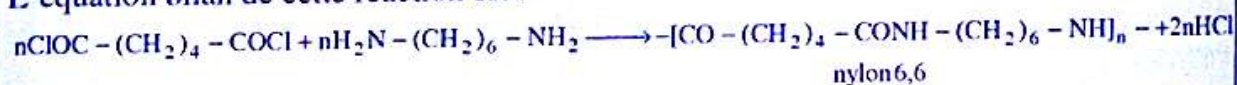


OBJECTIF : obtention du nylon 6,6

Manipulation

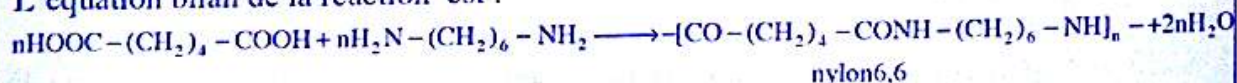
On fait réagir une solution du dichlorure d'hexanedioyle $\text{ClOC} - (\text{CH}_2)_4 - \text{COCl}$ dans du tétrachlorure de carbone CCl_4 avec une solution du 1,6-diaminohexane $\text{H}_2\text{N} - (\text{CH}_2)_6 - \text{NH}_2$. Les deux solutions n'étant pas miscibles, la réaction se produit à la surface de séparation des deux liquides appelée interface. On tire le fil de nylon grâce à une baguette en verre et on l'enroule sur un cylindre tournant. Le nylon continu à se former à l'interface.

L'équation bilan de cette réaction est :



Le nylon 6,6 peut être obtenu également par polycondensation de l'acide hexanedioïque $\text{HOOC} - (\text{CH}_2)_4 - \text{COOH}$ et du 1,6-diaminohexane.

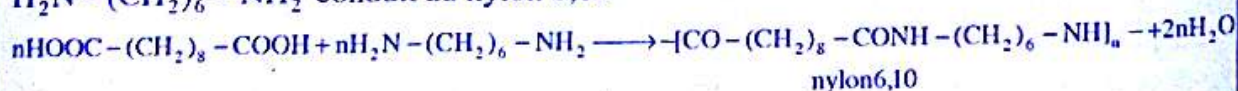
L'équation bilan de la réaction est :



La notation 6,6 indique que le motif est constitué de deux groupes de 6 atomes de carbone reliés par un atome d'azote.

7.2.3 Le nylon 6,10

Un mélange de l'acide décanedioïque $\text{HOOC} - (\text{CH}_2)_8 - \text{COOH}$ et du 1,6-diaminohexane $\text{H}_2\text{N} - (\text{CH}_2)_6 - \text{NH}_2$ conduit au nylon 6,10



7.3 Utilisations des polymères

- Les polymères servent à la fabrication des sacs d'emballage, des jouets, des bouteilles d'eau minérales, des pots de yaourts, des pinces à linge etc.
- Le PVC est utilisé dans la tuyauterie pour l'alimentation et l'évacuation d'eau.
- Les nylons sont utilisés pour fabriquer toutes sortes d'objets dans les domaines de l'automobile, de l'électroménager, de l'électricité, des instruments médicaux, du téléphone, des fils etc.

Exercice résolu

Une substance organique A de formule C_xH_yN , contient en masse 67,92% de carbone et 5,67% d'hydrogène.

1° Trouver sa formule brute.

2° Quelle est sa formule semi-développée sachant que sa molécule contient le groupe nitrile $-C \equiv N$.

3° Par polymérisation, A donne un composé organique B de masse molaire $2,65 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.

a) Ecrire l'équation bilan de la polymérisation.

b) Déterminer l'indice de polymérisation.

$$M(\text{H}) = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}; M(\text{C}) = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}; M(\text{N}) = 14 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}; M(\text{O}) = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

1° Le pourcentage en azote de A est :

$$\%N = 100 - (\%C + \%H)$$

soit : $\%N = 100 - (67,92 + 5,67) = 26,41$

Par ailleurs, la molécule de A ne contient qu'un seul atome d'azote. On peut donc écrire :

$$\frac{12x}{\%C} = \frac{y}{\%H} = \frac{14}{\%N} = \frac{M}{100}$$

De ce fait : $\frac{14}{\%N} = \frac{M}{100} \Rightarrow M = \frac{14 \times 100}{\%N} = \frac{1400}{26,41} = 53 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

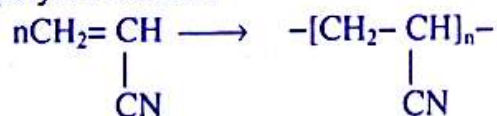
Aussi : $\frac{12x}{\%C} = \frac{M}{100} \Rightarrow x = \frac{M \times \%C}{12 \times 100} = \frac{53 \times 67,92}{1200} = 2,9 \approx 3$

De même : $\frac{y}{\%H} = \frac{M}{100} \Rightarrow y = \frac{M \times \%H}{100} = \frac{53 \times 5,67}{100} = 3$

La formule brute de A est donc : C_3H_3N

2° Sa formule semi-développée est : $\text{CH}_2 = \text{CH} - \text{CN}$

3° a) Equation bilan de la polymérisation :



b) Indice de polymérisation :

$$n = \frac{M_p}{M}$$

$$M_p = 2,65 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1} = 2650 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$M = 53 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

En conséquence : $n = \frac{2650}{53} = 50$

$$\boxed{n = 50}$$

CINETIQUE CHIMIQUE

1 VITESSES

DES REACTIONS CHIMIQUES

1.1 Généralités

1.1.1 Définition

La cinétique chimique est l'étude de l'évolution temporelle des réactions chimiques.

1.1.2 Classification cinétique des réactions naturelles

On distingue trois types de réactions naturelles :

- Les réactions rapides (*Exemple* : réactions de précipitation des hydroxydes métalliques).
- Les réactions lentes (*Exemple* : réactions d'estérification).
- Les réactions infiniment lentes (*Exemple* : réaction de synthèse de l'eau).

1.1.3 Facteurs influant sur la vitesse d'une réaction

La vitesse d'une réaction chimique dépend de la température, des concentrations et des catalyseurs.

1.1.4 Vitesse moyenne et vitesse instantanée

• Vitesse moyenne

Considérons une réaction chimique d'équation bilan :



A et B sont les réactifs; C et D sont les produits formés; a, b, c et d sont les coefficients stœchiométriques.

Soient $[X]_1$ la concentration molaire d'un constituant du mélange réactionnel à l'instant t_1 et $[X]_2$, la concentration molaire du même constituant à l'instant t_2 .

La vitesse moyenne de formation d'un produit est :

$$v_{\text{moy}} = \frac{[X]_2 - [X]_1}{t_2 - t_1}$$

La vitesse moyenne de disparition d'un réactif est :

$$v_{\text{moy}} = -\frac{[X]_2 - [X]_1}{t_2 - t_1}$$

Exemple : la vitesse moyenne de disparition du constituant A est :

$$v_{\text{moy}} = -\frac{[A]_2 - [A]_1}{t_2 - t_1}$$

• Vitesse instantanée

La vitesse instantanée de formation d'un produit ou tout simplement vitesse de formation v , est la dérivée de la concentration du produit par rapport au temps.

$$v = \frac{d[X]}{dt}$$

La vitesse de disparition d'un réactif est l'opposé de la dérivée de la concentration du réactif par rapport au temps :

$$v = -\frac{d[X]}{dt}$$

Exemple : la vitesse de disparition du constituant A est :

$$v = -\frac{d[A]}{dt}$$

Si le mélange réactionnel est gazeux, la concentration d'un constituant est proportionnelle à sa pression partielle :

$$[A] = \frac{P_A}{RT}$$

P_A est la pression partielle du constituant A

R est la constante des gaz parfaits ($R = 8,31$ USI)

T est la température absolue du gaz.

En conséquence :

$$v = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{P_A}{RT} \right) = -\frac{1}{RT} \frac{dP_A}{dt}$$

$$v = -\frac{1}{RT} \frac{dP_A}{dt}$$

1.1.5 Ordre d'une réaction

L'expérience montre qu'à une température donnée la vitesse d'une réaction est proportionnelle au produit des concentrations des réactifs, chaque concentration étant affectée d'un exposant égal au nombre de moles du constituant qui participe à la réaction.

$$v = k[A]^a \cdot [B]^b$$

k est une constante dépendant uniquement de la température. On l'appelle **constante de vitesse**.

En plus, si $[A] = [B]$, on obtient : $v = [A]^{(a+b)}$.

Le nombre $n = a + b$ est appelé ordre de la réaction.

Ainsi :

$$v = [A]^n$$

– si $n = 1$, la réaction est du premier ordre (ou réaction d'ordre 1).

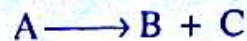
– si $n = 2$, la réaction est du second ordre (ou réaction d'ordre 2).

1.2 Les réactions d'ordre 1

1.2.1 Loi de variation de la concentration (loi de transformation)

Une réaction d'ordre 1 est une réaction dont la molarité est 1. C'est une réaction

du type :



Si c_0 est la concentration molaire initiale de A et c sa concentration à une date t quelconque, la vitesse de disparition du constituant A est, par définition :

$$v = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{dc}{dt} \quad (1)$$

Par ailleurs, si k est la constante de vitesse, on a :

$$v = kc \quad (2)$$

A partir des relations (1) et (2), on obtient l'égalité :

$$-\frac{dc}{dt} = kc$$

Ou encore :

$$\frac{dc}{c} = -kdt$$

Cette équation différentielle admet comme solution :

$$\ln c_0 - \ln c = kt$$

D'autre part :

$$\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$$

En conséquence :

$$\ln \frac{c_0}{c} = kt$$

$$\boxed{\ln \frac{c_0}{c} = kt}$$

1.2.2 Temps de demi- réaction

Le temps de demi- réaction $t_{\frac{1}{2}}$ est le temps au bout duquel la moitié de la substance réagissante disparaît.

Nous avons :

$$\ln \frac{c_0}{c} = kt$$

Si $c = \frac{c_0}{2}$, $t = t_{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$$\ln \frac{c_0}{\frac{c_0}{2}} = kt_{\frac{1}{2}}$$

Soit :

$$\ln 2 = kt_{\frac{1}{2}}$$

D'où :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{k}$$

$$\boxed{t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{k}}$$

Pour une réaction du premier ordre, le temps de demi- réaction est **indépendant** de la concentration initiale.

1.3 Les réactions d'ordre 2

1.3.1 Loi de transformation

Une réaction d'ordre 2 est une réaction dont la molarité est 2. C'est une réaction du type :



Si les concentrations molaires initiales sont identiques ($[A]_0 = [B]_0 = c_0$), à une date t quelconque les concentrations des réactifs sont identiques également : $[A] = [B] = c$.

La vitesse de disparition du constituant A est, par définition :

$$v = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{dc}{dt} \quad (1)$$

Si k est la constante de vitesse, la vitesse de disparition de A peut s'écrire :

$$v = k[A]^2 = kc^2 \quad (3)$$

Les relations (1) et (3) permettent d'écrire :

$$-\frac{dc}{dt} = kc^2$$

Ou encore : $-\frac{dc}{c^2} = kdt$

Cette équation différentielle admet comme solution :

$$\boxed{\frac{1}{c} - \frac{1}{c_0} = kt}$$

1.3.2 Temps de demi-réaction

Nous avons : $\frac{1}{c} - \frac{1}{c_0} = kt$

Si $c = \frac{c_0}{2}$, $t = t_{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\frac{c_0}{2}} - \frac{1}{c_0} = kt_{\frac{1}{2}}$

ou encore : $\frac{2}{c_0} - \frac{1}{c_0} = kt_{\frac{1}{2}}$

Par la suite : $\frac{1}{c_0} = kt_{\frac{1}{2}} \Rightarrow t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{kc_0}$

$$\boxed{t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{kc_0}}$$

Pour une réaction du second ordre, le temps de demi-réaction est inversement proportionnel à la concentration initiale.

1.4 Détermination de l'ordre d'une réaction

1.4.1 Méthode graphique

On trace le graphe représentant les variations de $\ln c = f(t)$ ou de $\frac{1}{c} = f(t)$.

– si le graphe de $\ln c = f(t)$ est une droite, la réaction est d'ordre 1.

– si le graphe de $\frac{1}{c} = f(t)$ est une droite, la réaction est d'ordre 2.

1.4.2 Méthode de la constante de vitesse

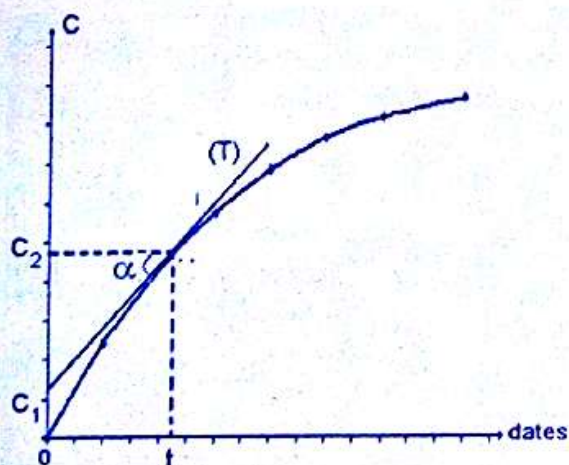
A différentes dates t , on calcule les valeurs de $k = \frac{1}{t} \ln \frac{c_0}{c}$ ou de $k = \frac{c_0 - c}{t \cdot c \cdot c_0}$

– si $\frac{1}{t} \ln \frac{c_0}{c} = \text{Cte}$, la réaction est d'ordre 1.

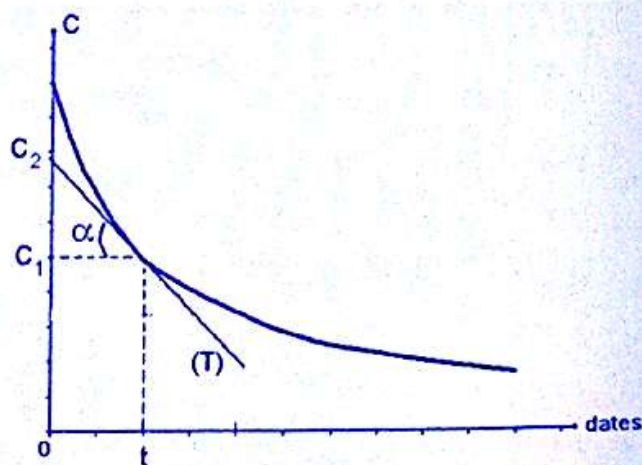
– si $\frac{c_0 - c}{t \cdot c \cdot c_0} = \text{Cte}$, la réaction est d'ordre 2.

1.5 Méthode chimique de détermination des vitesses

On effectue des prélèvements à des intervalles de temps réguliers. A chaque instant un dosage chimique permet de déterminer la concentration molaire de l'un des constituants du système. On trace ensuite la courbe représentant les variations de la concentration de ce constituant en fonction de temps. La vitesse à un instant, est numériquement égale à la valeur absolue du coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe à cet instant.



courbe de variation de la concentration d'un produit

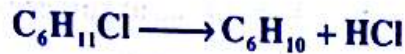


courbe de variation de la concentration d'un réactif

$$v = \tan \alpha = \frac{C_2 - C_1}{t}$$

1_ Déshydrogénation du monochlorocyclohexane

On effectue la déshydrogénation du monochlorocyclohexane $C_6H_{11}Cl$ à $116^\circ C$ en présence d'un catalyseur :



Le volume total est constant. A la date $t=0$, la concentration de $C_6H_{11}Cl$ est $0,5 \text{ mol} \cdot L^{-1}$. A la date $t=70 \text{ mn}$, la concentration de HCl est $0,29 \text{ mol} \cdot L^{-1}$. La réaction est du premier ordre.

1° Déterminer :

a) la valeur de la constante de vitesse

b) le temps de demi-réaction

2° Combien de temps faudrait-il pour que la concentration de HCl soit $0,45 \text{ mol} \cdot L^{-1}$?

Solution

1° a) La loi de transformation pour les réactions du premier ordre est :

$$\ln \frac{c_0}{c} = kt$$

On en déduit la constante de vitesse:

$$k = \frac{1}{t} \ln \frac{c_0}{c}$$

La concentration initiale du monochlorocyclohexane est $c_0 = 0,5 \text{ mol} \cdot L^{-1}$.

Sa concentration à la date $t = 70 \text{ mn}$ est $c = 0,5 - 0,29 = 0,21 \text{ mol} \cdot L^{-1}$.

Donc :

$$k = \frac{1}{70} \ln \frac{0,5}{0,21} = 1,24 \cdot 10^{-2} \text{ mn}^{-1}$$

$$k = 1,24 \cdot 10^{-2} \text{ mn}^{-1}$$

b) Temps de demi-réaction :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0,693}{1,24 \cdot 10^{-2}} = 55,89 \text{ mn}$$

$$t_{\frac{1}{2}} = 55,89 \text{ mn}$$

2° Temps nécessaire pour que la concentration de HCl soit $0,45 \text{ mol} \cdot L^{-1}$:

Nous avons :

$$\ln \frac{c_0}{c} = kt$$

On en déduit :

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{c_0}{c}$$

$$c = 0,5 - 0,45 = 0,05 \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

En conséquence :

$$t = \frac{1}{1,24 \cdot 10^{-2}} \ln \frac{0,5}{0,05} = 185,6 \text{ mn}$$

$$t = 185,6 \text{ mn}$$

2_ Réaction du chlorure d'éthyle avec l'iodure de potassium en solution cétonique

Le chlorure d'éthyle réagit avec l'iodure de potassium en solution cétonique pour donner l'iodure d'éthyle et la chlorure de potassium suivant l'équation bilan :



La concentration initiale de chacun des réactifs $\text{C}_2\text{H}_5\text{Cl}$ et KI est $c_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. La réaction est d'ordre 2 et la vitesse initiale est $v_0 = 5,44 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

1° Calculer la constante de vitesse de la réaction et le temps de demi-réaction.

2° Combien de temps faudrait-il pour que 80% de la quantité initiale de chlorure d'éthyle soit transformé ?

Solution

1° La réaction étant d'ordre 2, on a :

$$v_0 = k[\text{C}_2\text{H}_5\text{Cl}]_0^2 = kc_0^2$$

On en déduit :

$$k = \frac{v_0}{c_0^2} = \frac{5,44 \cdot 10^{-7}}{(0,1)^2} = 5,44 \cdot 10^{-5}$$

$$k = 5,44 \cdot 10^{-5} \text{ mol}^{-1} \text{L} \cdot \text{s}^{-1}$$

Le temps de demi-réaction :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{kc_0} = \frac{1}{5,44 \cdot 10^{-5} \times 0,1} = 1,84 \cdot 10^5 \text{ s}$$

$$t_{\frac{1}{2}} = 1,84 \cdot 10^5 \text{ s}$$

2° Temps nécessaire à la disparition de 80% de $\text{C}_2\text{H}_5\text{Cl}$

Nous avons :

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{c_0} = kt$$

On en déduit :

$$t = \frac{c_0 - c}{kcc_0}$$

Si 80% de $\text{C}_2\text{H}_5\text{Cl}$ est transformé, il reste 20% de la quantité initiale :

$$c = \frac{20c_0}{100}$$

soit :

$$c = \frac{20 \times 0,1}{100} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

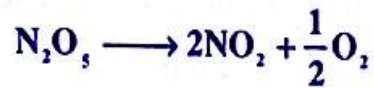
Par conséquent :

$$t = \frac{0,1 - 2 \cdot 10^{-2}}{5,44 \cdot 10^{-5} \times 0,1 \times 2 \cdot 10^{-2}} = 7,35 \cdot 10^5 \text{ s}$$

$$t = 7,35 \cdot 10^5 \text{ s}$$

3_ Décomposition de l'hémi-pentoxyde d'azote

L'hémi-pentoxyde d'azote N_2O_5 se dissocie suivant l'équation :



La réaction est d'ordre 1.

1° A $105^\circ C$ on constate qu'au bout de 4mn, $\frac{3}{4}$ de la quantité initiale de N_2O_5 a été décomposée.

a) Calculer le temps de demi-réaction à cette température.

b) Quel serait le temps de demi-réaction si la concentration initiale avait été doublée ?

2° A $95^\circ C$ le temps de demi-réaction est 5mn. Calculer le temps au bout duquel $\frac{3}{4}$ de la quantité initiale sera décomposée.

Solution

1° a) Temps de demi-réaction à la température de $105^\circ C$:

On a :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{k}$$

Par ailleurs, la loi de variation de la concentration d'une réaction d'ordre 1 s'écrit :

$$\ln \frac{c_0}{c} = kt$$

On en déduit :

$$k = \frac{1}{t} \ln \frac{c_0}{c}$$

A la date $t = 4mn$, la quantité de N_2O_5 transformé est $\frac{3}{4}c_0$; la quantité de N_2O_5 restante à cette date est :

$$c = c_0 - \frac{3c_0}{4} = \frac{c_0}{4}$$

Par conséquent :

$$k = \frac{1}{4} \ln \frac{c_0}{\frac{c_0}{4}} = \frac{\ln 4}{4} = 0,35mn^{-1}$$

Ainsi :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{0,35} = 1,98mn$$

$$t_{\frac{1}{2}} = 1,98mn$$

b) Nous avons :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{k}$$

Le temps de demi-réaction est indépendant de la concentration initiale ; donc :

$$t_{\frac{1}{2}} = 1,98 \text{ mn}$$

2° La constante de vitesse dépend de la température. Sa nouvelle valeur est :

$$k' = \frac{\ln 2}{t_{\frac{1}{2}}} = \frac{\ln 2}{5} = 0,14 \text{ mn}^{-1}$$

Compte tenu de la loi de transformation, on obtient la formule suivante :

$$\ln \frac{c_0}{c} = k' \cdot t'$$

D'où:
$$t' = \frac{1}{k'} \cdot \ln \frac{c_0}{c}$$

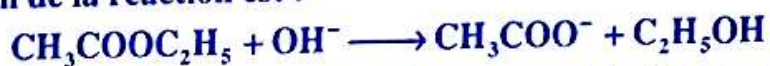
Avec :
$$c = \frac{c_0}{4}$$

On obtient:
$$t' = \frac{1}{0,14} \ln \frac{C_0}{\frac{C_0}{4}} = \frac{\ln 4}{0,14} = 9,9 \text{ mn}$$

$$t' = 9,9 \text{ mn}$$

4_ Saponification de l'éthanoate d'éthyle

On étudie la cinétique de la réaction de saponification de l'éthanoate d'éthyle. L'équation bilan de la réaction est :



Des expériences faites avec des concentrations molaires initiales $[\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5]_0 = [\text{OH}^-]_0 = c_0$, ont données les temps de demi-réaction $t_{\frac{1}{2}}$

indiqués dans le tableau suivant :

$c_0 \text{ (mol} \cdot \text{L}^{-1}\text{)}$	10^{-2}	$2 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-2}$
$t_{\frac{1}{2}} \text{ (mn)}$	17,8	8,9	4,45	2,22

1° Montrer que la réaction est d'ordre 2 et déterminer la constante de vitesse.

2° On part des conditions :

$[\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5]_0 = [\text{OH}^-]_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Calculer le temps qu'il faut pour que 80% de l'acétate soit transformé.

Solution

1° Le temps de demi-réaction pour une réaction du second ordre s'écrit :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{kc_0}$$

Ou encore :

$$c_0 \cdot t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k}$$

Donc, si la réaction est d'ordre 2, le produit $c_0 \cdot t_{\frac{1}{2}}$ est constant. Le tableau ci-dessous

indique les valeurs de ce produit :

c_0 (mol · L ⁻¹)	10 ⁻²	2 · 10 ⁻²	4 · 10 ⁻²	8 · 10 ⁻²
$t_{\frac{1}{2}}$ (mn)	17,8	8,9	4,45	2,22
$c_0 \cdot t_{\frac{1}{2}}$ (mol · L ⁻¹ · mn)	17,8 · 10 ⁻²	17,8 · 10 ⁻²	17,8 · 10 ⁻²	17,76 · 10 ⁻²

On remarque que : $c_0 \cdot t_{\frac{1}{2}} = 17,8 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{mn}$

La réaction est donc d'ordre 2.

Par ailleurs: $\frac{1}{k} = c_0 \cdot t_{\frac{1}{2}}$

D'où : $k = \frac{1}{c_0 \cdot t_{\frac{1}{2}}}$

soit : $k = \frac{1}{17,8 \cdot 10^{-2}} = 5,6 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{mn}^{-1}$

$$k = 5,6 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{mn}^{-1}$$

2° la loi de transformation des réactions d'ordre 2 s'écrit :

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{c_0} = kt$$

On en déduit : $t = \frac{c_0 - c}{kc_0 \cdot c}$

La quantité d'acétate restant est 20%

soit : $c = \frac{20C_0}{100} = \frac{20 \times 2 \cdot 10^{-2}}{100} = 0,4 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

Donc :

$$t = \frac{2 \cdot 10^{-2} - 0,4 \cdot 10^{-2}}{5,61 \times 2 \cdot 10^{-2} \times 0,4 \cdot 10^{-2}} = 35,65 \text{ mn}$$

$$t = 35,65 \text{ mn}$$

5_ Détermination de l'ordre d'une réaction

On étudie la cinétique de la saponification de l'éthanoate d'éthyle par l'hydroxyde de sodium :



La concentration initiale de chacun des réactifs est $C_0 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Des prélèvements effectués à différentes dates t ont permis de déterminer la variation de la concentration de l'alcool formé. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

t (mn)	0	15	37	53	83	143
$10^2[\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}] (\text{mol} \cdot \text{L}^{-1})$	0	1,6	2,7	3,15	3,66	4,1

1° Montre que la réaction est d'ordre 2.

2° Calcule la constante de vitesse et le temps de demi-réaction.

3° Quelle est la vitesse initiale et la vitesse à l'instant $t = 15 \text{ mn}$.

Solution

1° Si la réaction est d'ordre 2, on a : $\frac{C_0 - C}{tCC_0} = k = \text{Cte}$

C est la concentration d'un réactif ($C = [\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5] = [\text{OH}^-]$).

