1 Cinématique du point

1 Repérage d'un point.

2 Vecteur-vitesse.

3 Vecteur-accélération.

4 Quelques mouvements particuliers.



La mécanique est la science des équilibres et des mouvements.

La cinématique étudie les mouvements indépendamment des causes qui les engendrent ou les modifient.
Ce chapitre s'attache à l'étude de la trajectoire du point et définit les vecteur-vitesse et vecteur-accélération.

La description du mouvement d'un point est relatif au référentiel d'espace choisi.
Par exemple si une bicyclette roule de nuit, en ligne droite, avec une petite lampe fixée sur la valve d'une de ses roues, une photographie prise en pose depuis un point du sol montre que la valve décrit une courbe dite «cycloïde» par rapport à la Terre (fig. 1) mais si la photographie est prise depuis l'axe de la roue, la valve décrit une circonférence autour du moyeu (fig. 2).
Dans le premier cas le référentiel est la Terre, dans le second cas c'est le moyeu de la roue.
Dans l'étude d'un mouvement, il importe de **toujours préciser le référentiel choisi.**

1 REPÉRAGE D'UN POINT

1. Trajectoire

La trajectoire d'un point est l'ensemble des positions successives qu'il occupe au cours de son déplacement (par rapport à un repère d'espace donné).

a) Trajectoires rectilignes

Les trajectoires des voitures sur une route bien droite ou celles des avions dans la figure aérienne au-dessus du stade Roland Garros (fig. 3) sont rectilignes.
Plus généralement, si un point décrit une droite, sa trajectoire est dite rectiligne.



Fig. 1. *La valve décrit une cycloïde par rapport au sol terrestre.*



Fig. 2. *La valve décrit une circonférence par rapport à l'axe de la roue.*



Fig. 4. *Le ciel austral a été photographié. La pose a duré plusieurs heures.*

b) Trajectoires curvilignes

La cycloïde décrite par la valve, les trajectoires circulaires décrites par les étoiles photographiées par un appareil dans l'hémisphère Sud (fig. 4) ou les trajectoires des particules chargées soumises à un champ magnétique dans la chambre à bulles (fig. 5) sont curvilignes.
Plus généralement, quand la trajectoire d'un point n'est pas rectiligne elle est dite curviligne.
Les seules trajectoires curvilignes étudiées cette année seront **planes**, c'est-à-dire inscrites dans un plan.

2. Vecteur-position

Pour pouvoir situer le point par rapport à un référentiel d'espace choisi, ce dernier doit être muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Fig. 3. *Hommage à l'aviateur Roland Garros.*

La position M (fig. 6) du point à la date t est alors définie par ses coordonnées x, y, z et son vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ est :

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

Si le point est mobile dans ce repère, l'une au moins de ses coordonnées varie au cours du temps. Leurs variations sont définies par les lois horaires : $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

[illegible]

La position d'un point sur sa trajectoire est définie si celle-ci est orientée et munie d'une origine Ω (fig. 7).
L'abscisse curviligne du point en M est définie par :

$$s = \overset{\frown}{\Omega M}.$$

Si le point est en mouvement, l'abscisse curviligne varie au cours du temps.

2 VECTEUR-VITESSE

1. Définition

Dans un référentiel d'espace muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un mobile ponctuel est considéré, à deux instants différents de date t et t', où il occupe les positions M et M' (fig. 8).

Le quotient $\dfrac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t}$ est le *vecteur-vitesse moyen* du point mobile pendant la durée $t'-t$:

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t} = \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{t'-t}.$$

C'est une grandeur vectorielle.
Par définition le **vecteur-vitesse** $\vec{v}$ du point en M **à la date** t (dit vecteur-vitesse instantanée) est la *limite* de ce quotient lorsque t' tend vers t :

$$\vec{v} = \lim_{t' \to t} \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t}.$$

$\vec{v}$ est la dérivée par rapport au temps du vecteur-position $\overrightarrow{OM}$:

$$\vec{v} = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}$$

2. Caractéristiques

Le vecteur-vitesse $\vec{v}$ est caractérisé par :
— sa *direction* : celle de la tangente en M à la trajectoire (fig. 9);
— [illegible] ;
— sa *valeur* v : celle de la vitesse instantanée à la date t.
Son unité SI est le mètre par seconde ($m.s^{-1}$).
Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs de vitesses.