Remarque: à l'instant $t = 5 \text{ mn}$, $10^2[\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}] = 1,6$

Donc : $[\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}] = \frac{1,6}{10^2} = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

Les concentrations molaires des différents constituants à l'instant initial puis à une date t quelconque sont données par le tableau d'avancement relatif à la réaction :



$t = 0$	$5 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	0	0
$t \neq 0$	$5 \cdot 10^{-2} - x$	$5 \cdot 10^{-2} - x$	x	x

A chaque instant, on a : $C = 5 \cdot 10^{-2} - x$

$x = [\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}] \Rightarrow C = 5 \cdot 10^{-2} - [\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}]$ On obtient le tableau suivant :

t (mn)	0	15	37	53	83	143
$[\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}] (\text{mol} \cdot \text{L}^{-1})$	0	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$3,15 \cdot 10^{-2}$	$3,66 \cdot 10^{-2}$	$4,1 \cdot 10^{-2}$
$C = 5 \cdot 10^{-2} - [\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}]$	$5 \cdot 10^{-2}$	$3,4 \cdot 10^{-2}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$	$1,85 \cdot 10^{-2}$	$1,34 \cdot 10^{-2}$	$0,9 \cdot 10^{-2}$

$$\text{A } t = 15 \text{ mn, on a : } k_1 = \frac{5 \cdot 10^{-2} - 3,4 \cdot 10^{-2}}{15 \times 3,4 \cdot 10^{-2} \times 5 \cdot 10^{-2}} = 0,63$$

$$\text{A } t = 37 \text{ mn, on a : } k_2 = \frac{5 \cdot 10^{-2} - 2,3 \cdot 10^{-2}}{37 \times 2,3 \cdot 10^{-2} \times 5 \cdot 10^{-2}} = 0,63$$

$$\text{A } t = 53 \text{ mn, on a : } k_3 = \frac{5 \cdot 10^{-2} - 1,85 \cdot 10^{-2}}{53 \times 1,85 \cdot 10^{-2} \times 5 \cdot 10^{-2}} = 0,64$$

$$\text{A } t = 83 \text{ mn, on a : } k_4 = \frac{5 \cdot 10^{-2} - 1,34 \cdot 10^{-2}}{83 \times 1,34 \cdot 10^{-2} \times 5 \cdot 10^{-2}} = 0,65$$

$$\text{A } t = 143 \text{ mn, on a : } k_5 = \frac{5 \cdot 10^{-2} - 0,9 \cdot 10^{-2}}{143 \times 0,9 \cdot 10^{-2} \times 5 \cdot 10^{-2}} = 0,64$$

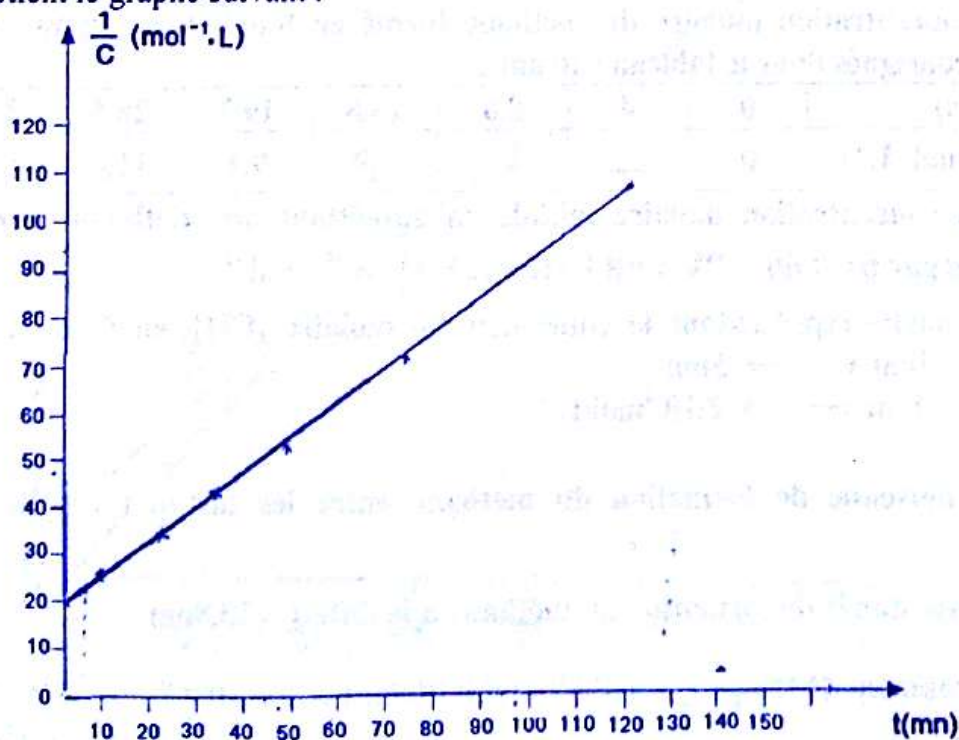
$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 0,64$ La réaction est d'ordre 2.

Méthode graphique de détermination de l'ordre

Si la réaction est d'ordre 2, le graphe de $\frac{1}{C} = f(t)$ est une droite.

t(mn)	0	15	37	53	83	143
C(mol · L ⁻¹)	5 · 10 ⁻²	3,4 · 10 ⁻²	2,3 · 10 ⁻²	1,85 · 10 ⁻²	1,34 · 10 ⁻²	0,9 · 10 ⁻²
$\frac{1}{C}$ (mol ⁻¹ · L)	20	29,41	43,47	54,05	74,52	111,11

On obtient le graphe suivant :



$\frac{1}{C} = f(t)$ est une droite, donc la réaction est d'ordre 2.

NB : L'élève choisira l'une des deux méthodes.

2° La constante de vitesse est $k = 0,64 \text{ mn}^{-1} \text{ mol}^{-1} \text{ L}$.

Le temps de demi-réaction :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{kC_0} = \frac{1}{0,64 \times 5 \cdot 10^{-2}} = 31,25 \text{ mn}$$

$$t_{\frac{1}{2}} = 31,25 \text{ mn}$$

3° Vitesse initiale :

$$v_0 = kC_0^2 = 0,64 \times (5 \cdot 10^{-2})^2 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ mn}^{-1}$$

$$v_0 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ mn}^{-1}$$

Vitesse à l'instant $t = 15 \text{ mn}$:

$$v = kC^2 = 0,64 \times (3,4 \cdot 10^{-2})^2 = 7,4 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ mn}^{-1}$$

$$v = 7,4 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ mn}^{-1}$$

6_ Décomposition de l'éthanal

L'éthanal se décompose en phase gazeuse, suivant l'équation :



On introduit de l'éthanal à la date $t = 0$, dans une enceinte de volume invariable, préalablement vide, portée à la température $\theta = 477^\circ \text{C}$, sous une pression initiale $P = 2,83 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. La mesure de la pression dans l'enceinte permet d'évaluer la concentration molaire du méthane formé en fonction du temps. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

t(mn)	0	4	8,6	13,8	19,7	26,5	33,9
$10^4 [\text{CH}_4] (\text{mol} \cdot \text{L}^{-1})$	0	2,2	4,5	6,9	9,1	11,4	13,6

1° Calculer la concentration molaire initiale en admettant que l'éthanal gazeux vérifie la loi des gaz par faits : $PV = nRT$ ($R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$)

2° Tracer la courbe représentant la concentration molaire $[\text{CH}_4]$ en fonction du temps. Echelles: $1 \text{ cm} \longleftrightarrow 5 \text{ mn}$

$$1 \text{ cm} \longleftrightarrow 2 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

3° Déterminer:

a) La vitesse moyenne de formation du méthane entre les instant $t_1 = 4 \text{ mn}$ et $t_2 = 13,8 \text{ mn}$.

b) La vitesse instantanée de formation du méthane à la date $t = 13,8 \text{ mn}$.

4° Au bout de combien de temps $\frac{1}{5}$ de l'éthanal initial a-t-il disparu ?

Solution

1° L'équation d'état des gaz parfait s'écrit :

$$PV = nRT$$

On en déduit:

$$P = \frac{n}{V} RT$$

La concentration initiale de l'éthanal est :

$$[\text{CH}_3 - \text{CHO}]_0 = \frac{n}{V}$$

Donc :

$$P = [\text{CH}_3 - \text{CHO}]_0 RT$$

D'où:

$$[\text{CH}_3 - \text{CHO}]_0 = \frac{P}{RT}$$

AN :

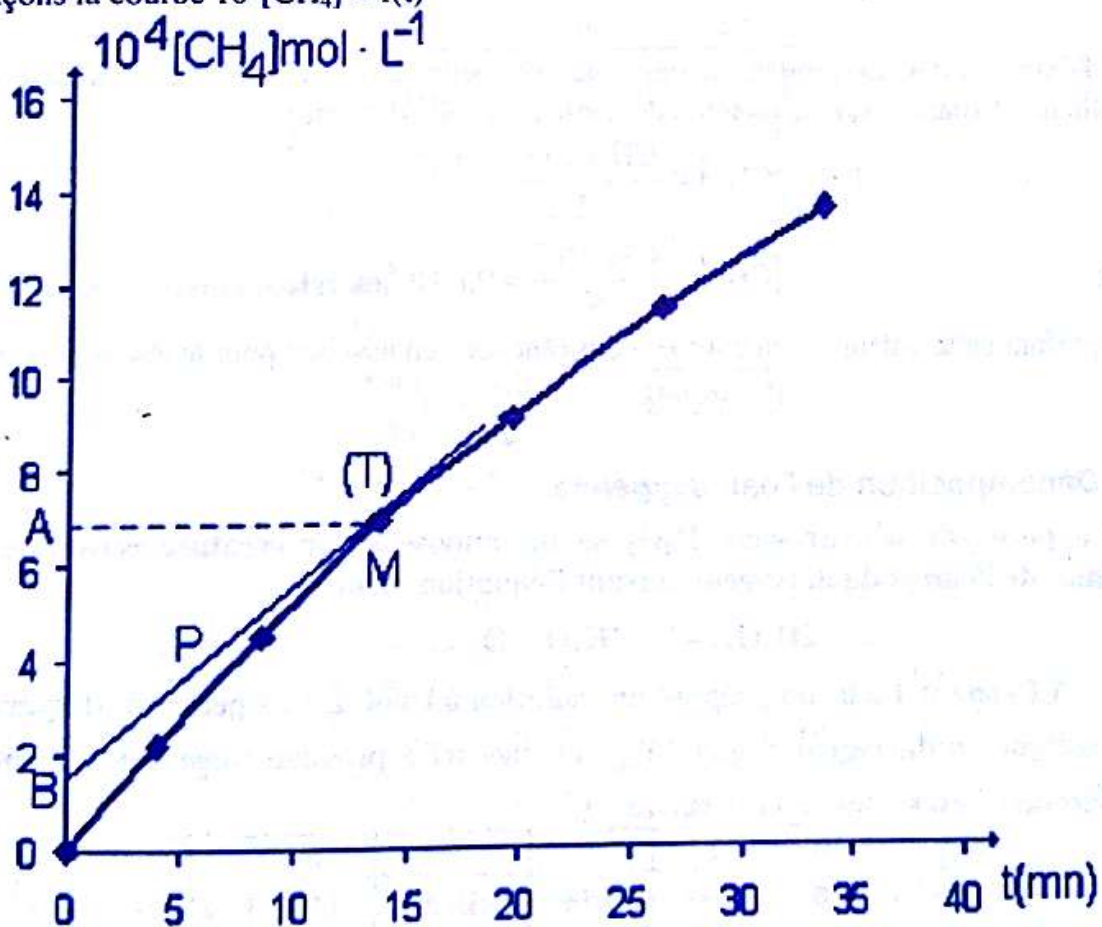
$$T = 273 + \theta = 273 + 477 = 750\text{K}$$

$$[\text{CH}_3 - \text{CHO}]_0 = \frac{2,83 \cdot 10^4}{8,314 \times 750} = 4,54 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$$

Soit, en mole par litre :

$$[\text{CH}_3 - \text{CHO}]_0 = 4,54 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

2° Traçons la courbe $10^4[\text{CH}_4] = f(t)$



3° a) La vitesse moyenne de formation du méthane est, par définition :

$$v_{\text{moy}} = \frac{[\text{CH}_4]_2 - [\text{CH}_4]_1}{t_2 - t_1}$$

soit :

$$v_{\text{moy}} = \frac{6,9 \cdot 10^{-4} - 2,2 \cdot 10^{-4}}{13,8 - 4} = 4,8 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{mn}^{-1}$$

$$v_{\text{moy}} = 4,8 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{mn}^{-1}$$

b) La vitesse instantanée est mesurée par le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point M(13,8mn).

$$v = \frac{AB}{AM}$$

ou encore

$$v = \frac{[\text{CH}_4]_A - [\text{CH}_4]_B}{13,8}$$

soit:

$$v = \frac{6,8 \cdot 10^{-4} - 1,8 \cdot 10^{-4}}{13,8} = 3,6 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{mn}^{-1}$$

$$v = 3,6 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{mn}^{-1}$$

4° D'après l'équation bilan, la quantité de méthane formée est égale à la quantité d'éthanal disparu. Donc la quantité de méthane à cette date est :

$$[\text{CH}_4] = \frac{[\text{CH}_3\text{CHO}]_0}{5}$$

soit:

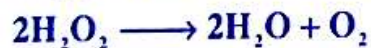
$$[\text{CH}_4] = \frac{4,54 \cdot 10^{-3}}{5} = 9,1 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

En portant cette valeur sur la courbe, nous obtenons en abscisse pour le temps, $t = 19\text{mn}$

$$t = 19\text{mn}$$

7_ Décomposition de l'eau oxygénée

Le peroxyde d'hydrogène H_2O_2 se décompose à température constante pour former de l'eau et du dioxygène suivant l'équation bilan :



A l'instant $t = 0$, on prépare une solution à $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ de peroxyde d'hydrogène. Le volume du dioxygène dégagé $V_{(\text{O}_2)}$ est mesuré à pression constante. On obtient à différentes dates t , les valeurs suivantes :

t(h)	0	1	3	4	6	8
$V(\text{O}_2)$ (L)	0	4,53	9,16	10,3	11,4	11,8

1° Déterminer les concentrations molaires résiduelles du peroxyde d'hydrogène $[\text{H}_2\text{O}_2]$

2° a) Tracer la courbe $[H_2O_2] = f(t)$

Echelles:

$$1\text{cm} \longleftrightarrow 1\text{h}$$

$$1\text{cm} \longleftrightarrow 0,1\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

b) Déduire de la courbe la vitesse de disparition du peroxyde d'hydrogène à l'instant $t = 3\text{h}$.

3° Dans les conditions de l'expérience, la vitesse de disparition du peroxyde d'hydrogène est telle que : $v = k[H_2O_2]$. Utiliser cette relation pour vérifier la valeur de la vitesse à l'instant $t = 3\text{h}$.

(Dans les conditions de l'expérience le volume molaire des gaz est $V_m = 24\text{L} \cdot \text{mol}^{-1}$)

Solution

1° Le nombre de moles du dioxygène à une date t est :

$$x = \frac{V(O_2)}{24}$$

Le volume de la solution étant 1 litre, la concentration molaire du dioxygène est :

$$[O_2] = x$$

La concentration molaire du peroxyde d'hydrogène à cet instant est déterminée à partir du tableau d'avancement relatif à la réaction :

	$2H_2O_2$	$2H_2O$	O_2
$t = 0$	$1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$	0	0
$t \neq 0$	$1 - 2x$	$2x$	x

Ainsi, à chaque instant nous avons :

$$[H_2O_2] = 1 - 2x$$

Exemple : à $t = 1\text{h}$,

$$x = \frac{V(O_2)}{24} = \frac{4,53}{24} = 0,19 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

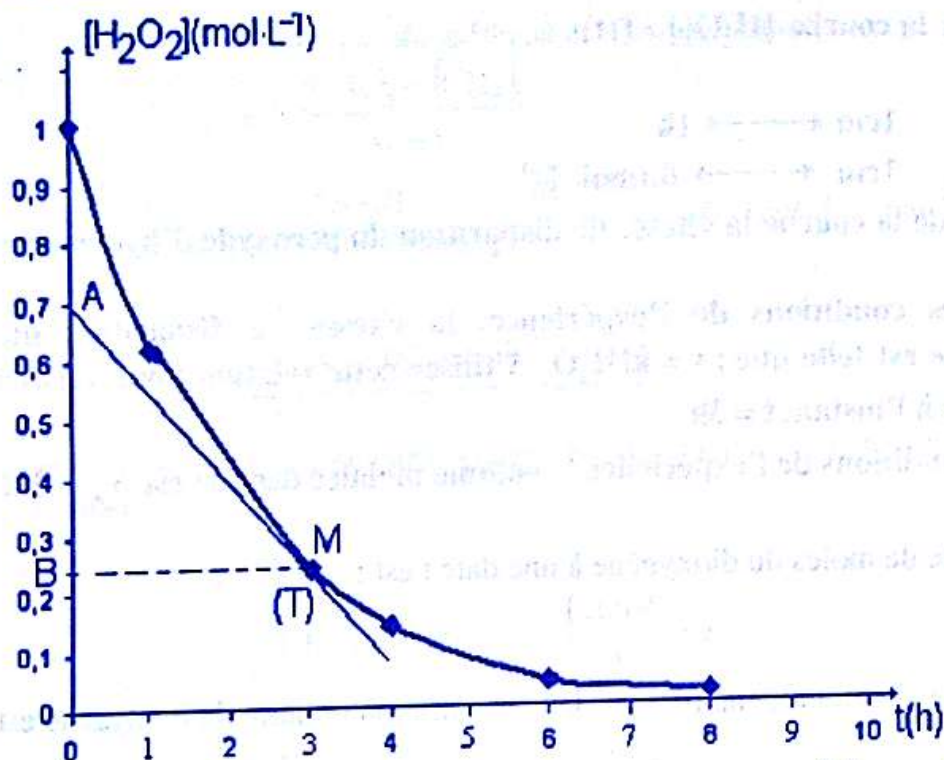
et

$$[H_2O_2] = 1 - 2 \times 0,19 = 0,62 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Nous obtenons le tableau suivant :

t(h)	0	1	3	4	6	8
$V_{O_2}(\text{L})$	0	4,53	9,16	10,3	11,4	11,8
$x(\text{mol} \cdot \text{L}^{-1})$	0	0,19	0,38	0,43	0,48	0,49
$[H_2O_2] = 1 - 2x$	1	0,62	0,24	0,14	0,04	0,02

2° a) La courbe $[H_2O_2] = f(t)$ est représentée ci-dessous :



b) Pour déterminer la vitesse à la date $t = 3\text{h}$, on trace la tangente à la courbe au point M(3h) puis on détermine son coefficient directeur (ou pente). La vitesse de disparition de H_2O_2 est l'opposé du coefficient directeur de la tangente (T)

$$v_{\text{H}_2\text{O}_2} = \frac{AB}{BM}$$

ou encore

$$v_{\text{H}_2\text{O}_2} = \frac{[\text{H}_2\text{O}_2]_A - [\text{H}_2\text{O}_2]_B}{3}$$

soit :

$$v_{\text{H}_2\text{O}_2} = \frac{0,7 - 0,25}{3} = 0,15 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$v_{\text{H}_2\text{O}_2} = 0,15 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$$

3° La vitesse de disparition de H_2O_2 est proportionnelle à sa concentration :

$$v = k[\text{H}_2\text{O}_2]$$

Avec

$$k = 1,28 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

Par ailleurs: $1 \text{ s}^{-1} = 3600 \text{ h}^{-1}$

Donc :

$$k = 1,28 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} = 1,28 \cdot 10^{-4} \times 3600 = 0,46 \text{ h}^{-1}$$

En conséquence :

$$v_{(3\text{h})} = 0,46 \times 0,24 = 0,11 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$$

On trouve pratiquement la même valeur.

8_ Oxydation de l'ion iodure par l'ion peroxodisulfate

L'ion peroxodisulfate $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ oxyde l'ion iodure suivant l'équation bilan :



On veut étudier la vitesse de disparition de l'ion iodure I^- . Pour cela, à la date $t = 0$, on mélange un volume $V_1 = 250\text{cm}^3$ de solution de peroxydisulfate de potassium $K_2S_2O_8$ de concentration $C_1 = 2 \cdot 10^{-2}\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et un volume $V_2 = 250\text{cm}^3$ de solution d'iodure de potassium KI de concentration $C_2 = 4 \cdot 10^{-2}\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

- 1° Calculer la concentration molaire initiale des ions iodures $[I^-]_0$ dans le mélange.
- 2° Par dosage de prélèvements, on détermine la concentration molaire en di-iodure $[I_2]$ à différentes dates t . On trouve :

t(mn)	0	2	4	6	8	10	12	15
$10^3[I_2](\text{mol} \cdot \text{L}^{-1})$	0	2,4	4,2	5,7	6,8	7,6	8,1	8,6

Tracer le graphique représentant $[I_2] = f(t)$

Echelles: 1cm \longleftrightarrow 2mm

1cm \longleftrightarrow $10^{-3}\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$

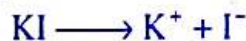
- 3° On désigne par $t_{\frac{1}{2}}$ le temps au bout duquel la moitié des ions iodures a disparu.

Déterminer la concentration du di-iodure à la date $t_{\frac{1}{2}}$.

- 4° Calculer la vitesse de formation du di-iodure à la date $t_{\frac{1}{2}}$ et en déduire la vitesse de disparition des ions iodures à la même date.

Solution

- 1° En solution, l'iodure de potassium se dissocie mole par mole suivant l'équation :



Par conséquent, la quantité de matière (nombre de moles) des ions iodures est égale au nombre de moles de l'iodure de potassium KI; soit :

$$n(I^-) = n(KI) = C_2 V_2$$

La concentration molaire initiale des ions iodures est :

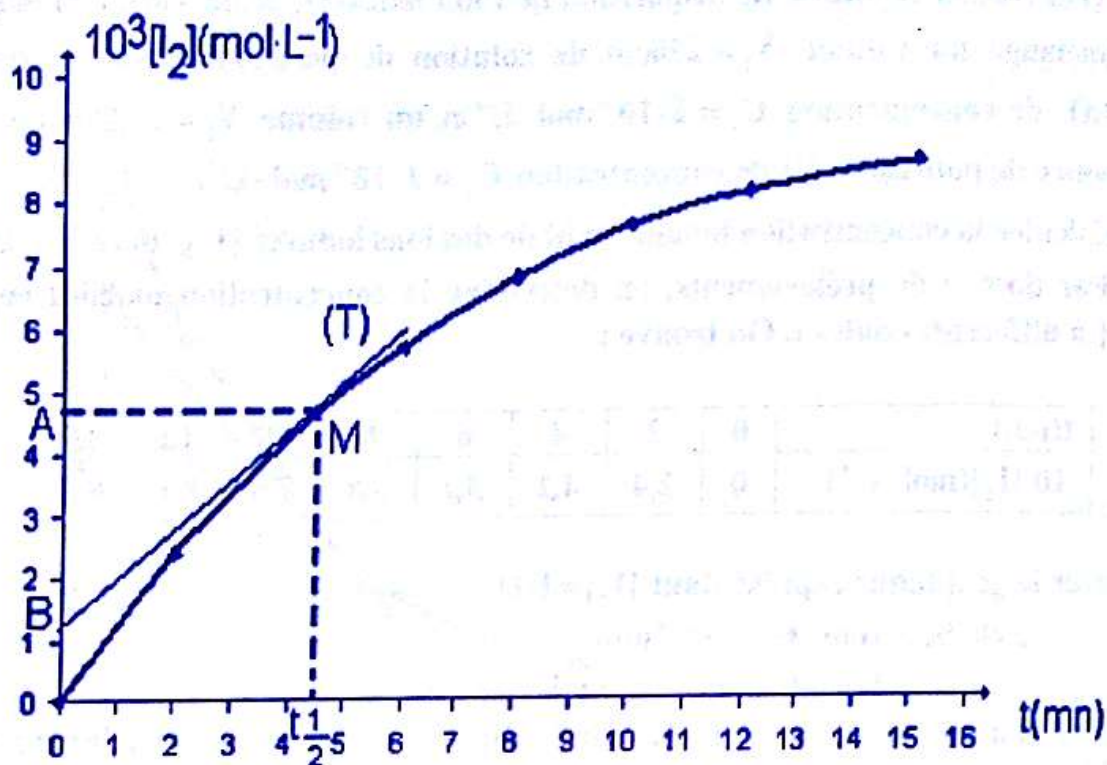
$$[I^-]_0 = \frac{n(I^-)}{V_1 + V_2} = \frac{C_2 V_2}{V_1 + V_2}$$

soit :

$$[I^-]_0 = \frac{4 \cdot 10^{-2} \times 250}{500} = 2 \cdot 10^{-2}\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\boxed{[I^-]_0 = 2 \cdot 10^{-2}\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}}$$

- 2° Traçons le graphe $10^3[I_2] = f(t)$



3° Soit x la concentration du di-iodé à la date $t_{\frac{1}{2}}$. Le tableau suivant indique les concentrations en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ des ions iodures et du di-iodé à la date $t = 0$ et à la date $t_{\frac{1}{2}}$

	2I^-	$\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$	I_2	2SO_4^{2-}
$t = 0$	$2 \cdot 10^{-2}$		0	0
$t_{\frac{1}{2}}$	$2 \cdot 10^{-2} - 2x$		x	$2x$

A l'instant $t = t_{\frac{1}{2}}$, la moitié de la quantité initiale des ions iodures a disparu. Donc:

$$2 \cdot 10^{-2} - 2x = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2}$$

D'où:

$$x = \frac{2 \cdot 10^{-2} - 10^{-2}}{2} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$[\text{I}_2] = x \Rightarrow$

$$[\text{I}_2] = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\boxed{[\text{I}_2] = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$$

4° La concentration du di-iodé à la date $t_{\frac{1}{2}}$ est : $[\text{I}_2] = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

Donc :

$$10^3 [\text{I}_2] = 5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

En portant cette valeur sur la courbe, nous obtenons en abscisse comme temps de demi-réaction $t_{\frac{1}{2}} = 4,5 \text{ mn}$.

La vitesse de formation du di-iodure au temps $t_{\frac{1}{2}}$ est donc égale à la pente de la tangente au point $M_{(4,5 \text{ mn})}$:

$$v_{I_2} = \frac{AB}{AM}$$

ou encore

$$v_{I_2} = \frac{[I_2]_A - [I_2]_B}{4,5}$$

soit :

$$v_{I_2} = \frac{4,75 \cdot 10^{-3} - 1,20 \cdot 10^{-3}}{4,5} = 7,8 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{mn}^{-1}$$

D'après les coefficients de l'équation bilan, nous avons à chaque instant :

$$v_{I^-} = 2v_{I_2}$$

Ainsi, à la date $t_{\frac{1}{2}} = 4,5 \text{ mn}$ la vitesse de disparition des ions iodures est donc :

$$v_{I^-} = 2 \times 7,8 \cdot 10^{-4} = 15,6 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{mn}^{-1}$$

$$v_{I_2} = 7,8 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{mn}^{-1}$$

$$v_{I^-} = 15,6 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{mn}^{-1}$$

9_ Cinétique d'une réaction d'estérification

On veut étudier la réaction d'estérification de l'alcool éthylique par l'acide acétique. Pour cela, on dispose de 7 ampoules identiques. On réalise dans chaque ampoule à l'instant $t=0$, un mélange de 10 cm^3 contenant de l'acide acétique à $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et de l'alcool éthylique à $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On place immédiatement ces ampoules dans une enceinte à température constante. A différentes dates t , le contenu d'une ampoule est dilué dans de l'eau glacée avant de doser l'acide restant grâce à une solution d'hydroxyde de sodium de concentration molaire $C_b = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Le tableau ci-dessous indique le volume V_b d'hydroxyde de sodium ajouté lors de chaque mesure.

t heures(h)	1	2	3	4	5	6	7
V_b (cm^3)	60	40	38	35	34	33	33

1° Ecrire l'équation bilan de la réaction d'estérification.

2° Expliquer pourquoi le contenu d'une ampoule est dilué dans de l'eau glacée avant le dosage.

3°

a) Déterminer les concentrations molaires C_A de l'acide restant à différentes dates t .

b) Tracer la courbe représentant les variations de la concentration C_E de l'ester en fonction du temps : $C_E = f(t)$.

Echelles :

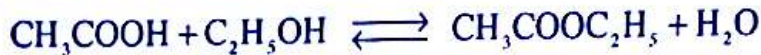
$$1\text{cm} \longleftrightarrow 1\text{h}$$

$$1\text{cm} \longleftrightarrow 0,1\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

c) A partir de la courbe, déterminer le temps de demi-réaction et la vitesse de formation de l'ester à cette date.

Solution

1° Equation bilan de la réaction d'estérification :



2° Le contenu d'une ampoule est dilué dans de l'eau glacée pour bloquer la réaction afin de réaliser un dosage parfait.

3° a) Les concentrations de l'acide restant :

L'hydroxyde de sodium (base forte) réagit mole par mole avec l'acide acétique :

$$n(\text{acide}) = n(\text{base})$$

soit : $C_A V_A = C_B V_B$

D'où : $C_A = \frac{C_B V_B}{V_A}$

Exemple : A la date $t = 1\text{h}$, $C_A = \frac{0,1 \times 60}{10} = 0,6\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$

Le tableau ci-dessous indique les différentes valeurs de C_A

t heures(h)	1	2	3	4	5	6	7
V_B (cm ³)	60	40	38	35	34	33	33
$C_A = \frac{C_B V_B}{V_A}$ (mol · L ⁻¹)	0,6	0,4	0,38	0,35	0,34	0,33	0,33

b) Le tableau d'avancement relatif à la réaction est :



$$t=0 \quad 1\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad 1\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad 0 \quad 0$$

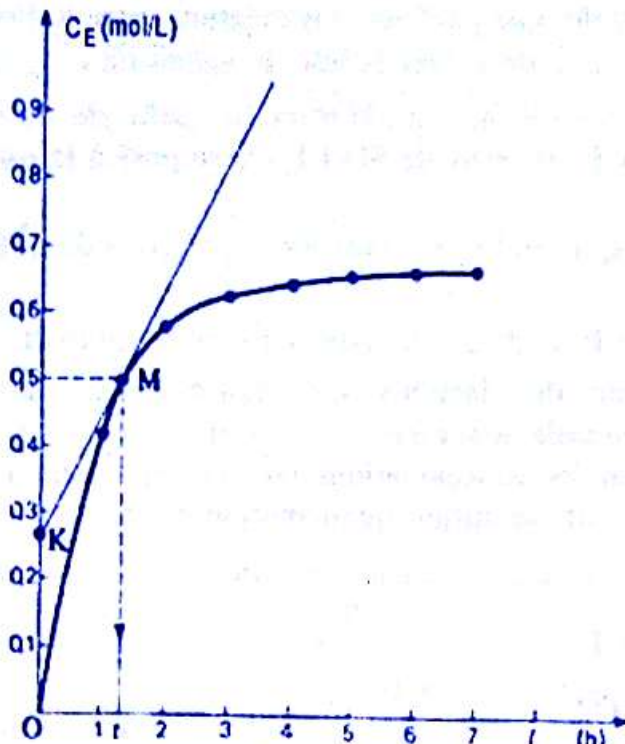
$$t \neq 0 \quad 1-x \quad 1-x \quad x \quad x$$

Ainsi, à chaque instant on a : $C_A = 1-x \Rightarrow x = 1-C_A$

La concentration de l'ester est $x = C_E = 1-C_A$. On obtient le tableau suivant :

t heures(h)	1	2	3	4	5	6	7
C_A (mol · L ⁻¹)	0,6	0,4	0,38	0,35	0,34	0,33	0,33
$C_E = 1-C_A$ (mol · L ⁻¹)	0,4	0,6	0,62	0,65	0,66	0,67	0,67

Le graphe représentant $C_E = f(t)$:



c) Le temps de demi-réaction est le temps au bout duquel la concentration de l'acide diminue de moitié $\left(C_A = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \right)$

Si $C_A = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, $C_E = 1 - 0,5 = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

En portant cette valeur en ordonnée, la lecture de la courbe donne en abscisse $t_{\frac{1}{2}} = 1,3 \text{ h}$.

La vitesse de formation de l'ester à cette date est la pente de la tangente au point M :

$$v = \frac{0,5 - 0,27}{1,3} = 1,77 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$v = 1,77 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$$

10_ Cinétique de la décomposition du chlorure de sulfuryle

Le chlorure de sulfuryle SO_2Cl_2 se décompose en phase gazeuse à 320°C suivant la réaction :



Afin d'étudier cette réaction, on introduit à la date $t = 0$, une certaine quantité de chlorure de sulfuryle dans un récipient de volume constant maintenu à 320°C . La mesure de la pression P dans le récipient permet de suivre l'évolution de la réaction. On obtient, à différentes dates t , les valeurs suivantes :

t(s)	0	100	210	250	350	380	450
P(bar)	0,51	0,63	0,73	0,75	0,80	0,82	0,85

1° Trouver, en utilisant la loi des gaz parfaits, une relation entre la pression initiale P_0 et la concentration molaire initiale c_0 ; en déduire la valeur de c_0 .

2° Soit α le coefficient de dissociation du chlorure de sulfuryle (le coefficient de dissociation est le rapport de la quantité de SO_2Cl_2 décomposé à la quantité initiale de (SO_2Cl_2)).

a) Exprimer en fonction de c_0 et α , les concentrations molaires des différents corps purs.

b) Exprimer P en fonction de P_0 et de α ; en déduire l'expression de α .

3° Déterminer pour chacun des instants qui figurent dans le tableau, les concentrations molaires en dioxyde de soufre.

4° Tracer la courbe donnant les concentrations en SO_2 en fonction du temps et déterminer graphiquement la vitesse initiale de formation de SO_2 .

Echelles:

2cm pour 100s

1cm pour $10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

Données: constante des gaz parfait: $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Prendre : 1bar = 10^5 Pa

Solution

1° Soit n_0 le nombre de moles de SO_2Cl_2 à la date $t = 0$. L'équation d'état des gaz parfaits donne :

$$P_0 V = n_0 RT$$

Ou :
$$P_0 = \frac{n_0}{V} RT$$

$$\frac{n_0}{V} = c_0 \Rightarrow P_0 = c_0 RT$$

On en déduit:

$$c_0 = \frac{P_0}{RT}$$

Application numérique :

$$P_0 = 0,52 \text{ bar} = 0,52 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad T = 273 + 320^\circ = 593 \text{ K}$$

$$c_0 = \frac{0,53 \cdot 10^5}{8,31 \times 593} = 10,53 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$$

soit, en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$$c_0 = 10,53 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = 1,05 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$c_0 = 1,05 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

2° a) Soit x la quantité de matière en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ de SO_2Cl_2 décomposé à une date t .

D'après l'équation-bilan $x = [\text{SO}_2] = [\text{Cl}_2]$

D'autre part :
$$\alpha = \frac{x}{c_0}$$

Donc : $x = c_0 \alpha$

Le tableau d'avancement relatif à la réaction est :

	SO ₂ Cl ₂	SO ₂	Cl ₂
t = 0	c ₀	0	0
t ≠ 0	c ₀ - c ₀ α	c ₀ α	c ₀ α

Ainsi:

$$[\text{SO}_2\text{Cl}_2] = c_0 - c_0\alpha = c_0(1 - \alpha)$$

$$[\text{SO}_2] = c_0\alpha$$

$$[\text{Cl}_2] = c_0\alpha$$

b) La quantité de matière totale à une date t quelconque est la somme des quantités de matière :

$$[\text{SO}_2\text{Cl}_2] + [\text{SO}_2] + [\text{Cl}_2] = c_0(1 - \alpha) + 2c_0\alpha = c_0(1 + \alpha)$$

Par ailleurs, les pressions sont proportionnelles aux quantités de matière :

$$\frac{P}{c_0(1 + \alpha)} = \frac{P_0}{c_0}$$

soit, après simplification : $P = (1 + \alpha)P_0$

ou : $P = P_0 + P_0\alpha$

Par la suite : $P - P_0 = P_0\alpha$

D'où: $\alpha = \frac{P - P_0}{P_0} = \frac{P}{P_0} - 1$

$$\alpha = \frac{P}{P_0} - 1$$

3° Nous avons : $\alpha = \frac{P}{P_0} - 1$ avec $P_0 = 0,52 \text{ bar}$

A la date t = 100s, P = 0,63bar $\Rightarrow \alpha = \frac{0,63}{0,52} - 1 = 0,21$

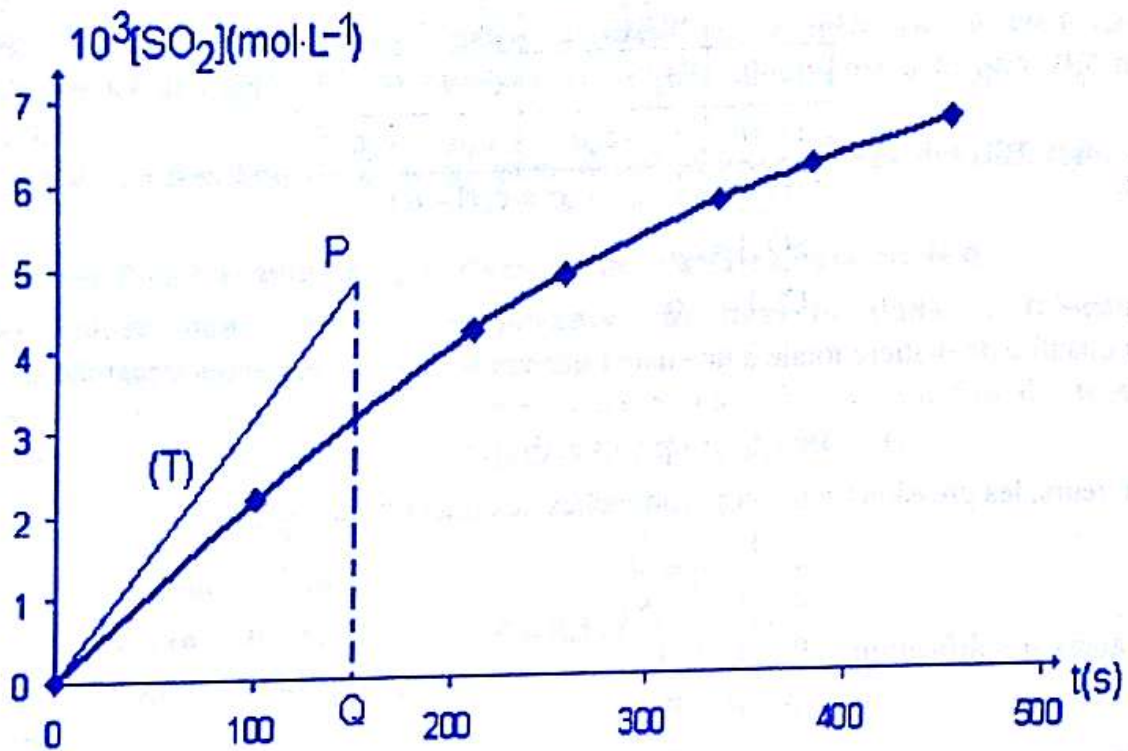
La concentration molaire de SO₂ à la même date est :

$$[\text{SO}_2] = c_0\alpha = 1,05 \cdot 10^{-2} \times 0,21 = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Toutes les autres valeurs sont indiquées dans le tableau ci-dessous :

t (s)	0	100	210	250	350	380	450
P (bar)	0,52	0,63	0,73	0,75	0,80	0,82	0,85
$\alpha = \frac{P}{0,52} - 1$	0	0,21	0,40	0,44	0,54	0,58	0,63
[SO ₂] (mol · L ⁻¹)	0	2,2 · 10 ⁻³	4,2 · 10 ⁻³	4,6 · 10 ⁻³	5,7 · 10 ⁻³	6,1 · 10 ⁻³	6,6 · 10 ⁻³

4° Traçons la courbe $10^3[\text{SO}_2] = f(t)$.



La vitesse initiale de formation de SO_2 est numériquement égale au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point O.

$$v_{\text{SO}_2} = \frac{PQ}{OQ}$$

soit

$$v_{\text{SO}_2} = \frac{4,5 \cdot 10^{-3}}{150} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{\text{SO}_2} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

2 | MECANISMES REACTIONNELS

CATALYSE

2.1 Mécanisme d'une réaction

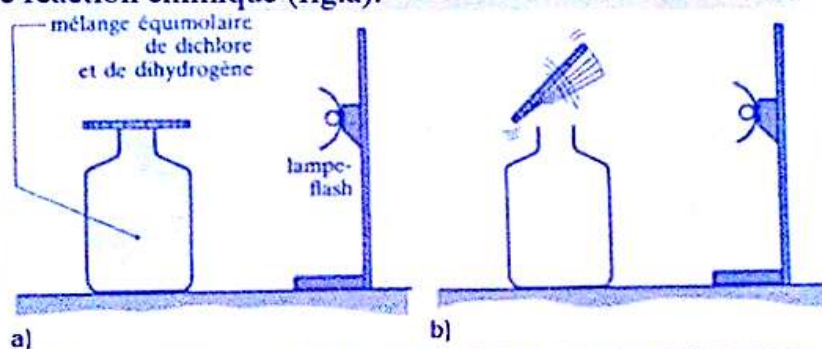
2.1.1 Définition

Un mécanisme réactionnel est l'ensemble des étapes suivies lors d'une réaction chimique.

2.1.2 Mécanisme d'une réaction photochimique

• Expérience

Un mélange stœchiométrique de dichlore et de dihydrogène à l'obscurité, n'est le siège d'aucune réaction chimique (fig.a).



Illuminons le mélange avec un flash : une violente explosion retentit (fig.b). Le dichlore et le dihydrogène ont réagi pour former du chlorure d'hydrogène.

• Interprétation

Une lumière monochromatique de fréquence ν , transporte de l'énergie sous formes de particules appelées photons. L'énergie d'un photon est $E = h\nu$.

h est la constante de Planck ($h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$).

L'illumination du mélange permet de transférer sélectivement de l'énergie aux molécules du dichlore (En effet, le dichlore est vert jaune et absorbe certaines radiations visibles comme le bleu et le violet. Par contre le dihydrogène est incolore et n'absorbe aucune radiation visible).

Cette énergie suffit à provoquer l'éclatement de la molécule du dichlore en deux atomes de chlore comportant chacun un électron célibataire sur sa couche externe.

Ces atomes de chlore, appelés radicaux de chlore sont notés Cl^\bullet .



Cette transformation au niveau atomique est appelée **acte élémentaire**. Les radicaux de chlore formés sont appelés centres actifs car ils sont très actifs. Ils réagissent rapidement avec du dihydrogène suivant l'acte élémentaire :



Le radical d'hydrogène formé est aussi un centre actif. Il réagit avec du dichlore suivant l'acte élémentaire :



Les molécules de HCl sont donc formées grâce à la production et à la disparition des centres actifs.

L'équation bilan est le schéma final d'une réaction chimique sans tenir compte des étapes intermédiaires.



2.1.3 Mécanisme d'une réaction en chaîne

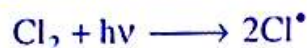
• Définition

Une réaction en chaîne est une réaction comportant trois étapes : l'initiation, la propagation et la rupture (encore appelée terminaison).

• Mécanisme de la synthèse du chlorure d'hydrogène

– Phase d'initiation

Au cours de cette phase, les centres actifs sont créés par l'action de la lumière.



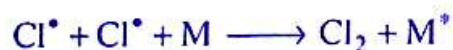
– Phase de propagation

Au cours de cette phase, la formation et la disparition des centres actifs assurent la formation des produits.



– Phase de rupture (ou phase de terminaison ou d'arrêt)

Au cours de cette phase, les centres actifs disparaissent, ce qui bloque la propagation de la réaction.



M désigne un partenaire de choc (par exemple les parois du récipient) qui absorbera une partie de l'énergie disponible au moment du choc produisant le dichlore. M* désigne une particule M possédant un surplus d'énergie.

• Synthèse du bromure d'hydrogène

Porté à 300°C, un mélange de dibrome et de dihydrogène réagit pour former du bromure d'hydrogène suivant l'équation :



Le mécanisme proposé comporte les actes élémentaires suivant :

– Initiation thermique

La réaction n'étant pas photochimique mais thermique, ceci permet l'initiation suivante :



– Phase de propagation

Au cours de cette phase, la formation et la disparition des centres actifs assurent la formation des produits.



– Phase de rupture (ou phase de terminaison ou d'arrêt)

Au cours de cette phase, les centres actifs disparaissent, ce qui bloque la propagation de la réaction.



2.2 La catalyse

2.2.1 Définition

La catalyse est l'influence d'un catalyseur sur une réaction chimique.

Un catalyseur est une substance qui accélère une réaction chimique naturelle sans subir lui-même de modifications permanentes.

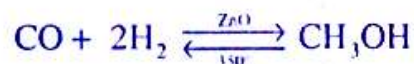
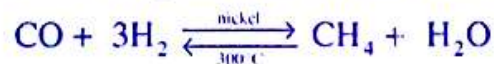
Ex : platine (Pt) ; le nickel (Ni) etc. Les protéines servant de catalyseurs sont appelés enzymes.

2.2.2 Propriétés de la catalyse

– Un catalyseur modifie la vitesse d'une réaction sans changer les proportions des produits.

– Lorsque plusieurs réactions sont possibles à partir des mêmes réactifs, un catalyseur est spécifique : il ne catalyse que l'une d'entre elles.

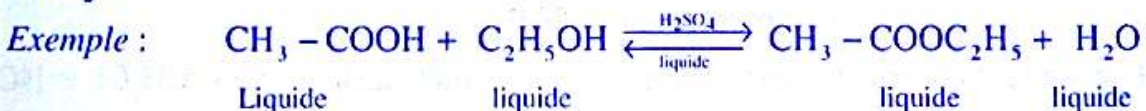
Exemple : un mélange de monoxyde de carbone et de dihydrogène peut conduire au méthane CH_4 ou au méthanol CH_3OH selon le catalyseur utilisé :



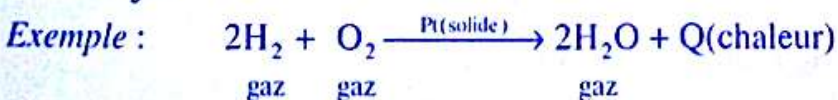
– Pour les réactions réversibles, un catalyseur agit dans les deux sens sans modifier la composition du mélange à l'équilibre.

2.2.3 Caractéristiques de la catalyse

– La catalyse est homogène si le catalyseur appartient à la même phase que les réactifs.



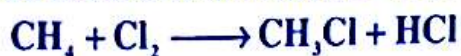
– La catalyse est hétérogène si le catalyseur n'appartient pas à la même phase que les réactifs.



– Lorsque le catalyseur est une enzyme, la catalyse est enzymatique.

Exercice résolu

En présence de certaines radiations monochromatiques, le méthane réagit sur le dichlore selon une réaction de substitution. L'équation bilan de la première substitution conduisant au monochlorométhane s'écrit :



Le mécanisme proposé comporte les actes élémentaires suivant mentionnés dans le désordre :



1° Ordonner logiquement ces différents actes en faisant ressortir les trois phases caractéristiques d'une réaction en chaîne.

2° Les radiations monochromatiques de couleurs rouges et violettes de longueurs d'ondes respectives $\lambda_r = 750\text{nm}$ et $\lambda_v = 400\text{nm}$ sont-elles capables de déclencher cette réaction ?

Données : énergie de liaison Cl-Cl : $E_{\text{Cl}_2} = 240\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$

nombre d'Avogadro : $N = 6,02 \cdot 10^{23}$

Solution

1° **Phase d'initiation** : au cours de cette phase, les centres actifs sont créés. L'énergie transportée par les photons suffit à provoquer l'éclatement des molécules de dichlore suivant l'acte élémentaire :



Phase de propagation : au cours de cette phase, les produits de la réaction CH_3Cl et HCl sont formés.



Phase de rupture : au cours de laquelle les centres actifs disparaissent



2° L'énergie d'un photon de fréquence ν est :

$$W = h \nu = h \frac{c}{\lambda}$$

L'énergie d'une mole de photons est par conséquent :

$$W = N h \frac{c}{\lambda}$$

Calculons l'énergie W_r d'une mole de photons correspondant à la radiation rouge :

$$W_r = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \times 6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{750 \cdot 10^{-9}} = 159,4 \cdot 10^3 \text{ J}$$

soit, en kilojoules (kJ) : $W_r = 159,4 \text{ kJ}$

W_r est inférieure à E_{Cl_2} . Cette énergie ne peut donc pas provoquer l'acte élémentaire d'initiation et créer des radicaux Cl^{\bullet} .

Déterminons à présent l'énergie W_v d'une mole de photons correspondant à la radiation violette : $\lambda_v = 400 \text{ nm} = 400 \cdot 10^{-9} \text{ m}$

$$W_v = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \times 6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{400 \cdot 10^{-9}} = 298,89 \cdot 10^3 \text{ J}$$

En kJ : $W_v = 298,89 \text{ kJ}$

W_v est supérieure à E_{Cl_2} . Cette radiation est capable de déclencher la réaction.

EQUILIBRES CHIMIQUES

1 ETUDE QUALITATIVE DE L'EQUILIBRE

1.1 Définition

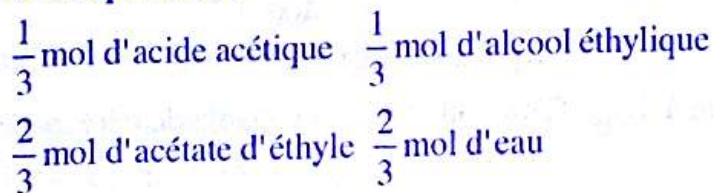
On appelle *équilibre chimique*, une transformation au cours de laquelle, deux réactions inverses l'une de l'autre se produisent simultanément en se compensant.

Exemple : $\text{CaCO}_3 \rightleftharpoons \text{CaO} + \text{CO}_2$

1.2 État d'équilibre d'un système chimique

Une réaction d'équilibre chimique n'est pas totale : aucun des réactifs n'a totalement disparu lorsque le système cesse d'évoluer. On aboutit à un état final dans lequel il y a coexistence des réactifs et des produits, qui restent en proportions constantes. Cet état final est appelé *état d'équilibre*.

Exemple : Quand on mélange 1 mol d'acide acétique et 1 mol d'alcool éthylique, on obtient à la limite (état d'équilibre) :



1.3 Facteurs d'équilibre

Ce sont des paramètres dont la variation peut entraîner une modification de l'état d'équilibre (c'est-à-dire une évolution du système vers un nouvel état d'équilibre). Ces facteurs sont : la température, la pression et les concentrations molaires.

1.4 Les lois de déplacement de l'équilibre

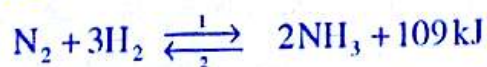
1.4.1 Principe de modération (loi générale)

Toute modification d'un facteur de l'équilibre se traduit par le déplacement de celui-ci de façon à s'opposer à la variation de ce facteur.

1.4.2 Loi de Vant'Hoff

Au cours d'une réaction d'équilibre chimique, si la réaction 1 est exothermique, 2 est endothermique. Une élévation de température favorise la réaction endothermique; un abaissement de température favorise la réaction exothermique.

Exemple : soit l'équilibre :

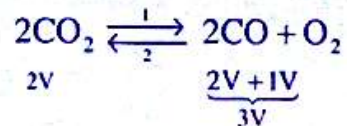


La réaction 1 est exothermique ; 2 est endothermique. Une élévation de température déplace l'équilibre dans le sens 2. Un abaissement de température déplace l'équilibre dans le sens 1.

1.4.3 Loi de Lechatelier

Dans un système en équilibre chimique, une augmentation de pression favorise la réaction qui, si elle se produisait seule à température constante, provoquerait une diminution du nombre de moles, c'est-à-dire une diminution de volume; une diminution de pression déplace l'équilibre dans le sens d'une augmentation du nombre de moles, c'est-à-dire une augmentation de volume.

Exemple : soit l'équilibre :



Dans le sens 1, le volume du système passe de 2V à 3V (augmentation de volume).

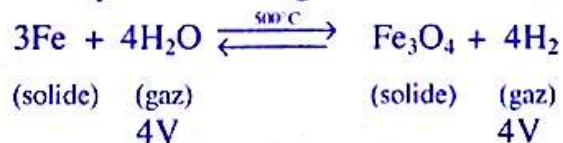
Dans le sens 2, le volume du système passe de 3V à 2V (diminution de volume).

Une augmentation de pression déplace l'équilibre dans le sens d'une diminution de volume : sens 2.

Une diminution de pression déplace l'équilibre dans le sens d'une augmentation de volume : sens 1.

NB : Dans un système hétérogène en équilibre, la variation de volume ne concerne que la phase gazeuse.

Exemple : On considère l'équilibre hétérogène suivant :

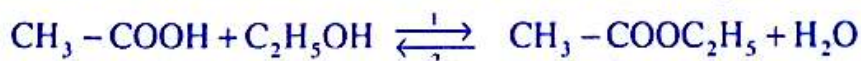


Le volume de ce système ne varie pas. La pression n'est donc pas un facteur d'équilibre pour ce système.

1.4.4 Loi relative à la concentration

Dans un système en équilibre chimique, une augmentation de la concentration d'un constituant déplace l'équilibre dans le sens de la disparition de ce constituant. Une diminution de la concentration d'un constituant déplace l'équilibre dans le sens de la formation de ce constituant.

Exemple : considérons la réaction d'estérification de l'éthanol par l'acide acétique :



A l'équilibre, si on augmente la concentration de l'acide acétique, l'équilibre se déplace dans le sens de la disparition de l'acide acétique : sens 1.

Si on augmente la concentration de l'ester, l'équilibre se déplace dans le sens de la disparition de l'ester : sens 2.

1.5 Variance d'un système**1.5.1 Phase**

On appelle phase φ , toute partie homogène d'un système.

– un mélange de plusieurs gaz constitue une seule phase : $\varphi = 1$

– deux solides différents constituent deux phases : $\varphi = 2$

- deux liquides non miscibles constituent deux phases : $\varphi = 2$

L'équilibre est **homogène** si le système ne contient qu'une seule phase. Il est **hétérogène** s'il est constitué de plusieurs phases.

1.5.2 Règle des phases de Gibbs

• Définition

La **variance** V est le nombre de **paramètres intensifs indépendants** (température, pression et concentration) qui caractérisent un état d'équilibre. Autrement dit, c'est le nombre maximum de paramètres que peut fixer librement l'expérimentateur sans rompre l'équilibre.

• Détermination de la variance

Pour une réaction chimique conduisant à un équilibre chimique entre N corps purs, dans un système dont le nombre de phase est φ , la variance est :

$$V = N + 1 - \varphi$$

Par ailleurs, le nombre de constituant indépendant est :

$$C = N - 1$$

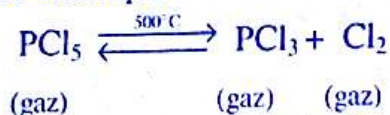
D'où :

$$N = C + 1$$

En conséquence :

$$V = C + 2 - \varphi$$

Exemple : Soit l'équilibre chimique :



Le nombre de corps purs de ce système est $N = 3$

Le nombre de constituant indépendant est $C = 3 - 1 = 2$

Le nombre de phase du système est $\varphi = 1$ (mélange gazeux).

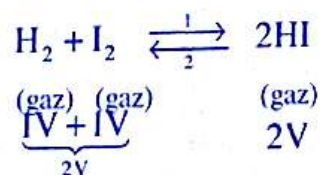
La variance de ce système est : $V = C + 2 - \varphi = 2 + 2 - 1 = 3$

• Cas où la pression n'est pas un facteur d'équilibre

Si la pression n'a pas d'influence sur un système en équilibre, alors la variance est :

$$V = C + 1 - \varphi$$

Exemple : soit l'équilibre :



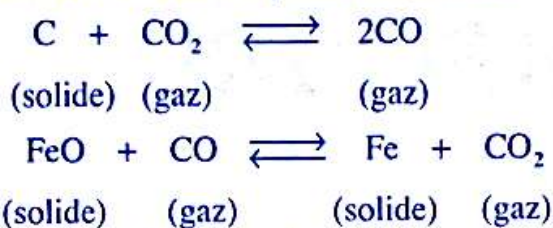
La pression n'a pas d'influence sur ce système car le volume ne change pas. La variance de ce système est donc :

$$V = C + 1 - \varphi$$

$$\left. \begin{array}{l} C = 3 - 1 = 2 \\ \varphi = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow V = 2 + 1 - 1 = 2$$

Questions à réponse rapide

On considère les réactions d'équilibres suivants :

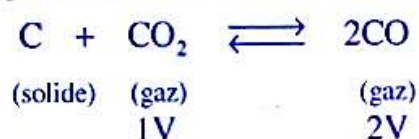


1° Quelle est l'action de la pression sur chacun ?

2° Calculer la variance de chacun d'eux.

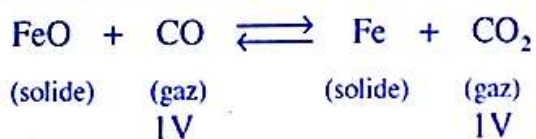
Réponses

1° Action de la pression sur chacun :



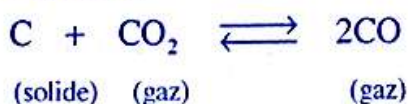
• Une élévation de pression déplace l'équilibre dans le sens de diminution de volume : sens de formation de CO_2

• Une diminution de pression déplace l'équilibre dans le sens de l'augmentation de volume : sens de formation de CO .



La pression n'a pas d'influence sur ce système car le volume ne change pas.

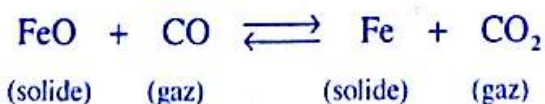
2° Variance de chacun :



$$V = C + 2 - \varphi$$

$$\left. \begin{array}{l} C = 3 - 1 = 2 \\ \varphi = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow V = 2 + 2 - 2 = 2$$

$$\boxed{V = 2}$$



La pression n'étant pas un facteur d'équilibre, $V = C + 1 - \varphi$

$$\left. \begin{array}{l} C = 4 - 1 = 3 \\ \varphi = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow V = 3 + 1 - 3 = 1$$

$$\boxed{V = 1}$$

2 | ETUDE QUANTITATIVE DE L'EQUILIBRE

2.1 Généralités

2.1.1 Concentration molaire

La concentration molaire $[A]$ du constituant A dans un mélange, est le quotient de son nombre de moles n_A par le volume V du mélange :

$$[A] = \frac{n_A}{V}$$

Remarque :

La quantité de matière n_A du constituant A, est le rapport de sa masse m_A à sa masse molaire M_A .

$$n_A = \frac{m_A}{M_A}$$

2.1.2 Fraction molaire

La fraction molaire x_A du constituant A, dans un mélange des constituants A, B, C et D, est le quotient de son nombre de moles n_A par la somme totale des nombres de moles $\sum n = n_A + n_B + n_C + n_D$:

$$x_A = \frac{n_A}{\sum n}$$

2.1.3 Pression partielle

Dans un mélange de gaz enfermé dans une enceinte donnée, chaque gaz exerce sur les parois la même pression que s'il était seul dans le même volume. Cette pression, appelée pression partielle du gaz, est le produit de sa fraction molaire par la pression totale P .