Mobile	Vitesse ($m.s^{-1}$)
Coureur à pied	10
Skieur	60
Concorde	700
Satellite géostationnaire	8×10^3
Centre de la Terre autour du Soleil	3×10^4
Électron dans un accélérateur	2.9×10^8
Photon	3×10^8

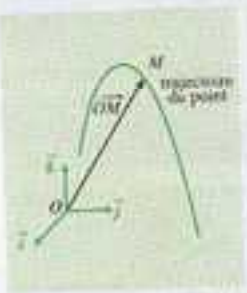


Fig. 6. *Le vecteur-position du point en M est* $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$.



Fig. 7. *L'abscisse curviligne du point en M est* $s = \overset{\frown}{\Omega M}$



Fig. 5. *Trajectoires curvilignes de particules chargées soumises à un champ magnétique dans la chambre à bulles.*

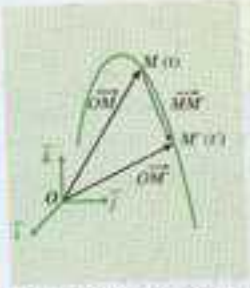


Fig. 8. *Entre les points M et M' le vecteur-position du point mobile a varié de :*
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$.

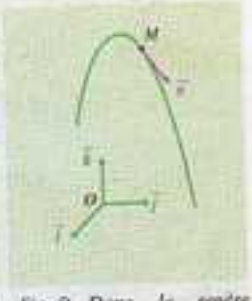


Fig. 9. *Dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *le vecteur-vitesse du point en M est* $\vec{v}$.

3. Coordonnées du vecteur-vitesse

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le vecteur-vitesse $\vec{v}$ a pour coordonnés v_x, v_y, v_z telles que :

$$\vec{v} = v_x . \vec{i} + v_y . \vec{j} + v_z . \vec{k}$$

la valeur de la vitesse est alors :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

D'après la définition,les coordonnées du vecteur-vitesse $\vec{v}$ sont les dérivées par rapport au temps des coordonnées du vecteur-position $\overrightarrow{OM}$, soit :

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Pour alléger l'écriture, les dérivées par rapport au temps sont souvent notées:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

d'où : $\vec{v} = \dot{x} . \vec{i} + \dot{y} . \vec{j} + \dot{z} . \vec{k}.$

4. Autre expression de la vitesse

Lorsque la position du point est repérée sur sa trajectoire orientée par son abscisse curviligne $s(t)$, la mesure algébrique de la vitesse du point, à la date t, est définie par la limite, lorsque t' tend vers t, du quotient $\dfrac{\overline{\Omega M'} - \overline{\Omega M}}{t' - t}$ soit :

$$v_s = \lim_{t' \to t} \frac{\overline{\Omega M'} - \overline{\Omega M}}{t' - t}.$$

Elle est donc la dérivée par rapport au temps de l'abscisse curviligne du point en M :

$$v_s = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Le vecteur-vitesse du point en M est alors donné par l'expression :

$$\vec{v} = v_s . \vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$ est le vecteur-unitaire de la tangente en M à la trajectoire orientée dans le sens positif de celle-ci (fig. 10).

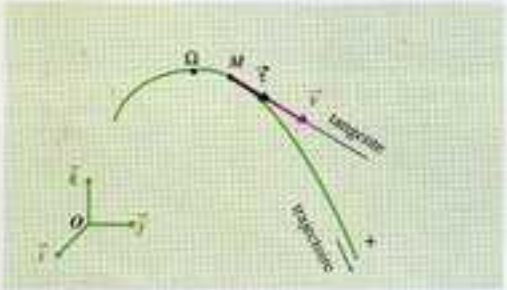


Fig. 10. *Dans le repère $(M, \vec{\tau})$, le vecteur-vitesse est $\vec{v} = v_s . \vec{\tau}$; la valeur algébrique de la vitesse est v_s, ici > 0.*

3 VECTEUR-ACCÉLÉRATION

1. Définition

Si le vecteur-vitesse du point *varie* (en valeur et/ou en direction) au cours du temps, ce point subit une *accélération*.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la date t, le vecteur-vitesse du point est $\vec{v}$, et à la date t' il est $\vec{v}'$ (fig. 11).

Le vecteur-accélération *moyen* du point, pendant la durée $t' - t$ est défini par :

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t' - t}$$

et le **vecteur-accélération** $\vec{a}$, du point en M **à la date** t, est la *limite* de ce quotient lorsque t' tend vers t :

$$\vec{a} = \lim_{t' \to t} \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t' - t}.$$

Le vecteur-accélération $\vec{a}$ est donc la dérivée par rapport au temps du vecteur-vitesse $\vec{v}$ soit :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

C'est aussi la dérivée seconde du vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ puisque $\vec{v} = \dfrac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}$ ce qui s'écrit :

$$\vec{a} = \frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{dt^2}.$$

2. Coordonnées du vecteur-accélération

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les coordonnées du vecteur-accélération $\vec{a}$ sont a_x, a_y, a_z telles que :

$$\vec{a} = a_x . \vec{i} + a_y . \vec{j} + a_z . \vec{k}.$$

D'après la définition, les coordonnées de $\vec{a}$ sont les dérivées premières par rapport au temps des coordonnées du vecteur-vitesse $\vec{v}$, ce sont aussi

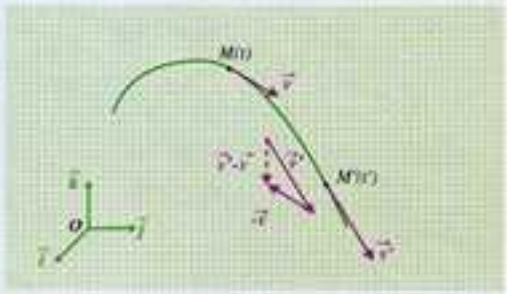


Fig. 11. *La variation du vecteur-vitesse pendant la durée $t' - t$ est $\vec{v}' - \vec{v}$.*

Deuxième cas : la trajectoire est rectiligne.
Le rayon de courbure d'une droite est infini. Par suite l'accélération normale est nulle :

$$a_n = \frac{v_t^2}{R} = 0 \quad (R = \infty).$$

L'accélération $\vec{a}$ n'a plus qu'une composante tangentielle :

$$\vec{a} = a_t . \vec{\tau}.$$

Les vecteurs-vitesse et accélération ont donc même direction mais *pas obligatoirement même sens* (fig. 14).

b) Valeur

C'est celle de l'accélération instantanée à la date t.
Son unité SI est le mètre par seconde carré ($m.s^{-2}$).
Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs d'accélérations.

Mobile	Accélération ($m.s^{-2}$)
Fusée au décollage	6
Corps en chute libre sur Terre	10
Voiture en arrêt brutal sur un obstacle	500
Électron dans un poste de télévision	10^{14}



Fig. 14 a. *Lors du démarrage les vecteurs-vitesse et accélération du point G ont même direction et même sens.*



Fig. 14 b. *Lors du freinage ils sont de sens contraires.*



Fig. 15. *La voiture est en mouvement rectiligne uniforme. L'accélération est nulle.*

4 QUELQUES MOUVEMENTS PARTICULIERS

On appelle **conditions initiales** ce que valent la date t et les grandeurs cinématiques $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$, à l'instant où l'on commence l'observation. Ces conditions initiales sont notées : t_0, $\overrightarrow{OM_0}$, $\vec{v}_0$ et $\vec{a}_0$. En général on choisit $t_0 = 0$.

1. Mouvement rectiligne uniforme

Un point est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme s'il décrit une trajectoire rectiligne toujours dans le même sens, et à vitesse constante.

En conséquence, le **vecteur-vitesse $\vec{v}$ est constant**, $\vec{v} = \vec{v}_0$.