Exemples : La pression partielle P_A du corps A, dans un mélange gazeux des constituants A, B, C et D est :

$$P_A = x_A P$$

Par ailleurs,

$$x_A = \frac{n_A}{\sum n} \Rightarrow P_A = \frac{n_A}{\sum n} P$$

$$P_A = \frac{n_A}{\sum n} P$$

De même, la pression partielle du constituant B est :

$$P_B = \frac{n_B}{\sum n} P$$

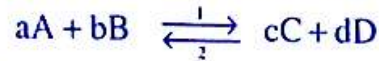
Loi de Dalton : la Pression totale est égale à la somme des pressions partielles :

$$P = P_A + P_B + P_C + P_D$$

2.2 Loi d'action des masses

2.2.1 Constante d'équilibre relative aux concentrations

Considérons l'équilibre chimique entre les constituants A, B, C et D :



(a, b, c et d sont les coefficients stœchiométriques)

La vitesse de la réaction 1 s'écrit :

$$v_1 = k_1[A]^a \cdot [B]^b \quad (k_1 \text{ est la constante de vitesse de la réaction 1).}$$

La vitesse de la réaction 2 est :

$$v_2 = k_2[C]^c \cdot [D]^d \quad (k_2 \text{ est la constante de vitesse de la réaction 2).}$$

A l'équilibre, on a :

$$v_1 = v_2$$

Soit :

$$k_1[A]^a \cdot [B]^b = k_2[C]^c \cdot [D]^d$$

Ou encore :

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{[C]^c \cdot [D]^d}{[A]^a \cdot [B]^b}$$

En posant $\frac{k_1}{k_2} = K_c$, on obtient :

$$K_c = \frac{[C]^c \cdot [D]^d}{[A]^a \cdot [B]^b}$$

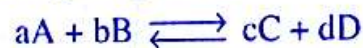
K_c est appelé constante d'équilibre relative aux concentrations. K_c ne dépend que de la température

2.2.2 Loi de Guldberg et Waage (loi d'action des masses)

Dans un système en équilibre chimique à une température donnée, il existe un rapport constant entre le produit des concentrations des corps formés d'une part et le produit des concentrations des réactifs d'autre part, chacune des concentrations étant affectée d'un exposant égal au nombre de moles du constituant qui participe à la réaction.

2.2.3 Constante d'équilibre relative aux pressions partielles

Soit l'équilibre en phase homogène gazeuse :



On a :

$$K_c = \frac{[C]^c \cdot [D]^d}{[A]^a \cdot [B]^b}$$

D'autre part :

$$[A] = \frac{P_A}{RT}$$

P_A est la pression partielle du constituant A ; R est la constante des gaz parfaits.

De même : $[B] = \frac{P_B}{RT}$; $[C] = \frac{P_C}{RT}$ et $[D] = \frac{P_D}{RT}$

En conséquence :

$$K_c = \frac{\frac{P_C^c}{(RT)^c} \times \frac{P_D^d}{(RT)^d}}{\frac{P_A^a}{(RT)^a} \times \frac{P_B^b}{(RT)^b}}$$

ou encore :

$$K_c = \frac{P_C^c \cdot P_D^d}{(RT)^c (RT)^d} \times \frac{(RT)^a (RT)^b}{P_A^a \cdot P_B^b}$$

Par la suite :

$$K_c = \frac{P_C^c \cdot P_D^d}{P_A^a \cdot P_B^b} \times (RT)^{(a+b-c-d)}$$

On appelle **constante d'équilibre relative aux pressions partielles** K_p , le quotient :

$$K_p = \frac{P_C^c \cdot P_D^d}{P_A^a \cdot P_B^b}$$

K_p ne dépend que de la température.

Par conséquent : $K_c = K_p \cdot (RT)^{(a+b-c-d)}$

Ou encore : $K_p = K_c \cdot (RT)^{(c+d-a-b)}$

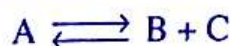
Posons : $\Delta n = c + d - (a + b)$

Ainsi : $K_p = K_c \cdot (RT)^{\Delta n}$

Remarque : si $\Delta n = 0$, on a : $K_p = K_c$

2.3 Réactions de dissociation en phase gazeuse

Considérons la réaction d'équilibre chimique entre les constituants A, B et C d'un mélange homogène gazeux à la pression totale P :



Si n_0 est le nombre de moles initial de A et x le nombre de moles dissocié, les nombres de moles des différents constituants à l'équilibre sont déduits de l'équation bilan :

A	\rightleftharpoons	B + C
t = 0	n ₀	0 0
équilibre	n ₀ - x	x x

On appelle **coefficient de dissociation** α , le rapport du nombre de mole dissocié x au nombre de mole initial n_0 :

$$\alpha = \frac{x}{n_0} \Rightarrow x = n_0 \alpha$$

Par conséquent, le tableau précédent devient :

	A	B	C
t = 0	n ₀	0	0
équilibre	n ₀ - n ₀ α	n ₀ α	n ₀ α

La somme totale des nombres de moles à l'équilibre est :

$$\sum n = n_A + n_B + n_C = n_0 - n_0\alpha + n_0\alpha + n_0\alpha = n_0(1 + \alpha)$$

La pression partielle P_A du constituant A, est le produit de sa fraction molaire par la pression totale P :

$$P_A = \frac{n_A}{\sum n} P = \frac{(n_0 - n_0\alpha)P}{n_0(1 + \alpha)} = \frac{(1 - \alpha)P}{1 + \alpha}$$

La pression partielle du constituant B est :

$$P_B = \frac{n_B}{\sum n} P = \frac{n_0\alpha P}{n_0(1 + \alpha)} = \frac{\alpha P}{1 + \alpha}$$

La pression partielle de C est :

$$P_C = \frac{n_C}{\sum n} P = \frac{n_0\alpha P}{n_0(1 + \alpha)} = \frac{\alpha P}{1 + \alpha}$$

La constante d'équilibre relative aux pressions partielles de ce système est :

$$K_p = \frac{P_B \cdot P_C}{P_A} = \frac{\frac{\alpha P}{1 + \alpha} \times \frac{\alpha P}{1 + \alpha}}{\frac{(1 - \alpha)P}{1 + \alpha}}$$

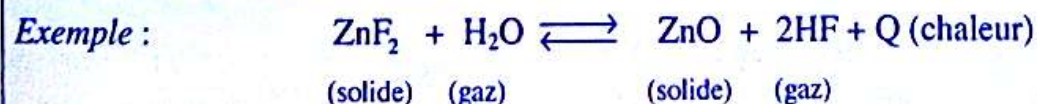
Finalement, après simplifications par P et (1 + α), on obtient :

$$K_p = \frac{\alpha^2 P}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = \frac{\alpha^2 P}{1 - \alpha^2}$$

$$K_p = \frac{\alpha^2 P}{1 - \alpha^2}$$

2.4 Systèmes hétérogènes

Pour un système hétérogène en équilibre chimique, on applique la loi d'action des masses à la phase gazeuse sans s'occuper des phases solides ou liquides.



La constante d'équilibre relative aux concentrations de ce système est :

$$K_c = \frac{[\text{HF}]^2}{[\text{H}_2\text{O}]}$$

La constante relative aux pressions partielles est :

$$K_p = \frac{P_{\text{HF}}^2}{P_{\text{H}_2\text{O}}}$$

1_ Réaction de l'acide éthanoïque avec l'éthanol

On fait réagir à température constante, de l'acide acétique et de l'éthanol.

1° Ecrire l'équation bilan de la réaction et rappeler brièvement quelques caractéristiques de cette réaction.

2° On a mélangé 0,6 mol d'acide acétique et 0,6 mol d'éthanol. Déterminer :

a) la composition du mélange à l'équilibre.

b) la constante d'équilibre relative aux concentrations K_c .

3° A ce mélange en équilibre, on ajoute 1 mol d'éthanol. Déterminer la composition du mélange lors du nouvel état d'équilibre.

Solution

1° La réaction d'estérification entre l'acide éthanoïque et l'alcool s'effectue selon l'équation



La réaction est lente, athermique et limitée.

2° a) L'expérience montre, qu'avec un mélange équimolaire de n moles d'acide éthanoïque et n moles d'éthanol, nous obtenons à l'équilibre :

$$\begin{array}{cc} \frac{n}{3} \text{ mol d'acide} & \frac{n}{3} \text{ mol d'alcool} \\ \frac{2n}{3} \text{ mol d'ester} & \frac{2n}{3} \text{ mol d'eau} \end{array}$$

Ainsi, pour $n = 0,6$ mol nous avons à l'équilibre :

$$\begin{array}{cc} n_{\text{acide}} = \frac{0,6}{3} = 0,2 \text{ mol} & n_{\text{alcool}} = \frac{0,6}{3} = 0,2 \text{ mol} \\ n_{\text{ester}} = \frac{2 \times 0,6}{3} = 0,4 \text{ mol} & n_{\text{eau}} = \frac{2 \times 0,6}{3} = 0,4 \text{ mol} \end{array}$$

b) Si V est le volume du mélange réactionnel, les concentrations molaires des différents constituants sont :

$$[\text{CH}_3\text{-COOC}_2\text{H}_5] = \frac{0,4}{V}$$

$$[\text{H}_2\text{O}] = \frac{0,4}{V}$$

$$[\text{CH}_3\text{COOH}] = \frac{0,2}{V}$$

$$[\text{C}_2\text{H}_5] = \frac{0,2}{V}$$

La constante d'équilibre K_c est :

$$K_c = \frac{[\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5] \cdot [\text{H}_2\text{O}]}{[\text{CH}_3\text{COOH}] \cdot [\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}]}$$

Soit, après simplifications par V :

$$K_c = \frac{0,4 \times 0,4}{0,2 \times 0,2} = 4$$

$$K_c = 4$$

3° Si l'on ajoute 1 mol d'éthanol, l'équilibre se déplace dans le sens de disparition de l'éthanol. En prenant comme origine des dates l'instant du rajout, nous obtenons le tableau suivant représentant les nombres de moles à l'instant initial puis à l'équilibre (tableau d'avancement relatif à la réaction) :

	$\text{CH}_3\text{-COOH} + \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$		\rightleftharpoons		$\text{CH}_3\text{-COOC}_2\text{H}_5 + \text{H}_2\text{O}$	
t = 0	0,2	1,2			0,4	0,4
équilibre	0,2 - x	1,2 - x			0,4 + x	0,4 + x

Ainsi :

$$K_c = \frac{(0,4 + x)(0,4 + x)}{(0,2 - x)(1,2 - x)}$$

soit :

$$4 = \frac{0,16 + 0,8x + x^2}{0,24 - 1,4x + x^2}$$

ou bien :

$$4x^2 - 5,6x + 0,96 = 0,16 + 0,8x + x^2$$

Par la suite :

$$3x^2 - 6,4x + 0,80 = 0$$

Le discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6,4)^2 - 4 \times 3 \times 0,80 = (5,6)^2$$

Les racines sont :

$$x_1 = \frac{6,4 - 5,6}{2 \times 3} = 0,13 \text{ mol}$$

$$x_2 = \frac{6,4 + 5,6}{2 \times 3} = 2 \text{ mol}$$

La racine $x_2 = 2 \text{ mol}$ correspond à la disparition complète de l'acide éthanoïque et de l'éthanol. Donc cette valeur ne convient pas. Par conséquent $x = x_1 = 0,13 \text{ mol}$.

Nous aurons donc, à l'équilibre :

$$n_{\text{CH}_3\text{COOH}} = 0,2 - 0,13 = 0,07 \text{ mol}$$

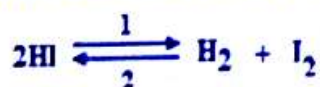
$$n_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}} = 1,2 - 0,13 = 1,07 \text{ mol}$$

$$n_{\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5} = 0,4 + 0,13 = 0,53 \text{ mol}$$

$$n_{\text{H}_2\text{O}} = 0,4 + 0,13 = 0,53 \text{ mol}$$

2_ Dissociation de l'acide iodhydrique

On considère la réaction de dissociation de l'acide iodhydrique :



1° Calculer la constante d'équilibre relative aux concentrations K_c sachant qu'on est parti de 2 mol de HI et qu'à l'équilibre 25% de l'acide se sont dissociés.

2° Dans le mélange à l'équilibre, on introduit 1 mol de di-iode.

- a) Indiquer dans quel sens l'équilibre est déplacé.
 b) Déterminer la composition du mélange lors du nouvel état d'équilibre.

Solution

1° La constante d'équilibre relative aux concentrations K_c

Si x est le nombre de moles dissocié, le tableau d'avancement relatif à la réaction est :

	2HI	H ₂	I ₂
t = 0	2	0	0
équilibre	2 - 2x	x	x

A l'équilibre, 25% de HI se sont dissociés, il reste donc 75% de HI :

$$n(\text{HI}) = \frac{2 \times 75}{100} = 1,5 \text{ mol.}$$

$$\text{Par conséquent : } 2 - 2x = 1,5 \Rightarrow x = \frac{2 - 1,5}{2} = 0,25 \text{ mol}$$

La composition du système à l'équilibre est :

$$n(\text{HI}) = 1,5 \text{ mol}$$

$$n(\text{H}_2) = x = 0,25 \text{ mol}$$

$$n(\text{I}_2) = x = 0,25 \text{ mol}$$

La constante d'équilibre K_c est :

$$K_c = \frac{[\text{H}_2] \cdot [\text{I}_2]}{[\text{HI}]^2}$$

Si v est le volume du milieu réactionnel, l'expression de K_c devient :

$$K_c = \frac{\frac{n_{\text{H}_2}}{v} \cdot \frac{n_{\text{I}_2}}{v}}{\left(\frac{n_{\text{HI}}}{v}\right)^2} = \frac{n_{\text{H}_2} \cdot n_{\text{I}_2}}{n_{\text{HI}}^2} = \frac{0,25 \times 0,25}{(1,5)^2} = 2,77 \cdot 10^{-2}$$

$$K_c = 2,77 \cdot 10^{-2}$$

2° a) Si on introduit dans le mélange 1 mol de di-iode, l'équilibre sera déplacé dans le sens de la disparition du di-iode : sens 2

b) Les quantités en moles des différents constituants du mélange à l'instant initial (nouvelle date initiale) et à l'équilibre (nouvel équilibre) sont données par le tableau d'avancement relatif à la réaction suivant :

	2HI	H ₂	I ₂
t = 0	1,5	0,25	0,25 - x
équilibre	1,5 + 2x	0,25 - x	1,25 - x

La constante d'équilibre relative aux concentrations K_c est :

$$K_c = \frac{(0,25 - x)(1,25 - x)}{(1,5 + 2x)^2}$$

$$\text{soit : } 2,77 \cdot 10^{-2} = \frac{(0,25 - x)(1,25 - x)}{(1,5 + 2x)^2}$$

ou encore :

$$2,77 \cdot 10^{-2} = \frac{0,31 - 1,5x + x^2}{2,25 + 6x + 4x^2}$$

Par la suite :

$$2,77 \cdot 10^{-2} (2,25 + 6x + 4x^2) = 0,31 - 1,5x + x^2$$

Aussi :

$$6,23 \cdot 10^{-2} + 0,16x + 0,11x^2 = 0,31 - 1,5x + x^2$$

soit :

$$0,89x^2 - 1,66x + 0,24 = 0$$

Le déterminant de cette équation du second degré est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1,66)^2 - 4 \times 0,89 \times 0,24 = (1,37)^2$$

Les racines sont :

$$x_1 = \frac{1,66 - 1,37}{2 \times 0,89} = 0,16 \text{ mol}$$

$$x_2 = \frac{1,66 + 1,37}{2 \times 0,89} = 1,7 \text{ mol} \quad \text{Cette dernière solution ne convient}$$

pas car H_2 et I_2 disparaîtraient. Donc $x = 0,16 \text{ mol}$.

La composition du système à l'équilibre est :

$$n(\text{HI}) = 15 + 2x = 1,5 + 0,32 = 1,82 \text{ mol}$$

$$n(\text{H}_2) = 0,25 - x = 0,25 - 0,16 = 0,09 \text{ mol}$$

$$n(\text{I}_2) = 1,25 - x = 1,25 - 0,16 = 1,09 \text{ mol}$$

$$n(\text{HI}) = 1,82 \text{ mol}$$

$$n(\text{H}_2) = 0,09 \text{ mol}$$

$$n(\text{I}_2) = 1,09 \text{ mol}$$

3_ Dissociation du pentachlorure de phosphore

Le pentachlorure de phosphore PCl_5 se dissocie en phase gazeuse suivant l'équation:



On introduit dans un récipient maintenu à 300°C , une quantité de pentachlorure de phosphore à la pression initiale de 10atm. La constante d'équilibre relative pressions partielles à cette température est $K_p = 11,5 \text{ atm}$.

1° Déterminer les pressions partielles des différents constituants du mélange ainsi que la pression totale P à l'équilibre.

2° On désigne par n_0 le nombre de mole initial et par x le nombre de mole dissocié.

Le coefficient de dissociation α est le rapport : $\alpha = \frac{x}{n_0}$. Exprimer K_p en fonction α

et de la pression totale P à l'équilibre.

3° Trouver la valeur de α .

Solution

1° L'équation bilan de la réaction montre que 1mol de PCl_5 en se dissociant donne 1mol de PCl_3 et 1mol de Cl_2 . Les pressions partielles étant proportionnelles aux nombres de

moles, le tableau suivant indique les pressions partielles des différents constituants à l'instant initial puis à l'équilibre :

$$\text{PCl}_5 \rightleftharpoons \text{PCl}_3 + \text{Cl}_2$$

t = 0	10atm	0	0
équilibre	10 - x	x	x

La constante d'équilibre K_p de ce système a pour expression :

$$K_p = \frac{P_{\text{PCl}_3} \cdot P_{\text{Cl}_2}}{P_{\text{PCl}_5}} = \frac{x^2}{10 - x}$$

Donc : $K_p(10 - x) = x^2$

soit : $11,5(10 - x) = x^2$

ou encore : $115 - 11,5x = x^2$

Par la suite : $x^2 + 11,5x - 115 = 0$

Le déterminant de cette équation du second degré est :

$$\Delta = (11,5)^2 + 4 \times 115 = (24,33)^2$$

Les racines sont : $x_1 = \frac{-11,5 + 24,33}{2} = 6,4 \text{ latm}$

$$x_2 = \frac{-11,5 - 24,33}{2} = -17,91 \text{ (à rejeter)}$$

Donc : $x = 6,4 \text{ latm}$

Les pressions partielles des différents constituants à l'équilibre sont :

$$P_{\text{PCl}_5} = 10 - 6,41 = 3,59 \text{ atm}$$

$$P_{\text{PCl}_3} = P_{\text{Cl}_2} = 6,4 \text{ latm}$$

$$P_{\text{PCl}_5} = 3,59 \text{ atm}$$

$$P_{\text{PCl}_3} = P_{\text{Cl}_2} = 6,4 \text{ latm}$$

La pression totale à l'équilibre est :

$$P = P_{\text{PCl}_5} + P_{\text{PCl}_3} + P_{\text{Cl}_2} = 3,59 + 6,41 + 6,41 = 16,4 \text{ latm}$$

$$P = 16,4 \text{ latm}$$

2° On sait que : $\alpha = \frac{x}{n_0} \Rightarrow x = n_0 \alpha$

Le tableau d'avancement relatif à la réaction est :

$$\text{PCl}_5 \rightleftharpoons \text{PCl}_3 + \text{Cl}_2$$

t = 0	n_0	0	0
équilibre	$n_0 - n_0 \alpha$	$n_0 \alpha$	$n_0 \alpha$

La composition du système à l'équilibre est :

$$n(\text{PCl}_5) = n_0 - n_0 \alpha = n_0(1 - \alpha)$$

$$n(\text{PCl}_3) = n_0 \alpha$$

$$n(\text{Cl}_2) = n_0\alpha$$

Le nombre total de moles à l'équilibre est :

$$\sum n = n_0 - n_0\alpha + n_0\alpha + n_0\alpha = n_0(1 + \alpha)$$

La pression partielle de PCl_5 est :

$$P_{\text{PCl}_5} = \frac{n_{\text{PCl}_5}}{\sum n} P = \frac{n_0(1 - \alpha) \cdot P}{n_0(1 + \alpha)} = \frac{(1 - \alpha)P}{1 + \alpha}$$

La pression partielle de PCl_3 est :

$$P_{\text{PCl}_3} = \frac{n_{\text{PCl}_3}}{\sum n} P = \frac{\alpha P}{1 + \alpha}$$

La pression partielle de Cl_2 est :

$$P_{\text{Cl}_2} = \frac{n_{\text{Cl}_2}}{\sum n} P = \frac{\alpha P}{1 + \alpha}$$

or :

$$K_p = \frac{P_{\text{PCl}_3} \cdot P_{\text{Cl}_2}}{P_{\text{PCl}_5}}$$

soit :

$$K_p = \frac{\frac{\alpha^2 P^2}{(1 + \alpha)^2}}{\frac{(1 - \alpha)P}{1 + \alpha}} = \frac{\alpha^2 P}{1 - \alpha^2}$$

$$\boxed{K_p = \frac{\alpha^2 P}{1 - \alpha^2}}$$

3° Nous avons :

$$K_p = \frac{\alpha^2 P}{1 - \alpha^2}$$

ou encore :

$$K_p(1 - \alpha^2) = \alpha^2 P$$

soit :

$$11,5(1 - \alpha^2) = 16,41\alpha^2$$

Par la suite :

$$11,5 - 11,5\alpha^2 = 16,41\alpha^2$$

Aussi :

$$11,5 = 27,91\alpha^2$$

D'où :

$$\alpha = \sqrt{\frac{11,5}{27,91}} = 0,64$$

$$\boxed{\alpha = 0,64}$$

4_ variation de K_p avec la température

Pour réaliser la synthèse de l'ammoniac selon la réaction :



On chauffe à 450°C un mélange formé de 28g de diazote et de 6g de dihydrogène. A l'équilibre, il reste 13,44g de diazote et la pression totale est 300atm.

1° Déterminer la pression partielle de chacun des gaz à l'équilibre.

2° Calculer la constante d'équilibre relative aux pressions partielles K_p et préciser son unité.

3° Dans l'intervalle de température $298\text{K} \leq T \leq 400\text{K}$ la constante K_p varie avec la température absolue suivant la loi :

$$\ln K_p = -23,83 + \frac{1,11 \cdot 10^4}{T}$$

Calculer K_p à la température de 127°C

On donne : $M(\text{H}) = 1\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M(\text{N}) = 14\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Solution

1° Les nombres de moles des réactifs à l'instant initial sont :

$$n_0(\text{N}_2) = \frac{m(\text{N}_2)}{M(\text{N}_2)} = \frac{28}{28} = 1\text{mol}$$

$$n_0(\text{H}_2) = \frac{m(\text{H}_2)}{M(\text{H}_2)} = \frac{6}{2} = 3\text{mol}$$

Soit x la fraction d'azote initial transformée en gaz ammoniac à l'équilibre. Le tableau d'avancement relatif à la réaction est :

	$\text{N}_2 + 3\text{H}_2 \rightleftharpoons 2\text{NH}_3$		
$t = 0$	1	3	0
équilibre	$1 - x$	$3 - 3x$	$2x$

Le nombre de moles total à l'équilibre est : $\sum n = 1 - x + 3 - 3x + 2x = 4 - 2x$

D'autre part, la quantité de diazote à l'équilibre est :

$$n(\text{N}_2) = \frac{13,44}{M(\text{N}_2)} = \frac{13,44}{28} = 0,48\text{mol}$$

Donc :

$$1 - x = 0,48$$

D'où :

$$x = 1 - 0,48 = 0,52\text{mol}$$

Ainsi, à l'équilibre nous avons :

$$n(\text{N}_2) = 0,48\text{mol}$$

$$n(\text{H}_2) = 3 - 3 \times 0,52 = 1,44\text{mol}$$

$$n(\text{NH}_3) = 2 \times 0,52 = 1,04\text{mol}$$

$$\sum n = 4 - 2x = 4 - 2 \times 0,52 = 2,96\text{mol}$$

La pression partielle de N_2 est :

$$P_{\text{N}_2} = \frac{n_{\text{N}_2}}{\sum n} P = \frac{0,48P}{2,96} = \frac{0,48 \times 300}{2,96} = 48,64\text{atm}$$

La pression partielle de H_2 est :

$$P_{\text{H}_2} = \frac{n_{\text{H}_2}}{\sum n} P = \frac{1,44 \times 300}{2,96} = 145,94\text{atm}$$

La pression totale de NH_3 est :

$$P_{\text{NH}_3} = \frac{n_{\text{NH}_3}}{\sum n} P = \frac{1,04 \times 300}{2,96} = 105,40 \text{ atm}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{N}_2} &= 48,64 \text{ atm} \\ P_{\text{H}_2} &= 145,94 \text{ atm} \\ P_{\text{NH}_3} &= 105,40 \text{ atm} \end{aligned}$$

2° La constante d'équilibre relative aux pressions partielles :

$$K_p = \frac{P_{\text{NH}_3}^2}{P_{\text{N}_2} \cdot P_{\text{H}_2}^3}$$

soit:

$$K_p = \frac{(105,40)^2}{48,64 \times (145,94)^3} = 7,35 \cdot 10^{-5} \text{ atm}^{-2}$$

$$K_p = 7,35 \cdot 10^{-5} \text{ atm}^{-2}$$

3° La constante d'équilibre K_p varie selon la loi :

$$\ln K_p = -23,83 + \frac{1,11 \cdot 10^4}{T}$$

$$T = 273 + 127^\circ = 400 \text{ K}$$

Donc:

$$\ln K_p = -23,83 + \frac{1,11 \cdot 10^4}{400}$$

soit:

$$\ln K_p = 3,92 \Rightarrow K_p = \exp(3,92) = 50,40 \text{ atm}^{-2}$$

$$K_p = 50,40 \text{ atm}^{-2}$$

5_ Estérification du 3-méthylbutan-1-ol

On mélange 57,2 mL d'acide acétique et 109 mL du 3-méthylbutan-1-ol. On obtient un ester dont la saveur et l'odeur sont celles de la banane.

1° Ecrire l'équation bilan de la réaction et nommer l'ester formé.

2° Les masses volumiques des réactifs sont :

- acide acétique : $1,05 \cdot 10^3 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$

- 3-méthylbutan-1-ol : $0,81 \cdot 10^3 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$

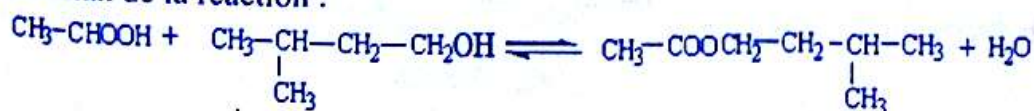
a) Quelle est, en moles la composition du mélange initial ?

b) Calculer la constante d'équilibre K_c sachant qu'à l'équilibre il reste 20g d'acide dans le mélange réactionnel.

3° Dans ce mélange à l'équilibre, on ajoute 57,2 mL d'acide acétique. Dans quel sens se déplacera l'équilibre ? En déduire la quantité de matière de l'ester formé.

Solution

1° Equation bilan de la réaction :



2° a) Le nombre de moles n d'un composé est le rapport de sa masse m à sa masse molaire

$$M: \quad n = \frac{m}{M}$$

Par ailleurs, la masse m d'un composé est le produit de sa masse volumique μ par son volume V :

$$m = \mu V$$

Par conséquent :

$$n = \frac{\mu v}{M}$$

Ainsi, les nombres de moles à l'instant initial sont :

$$n_0(\text{acide}) = \frac{1,05 \cdot 10^3 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1} \times 57,2 \cdot 10^{-3} \text{ L}}{60} = 1 \text{ mol}$$

$$n_0(\text{alcool}) = \frac{0,81 \cdot 10^3 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1} \times 109 \cdot 10^{-3} \text{ L}}{88} = 1 \text{ mol}$$

b) La quantité d'acide restant à l'équilibre est 20g. En moles, cette quantité est :

$$n(\text{acide}) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \text{ mol}$$

Le tableau d'avancement relatif à la réaction est :

	acide	+	alcool	\rightleftharpoons	ester	+	Eau
t = 0	1 mol		1 mol		0		0
équilibre	1 - x		1 - x		x		x

Le nombre de moles de l'acide à l'équilibre est :

$$n(\text{acide}) = 1 - x = \frac{1}{3}$$

On en déduit :

$$x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

La composition du mélange à l'équilibre donc est :

$$n(\text{acide}) = \frac{1}{3} \text{ mol} \quad n(\text{alcool}) = \frac{1}{3} \text{ mol}$$

$$n(\text{ester}) = \frac{2}{3} \text{ mol} \quad n(\text{eau}) = \frac{2}{3} \text{ mol}$$

Si V est le volume du mélange, la constante d'équilibre relative aux concentrations K_c , a pour expression :

$$K_c = \frac{[\text{ester}][\text{eau}]}{[\text{acide}][\text{alcool}]} = \frac{\frac{n_{\text{ester}}}{V} \times \frac{n_{\text{eau}}}{V}}{\frac{n_{\text{acide}}}{V} \times \frac{n_{\text{alcool}}}{V}}$$

Soit :
$$K_c = \frac{n_{\text{ester}} \times n_{\text{eau}}}{n_{\text{acide}} \times n_{\text{alcool}}} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} = 4$$

$$K_c = 4$$

3° A l'équilibre, si on ajoute 57,2mL d'acide, l'équilibre se déplace dans le sens de disparition de l'acide (sens de l'estérification).

Par ailleurs le volume d'acide ajouté étant $57,2 \cdot 10^{-3} \text{L}$, ce qui correspond à 1 mol d'acide, comme l'indique les calculs de la question n°2. Nous obtenons le tableau d'avancement relatif à la réaction suivant :

	acide	+ alcool	\rightleftharpoons	Ester	+ Eau
$t' = 0$	$\frac{1}{3} + 1$	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
équilibre	$\frac{4}{3} - x$	$\frac{1}{3} - x$		$\frac{2}{3} + x$	$\frac{2}{3} + x$

La constante d'équilibre est alors, après simplifications par le volume v du mélange :

$$K_c = \frac{\left(\frac{2}{3} + x\right) \left(\frac{2}{3 + x}\right)}{\left(\frac{4}{3} - x\right) \left(\frac{1}{3} - x\right)} = 4$$

Il s'en suit :

$$9x^2 - 24x + 4 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré est :

$$\Delta = (24)^2 - 4 \times 9 \times 4 = (20,78)^2$$

Les racines sont :

$$x_1 = \frac{24 - 20,78}{2 \times 9} = 0,17$$

$$x_2 = \frac{24 + 20,78}{2 \times 9} = 2,48$$

x_2 ne convient pas car les réactifs disparaîtraient. Donc $x = x_1 = 0,17 \text{mol}$. En conséquence, le nombre de mole de l'ester à l'équilibre est :

$$n_E = \frac{2}{3} + 0,17 = 0,83 \text{mol}$$

$$n_E = 0,83 \text{mol}$$

6_ Synthèse de l'ammoniac

On effectue la synthèse de l'ammoniac à 600°C . L'équation bilan de la réaction :



On introduit à 600°C et sous la pression initiale $P_0 = 200$ atmosphères, une mole de diazote et 3 moles de dihydrogène. A l'équilibre il s'est formé $0,24\text{mol}$ de NH_3 .

1° Calculer la variance de ce système à l'équilibre.

2° Déterminer les pressions partielles des différents constituants à l'équilibre ; En déduire la pression totale P .

3° Calculer la constante d'équilibre relative aux pressions partielles K_p .

Solution

1° La variance a pour expression :

$$V = C + 2 - \varphi$$

Le système comporte 3 corps purs. Le nombre de constituants indépendants est donc :

$$C = 3 - 1 = 2$$

Le nombre de phase de ce mélange gazeux est $\varphi = 1$.

En conséquence : $V = 2 + 2 - 1 = 3$

$$\boxed{V = 3}$$

2° Déterminons d'abord les nombres de moles des différents constituants à l'équilibre à partir du tableau d'avancement relatif à la réaction :

	N_2	3H_2	2NH_3
$t = 0$	1 mol	3 mol	0
Equilibre	$1 - x$	$3 - 3x$	$2x$

Le nombre de mol de NH_3 à l'équilibre est $0,24$.

Donc : $2x = 0,24$

D'où : $x = \frac{0,24}{2} = 0,12\text{mol}$

La composition du système à l'équilibre est :

$$n(\text{N}_2) = 1 - x = 1 - 0,12 = 0,88\text{mol}$$

$$n(\text{H}_2) = 3 - 3x = 3 - 3 \times 0,12 = 2,64\text{mol}$$

$$n(\text{NH}_3) = 2x = 2 \times 0,12 = 0,24\text{mol}$$

Les pressions partielles sont proportionnelles aux nombres de moles :

$$\frac{P_{\text{N}_2}}{0,88} = \frac{P_{\text{H}_2}}{2,64} = \frac{P_{\text{NH}_3}}{0,24} = \frac{P_0}{\sum n_0} = \frac{P}{\sum n}$$

Le nombre total de moles à l'instant initial est :

$$\sum n_0 = 1 + 3 = 4\text{mol}$$

Ainsi : $\frac{P_{\text{N}_2}}{0,88} = \frac{P_0}{4} \Rightarrow P_{\text{N}_2} = \frac{0,88P_0}{4} = \frac{0,88 \times 200}{4} = 44\text{atm}$

De même : $\frac{P_{\text{H}_2}}{2,64} = \frac{200}{4} \Rightarrow P_{\text{H}_2} = \frac{2,64 \times 200}{4} = 132\text{atm}$

Aussi : $\frac{P_{\text{NH}_3}}{0,24} = \frac{200}{4} \Rightarrow P_{\text{NH}_3} = \frac{0,24 \times 200}{4} = 12\text{atm}$

$$\begin{aligned} P_{N_2} &= 44 \text{ atm} \\ P_{H_2} &= 132 \text{ atm} \\ P_{NH_3} &= 12 \text{ atm} \end{aligned}$$

La pression totale à l'équilibre est :

$$P = P_{N_2} + P_{H_2} + P_{NH_3} = 44 + 132 + 12 = 188 \text{ atm}$$

$$P = 188 \text{ atm}$$

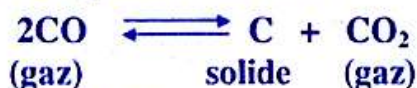
3° La constante d'équilibre K_p :

$$K_p = \frac{P_{NH_3}^2}{P_{N_2} \cdot P_{H_2}^3} = \frac{(12)^2}{44 \times (132)^2} = 1,42 \cdot 10^{-6} \text{ atm}^{-2}$$

$$K_p = 1,42 \cdot 10^{-6} \text{ atm}^{-2}$$

7_ Equilibre hétérogène avec phase vapeur

On considère la réaction d'équilibre suivante :



1° Calculer la variance de ce système.

2° On introduit à 800°C, 1 mol de monoxyde de carbone dans un réacteur de volume invariable. A l'équilibre, la quantité de dioxyde de carbone formé est 0,095 mol. La pression totale du mélange gazeux est $P = 0,796 \text{ atm}$.

a) Quelle est la composition du système à l'équilibre ?

b) Calculer la constante d'équilibre relative aux pressions partielles K_p

Solution

1° Le système comporte 3 corps purs ; le nombre de constituants indépendants est donc :

$$C = 3 - 1 = 2$$

En plus nous avons une phase solide et une phase gazeuse. Donc le nombre de phase est :

$\varphi = 2$. La variance de ce système est :

$$V = C + 2 - \varphi = 2 + 2 - 2 = 2$$

2° a) Le tableau d'avancement relatif à la réaction est :

	$2CO \rightleftharpoons C + CO_2$		
t = 0	1 mol	0	0
Equilibre	$1 - 2x$	x	x

Par conséquent, la composition en moles du système est :

$$n(C) = x = 0,095 \text{ mol}$$

$$n(CO_2) = x = 0,095 \text{ mol}$$

$$n(CO) = 1 - 2x = 0,81 \text{ mol}$$

b) Pour un système hétérogène on applique la loi d'action des masses à la phase gazeuse sans s'occuper des phases solides ou liquides. La constante d'équilibre K_p de ce système s'écrit :

$$K_p = \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}^2}$$

Le nombre de moles total de la phase gazeuse est :

$$\sum n = n(\text{CO}_2) + n(\text{CO}) = 0,095 + 0,81 = 0,905 \text{ mol}$$

La pression partielle de CO est :

$$P_{\text{CO}} = \frac{n_{\text{CO}}}{\sum n} P = \frac{0,81 \times 0,796}{0,905} = 0,712 \text{ atm}$$

La pression partielle de CO₂ est :

$$P_{\text{CO}_2} = \frac{n_{\text{CO}_2}}{\sum n} P = \frac{0,095 \times 0,796}{0,905} = 0,084 \text{ atm}$$

$$K_p = \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}^2} = \frac{0,084}{(0,712)^2} = 0,165 \text{ atm}^{-1}$$

$$\boxed{K_p = 0,165 \text{ atm}^{-1}}$$

Remarque : $P_{\text{CO}} + P_{\text{CO}_2} = P \Rightarrow P_{\text{CO}_2} = P - P_{\text{CO}} = 0,084 \text{ atm}$

8_ Action de la vapeur d'eau sur du mono-oxyde de carbone

On place dans un récipient à 986°C, un mélange de 3 moles de mono-oxyde de carbone et 1 mole de vapeur d'eau. La pression du mélange est 2 atm. Il se forme du dioxyde de carbone et du dihydrogène suivant l'équation :



La constante d'équilibre relative aux concentrations pour ce système, à cette température est $K_c = 0,63$.

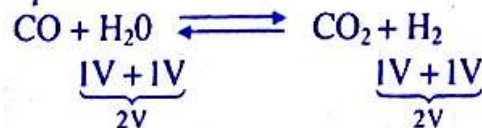
1° Quelle est la pression totale P du système à l'équilibre ?

2° Déterminer la composition du mélange à l'équilibre.

3° Calculer la pression partielle de chacun des gaz à l'équilibre.

Solution

1° Pression totale à l'équilibre:



La pression ne varie pas car le volume du système ne varie pas :

$$\boxed{P = 2 \text{ atm}}$$

2° Les quantités de matière en moles des différents constituants à l'instant initial et à l'équilibre sont consignées dans le tableau d'avancement relatif à la réaction :

	CO	H ₂ O	CO ₂	H ₂
t = 0	3	1	0	0
équilibre	3 - x	1 - x	x	x

$$K_c = \frac{[\text{CO}_2] \cdot [\text{H}_2]}{[\text{CO}] \cdot [\text{H}_2\text{O}]} = \frac{x^2}{(3-x)(1-x)}$$

$$0,63 = \frac{x^2}{(3-x)(1-x)} \Rightarrow$$

$$x^2 = 0,63(3 - 3x - x + x^2)$$

Finalemment :

$$0,37x^2 + 2,52x - 1,89 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré est :

$$\Delta = (2,52)^2 + 4 \times 0,37 \times 1,89 = (3,02)^2$$

Les racines sont :

$$x_1 = \frac{-2,52 - 3,02}{2 \times 0,37} = -7,48 \text{ (à rejeter)}$$

$$x_2 = \frac{-2,52 + 3,02}{2 \times 0,37} = 0,67 \Rightarrow x = 0,67 \text{ mol}$$

$$n(\text{CO}) = 3 - x = 3 - 0,67 = 2,33 \text{ mol}$$

$$n(\text{H}_2\text{O}) = 1 - x = 1 - 0,67 = 0,33 \text{ mol}$$

$$n(\text{CO}_2) = n(\text{H}_2) = x = 0,67 \text{ mol}$$

3° La pression partielle de chaque constituant :

La somme des moles des différents constituants à l'équilibre est :

$$\sum n = 2,33 + 0,33 + 2 \times 0,67 = 4 \text{ mol}$$

$$P_{\text{CO}} = \frac{n(\text{CO})P}{\sum n} = \frac{2,33 \times 2}{4} = 1,16 \text{ atm}$$

$$P_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{n(\text{H}_2\text{O})P}{\sum n} = \frac{0,33 \times 2}{4} = 0,16 \text{ atm}$$

$$P_{\text{CO}_2} = \frac{n(\text{CO}_2)P}{\sum n} = \frac{0,67 \times 2}{4} = 0,33 \text{ atm}$$

$$P_{\text{H}_2} = \frac{n(\text{H}_2)P}{\sum n} = \frac{0,67 \times 2}{4} = 0,33 \text{ atm}$$

ACIDES ET BASES EN SOLUTIONS AQUEUSES

1 LES SOLUTIONS AQUEUSES DE CHLORURE D'HYDROGENE ET D'HYDROXYDE DE SODIUM

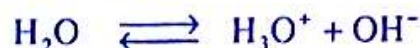
1.1 Les solutions aqueuses

1.1.1 Définition

Une solution aqueuse est une solution dont le solvant est l'eau pure.

1.1.2 Réaction d'ionisation de l'eau pure

L'eau pure s'ionise partiellement en ions **hydroniums** (encore appelés ions **oxoniums**) H_3O^+ et ions **hydroxydes** OH^- suivant l'équation :



1.1.3 Produit ionique de l'eau

A température constante, pour une solution aqueuse quelconque, le produit des concentrations molaires des ions H_3O^+ et OH^- garde une valeur constante K_e appelée produit ionique de l'eau :

$$K_e = [H_3O^+][OH^-]$$

Par ailleurs, l'équation d'ionisation de l'eau pure montre que : $[H_3O^+] = [OH^-]$

En conséquence : $K_e = [H_3O^+]^2$

A 25°C, $K_e = 10^{-14} \Rightarrow [H_3O^+]^2 = 10^{-14}$

D'où : $[H_3O^+] = \sqrt{10^{-14}} = 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

1.1.4 pH d'une solution

On appelle pH d'une solution, le cologarithme décimal de la concentration molaire en ions hydronium H_3O^+ .

$$pH = -\text{Log}[H_3O^+]$$

Exemple : si $[H_3O^+] = 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, $pH = -\text{Log}10^{-7} = 7$

1.1.5 Classification des solutions à 25°C

• Solution neutre

Une solution aqueuse est neutre si elle contient autant d'ions H_3O^+ que d'ions OH^- .

Autrement dit si $[H_3O^+] = 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \Rightarrow pH = 7$

• Solution acide

Une solution aqueuse est acide si elle contient plus d'ions H_3O^+ que d'ions OH^- .

Autrement dit si $[H_3O^+] > 10^{-7} \text{ mol} \cdot L^{-1} \Rightarrow \text{pH} < 7$

• **Solution basique**

Une solution aqueuse est basique si elle contient moins d'ions H_3O^+ que d'ions OH^- . Autrement dit si $[H_3O^+] < 10^{-7} \text{ mol} \cdot L^{-1} \Rightarrow \text{pH} > 7$

1.1.6 Les lois de conservations dans les solutions

• **Conservation de la neutralité électrique (Electroneutralité)**

La somme de toutes les charges des ions positifs est égale à la somme de toutes les charges des ions négatifs.

• **Conservation de la quantité de matière**

La quantité de matière d'un élément chimique reste constante.

1.2 Les solutions aqueuses de chlorure d'hydrogène

1.2.1 Réaction de dissolution

Le chlorure d'hydrogène ou gaz chlorhydrique HCl se dissout très rapidement et en grande quantité dans l'eau. La réaction de dissolution est totale et exothermique :



En plus de cette réaction, l'ionisation partielle de l'eau donne :



Les espèces en solution sont donc : H_3O^+ ; Cl^- OH^- et H_2O

1.2.2 Les acides forts

Un acide fort est une espèce chimique qui réagit avec l'eau en produisant des ions H_3O^+ suivant une réaction totale.

Exemples : l'acide chlorhydrique HCl ; l'acide nitrique HNO_3 ; l'acide iodhydrique HI ; l'acide bromhydrique HBr etc.



L'**acide sulfurique** H_2SO_4 en solution suffisamment diluée peut être considéré comme un **diacide fort**. On admet une dissociation totale selon :



Les espèces en solution sont : H_3O^+ , SO_4^{2-} , OH^- et H_2O .

Les équations de conservation sont :

– Electroneutralité :

$$[H_3O^+] = 2[SO_4^{2-}] + [OH^-]$$

(Le nombre de charges dû aux ions sulfate SO_4^{2-} est le double du nombre d'ions sulfate puisque l'ion sulfate porte deux charges négatives.)

– Conservation de la quantité de matière appliquée aux espèces renfermant l'élément soufre :

$$C_A = [SO_4^{2-}]$$

Le **pH** d'une solution d'**acide fort** de concentration molaire C_A compris entre

$10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ est :

$$\text{pH} = -\text{Log}C_A$$

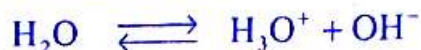
1.3 Les solutions aqueuses d'hydroxyde de sodium

1.3.1 Réaction de dissolution :

L'hydroxyde de sodium NaOH se dissout totalement en ions sodium Na^+ et hydroxyde OH^- suivant l'équation :



En plus de cette réaction, l'ionisation partielle de l'eau donne :



Les espèces en solution sont donc : Na^+ ; H_3O^+ ; OH^- et H_2O

1.3.2 Les bases fortes

Une base forte est une espèce chimique qui, mise en solution aqueuse libère des ions OH^- suivant une réaction totale.

Exemples : solution d'hydroxyde de sodium NaOH; solution d'hydroxyde de potassium KOH etc.



Le pH d'une solution de base forte de concentration molaire C_B est :

$$\text{pH} = 14 + \text{Log}C_B$$

(Si $10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \leq \text{pH} \leq 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$)

1.4 Dilution d'une solution

1.4.1 Définition

La dilution est l'opération qui consiste à diminuer la concentration molaire d'une solution.

1.4.2 Principe de la dilution

Considérons une solution aqueuse de concentration initiale C_i et de volume initial V_i . Pour diluer cette solution, on ajoute de l'eau distillée jusqu'à l'obtention d'un volume final V_f de concentration C_f . Dans cette opération le nombre de mole du soluté ne change pas :

$$C_i V_i = C_f V_f \Rightarrow$$

$$C_f = \frac{C_i V_i}{V_f}$$

Le volume final est :

$$V_f = V_i + V_{\text{eau}}$$

Remarques :

- si $\frac{C_f}{C_i} = \frac{1}{10}$, on a une dilution au dixième : $V_f = 10V_i \Rightarrow V_{\text{eau}} = 9V_i$

- si $\frac{C_f}{C_i} = \frac{1}{100}$, on a une dilution au centième : $V_f = 100V_i \Rightarrow V_{\text{eau}} = 99V_i$

1_ pH de l'eau à différentes températures

Les produits ioniques de l'eau à différentes températures sont :

• 5°C : $K_e = 1,8 \cdot 10^{-15}$

• 37°C : $K_e = 1,9 \cdot 10^{-14}$

• 60°C : $K_e = 9,6 \cdot 10^{-14}$

1° Calculer le pH de l'eau pure à ces températures.

2° La température normale du corps humain est 37°C. Le pH du bol alimentaire dans l'estomac d'une personne vaut : $\text{pH} = 1,2$.

a) Déterminer les concentrations molaires en ions hydroniums et ions hydroxyde dans une solution de bol alimentaire.

b) Par analogie avec le pH, définir le pOH d'une solution et calculer sa valeur pour un bol alimentaire.

c) Vérifier que : $\text{pH} + \text{pOH} = \text{p}K_e$

Solution

1° Le produit ionique de l'eau a pour expression :

$$K_e = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-]$$

D'autre part :

$$K_e = [\text{H}_3\text{O}^+]^2$$

D'où :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \sqrt{K_e}$$

A 5°C :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \sqrt{1,8 \cdot 10^{-15}} = 4,24 \cdot 10^{-8} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

On en déduit :

$$\text{pH} = -\text{Log}[\text{H}_3\text{O}^+] = -\text{Log}4,24 \cdot 10^{-8} = 7,4$$

$$\boxed{\text{pH} = 7,4}$$

A 37°C :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \sqrt{1,9 \cdot 10^{-14}} = 1,37 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{pH} = -\text{Log}[\text{H}_3\text{O}^+] = -\text{Log}1,37 \cdot 10^{-7} = 6,9$$

$$\boxed{\text{pH} = 6,9}$$

A 60°C :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \sqrt{9,6 \cdot 10^{-14}} = 3,09 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{pH} = -\text{Log}[\text{H}_3\text{O}^+] = -\text{Log}3,09 \cdot 10^{-7} = 6,5$$

$$\boxed{\text{pH} = 6,5}$$

2° a) concentrations en ions hydroniums et ions hydroxyde dans le bol alimentaire :

$$\text{pH} = 1,2 \Rightarrow$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-1,2} = 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

A 35°C,

$$[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = 1,9 \cdot 10^{-14}$$

D'où :

$$[\text{OH}^-] = \frac{1,9 \cdot 10^{-14}}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{1,9 \cdot 10^{-14}}{6,3 \cdot 10^{-2}} = 3 \cdot 10^{-13} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\boxed{[\text{H}_3\text{O}^+] = 6,2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$$

$$\boxed{[\text{OH}^-] = 3 \cdot 10^{-13} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$$

b) Le pOH d'une solution est le cologarithme décimal de la concentration molaire en ions hydroxydes OH^- :

$$\text{pOH} = -\text{Log}[\text{OH}^-] = -\text{Log}3 \cdot 10^{-13} = 12,5$$

$$\boxed{\text{pOH} = 12,5}$$

c)

$$\text{pH} + \text{pOH} = 1,2 + 12,5 = 13,7$$

$$\text{pKe} = -\text{LogKe} = -\text{Log}1,9 \cdot 10^{-14} = 13,7$$

Donc :

$$\boxed{\text{pH} + \text{pOH} = \text{pKe}}$$

2_ Détermination de la concentration d'une solution d'acide chlorhydrique

Il existe dans un laboratoire une bouteille possédant une étiquette sur laquelle est écrit : " acide chlorhydrique : masse volumique $1190 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; pourcentage en masse d'acide pur 37% ; masse molaire du chlorure d'hydrogène $36,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ "

1° Calculer la concentration molaire de cette solution.

2° On extrait $4,15 \text{ cm}^3$ de cette solution et on complète à 500 cm^3 avec de l'eau distillée. Quelle est la nouvelle concentration molaire.

Solution

1° La masse volumique de l'acide chlorhydrique contenant des impuretés est :

$$1190 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 1190 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$$

La masse d'acide chlorhydrique pur contenu dans un litre de la solution (masse volumique de l'acide chlorhydrique) est :

$$\mu = \frac{1190 \times 37}{100} = 440,3 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$$

La concentration molaire C est le nombre de moles de chlorure d'hydrogène pur dans un litre de solution ; soit :

$$C = \frac{\mu}{M_{\text{HCl}}} = \frac{440,3}{36,5} = 12,06 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\boxed{C = 12,06 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$$

2° La quantité initiale de l'acide chlorhydrique (nombre de moles de l'acide chlorhydrique) se retrouve après la dilution : elle est constante ; donc :

$$n_{\text{acide}} = C_i V_i = C_f V_f$$

(C_i est la concentration initiale de l'acide; C_f est sa concentration finale)

D'où :

$$C_f = \frac{C_i V_i}{V_f}$$

soit :

$$C_f = \frac{12,06 \times 4,15}{500} = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\boxed{C_f = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$$

3_ Mélange de deux solutions d'acides forts

On veut déterminer la masse molaire d'un alcool R-OH, (R est un radical alkyle). Sur 3,7g de cet alcool, on fait agir du chlorure d'éthanoyle en excès. Le chlorure d'hydrogène formé est recueilli en totalité dans 5litres d'eau. Le pH de la solution obtenue est 2.

1° Ecrire l'équation bilan de cette réaction et calculer la masse molaire M de cet alcool ; en déduire sa formule moléculaire.

2° Dans 50cm³ de la solution d'acide chlorhydrique obtenue, on verse 100cm³ d'une solution d'acide nitrique de concentration de $c_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $\text{pH} = 2,7$.

a) Montrer que l'acide nitrique est un acide fort et écrire l'équation bilan de son ionisation dans l'eau.

b) Quel est le pH du mélange obtenu ?

Solution

1° L'action d'un chlorure d'acyle sur un alcool conduit à un ester.



La concentration molaire de la solution d'acide chlorhydrique obtenue est :

$$C_1 = 10^{-\text{pH}} = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Le nombre de moles du chlorure d'hydrogène formé est :

$$n(\text{HCl}) = C_1 V_{\text{HCl}} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

Stœchiométrie :

$$n(\text{R} - \text{OH}) = n(\text{HCl})$$

soit :

$$\frac{m(\text{R} - \text{OH})}{M} = 5 \cdot 10^{-2}$$

On en déduit :

$$M = \frac{m(\text{R} - \text{OH})}{5 \cdot 10^{-2}}$$

soit :

$$M(\text{R} - \text{OH}) = \frac{3,7}{5 \cdot 10^{-2}} = 74 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\boxed{M = 74 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

R étant un groupe alkyle, la formule générale de cet alcool s'écrit : $\text{C}_n \text{H}_{2n+1} \text{OH}$

Sa formule moléculaire (formule brute) est $\text{C}_n \text{H}_{2n+2} \text{O}$

Ainsi :

$$M = 12n + 2n + 2 + 16$$

soit :

$$74 = 14n + 18$$

D'où :

$$n = \frac{74 - 18}{14} = 4$$

La formule moléculaire de cet alcool est : $\text{C}_4 \text{H}_{10} \text{O}$

2° a) Si l'acide nitrique est fort, son pH vérifie la relation :

$$\text{pH} = -\text{Log}C_2$$

Vérification :

$$-\text{Log}C_2 = -\text{Log}2 \cdot 10^{-3} = 2,7 = \text{pH}$$

L'acide nitrique est donc un acide fort. Sa réaction avec l'eau est totale et s'effectue selon l'équation-bilan :



b) Le nombre de moles d'ions H_3O^+ présents dans le volume $V_1 = 50\text{cm}^3$ de la solution de chlorure d'hydrogène est :

$$n_1 = C_1 V_1$$

Le nombre de moles d'ions H_3O^+ présents dans la solution d'acide nitrique est :

$$n_2 = C_2 V_2$$

La concentration molaire des ions H_3O^+ dans le mélange de volume $V_1 + V_2$ est :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{n_1 + n_2}{V_1 + V_2}$$

soit :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{V_1 + V_2}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{10^{-2} \times 50 + 2 \cdot 10^{-3} \times 100}{150} = 4,66 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Le pH du mélange est : $\text{pH} = -\text{Log}[\text{H}_3\text{O}^+] = -\text{Log}4,66 \cdot 10^{-3} = 2,3$

$$\boxed{\text{pH} = 2,3}$$

4_ pH d'un mélange de deux solutions de bases fortes

A 25°C , on obtient une solution S en mélangeant 100mL de solution d'hydroxyde de potassium de concentration $c_1 = 0,16\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ avec 200mL de solution d'hydroxyde de sodium de $\text{pH} = 12$ et 200mL d'eau.

1° Calculer le pH du mélange.

2° Déterminer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans S et montrer que la solution est électriquement neutre.

Solution

1° Le nombre de moles d'ions OH^- contenu dans la solution d'hydroxyde de potassium de volume V_1 est :

$$n_1 = C_1 V_1$$

Le nombre de moles d'ions OH^- contenu dans la solution d'hydroxyde de sodium de concentration C_2 et de volume V_2 est :

$$n_2 = C_2 V_2$$

Par ailleurs, le pH de cette solution a pour expression :

$$\text{pH} = 14 + \text{Log}C_2$$

ou encore :

$$\text{Log}C_2 = \text{pH} - 14$$

soit :

$$\text{Log}C_2 = 12 - 14 = -2$$

On en déduit : $C_2 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

Le nombre de moles d'ions OH^- contenu dans le volume $V_3 = 200 \text{ mL}$ d'eau est négligeable devant n_1 ou n_2 .

La concentration molaire en ions OH^- dans le mélange est donc :

$$[\text{OH}^-] = \frac{n_1 + n_2}{V_1 + V_2 + V_3} = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{V_1 + V_2 + V_3}$$

soit :
$$[\text{OH}^-] = \frac{0,16 \times 100 + 0,01 \times 200}{500} = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

A 25°C , on a : $[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}$

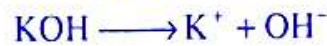
D'où :
$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{10^{-14}}{[\text{OH}^-]} = \frac{10^{-14}}{3,6 \cdot 10^{-2}} = 2,77 \cdot 10^{-13} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Le pH du mélange est : $\text{pH} = -\text{Log}[\text{H}_3\text{O}^+]$

soit :
$$\text{pH} = -\text{Log} 2,77 \cdot 10^{-13} = 12,5$$

$$\boxed{\text{pH} = 12,5}$$

2° L'hydroxyde de potassium KOH se dissout totalement dans l'eau pure suivant l'équation :



Les ions K^+ , provenant uniquement de cette dissolution, leur nombre de moles est égale au nombre de moles d'ions OH^- contenus dans la solution de KOH comme l'indique l'équation de dissolution.

Donc : $n(\text{K}^+) = n_1$

La concentration en ions K^+ dans le mélange de volume $V_1 + V_2 + V_3$ est :

$$[\text{K}^+] = \frac{n_1}{V_1 + V_2 + V_3} = \frac{C_1 V_1}{V_1 + V_2 + V_3}$$

soit :
$$[\text{K}^+] = \frac{0,16 \times 100}{500} = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

L'hydroxyde de sodium NaOH se dissout totalement en solution suivant l'équation :



Le nombre de moles d'ions Na^+ est égal au nombre de moles d'ions OH^- contenus dans la solution de NaOH : $n(\text{Na}^+) = n_2$

La concentration des ions Na^+ est :

$$[\text{Na}^+] = \frac{n_2}{V_1 + V_2 + V_3} = \frac{C_2 V_2}{V_1 + V_2 + V_3}$$

soit :
$$[\text{Na}^+] = \frac{0,01 \times 200}{500} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans la solution sont :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 2,77 \cdot 10^{-13} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{Na}^+] = 4 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{K}^+] = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Le nombre de charges positives dans un litre de solution est :

$$[+] = [\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{Na}^+] + [\text{K}^+] = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Le nombre de charges négatives dans un litre de solution :

$$[-] = [\text{OH}^-] = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Donc :

$$[+] = [-]$$

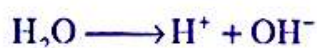
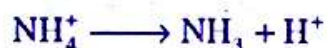
Il y a autant de charges négatives que de charges positives : la solution est électriquement neutre.

2 LES COUPLES ACIDE-BASE

2.1 Acide et base selon Bronsted

2.1.1 Acide

un acide A est une espèce chimique (molécule ou ion) susceptible de céder un proton H^+ .

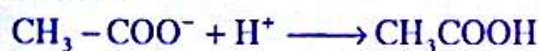


$CH_3 - COOH$; NH_4^+ et H_2O sont des acides dans la théorie de Bronsted.

2.1.2 Base

une base B est une espèce chimique (ion ou molécule) susceptible de capter un proton H^+ .

Exemples :

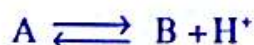


$CH_3 - COO^-$; NH_3 et H_2O sont des bases selon Bronsted.

2.2 Couple acide-base au sens de Bronsted

2.2.1 Définition

On appelle couple acide-base A/B, deux espèces chimiques qui se transforment l'une en l'autre par transfert de proton.



A et B sont appelés acide et base conjugués.

Ex : $CH_3 - COOH / CH_3 - COO^-$ et NH_4^+ / NH_3 sont deux couples acide-base

Remarque : l'eau, acide conjugué de l'ion OH^- dans le couple H_2O / OH^- et base conjuguée de l'ion oxonium H_3O^+ dans le couple H_3O^+ / H_2O est un **ampholyte** : c'est une espèce amphotère.



J.N. Bronsted (1879-1947)

Ce chimiste danois proposa en 1923 de considérer les réactions acido-basiques comme des transferts de protons entre des espèces susceptibles de les céder, les **acides**, et d'autres susceptibles de les capter, les **bases**.

2.2.2 Les équations d'ionisations

• Un acide A d'un couple A/B (exemples : NH_4^+ , un acide carboxylique R-COOH) est **un acide faible**. Il réagit partiellement avec l'eau suivant l'équation :



Exemple :



• Une base B d'un couple A/B (exemples : NH_3 , un carboxylate R-COO⁻, une amine) est **une base faible**. Elle réagit partiellement avec l'eau suivant l'équation :



Exemple :



2.3 Constante d'acidité

Considérons l'équilibre entre les deux espèces A et B d'un couple acide- base A/B en solution aqueuse :



Il existe un nombre constant K_a , sans dimension qui ne dépend que de la température, appelé constante d'acidité du couple A/B tel que :

$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{B}]}{[\text{A}]}$$

D'autre part : $\text{Log}K_a = \text{Log} \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{B}]}{[\text{A}]}$

Soit : $\text{Log}K_a = \text{Log}[\text{H}_3\text{O}^+] + \text{Log} \frac{[\text{B}]}{[\text{A}]}$

ou encore : $-\text{Log}[\text{H}_3\text{O}^+] = -\text{Log}K_a + \text{Log} \frac{[\text{B}]}{[\text{A}]}$

par la suite : $\text{pH} = -\text{Log}K_a + \text{Log} \frac{[\text{B}]}{[\text{A}]}$

On appelle $\text{p}K_a$ le cologarithme décimal de la constante d'acidité K_a :

$$\text{p}K_a = -\text{Log}K_a$$

En conséquence : $\text{pH} = \text{p}K_a + \text{Log} \frac{[\text{B}]}{[\text{A}]}$

2.4 Domaines de prédominance d'un acide A et de sa base conjuguée B

A tout couple A/B en solution aqueuse, on a :

$$\text{pH} = \text{p}K_a + \text{Log} \frac{[\text{B}]}{[\text{A}]}$$

- si $\text{pH} = \text{p}K_a$, alors $\text{Log} \frac{[\text{B}]}{[\text{A}]} = 0 \Rightarrow \frac{[\text{B}]}{[\text{A}]} = 1 \Rightarrow [\text{A}] = [\text{B}]$

L'acide A et sa base B sont en quantité équimolaire.

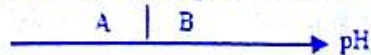
– si $\text{pH} > \text{pK}_a$, on a : $\text{Log} \frac{[\text{B}]}{[\text{A}]} > 0 \Rightarrow \frac{[\text{B}]}{[\text{A}]} > 1 \Rightarrow [\text{B}] > [\text{A}]$

On dit que la forme basique prédomine.

– si $\text{pH} < \text{pK}_a$, alors $\text{Log} \frac{[\text{B}]}{[\text{A}]} < 0 \Rightarrow \frac{[\text{B}]}{[\text{A}]} < 1 \Rightarrow [\text{B}] < [\text{A}]$

Dans ce cas la forme acide prédomine

En résumé, on obtient l'échelle des pH suivante :



2.5 Indicateur coloré

2.5.1 Définition

Un indicateur coloré est un acide faible ou une base faible appartenant à un couple acide-base noté $\text{HInd} / \text{Ind}^-$, dont l'acide et la base conjugués n'ont pas la même couleur.

Exemples : le bleu de bromothymol (BBT) ; l'hélianthine ; la phénolphtaléine etc.

2.5.2 Zone de virage d'un indicateur coloré

Au couple acide/base d'un indicateur coloré correspond une constante d'acidité notée K_{a_i} telle que :

$$K_{a_i} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+] \cdot [\text{Ind}^-]}{[\text{HInd}]}$$

– si $\text{pH} \geq \text{pK}_{a_i} + 1$, la solution aura la couleur de la forme basique de l'indicateur.

– si $\text{pH} \leq \text{pK}_{a_i} - 1$, la solution aura la couleur de la forme acide de l'indicateur.

– si $\text{pK}_{a_i} - 1 \leq \text{pH} \leq \text{pK}_{a_i} + 1$, la solution prend une couleur intermédiaire (mélange des deux formes). Ce dernier cas correspond à ce que l'on appelle **zone de virage** de l'indicateur.

Exemple :

l'hélianthine est jaune pour $\text{pH} \geq 4,4$ et rouge si $\text{pH} \leq 3,1$. Pour $3,1 \leq \text{pH} \leq 4,4$ (zone de virage) la solution devient orangée.

2.6 Forces comparées des acides A et des bases B

Soient A_1/B_1 et A_2/B_2 deux couples acide-base de constantes d'acidité respectives K_{a_1} et K_{a_2} .

Si $K_{a_1} > K_{a_2} \Rightarrow \text{pK}_{a_1} < \text{pK}_{a_2}$, l'acide A_1 est dit plus fort que l'acide A_2 . Par contre la base B_1 est dite plus faible que la base B_2

De deux acides, le plus fort est celui pour lequel la constante d'acidité du couple auquel il appartient est le plus grand.

De deux bases, la plus forte est celle pour laquelle le pK_a du couple auquel elle appartient est le plus grand.

1_ Solution d'acide 2-bromopropanoïque

A 25°C, une solution aqueuse d'acide 2-bromopropanoïque de concentration molaire $C_A = 6 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ a un pH égal à 1,6.

1° Ecrire l'équation bilan de la réaction de l'acide 2-bromopropanoïque avec l'eau et recenser les espèces chimiques présents dans la solution.

2° Calculer la concentration molaire de chaque espèce chimique.

3° Déterminer la constante d'acidité K_a et le PK_a du couple acide/base auquel appartient l'acide 2-bromopropanoïque.

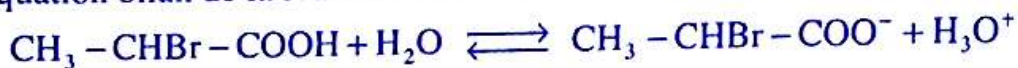
4° Pour une solution aqueuse d'un acide AH de concentration C_A , on définit le

coefficient d'ionisation par le rapport : $\alpha = \frac{A^-}{C_A}$

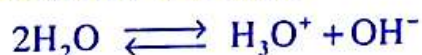
Calculer le coefficient d'ionisation de l'acide 2-bromopropanoïque dans la solution étudiée.

Solution

1° L'équation bilan de la réaction de l'acide 2-bromopropanoïque avec l'eau est :



En plus, l'ionisation partielle de l'eau donne :



Les espèces en solution sont donc : $\text{CH}_3 - \text{CHBr} - \text{COOH}$; $\text{CH}_3 - \text{CHBr} - \text{COO}^-$; H_3O^+ ; OH^- et H_2O .

2° Concentrations des espèces chimiques présentes dans la solution :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-1,6} = 2,51 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

A 25°C

$$[\text{H}_3\text{O}^+] [\text{OH}^-] = 10^{-14}$$

D'où :

$$[\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{10^{-14}}{2,51 \cdot 10^{-2}} = 3,98 \cdot 10^{-13} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Expression de la neutralité électrique :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-] + [\text{CH}_3 - \text{CHBr} - \text{COO}^-]$$

$[\text{OH}^-] \ll [\text{H}_3\text{O}^+]$ (les ions OH^- sont négligeables devant les ions H_3O^+)

En conséquence : $[\text{CH}_3 - \text{CHBr} - \text{COO}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] = 2,51 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

Equation de conservation de la quantité de matière pour les espèces renfermant l'élément carbone :

$$C_A = [\text{CH}_3 - \text{CHBr} - \text{COOH}] + [\text{CH}_3 - \text{CHBr} - \text{COO}^-]$$

D'où :

$$[\text{CH}_3 - \text{CHBr} - \text{COOH}] = C_A - [\text{CH}_3 - \text{CHBr} - \text{COO}^-]$$

soit :

$$[\text{CH}_3 - \text{CHBr} - \text{COOH}] = 6 \cdot 10^{-1} - 2,51 \cdot 10^{-2}$$

$$[\text{CH}_3 - \text{CHBr} - \text{COOH}] = 5,74 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 [\text{H}_3\text{O}^+] &= 2,51 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\
 [\text{OH}^-] &= 3,98 \cdot 10^{-13} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\
 [\text{CH}_3 - \text{CHBr} - \text{COO}^-] &= 2,51 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\
 [\text{CH}_3 - \text{CHBr} - \text{COOH}] &= 5,74 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}
 \end{aligned}$$

3° Constante d'acidité du couple $\text{CH}_3 - \text{CHBr} - \text{COOH} / \text{CH}_3 - \text{CHBr} - \text{COO}^-$:

Par définition :

$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{B}]}{[\text{A}]} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{CH}_3 - \text{CHBr} - \text{COO}^-]}{[\text{CH}_3 - \text{CHBr} - \text{COOH}]}$$

AN :

$$K_a = \frac{2,51 \cdot 10^{-2} \times 2,51 \cdot 10^{-2}}{5,74 \cdot 10^{-1}} = 1,09 \cdot 10^{-3}$$

$$K_a = 1,09 \cdot 10^{-3}$$

Par définition :

$$\text{p}K_a = -\text{Log}K_a = -\text{Log}1,09 \cdot 10^{-3} = 2,9$$

$$\text{p}K_a = 2,9$$

4° Coefficient d'ionisation :

$$\alpha = \frac{[\text{CH}_3 - \text{CHBr} - \text{COO}^-]}{C_A} = \frac{2,51 \cdot 10^{-2}}{6 \cdot 10^{-1}} = 0,04$$

$$\alpha = 0,04$$

2_ Solution d'ammoniac et solution de monoéthylamine

A 25°C, Le pH d'une solution aqueuse d'ammoniac NH_3 de concentration molaire $c = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ est 10,6.

1° Ecrire l'équation de la réaction ayant lieu entre l'ammoniac et l'eau.

2° Calculer les concentrations molaires des différentes espèces chimiques présentes dans la solution. En déduire la valeur de la constante d'acidité K_{a1} du couple acide/base mis en jeu lors de la réaction de l'ammoniac avec l'eau.

3° Le pH d'une solution aqueuse de monoéthylamine $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$ de concentration $c = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ est 11,4.

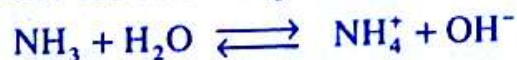
a) Ecrire l'équation de la réaction ayant lieu entre la monoéthylamine et l'eau.

b) Calculer les concentrations des différentes espèces chimiques présentes dans la solution; en déduire la valeur de la constante d'acidité K_{a2} du couple acide/base.

4° Dans les deux couples acide/base cités, entre l'ammoniac et la monoéthylamine, quelle est la base la plus forte ? Justifier.

Solution

1° L'ammoniac réagit avec l'eau selon l'équation :



2° Compte tenu de l'ionisation partielle de l'eau, les espèces chimiques présentes en solution sont : H_3O^+ ; NH_3 ; NH_4^+ ; OH^- et H_2O

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-10.6} = 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

A 25°C, on a :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] \|\text{OH}^-] = 10^{-14}$$

D'où :

$$[\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{10^{-14}}{2,5 \cdot 10^{-11}} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Traduisons l'électroneutralité de la solution :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{NH}_4^+] = [\text{OH}^-]$$

$[\text{H}_3\text{O}^+] \ll [\text{OH}^-] \Rightarrow$

$$[\text{NH}_4^+] = [\text{OH}^-] = 4 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Exprimons la conservation de la matière pour les espèces renfermant l'élément azote :

$$c = [\text{NH}_3] + [\text{NH}_4^+]$$

D'où :

$$[\text{NH}_3] = c - [\text{NH}_4^+] = 10^{-2} - 4 \cdot 10^{-4} = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$[\text{H}_3\text{O}^+] = 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ $[\text{OH}^-] = 4 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ $[\text{NH}_4^+] = 4 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ $[\text{NH}_3] = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

La constante d'acidité K_{a1} du couple $\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$

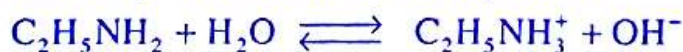
$$K_{a1} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]}$$

soit :

$$K_{a1} = \frac{2,5 \cdot 10^{-11} \times 9,6 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-4}} = 6 \cdot 10^{-10}$$

$K_{a1} = 6 \cdot 10^{-10}$

3° a) La monoéthylamine réagit avec l'eau selon l'équation :



b) Compte tenu de l'ionisation partielle de l'eau, les espèces chimiques présentes dans la solution sont : H_3O^+ ; $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$; $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+$; OH^- et H_2O

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}$$

soit :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-11.4} = 3,9 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] \|\text{OH}^-] = 10^{-14} \Rightarrow [\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{10^{-14}}{3,9 \cdot 10^{-12}} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Electroneutralité de la solution :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+] = [\text{OH}^-]$$

$[\text{H}_3\text{O}^+] \ll [\text{OH}^-] \Rightarrow$

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+] = [\text{OH}^-] = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Conservation de la matière relative à l'élément azote :

$$c = [\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2] + [\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+]$$

D'où: $[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2] = c - [\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+]$

soit: $[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2] = 10^{-2} - 2,5 \cdot 10^{-3} = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 3,9 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+] = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2] = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

La constante d'acidité K_{a2} du couple $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+ / \text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$

$$K_{a2} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2]}{[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+]} = \frac{3,9 \cdot 10^{-12} \times 7,5 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^{-3}} = 1,17 \cdot 10^{-11}$$

$$K_{a2} = 1,17 \cdot 10^{-11}$$

4° De deux bases, la plus forte est celle pour la quelle la constante d'acidité du couple auquel elle appartient est la plus petite. $K_{a2} < K_{a1}$ donc la monoéthylamine est plus forte que l'ammoniac.

3_ Détermination de la concentration d'une solution d'ammoniac

On prépare à 25°C une solution S d'ammoniac de pH = 11 par dilution d'une solution S_0 vendue au commerce. Le pKa du couple $\text{NH}_4^+ / \text{NH}_3$ est 9,2.

1° Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans la solution S et déterminer la concentration c de cette solution.

2° La solution S_0 du commerce a une masse volumique de $890 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ et contient 34% en masse d'ammoniac pur.

a) Calculer la concentration molaire c_0 de la solution S_0 .

b) Quel volume de S_0 a-t-il fallu utiliser pour obtenir un litre de la solution S ?

Données:

$$M(\text{H}) = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$M(\text{N}) = 14 \cdot \text{mol}^{-1}$$

Solution

1° Les données sont :

$$\text{pH} = 11$$

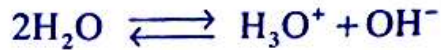
$$\text{pKa} = 9,2$$

Donc : $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-11} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

Aussi : $[\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-11}} = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$$K_a = 10^{-pK_a} = 10^{-9,2} = 6,3 \cdot 10^{-10}$$

Les réactions sont :



Les espèces en solution sont : H_3O^+ ; NH_3 ; NH_4^+ ; OH^- et H_2O

Equation de la neutralité électrique de la solution :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{NH}_4^+] = [\text{OH}^-]$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] \ll [\text{OH}^-] \Rightarrow [\text{NH}_4^+] = [\text{OH}^-] = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

D'autre part :

$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]}$$

D'où :

$$[\text{NH}_3] = \frac{K_a [\text{NH}_4^+]}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{6,3 \cdot 10^{-10} \times 10^{-3}}{10^{-11}} = 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-11} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{NH}_4^+] = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{NH}_3] = 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Traduisons la conservation de la quantité de matière pour les espèces renfermant l'élément azote :

$$c = [\text{NH}_3] + [\text{NH}_4^+]$$

soit:

$$c = 6,3 \cdot 10^{-2} + 10^{-3} = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$c = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

2° a) La masse d'ammoniac pur contenu dans un litre de la solution S_0 du commerce.

$$\mu = \frac{890 \times 34}{100} = 302,6 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$$

Le nombre de moles d'ammoniac pur dans un litre de la solution S_0 :

$$c_0 = \frac{\mu}{M(\text{NH}_3)} = \frac{302,6}{14+3} = 17,8 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$c_0 = 17,8 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

b) Le nombre de mole de l'ammoniac se retrouve après dilution ; soit :

$$c_0 v_0 = cv$$

D'où:

$$v_0 = \frac{cv}{c_0} = \frac{6,4 \cdot 10^{-2} \times 1}{17,8} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ L} = 3,6 \text{ cm}^3$$

$$v_0 = 3,6 \text{ cm}^3$$

4_ Solution de triméthylamine

Une solution aqueuse de triméthylamine $(\text{CH}_3)_3\text{N}$, de concentration molaire $c = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, a un $\text{pH} = 11,4$ à 25°C .

1° Quelle est la classe de cette amine ?

2° Ecrire l'équation-bilan de la réaction de la triméthylamine avec l'eau et calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans la solution.

3° Calculer la constante d'acidité du couple acide/base mis en jeu lors de cette réaction.

4° Le pK_a du couple $\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$ vaut 9,2. Comparer la force de NH_3 à celle de la triméthylamine.

Solution

1° La triméthylamine est une amine tertiaire.

2° Equation bilan de la réaction entre la triméthylamine et l'eau :



En plus, l'ionisation partielle de l'eau donne :



Les espèces en solution sont : H_3O^+ ; $(\text{CH}_3)_3\text{N}$; $(\text{CH}_3)_3\text{NH}^+$; OH^- et H_2O

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}$$

soit : $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-11,4} = 3,98 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

A 25°C , $[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}$

D'où: $[\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{10^{-14}}{3,98 \cdot 10^{-12}} = 2,51 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

Electroneutralité: $[\text{H}_3\text{O}^+] + [(\text{CH}_3)_3\text{NH}^+] = [\text{OH}^-]$

$[\text{H}_3\text{O}^+] \ll [\text{OH}^-] \Rightarrow [(\text{CH}_3)_3\text{NH}^+] = [\text{OH}^-] = 2,51 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

Conservation de la quantité de matière relative à l'élément carbone :

$$c = [(\text{CH}_3)_3\text{N}] + [(\text{CH}_3)_3\text{NH}^+]$$

ou encore : $[(\text{CH}_3)_3\text{N}] = c - [(\text{CH}_3)_3\text{NH}^+]$

soit : $[(\text{CH}_3)_3\text{N}] = 10^{-1} - 2,51 \cdot 10^{-3} = 9,74 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$[\text{H}_3\text{O}^+] = 3,98 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ $[\text{OH}^-] = 2,51 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ $[(\text{CH}_3)_3\text{NH}^+] = 2,51 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ $[(\text{CH}_3)_3\text{N}] = 9,74 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

3° Constante d'acidité du couple $(\text{CH}_3)_3\text{NH}^+ / (\text{CH}_3)_3\text{N}$

Par définition :
$$K_a = \frac{[H_3O^+][CH_3)_3N]}{[(CH_3)_3NH^+]}$$

AN :
$$K_a = \frac{3,98 \cdot 10^{-12} \times 9,74 \cdot 10^{-2}}{2,51 \cdot 10^{-3}} = 1,54 \cdot 10^{-10}$$

$$K_a = 1,54 \cdot 10^{-10}$$

4° Déterminons le pKa du couple $(CH_3)_3NH^+ / (CH_3)_3N$

Par définition :
$$pK_a = -\log K_a = -\log 1,54 \cdot 10^{-10} = 9,8$$

De deux bases, la plus forte est celle pour laquelle le pKa du couple auquel elle appartient est le plus grand. Le pKa du couple $(CH_3)_3NH^+ / (CH_3)_3N$ est supérieur au pKa du couple NH_4^+ / NH_3 ($9,8 > 9,2$). Donc la triméthylamine est plus forte que l'ammoniac.

5_ Dissolution d'une amine aliphatique

Une amine aliphatique A, à chaîne carbonée saturée contient en masse 19,2% d'azote.

1° Sachant que la formule générale d'une amine aliphatique à chaîne carbonée saturée est $C_nH_{2n+3}N$, on demande :

a) La formule brute de A

b) Les formules semi-développées et les noms des amines primaires correspondant à cette formule brute.

2° Sachant que A est une amine primaire et que sa molécule est chirale, identifier A et représenter ses stéréo-isomères.

3° A 25°C, on dissout 1,46g de A dans de l'eau distillée pour préparer 250mL de solution. Le pH de la solution obtenue est 11,8.

a) Calculer la concentration de A.

b) Ecrire l'équation bilan de la réaction de A avec l'eau.

c) On désigne par AH^+ l'acide conjugué de A. Déterminer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans la solution. En déduire la constante d'acidité du couple AH^+ / A .

On donne : $M(H) = 1g \cdot mol^{-1}$ $M(C) = 12g \cdot mol^{-1}$ $M(N) = 14g \cdot mol^{-1}$

Solution

1° a) Formule brute de A

La masse molaire M de A est déterminée les rapports de proportionnalité :

$$\frac{14}{\%N} = \frac{M}{100} \Rightarrow M = \frac{1400}{\%N} = \frac{1400}{19,2} = 73g \cdot mol^{-1}$$

Donc : $M(C_nH_{2n+3}N) = 73g \cdot mol^{-1} \Rightarrow 12n + 2n + 3 + 14 = 73$

Soit : $12n + 2n + 3 + 14 = 73$

Ou bien : $14n + 17 = 73$

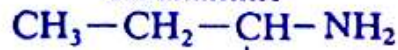
D'où : $n = \frac{73-17}{14} = 4$

La formule brute de A : $\boxed{C_4H_{11}N}$

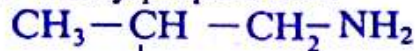
b) Les formules semi-développées et les noms des amines primaires isomères possibles :



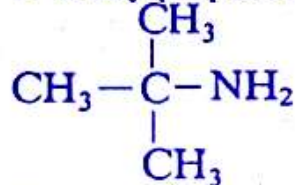
butanamine



1- méthylpropanamine

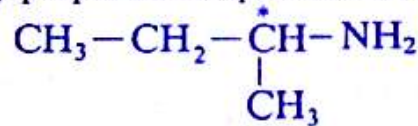


2- méthylpropanamine

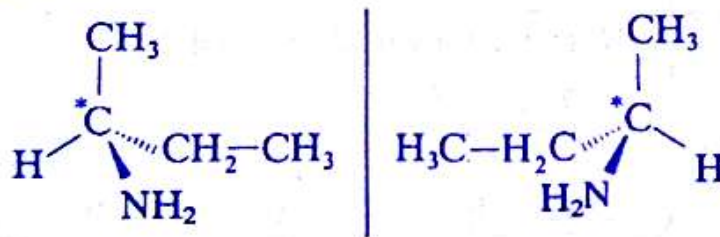


diméthyléthanamine

2° A est le 1- méthylpropanamine qui contient un atome de carbone asymétrique :



Les énantiomères de A :



3° a) Concentration de A :

Calculons d'abord le nombre de moles de A.

$$n_A = \frac{m_A}{M_A} = \frac{1,46}{73} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

La concentration molaire de A est :

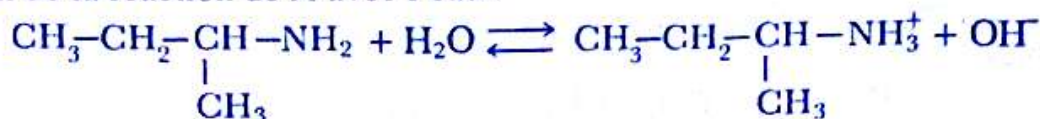
$$C = \frac{n_A}{V}$$

Le volume de la solution est : $V = 250 \text{ mL} = 250 \cdot 10^{-3} \text{ L}$. Par conséquent :

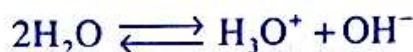
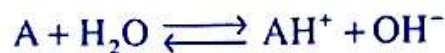
$$C = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{250 \cdot 10^{-3}} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$C = 8 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

b) Equation de la réaction de A avec l'eau :



c) Les réactions d'ionisation sont :



Les espèces en solution : A; AH⁺; H₃O⁺; OH⁻ et H₂O

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-11,8} = 1,58 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{10^{-14}}{1,58 \cdot 10^{-12}} = 6,32 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Electroneutralité : $[\text{AH}^+] + [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-]$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] \ll [\text{OH}^-] \Rightarrow [\text{AH}^+] = [\text{OH}^-] = 6,32 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Conservation de la quantité de matière :

$$C = [\text{A}] + [\text{AH}^+]$$

On en déduit : $[\text{A}] = C - [\text{AH}^+] = 8 \cdot 10^{-2} - 6,32 \cdot 10^{-3} = 7,36 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$$\begin{aligned} [\text{H}_3\text{O}^+] &= 1,58 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{OH}^-] &= [\text{AH}^+] = 6,32 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{A}] &= 7,36 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

Constante d'acidité :

$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{A}]}{[\text{AH}^+]} = \frac{1,58 \cdot 10^{-12} \times 7,36 \cdot 10^{-2}}{6,32 \cdot 10^{-3}} = 1,84 \cdot 10^{-11}$$

$$K_a = 1,84 \cdot 10^{-11}$$

3 | LES REACTIONS ACIDO-BASIQUES

3.1 Réaction entre un acide faible et une base forte

3.1.1 Equation -bilan

Quand on mélange une solution de base forte et une solution d'acide faible A d'un couple A/B, les ions OH^- de la base forte réagissent avec l'acide A selon une réaction totale :



Exemple : Une solution d'hydroxyde de sodium NaOH réagit avec une solution d'acide éthanoïque $\text{CH}_3 - \text{COOH}$ suivant l'équation :



Remarque : Les ions sodium Na^+ n'ont pas réagi : ce sont des ions spectateurs.

3.1.2 Activité 1 : Courbe de variation du pH

Matériel

Burette graduée ; bécher ; pH-mètre ; agitateur magnétique ; solution titrée d'acide acétique ; solution titrée d'hydroxyde de sodium.

• Manipulation

OBJECTIF : Dosage d'un acide faible

Dans un bécher, on dispose de $V_A = 20\text{cm}^3$ d'une solution d'acide éthanoïque de concentration molaire $C_A = 10^{-2}\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$. La burette contient une solution d'hydroxyde de sodium de concentration $C_B = 10^{-2}\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$. Un pH-mètre permet de mesurer le pH de la solution contenue dans le bécher. Un agitateur magnétique assure l'homogénéisation de la solution. (Fig.1)

Après avoir noté le pH initial, ajoutons progressivement la solution d'hydroxyde de sodium et relevons la valeur du pH après chaque ajout. Les résultats obtenus sont les suivants :

$V_B(\text{cm}^3)$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	18,5
pH	3,4	3,8	4,2	4,4	4,6	4,8	5	5,15	5,4	5,75	5,9
$V_B(\text{cm}^3)$	19	19,5	20	20,5	21	21,5	22	24	26	28	30
pH	6,1	6,4	8,6	10,4	10,7	10,9	11	11,3	11,5	11,6	11,7

Ces valeurs permettent de tracer le graphe de la figure 2 représentant les variations du pH en fonction du volume V_B d'hydroxyde de sodium : $\text{pH} = f(V_B)$.

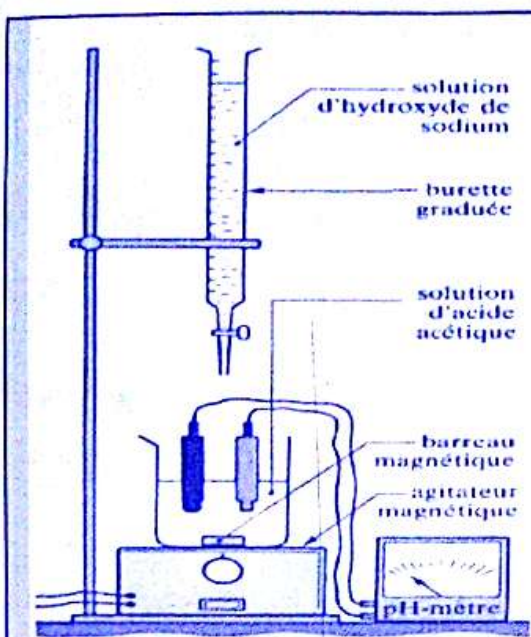


Fig.1

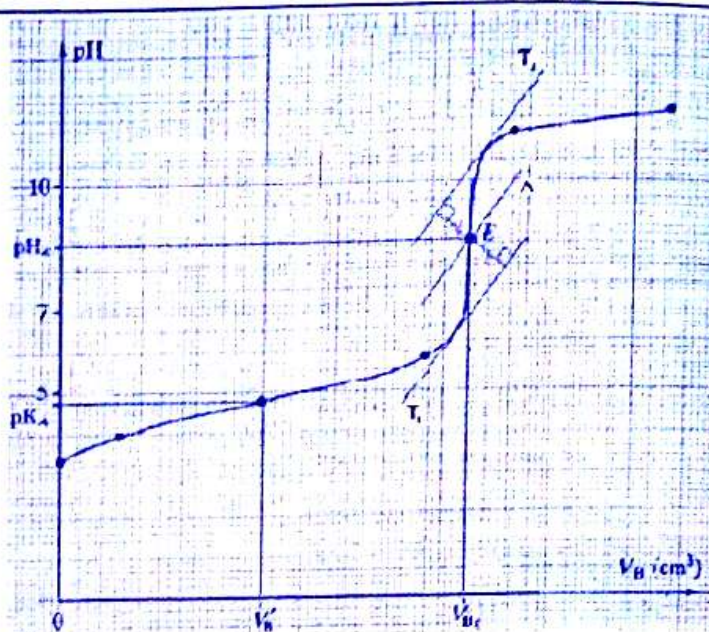


Fig.2

• Repérage du point d'équivalence

Déterminer l'équivalence, c'est repérer la fin de la réaction de dosage. Pour déterminer le point d'équivalence E, on trace deux tangentes à la courbe T_1 et T_2 parallèles et un segment de droite Δ équidistant des deux tangentes. Le point d'intersection de Δ avec la courbe de variation du pH est le point d'équivalence E. A l'équivalence, le volume de base ajoutée est V_{BE} .

A l'équivalence, la quantité de base ajoutée est égale à la quantité d'acide contenu dans le bécher :

$$C_A V_A = C_B V_{BE}$$

On en déduit la concentration molaire C_A de l'acide :

$$C_A = \frac{C_B V_{BE}}{V_A}$$

NB : A la demi-équivalence le volume de base ajoutée est :

$$V'_B = \frac{V_{BE}}{2}$$

A la demi-équivalence le pH de la solution est égal au pKa du couple acide-base :

$$\text{pH} = \text{pKa}$$

Remarque : On peut mesurer directement le volume V_{BE} grâce à un indicateur coloré approprié : le pK_{ind} de l'indicateur doit être voisin du pH à l'équivalence (pH_E).

Pour le dosage d'un acide par une base forte, le pH à l'équivalence est basique : ($\text{pH}_E > 7$) il est bon de choisir la phénolphtaléine de $\text{pK}_{\text{ind}} = 9,4$.

3.2 Réaction entre une base faible et un acide fort

3.2.1 Equation-bilan

Quand on mélange une solution d'acide fort avec une solution de base faible B d'un couple A/B, les ions H_3O^+ de l'acide fort réagissent avec la base faible B suivant une

réaction totale : $B + H_3O^+ \longrightarrow A + H_2O$

Exemple : Une solution de chlorure d'hydrogène HCl réagit avec une solution d'ammoniac NH_3 , selon l'équation :



Remarque : Les ions chlorures Cl^- sont des ions spectateurs.

3.2.2 Activité 2 : Courbe de variation du pH

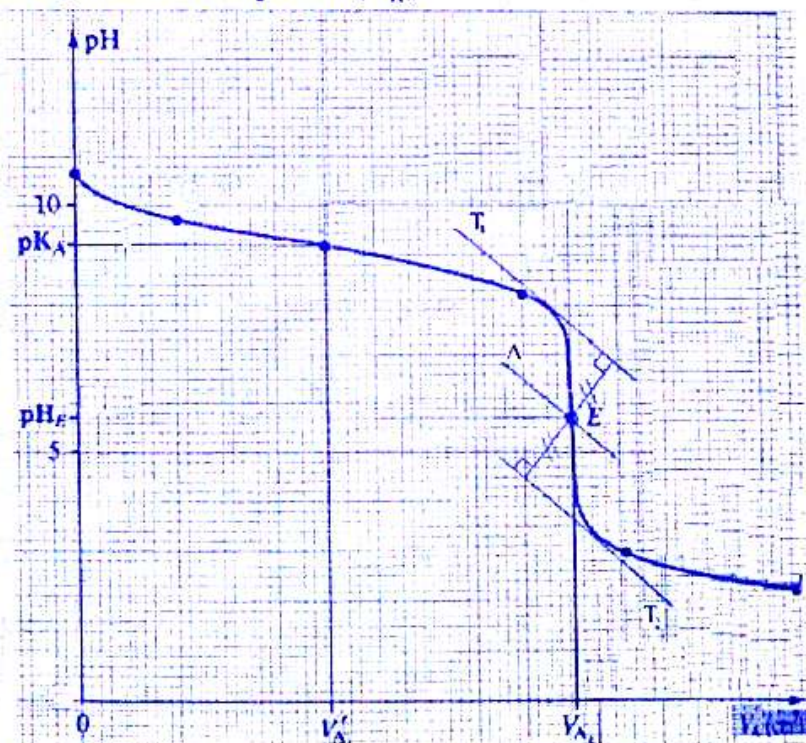
Matériel

Burette graduée ; bécher ; pH-mètre ; agitateur magnétique ; solution titrée d'ammoniac ; solution titrée de chlorure d'hydrogène.

• Manipulation

OBJECTIF : Dosage d'une base faible

Dans un volume $V_B = 20\text{cm}^3$ d'une solution d'ammoniac de concentration molaire $C_B = 10^{-2}\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$, ajoutons progressivement une solution de chlorure d'hydrogène de concentration $C_A = 10^{-2}\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ et relevons le pH après chaque ajout. Les résultats obtenus nous permettent de tracer la courbe représentant les variations du pH en fonction du volume V_A de l'acide : $\text{pH} = f(V_A)$.



Pour déterminer le point d'équivalence E, on trace deux tangentes à la courbe T_1 et T_2 parallèles et un segment de droite Δ équidistant des deux tangentes. Le point d'intersection de Δ avec la courbe de variation du pH est le point d'équivalence E.

• Relation d'équivalence

À l'équivalence, la quantité d'acide ajouté est égale à la quantité de base contenue dans le bécher :

$$C_A V_{AE} = C_B V_B$$

On en déduit la concentration molaire C_B de la base :

$$C_B = \frac{C_A V_{AE}}{V_B}$$

NB : A la demi-équivalence le volume d'acide ajouté est :

$$V'_A = \frac{V_{AE}}{2}$$

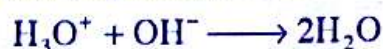
A la demi-équivalence le pH de la solution est égal au pKa du couple acide-base :

$$pH = pK_a$$

Le pH à l'équivalence est acide ($pH_E < 7$). L'indicateur le mieux approprié pour déterminer le point d'équivalence est l'hélianthine ($pK_{ind} = 3,4$)

3.3 Réaction entre un acide fort et une base forte

Un acide fort et une base forte réagissent suivant une réaction totale d'équation :



A l'équivalence le pH est neutre ($pH_E = 7$)

3.4 Solution tampon

3.4.1 Définition

Une solution tampon est une solution constituée d'un mélange équimolaire d'un acide faible A et sa base conjuguée B.

3.4.2 Propriétés

- Le pH d'une solution tampon ne varie pas lors d'une dilution modérée
- Le pH d'une solution tampon varie faiblement lors de l'addition d'une faible quantité d'un acide fort ou d'une base forte.

3.4.3 Préparations

Pour préparer une solution tampon de pH égale au pKa d'un couple A/B, il existe trois méthodes :

- On fait réagir un volume V_A de l'acide faible A de concentration C_A avec une solution de base forte de concentration C_B jusqu'à la demi-équivalence :

$$\frac{C_B V_B}{C_A V_A} = \frac{1}{2}$$

- On fait réagir un volume V_B de la base faible B de concentration C_B avec une solution d'un acide fort de concentration C_A jusqu'à la demi-équivalence :

$$\frac{C_A V_A}{C_B V_B} = \frac{1}{2}$$

- On mélange l'acide faible A avec une solution de sa base conjuguée B en quantités équimolaires :

$$\frac{C_A V_A}{C_B V_B} = 1$$

1_ Solution de chlorure d'ammonium – mélange tampon

A 25°C une solution aqueuse de chlorure d'ammonium de concentration molaire $c = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ présente un $\text{pH} = 5$.

1° Déterminer les concentrations molaires des diverses espèces chimiques présentes dans la solution.

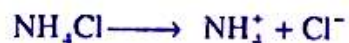
2° A 100 mL de cette solution, on ajoute un volume V d'une solution aqueuse d'ammoniac de concentration molaire $2 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Le pH du mélange obtenu est 9. Le pK_a du couple $\text{NH}_4^+ / \text{NH}_3$ est 9,2.

a) Calculer le volume V

b) Quel volume V' de la solution d'ammoniac doit on ajouter à 100mL de la solution de chlorure d'ammonium pour obtenir une solution tampon de $\text{pH} = 9,2$?

Solution

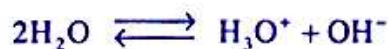
1° Le chlorure d'ammonium NH_4Cl se dissocie totalement en solution suivant l'équation :



L'ion ammonium NH_4^+ réagit partiellement avec l'eau selon :



En plus, l'ionisation partielle de l'eau donne :



Les espèces en solution sont : H_3O^+ ; NH_3 ; NH_4^+ ; OH^- Cl^- et H_2O

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

A partir de K_e on a :
$$[\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-5}} = 10^{-9} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Equation de la neutralité électrique :

$$[\text{NH}_4^+] + [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-] + [\text{Cl}^-]$$

$$[\text{OH}^-] \ll [\text{H}_3\text{O}^+] \Rightarrow [\text{NH}_4^+] + [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{Cl}^-]$$

D'où :
$$[\text{NH}_4^+] = [\text{Cl}^-] - [\text{H}_3\text{O}^+] \quad (1)$$

Conservation de la quantité de matière relative à l'élément chlore :

$$c = [\text{Cl}^-] = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad (2)$$

Compte tenu de (2) la relation (1) donne :

$$[\text{NH}_4^+] = c - [\text{H}_3\text{O}^+]$$

soit :
$$[\text{NH}_4^+] = 10^{-1} - 10^{-5} = 9,9 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Conservation de la matière relative à l'élément azote :

$$c = [\text{NH}_4^+] + [\text{NH}_3]$$

D'où :
$$[\text{NH}_3] = c - [\text{NH}_4^+]$$

soit : $[\text{NH}_3] = 10^{-1} - 9,9 \cdot 10^{-2} = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = 10^{-9} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{NH}_4^+] = 9,9 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{NH}_3] = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{Cl}^-] = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

2° a) La solution finale est un mélange d'un acide faible NH_4^+ avec sa base conjuguée NH_3 .

Donc : $\text{pH} = \text{pKa} + \text{Log} \frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]}$

Ou encore : $\text{pH} - \text{pKa} = \text{Log} \frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]}$

$$\left. \begin{aligned} [\text{NH}_3] &= \frac{C_B V_B}{V_A + V_B} \\ [\text{NH}_4^+] &= \frac{C_A V_A}{V_A + V_B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{pH} - \text{pKa} = \text{Log} \frac{C_B V_B}{C_A V_A}$$

soit : $9 - 9,2 = \text{Log} \frac{2 \cdot 10^{-1} \times V}{10^{-1} \times 100}$

ou encore : $-0,2 = \text{Log} \frac{V}{50}$

Par la suite : $10^{-0,2} = \frac{V}{50}$

Autrement : $0,63 = \frac{V}{50}$

D'où : $V = 50 \times 0,63 = 31,5 \text{ mL}$

$$\boxed{V = 31,5 \text{ mL}}$$

b) Le mélange obtenu est une solution tampon si :

$$\frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]} = 1$$

Donc : $\frac{C_B V_B}{C_A V_A} = 1$

Soit : $\frac{2 \cdot 10^{-1} \times V'}{10^{-1} \times 100} = 1$

ou encore :

$$\frac{V'}{50} = 1 \Rightarrow V' = 50\text{mL}$$

$$\boxed{V' = 50\text{mL}}$$

2_ Réaction de l'hydroxyde de sodium sur du chlorure d'éthylammonium

On dispose d'une solution d'hydroxyde de sodium de concentration $0,10\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ et d'une solution de chlorure d'éthylammonium $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3\text{Cl}$ de concentration $5\cdot 10^{-2}\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ et de $\text{pH} = 6$.

1° Calculer le pH de la solution d'hydroxyde de sodium.

2° Le pK_a du couple $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+/\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$ est 10,7. Quelle est l'espèce prédominante dans la solution de $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3\text{Cl}$ de $\text{pH} = 6$?

3° On mélange 75cm^3 de la solution d'hydroxyde de sodium avec 100cm^3 de la solution chlorure d'éthylammonium. Le pH du mélange est 12,2.

a) Calculer la concentration molaire des ions OH^- résiduels dans le mélange après la réaction.

b) Retrouver la valeur du pH du mélange.

Solution

1° L'hydroxyde de sodium est une base forte de concentration $C_B = 0,10\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

Donc :

$$\text{pH} = 14 + \text{Log}C_B$$

Soit :

$$\text{pH} = 14 + \text{Log}0,10 = 13$$

$$\boxed{\text{pH} = 13}$$

2° Le pH de la solution de chlorure d'éthylammonium est inférieur au pK_a du couple $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+/\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$. Donc la forme acide prédomine : $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+$ est majoritaire.

3° a) L'hydroxyde de sodium réagit totalement avec les ions $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+$ suivant l'équation :



Le pH du mélange étant basique ($\text{pH} = 12,2$), la quantité d'ion $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+$ ajouté a disparu complètement. D'autre part, la réaction se fait mole par mole. Ainsi le tableau ci-dessous déduit de l'équation bilan, indique les nombres de moles à l'instant initial puis à l'état d'équilibre.

	$\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+$	OH^-	$\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$	H_2O
instant $t = 0$	$C_A V_A$	$C_B V_B$		
équilibre	0	$C_B V_B - C_A V_A$	$C_A V_A$	

Le nombre de moles d'ion hydroxyde restant est :

$$n(\text{OH}^-) = C_B V_B - C_A V_A$$

soit : $[\text{NH}_3] = 10^{-1} - 9,9 \cdot 10^{-2} = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = 10^{-9} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{NH}_4^+] = 9,9 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{NH}_3] = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{Cl}^-] = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

2° a) La solution finale est un mélange d'un acide faible NH_4^+ avec sa base conjuguée NH_3 .

Donc : $\text{pH} = \text{pKa} + \text{Log} \frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]}$

Ou encore : $\text{pH} - \text{pKa} = \text{Log} \frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]}$

$$\left. \begin{array}{l} [\text{NH}_3] = \frac{C_B V_B}{V_A + V_B} \\ [\text{NH}_4^+] = \frac{C_A V_A}{V_A + V_B} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{pH} - \text{pKa} = \text{Log} \frac{C_B V_B}{C_A V_A}$$

soit : $9 - 9,2 = \text{Log} \frac{2 \cdot 10^{-1} \times V}{10^{-1} \times 100}$

ou encore : $-0,2 = \text{Log} \frac{V}{50}$

Par la suite : $10^{-0,2} = \frac{V}{50}$

Autrement : $0,63 = \frac{V}{50}$

D'où : $V = 50 \times 0,63 = 31,5 \text{ mL}$

$$\boxed{V = 31,5 \text{ mL}}$$

b) Le mélange obtenu est une solution tampon si :

$$\frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]} = 1$$

Donc : $\frac{C_B V_B}{C_A V_A} = 1$

Soit : $\frac{2 \cdot 10^{-1} \times V'}{10^{-1} \times 100} = 1$

	CH ₃ COOH	OH ⁻	CH ₃ COO ⁻	H ₂ O
instant t = 0	C _A V _A	C _B V _B		
équilibre	C _A V _A - C _B V _B	0	C _B V _B	

Le volume du mélange étant $V_A + V_B$, les concentrations à l'équilibre sont :

$$[\text{CH}_3\text{COO}^-] = \frac{C_B V_B}{V_A + V_B}$$

$$[\text{CH}_3\text{COOH}] = \frac{C_A V_A - C_B V_B}{V_A + V_B}$$

D'autre part: $\text{pH} = \text{pKa} + \text{Log} \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]}$

soit: $\text{pH} = \text{pKa} + \text{Log} \frac{C_B V_B}{C_A V_A - C_B V_B}$

D'où: $\text{pKa} = \text{pH} - \text{Log} \frac{C_B V_B}{C_A V_A - C_B V_B}$

AN : $\text{pKa} = 5,1 - \text{Log} \frac{8 \cdot 10^{-2} \times 10}{0,12 \times 10 - 8 \cdot 10^{-2} \times 10} = 4,8$

$$\boxed{\text{pKa} = 4,8}$$

2° Le pH de la solution tampon correspond au pKa du couple CH₃COOH/CH₃COO⁻. Il s'agit donc de réaliser un mélange équimolaire de CH₃COOH et de CH₃COO⁻.

Première méthode

On mélange un volume V_A d'acide fort HCl avec un volume V_B de base faible d'éthanoate de sodium jusqu'à la demi-équivalence. On a alors :

$$\frac{C_A V_A}{C_B V_B} = \frac{1}{2}$$

ou : $2C_A V_A = C_B V_B$

soit : $2 \cdot 10^{-1} V_A = 5 \cdot 10^{-2} V_B$

Ainsi : $2V_A = 5 \cdot 10^{-1} V_B$

D'où : $V_B = \frac{2V_A}{5 \cdot 10^{-1}} = 4V_A$

D'autre part : $V_A + V_B = 150 \text{cm}^3$

Donc : $V_A + 4V = 150 \text{cm}^3$

soit : $5V_A = 150 \text{cm}^3$

D'où: $V_A = \frac{150}{5} = 30 \text{cm}^3$

Aussi : $V_B = 4V_A = 4 \times 30 = 120\text{cm}^3$

On mélange donc 30cm^3 d'acide chlorhydrique avec 120cm^3 de la solution d'éthanoate de sodium.

Deuxième méthode

On mélange un volume V_B de la base forte NaOH avec un volume V_A de l'acide faible CH_3COOH jusqu'à la demi-équivalence. On a alors :

$$\frac{C_B V_B}{C_A V_A} = \frac{1}{2}$$

ou :

$$2C_B V_B = C_A V_A$$

soit :

$$2 \times 5 \cdot 10^{-2} V_B = 10^{-1} V_A$$

Par la suite :

$$10^{-1} V_B = 10^{-1} V_A$$

Donc :

$$V_B = V_A$$

Par ailleurs :

$$V_A + V_B = 150\text{cm}^3$$

Il s'en suit :

$$2V_A = 150\text{cm}^3$$

D'où :

$$V_A = \frac{150}{2} = 75\text{cm}^3$$

Aussi :

$$V_B = V_A = 75\text{cm}^3$$

On mélange 75cm^3 de la solution d'hydroxyde de sodium avec 75cm^3 de la solution d'acide éthanoïque.

Remarque : Dans ces deux méthodes le demi-quotient représente le rapport du nombre de moles de l'espèce forte (acide fort ou base forte) au nombre de moles de l'espèce faible (acide faible ou base faible).

Troisième méthode:

On mélange un volume V_A d'acide faible CH_3COOH avec un volume V_B de sa base conjuguée CH_3COONa dans la même proportion :

$$\frac{C_B V_B}{C_A V_A} = 1$$

ou :

$$C_B V_B = C_A V_A$$

soit :

$$5 \cdot 10^{-2} V_B = 10^{-1} V_A$$

$$V_B = \frac{10^{-1}}{5 \cdot 10^{-2}} V_A = 2V_A$$

Comme :

$$V_A + V_B = 150\text{cm}^3$$

Il s'en suit :

$$V_A + 2V_A = 150\text{cm}^3$$

soit :

$$3V_A = 150\text{cm}^3$$

D'où :

$$V_A = \frac{150}{3} = 50\text{cm}^3$$

et : $V_B = 2V_A = 2 \times 50 = 100 \text{ cm}^3$

On mélange 50 cm^3 de la solution d'acide éthanoïque avec 100 cm^3 de la solution d'éthanoate de sodium.

4_ Solutions en travaux pratiques

Au cours d'une séance de travaux pratiques, on fait réagir entre elles deux solutions aqueuses, l'une d'éthylamine $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$, l'autre d'acide chlorhydrique afin de déterminer le pK_a du couple constitué par l'éthylamine et son acide conjugué.

1° On prépare 100 cm^3 d'acide chlorhydrique de concentration molaire $C_A = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ en diluant un volume V_i d'acide chlorhydrique à $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ dans de l'eau pure.

a) Déterminer le volume initial V_i

b) Expliquer brièvement comment on réalise pratiquement cette dilution.

2° A un volume $V_B = 20 \text{ cm}^3$ de la solution d'éthylamine, on ajoute progressivement de l'acide chlorhydrique. Un pH-mètre permet de suivre l'évolution du pH du mélange au cours de cette manipulation. On constate que :

• pour 30 cm^3 d'acide chlorhydrique ajouté, le pH mesuré est égal à 10,3

• pour 40 cm^3 d'acide ajouté l'équivalence acido-basique est obtenue

a) Préciser la formule et le nom de l'acide conjugué de l'éthylamine.

b) Que représente l'équivalence acido-basique? Calculer la concentration molaire C_B de la solution aqueuse d'éthylamine.

c) Recenser les différentes espèces chimiques en solution lorsque le volume d'acide ajouté est $V_A = 30 \text{ cm}^3$ et calculer leurs concentrations molaires. En déduire le pK_a du couple constitué par l'éthylamine et son acide conjugué.

Solution

1° a) La quantité initiale de l'acide chlorhydrique (exprimée en mol) se retrouve après la dilution ; elle est constante :

$$n_{\text{acide}} = C_i V_i = C_f V_f$$

D'où :
$$V_i = \frac{C_f V_f}{C_i}$$

soit :
$$V_i = \frac{5 \cdot 10^{-2} \times 100}{1} = 5 \text{ cm}^3$$

$$\boxed{V_i = 5 \text{ cm}^3}$$

b) A l'acide d'une pipette on verse 5 cm^3 d'acide chlorhydrique à $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ dans une fiole jaugée de et on complète à 100 cm^3 avec de l'eau distillée.

2° a) L'acide conjugué de l'éthylamine est l'ion éthylammonium $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+$

b) L'équivalence acido-basique représente l'instant où la quantité d'acide chlorhydrique ajouté est égale à la quantité initiale d'éthylamine :

$$C_A V_{AE} = C_B V_B$$

V_{AE} est le volume d'acide versé à l'équivalence : $V_{AE} = 40 \text{ cm}^3$

Ainsi :

$$C_B = \frac{C_A V_{AE}}{V_B}$$

soit :

$$C_B = \frac{5 \cdot 10^{-2} \times 40}{20} = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

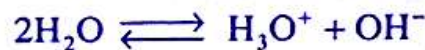
$$C_B = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

c) La réaction entre l'éthylamine et l'acide chlorhydrique est une réaction totale dont l'équation bilan est la suivante :



Les ions Cl^- ne participant pas à la réaction (ions spectateurs).

En plus, l'ionisation partielle de l'eau donne :



Puisque le pH est supérieur à 7 (pH = 10,3), le milieu est basique. Donc la solution contient des molécules de $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$. Les espèces en solution sont alors :

$\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$; $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+$; H_3O^+ ; Cl^- ; OH^- et H_2O

Le milieu étant basique, la quantité d'acide chlorhydrique ajouté a disparu complètement dans le mélange. Le tableau ci-dessous déduit de l'équation-bilan, indique les quantités mises en présence et les quantités dans l'état d'équilibre :

	$\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$	H_3O^+	$\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+$	H_2O
instant $t = 0$	$C_B V_B$	$C_A V_A$		
équilibre	$C_B V_B - C_A V_A$	0	$C_A V_A$	

Le volume du mélange étant $V_A + V_B$, on a alors :

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2] = \frac{C_B V_B - C_A V_A}{V_A + V_B}$$

Soit :

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2] = \frac{10^{-1} \times 20 - 5 \cdot 10^{-2} \times 30}{50} = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

De même :

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+] = \frac{C_A V_A}{V_A + V_B}$$

Soit :

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+] = \frac{5 \cdot 10^{-2} \times 30}{50} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

La concentration en ions Cl^- qui ne réagit pas est :

$$[\text{Cl}^-] = \frac{n_{\text{HCl}}}{V_A + V_B} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \times 30}{50} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

D'après les données : $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-10,3} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$$[\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{10^{-14}}{5 \cdot 10^{-11}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2] = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ $[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+] = 3 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ $[\text{Cl}^-] = 3 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ $[\text{H}_3\text{O}^+] = 5 \cdot 10^{-11} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ $[\text{OH}^-] = 2 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

Le pKa du couple $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+ / \text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$:

$$\text{pH} = \text{pKa} + \text{Log} \frac{[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2]}{[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+]}$$

D'où :
$$\text{pKa} = \text{pH} - \text{Log} \frac{[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2]}{[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+]}$$

AN :
$$\text{pKa} = 10,3 - \text{Log} \frac{10^{-2}}{3 \cdot 10^{-2}} = 10,8$$

$$\boxed{\text{pKa} = 10,8}$$

5_ Identifications de deux solutions acides

Deux flacons sans étiquettes, contiennent des solutions acides S_1 et S_2 de concentrations molaires inconnues.

1° Pour les identifier, on procède aux mesures suivantes :

- mesure de pH
- pour S_1 : pH = 2,5
- pour S_2 : pH = 2
- dosage de 25cm^3 de chaque solution à l'aide d'une solution d'hydroxyde de sodium de concentration molaire $C_b = 0,05\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

- pour S_1 , l'équivalence est atteinte après addition d'un volume $V_{\text{BE}_1} = 30\text{cm}^3$

- pour S_2 , l'équivalence est atteinte après addition d'un volume $V_{\text{BE}_2} = 5\text{cm}^3$

a) Calculer les concentrations molaires C_1 et C_2 de S_1 et S_2 respectivement.

b) Montrer que l'un des flacons contient un monoacide fort et l'autre un monoacide faible.

c) Quel indicateur coloré paraît le plus approprié à chaque dosage?

rouge de méthyle : zone de virage $4,2 \leq \text{pH} \leq 6,2$

rouge de phénol: zone de virage $6,8 \leq \text{pH} \leq 8,4$

phénolphaléine : zone de virage $8,0 \leq \text{pH} \leq 10,0$

2° Le monoacide faible est noté AH.

a) Ecrire l'équation-bilan de sa réaction avec l'eau.

b). Recenser les espèces chimiques présentes dans la solution et calculer leurs concentrations.

c). Déterminer le pKa du couple AH/A⁻ et identifier l'acide AH en consultant le tableau ci-dessous.

Couple AH/A ⁻	pKa
CH ₂ Cl-COOH/CH ₂ Cl-COO ⁻	2,5
HCOOH/HCOO ⁻	3,7
C ₆ H ₅ COOH/C ₆ H ₅ COO ⁻	4,2
CH ₃ COOH/CH ₃ COO ⁻	4,8

3° Quel volume de la solution d'hydroxyde de sodium faudrait-il ajouter à 20cm³ de la solution d'acide AH pour atteindre la demi-équivalence ? Quel serait alors le pH de la solution obtenue ?

Solution

1° a) A l'équivalence, la quantité de soude ajoutée est égale à la quantité d'acide contenu dans le volume V_A = 25cm³ :

$$n_{\text{soude}} = n_{\text{acide}}$$

soit:

$$C_B V_{BE} = C_A V_A$$

D'où:

$$C_A = \frac{C_B V_{BE}}{V_A}$$

- pour S₁:

$$C_1 = \frac{0,05 \times 30}{25} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

- pour S₂:

$$C_2 = \frac{0,05 \times 5}{25} = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$C_1 = 6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$C_2 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

b) Pour un monoacide fort de concentration molaire C_A, la réaction avec l'eau est totale.

De ce fait :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} = C_A$$

- pour S₁:

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-2,5} = 0,32 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} < C_1$$

La réaction avec l'eau n'est donc pas totale. S₁ contient un monoacide faible.

- pour S₂:

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = C_2$$

S₂ contient un monoacide fort.

Autrement:

$$\text{pH} = -\text{Log} C_2 \text{ pour } S_2$$

c) Lors du dosage de la solution d'acide faible (S₁) par une base forte NaOH, le pH au point d'équivalence est basique (pH_E > 7). L'indicateur le mieux adapté est la phénolphthaléine. Lors du dosage d'un acide fort (S₂) par une base forte NaOH le

pH à l'équivalence est neutre ($\text{pH}_E = 7$). L'indicateur le plus approprié est le rouge de phénol.

2° a) L'acide faible AH réagit avec l'eau suivant l'équation :



b) La solution contient les espèces : AH; A^- ; H_3O^+ ; OH^- et H_2O

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-2,5} = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{3,2 \cdot 10^{-3}} = 3,1 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Equation de la neutralité électrique :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{A}^-] + [\text{OH}^-]$$

$$[\text{OH}^-] \ll [\text{H}_3\text{O}^+] \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{A}^-] = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Equation de conservation de la quantité de matière :

$$c = [\text{AH}] + [\text{A}^-]$$

D'où : $[\text{AH}] = c - [\text{A}^-]$

soit : $[\text{AH}] = 6 \cdot 10^{-2} - 3,2 \cdot 10^{-3} = 5,7 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = 3,1 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{A}^-] = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{AH}] = 5,7 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

c) La constante d'acidité du couple AH / A^- :

$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$$

soit : $K_a = \frac{3,2 \cdot 10^{-3} \times 3,2 \cdot 10^{-3}}{5,7 \cdot 10^{-2}} = 1,79 \cdot 10^{-4}$

Par définition : $\text{pK}_a = -\text{Log}K_a = -\text{Log}1,79 \cdot 10^{-4} = 3,7$

$$\boxed{\text{pK}_a = 3,7}$$

Le pK_a est celui du couple $\text{HCOOH} / \text{HCOO}^-$. Le monoacide faible est donc l'acide méthanoïque HCOOH

3° A la demi-équivalence, la quantité de soude ajoutée est égale à la moitié de la quantité d'acide méthanoïque de volume $v_A = 20 \text{ cm}^3$.

On a alors : $C_B V_B = \frac{C_A V_A}{2}$

D'où : $V_B = \frac{C_A V_A}{2C_B} = \frac{6 \cdot 10^{-2} \times 20}{2 \times 0,05} = 12 \text{ cm}^3$

$$V_B = 12 \text{ cm}^3$$

A la demi-équivalence le pH est égal au pKa du couple acide/base : $\text{pH} = 3,7$

$$\text{pH} = 3,7$$

6_ Dosage pH-métrique

On utilise une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium de concentration molaire $C_B = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ pour doser, à l'aide d'un pH-mètre, 20 cm^3 d'une solution aqueuse d'un acide carboxylique de formule générale R-COOH . On note la variation du pH lors de l'addition de volume V_B de la solution d'hydroxyde à la solution d'acide. Les résultats sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

$V_B(\text{cm}^3)$	0	2	4	6	8	10	12	14
pH	2,6	3,2	3,6	3,8	4	4,2	4,3	4,5

$V_B(\text{cm}^3)$	16	18	19	20	21	23	25	29
pH	4,7	5	5,3	8,2	11	11,5	11,6	11,8

1° Ecrire l'équation-bilan de la réaction acide base qui se produit.

2° Représenter graphiquement : $\text{pH} = f(V_B)$

Echelles : $1 \text{ cm} \longleftrightarrow 1 \text{ unité pH}$
 $1 \text{ cm} \longleftrightarrow 2 \text{ cm}^3$

3° Déduire de la courbe :

- La valeur de la concentration molaire C_A de la solution d'acide.
- Le pKa du couple acide/base; en déduire la valeur de Ka.
- Identifier cet acide à l'aide du tableau suivant :

acide	acide méthanoïque	acide éthanoïque	acide propanoïque	acide phényléthanoïque
Ka	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$6,3 \cdot 10^{-5}$

4° Calculer les concentrations molaires des espèces chimiques présentes dans la solution d'acide initiale d'acide et retrouver la valeur du pKa déterminé graphiquement (les solutions sont à 25°C).

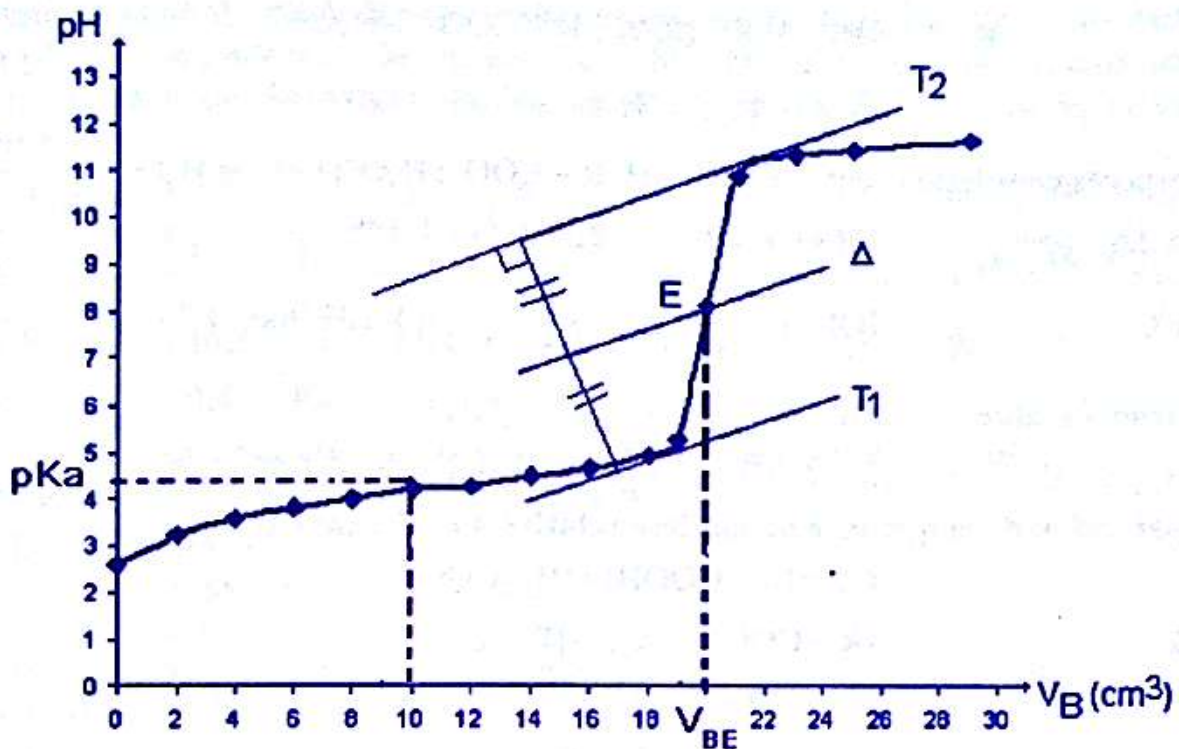
5° Calculer le coefficient d'ionisation α de l'acide dans la solution.

Solution

1° La réaction entre l'acide carboxylique et l'hydroxyde de sodium est totale et s'écrit :



2° Courbe de variation du pH :



3° a) Traçons deux tangentes parallèles T_1 et T_2 à la courbe puis le segment de droite Δ équidistant des deux tangentes. Le point d'intersection de Δ avec la courbe de variation du pH est le point d'équivalence E. L'abscisse du point d'équivalence est $V_{BE} = 20 \text{ cm}^3$.

Relation d'équivalence : $C_A V_A = C_B V_{BE}$

On en déduit : $C_A = \frac{C_B V_{BE}}{V_A} = \frac{0,1 \times 20}{20} = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$$C_A = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

b) Le volume d'hydroxyde versé à la demi-équivalence est :

$$V'_B = \frac{V_{BE}}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}^3$$

La lecture de la courbe montre que l'ordonnée du point d'abscisse $V'_B = 10 \text{ cm}^3$ est $\text{pH} = 4,2$. Par ailleurs à la demi-équivalence, $\text{pH} = \text{pKa}$.

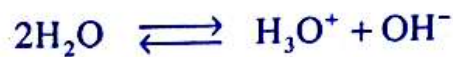
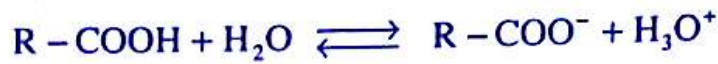
Donc : $\text{pKa} = 4,2$

La constante d'acidité est : $K_a = 10^{-\text{pH}} = 10^{-4,2} = 6,3 \cdot 10^{-5}$

$$K_a = 6,3 \cdot 10^{-5}$$

c) L'acide carboxylique en question est l'acide phényléthanoïque de constante d'acidité $K_a = 6,3 \cdot 10^{-5}$.

4° Le pH de la solution d'acide initial est obtenu en prenant l'ordonnée du point d'abscisse $V_B = 0$. Ce qui correspond à $\text{pH} = 2,6$. Les réactions d'ionisations sont :



Les espèces en solution sont : R-COOH ; R-COO^- ; H_3O^+ ; OH^- et H_2O

$$\text{pH} = 2,6. \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-2,6} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{A } 25^\circ\text{C} : [\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{10^{-14}}{2,5 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{Electroneutralité: } [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{R-COO}^-] + [\text{OH}^-]$$

$$[\text{OH}^-] \ll [\text{H}_3\text{O}^+] \Rightarrow [\text{R-COO}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Conservation de la quantité de matière relative à l'élément carbone :

$$C_A = [\text{R-COOH}] + [\text{R-COO}^-]$$

$$\text{D'où : } [\text{R-COOH}] = C_A - [\text{R-COO}^-]$$

$$\text{soit : } [\text{R-COOH}] = 9,6 \cdot 10^{-2} - 2,5 \cdot 10^{-3} = 9,35 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = 4 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{R-COO}^-] = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{R-COOH}] = 9,35 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

La constante d'acidité du couple acide/base est :

$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{R-COO}^-]}{[\text{R-COOH}]}$$

$$\text{soit : } K_a = \frac{2,5 \cdot 10^{-3} \times 2,5 \cdot 10^{-3}}{9,35 \cdot 10^{-2}} = 6,6 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{Par définition : } \text{p}K_a = -\text{Log}K_a$$

$$\text{soit : } \text{p}K_a = -\text{Log}6,6 \cdot 10^{-5} = 4,2$$

$$\text{p}K_a = -\text{Log}6,6 \cdot 10^{-5} = 4,2$$

5° Le coefficient d'ionisation :

$$\alpha = \frac{[\text{R-COO}^-]}{C_A} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{9,6 \cdot 10^{-2}} = 0,02$$

$$\alpha = 2\%$$

7_ Dosage d'une solution de diéthylamine

On utilise une solution aqueuse de chlorure d'hydrogène de concentration molaire $C_A = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ pour doser, à l'aide d'un pH- mètre, $V_b = 20 \text{ cm}^3$

d'une solution de diéthylamine contenu dans un bécher. On note la variation du pH lors de l'addition de volume V_A de la solution de chlorure d'hydrogène à la solution de diéthylamine. Les résultats sont indiqués dans le tableau suivant :

$V_A(\text{cm}^3)$	0	1	3	5	7	9	11	13	15	16
pH	11,9	11,7	11,5	11,3	11,1	10,9	10,7	10,4	10,1	9,7

$V_A(\text{cm}^3)$	16,5	17	17,2	17,5	18	18,5	19	20	22	25
pH	9,4	8,8	7,5	3,6	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8

1° Ecrire l'équation bilan de la réaction acide-base qui se produit.

2° Représenter graphiquement : $\text{pH} = f(V_A)$.

Echelles : 1cm pour 2cm^3

1cm pour 1 unité de pH

3° Déduire de la courbe :

a) la valeur de la concentration molaire C_B de la solution aqueuse de diéthylamine.

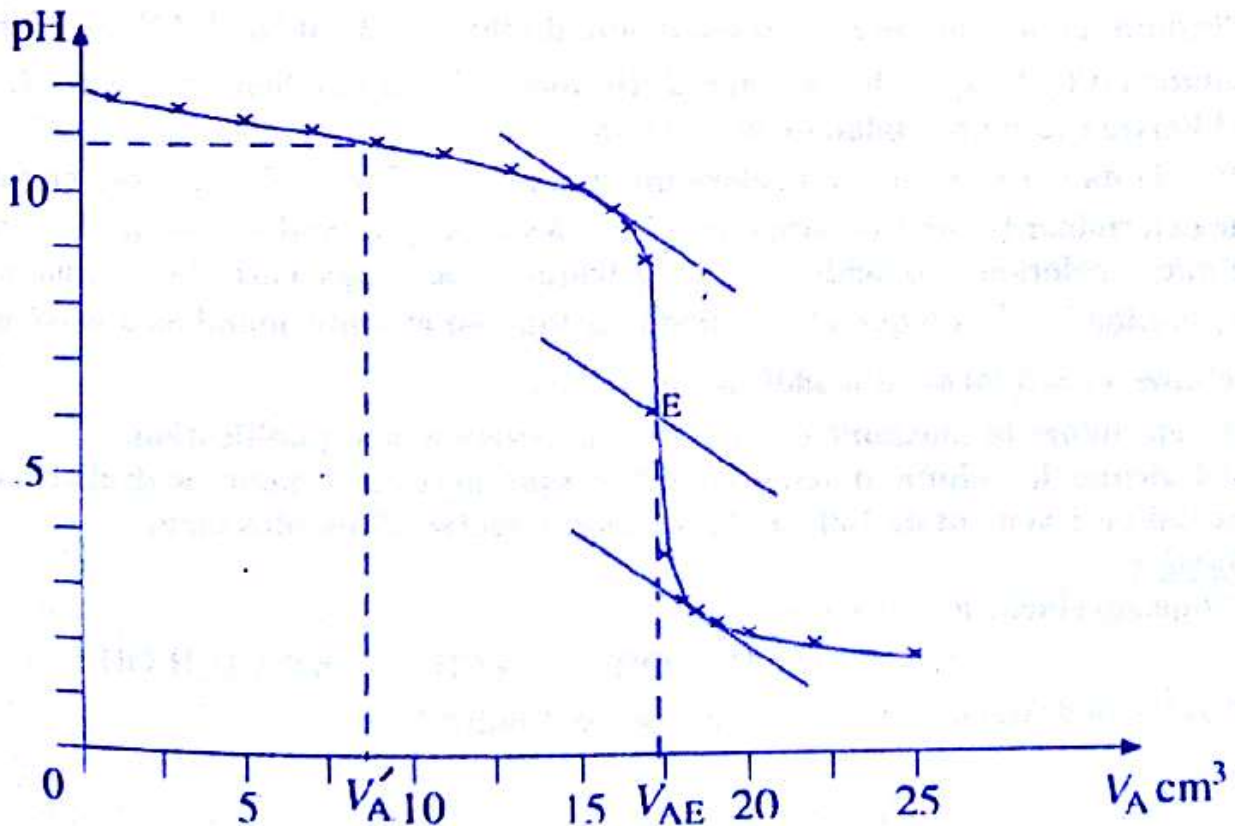
b) le pK_a du couple acide/base correspondant.

Solution

1° L'équation bilan de la réaction entre le chlorure d'hydrogène et la diéthylamine

s'écrit : $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{NH} + \text{H}_3\text{O}^+ \longrightarrow (\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{NH}_2^+ + \text{H}_2\text{O}$

2° Courbe représentant les variations du pH en fonction du volume V_A d'acide versé est la suivante :



3° a) Traçons les deux tangentes parallèles à la courbe puis le segment de droite Δ équidistant des deux tangentes. Le point d'intersection de Δ avec la courbe de variation du pH est le point d'équivalence E. L'abscisse du point d'équivalence est $V_{AE} = 17,2 \text{ cm}^3$.

Relation d'équivalence : $C_A V_{AE} = C_B V_B$

D'où :
$$C_B = \frac{C_A V_{AE}}{V_B}$$

soit :
$$C_B = \frac{10^{-1} \times 17,2}{20} = 8,6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\boxed{C_B = 8,6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$$

b) A la demi-équivalence, on a : $\text{pH} = \text{pKa}$.

Le volume d'acide ajouté à ce point est $V'_A = \frac{V_{AE}}{2} = 8,6 \text{ cm}^3$.

La lecture de la courbe donne l'ordonnée du point de demi-équivalence : $\text{pH} = 11$.

Le pKa du couple $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{NH}_2^+ / (\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{NH}$ est donc égal à 11.

$$\boxed{\text{pKa} = 11}$$

8_ Dosage et cinétique chimique

On réalise la saponification de l'éthanoate d'éthyle en mélangeant à l'instant $t=0$, une solution d'éthanoate d'éthyle à $2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ avec une solution d'hydroxyde de sodium à $2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. La réaction est d'ordre 2.

1° Ecrire l'équation-bilan de la réaction.

2° A la date $t = 20 \text{ mn}$, on prélève un volume $v = 100 \text{ cm}^3$ du mélange en vue de déterminer la concentration molaire c des ions hydroxydes restant, à l'aide d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration molaire $c_A = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. L'équivalence acido-basique est atteinte quand on a versé un volume $v_A = 6,16 \text{ cm}^3$ d'acide chlorhydrique.

a) Déterminer la constante de vitesse de la réaction de saponification.

b) Calculer le volume d'acide chlorhydrique nécessaire pour neutraliser un second prélèvement de 100 cm^3 du mélange effectué 20 mn plus tard.

Solution

1° Equation bilan de la réaction :



2° a) La loi de transformation d'une réaction d'ordre 2 est :

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{c_0} = kt$$

On en déduit :
$$k = \frac{c_0 - c}{t c c_0}$$

Par ailleurs, la relation d'équivalence permet d'écrire :

$$c v = c_A v_A$$

D'où :
$$c = \frac{c_A v_A}{v} = \frac{0,1 \times 6,16}{100} = 6,16 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

En conséquence :
$$k = \frac{2 \cdot 10^{-2} - 6,16 \cdot 10^{-3}}{20 \times 6,16 \cdot 10^{-3} \times 2 \cdot 10^{-2}} = 5,61 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{mn}^{-1}$$

$$k = 5,61 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{mn}^{-1}$$

b) Le second prélèvement a lieu 20mn après le premier prélèvement, soit 40mn après le début de la réaction : $t = 40\text{mn}$. La concentration molaire c des ions OH^- à cette date est déterminée par la formule de transformation :

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{c_0} = kt$$

ou encore :
$$\frac{1}{c} = kt + \frac{1}{c_0}$$

D'où :
$$c = \frac{1}{kt + \frac{1}{c_0}}$$

AN :
$$c = \frac{1}{5,61 \times 40 + \frac{1}{2 \cdot 10^{-2}}} = 3,64 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Relation d'équivalence :

$$c v = c_A v_A$$

On en déduit :
$$v_A = \frac{c v}{c_A}$$

AN :
$$v_A = \frac{3,64 \cdot 10^{-3} \times 100}{0,1} = 3,64 \text{ cm}^3$$

$$v_A = 3,64 \text{ cm}^3$$

Les engrais

1 Définition

Les engrais sont des substances organiques ou minérales destinées à apporter aux plantes des compléments d'éléments nutritifs de façon à améliorer leur croissance, à augmenter le rendement et la qualité des cultures.

L'action consistant à apporter un engrais est la **fertilisation**.

2 Les divers types d'engrais

2.1 Les engrais organiques

Les engrais organiques sont d'origine animale (fumier, compost, corne broyée, sang séché etc.), ou végétale (algues, cendre de bois).

Le compostage est un procédé de fermentation des déchets en présence d'eau et d'oxygène pour former un produit stabilisé, hygiénique et riche en humus.

(Ce sont principalement les bactéries qui se nourrissent des matières organiques en les dégradant et en les transformant.)

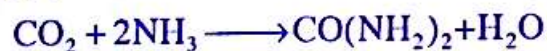
2.2 Les engrais minéraux

Les engrais minéraux sont des substances produites par l'industrie chimique, ou par l'exploitation de gisements naturels de phosphate ou de potassium. On distingue : les **engrais simples** qui ne contiennent qu'un seul élément fertilisant comme l'azote et les **engrais composés**, qui peuvent en contenir deux ou trois. Les **engrais minéraux ternaires** sont appelés NPK par référence à leurs trois composants principaux qui sont l'azote N, le phosphore P ou le potassium K.

3 Fabrications et rôles des engrais

3.1 Fabrication des engrais

Les engrais minéraux azotés sont pour la plupart produits à partir de l'**Ammoniac** (NH_3). L'**Urée**, de formule $\text{CO}(\text{NH}_2)_2$, est obtenue par action du dioxyde de carbone sur l'ammoniac :



Les engrais composés (NPK) sont fabriqués par mélange intime des constituants ou par réaction entre les matières premières de base.

3.2 Rôles des engrais

– L'azote joue un rôle essentiel dans la synthèse de la matière vivante. C'est un des éléments fondamentaux des protéines et l'un des principaux constituants de la chlorophylle.

– Le phosphore participe à la plupart des **activités biochimiques complexes** (respiration, synthèse des glucides et des protéines). Il régularise les **échanges intercellulaires** et accroît la résistance au froid et aux maladies. Facteur de croissance, il favorise le développement des racines et une bonne maturation.



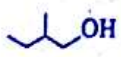


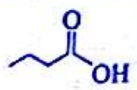
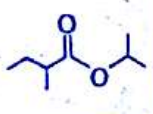
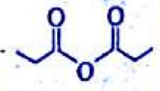
– Le potassium intervient dans l'élaboration des glucides par photosynthèse, et des protides. Il assure une meilleure résistance à la sécheresse et favorise le développement des racines.

4 Avantages et inconvénients des engrais

Les engrais chimiques permettent une **amélioration spectaculaire des rendements agricoles** pour un faible coût. En contrepartie de leurs avantages, les engrais chimiques comportent des risques :

- **La terre s'appauvrit jusqu'à devenir stérile.**
- **L'utilisation d'engrais chimique entraîne des risques de pollution :** les excédents éventuels non utilisés par le sol peuvent, par infiltration contaminer les rivières et les nappes phréatiques.
- **Emission de gaz à effet de serre par les engrais (réchauffement climatique).**

Nomenclature en chimie organique

type de composé	structure du groupe caractéristique	formule et nom générique	exemples, noms, formules semi-développées et topologiques
alcane	$\begin{array}{c} \\ -C- \\ \end{array}$	C_nH_{2n+2} alcane	$CH_3-CH-CH_2-CH_3$ CH_3 2-méthylbutane 
alcène	$\begin{array}{c} \diagup \\ C=C \\ \diagdown \end{array}$	C_nH_{2n} alc-x-ène (éventuellement Z ou E)	$CH_3-C=C-C_2H_5$ H H (Z)-pent-2-ène 
alcool	$\begin{array}{c} \\ -C-OH \\ \end{array}$ primaire RC_1H_2-OH secondaire $RC_1HR'-OH$ tertiaire $RC_1R'R''-OH$	$C_nH_{2n+1}OH$ (R-OH) alcan-x-ol	$C_2H_5-CH-CH_2OH$ CH_3 2-méthylbutan-1-ol 
aldéhyde	$\begin{array}{c} O \\ \\ -C \\ \\ H \end{array}$	$C_nH_{2n}O$ (R-CHO) alcanal	$CH_3-CH-CH_2-C=O$ CH_3 H 3-méthylbutanal 
cétone	$\begin{array}{c} O \\ \\ -C \\ \end{array}$	$C_nH_{2n}O$ (R-CO-R') alcan-x-one	$CH_3-C-CH_2-CH_2-CH_3$ O pentan-2-one 
acide carboxylique	$\begin{array}{c} O \\ \\ -C \\ \\ OH \end{array}$	$C_nH_{2n+1}COOH$ (R-COOH) acide alcanœïque	$CH_3-CH_2-CH_2-C=O$ OH acide butanoïque 
ester	$\begin{array}{c} O \\ \\ -C \\ \\ O-C \end{array}$	R-COOR' alcanoate d'alkyle	$CH_3-CH_2-CH-C=O$ CH_3 O O-CH-CH ₃ CH_3 2-méthylbutanoate de 1-méthyléthyle 
anhydride d'acide	$\begin{array}{c} O \quad O \\ \quad \\ -C \quad O \quad C- \\ \quad \end{array}$	(RCO) ₂ O anhydride alcanœïque	$C_2H_5-C=O$ O O-C=O C ₂ H ₅ anhydride propanœïque 

Unités de volume, de masse et de masse volumique

Volume	Masse	Masse volumique
1 L = 1 dm ³ = 10 ⁻³ m ³	1 tonne = 10 ³ kg	1 kg · m ⁻³ = 1 g · L ⁻¹
1 cm ³ = 1 mL = 10 ⁻³ L = 10 ⁻⁶ m ³	1 kg = 10 ³ g	1 kg · dm ⁻³ = 1 g · cm ⁻³
1 m ³ = 10 ³ dm ³ = 10 ³ L		