Soit le repère $(O, \vec{\imath})$ selon la trajectoire rectiligne du point.
A la date t, si le point occupe la position M, d'abscisse x, son vecteur-position est :

$$\overrightarrow{OM} = x . \vec{\imath}$$

et son vecteur-vitesse $\vec{v}$ est :

$$\vec{v} = v_x . \vec{\imath} = v_{0x} . \vec{\imath}.$$

Comme le vecteur-vitesse $\vec{v}$ est constant, le vecteur-accélération $\vec{a}$ est nul $\left(\text{puisque } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}\right)$.

La primitive de $\frac{dx}{dt} = v_{0x}$ est : $x = v_{0x} . t + C^{te}$.

La constante est déterminée par les conditions initiales : si à $t = 0$, $x = x_0$ alors :

$$x = v_{0x} . t + x_0$$

C'est la loi horaire du mouvement rectiligne uniforme (fig. 15).
Le graphe $x = f(t)$ est une droite.

Remarque :
Il faut bien noter que x, x_0 et v_{0x} sont des **grandeurs algébriques.**
Par exemple, si dans le repère $(O, \vec{\imath})$ choisi sur la trajectoire rectiligne du point, la loi horaire est $x = -3t + 5$, l'abscisse initiale (à $t = 0$) est donc $x_0 = 5$ et la vitesse a pour valeur $v_0 = 3$, mais pour valeur algébrique $v_{0x} = -3$ (fig. 16) (toutes ces grandeurs étant exprimées en unités du SI).

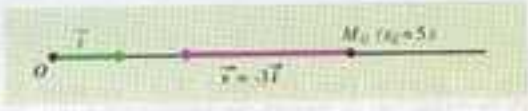


Fig. 16

Deuxième cas : la trajectoire est rectiligne.
Le rayon de courbure d'une droite est infini. Par suite l'accélération normale est nulle :

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 0 \quad (R = \infty).$$

L'accélération $\vec{a}$ n'a plus qu'une composante tangentielle :

$$\vec{a} = a_t . \vec{\tau}.$$

Les vecteurs-vitesse et accélération ont donc même direction mais *pas obligatoirement même sens* (fig. 14).

b) Valeur

C'est celle de l'accélération instantanée à la date t.
Son unité SI est le mètre par seconde carré ($m.s^{-2}$).
Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs d'accélérations.

Mobile	Accélération ($m.s^{-2}$)
Fusée au décollage	6
Corps en chute libre sur Terre	10
Voiture en arrêt brutal sur un obstacle	500
Électron dans un poste de télévision	10^{16}



Fig. 14 a. *Lors du démarrage les vecteurs-vitesse et accélération du point G ont même direction et même sens.*



Fig. 14 b. *Lors du freinage ils sont de sens contraires.*



Fig. 15. *La voiture est en mouvement rectiligne uniforme. L'accélération est nulle.*

4 QUELQUES MOUVEMENTS PARTICULIERS

On appelle **conditions initiales** ce que valent la date t et les grandeurs cinématiques $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$, à l'instant où l'on commence l'observation. Ces conditions initiales sont notées : t_0, $\overrightarrow{OM}_0$, $\vec{v}_0$ et $\vec{a}_0$. En général on choisit $t_0 = 0$.

1. Mouvement rectiligne uniforme

Un point est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme s'il décrit une trajectoire rectiligne toujours dans le même sens et à vitesse constante.

En conséquence, le **vecteur-vitesse $\vec{v}$ est constant**, $\vec{v} = \vec{v}_0$.

Soit le repère $(O, \vec{\imath})$ selon la trajectoire rectiligne du point.
A la date t, si le point occupe la position M, d'abscisse x, son vecteur-position est :

$$\overrightarrow{OM} = x . \vec{\imath}$$

et son vecteur-vitesse $\vec{v}$ est :

$$\vec{v} = v_x . \vec{\imath} = v_{0x} . \vec{\imath}$$

Comme le vecteur-vitesse $\vec{v}$ est constant, le vecteur-accélération $\vec{a}$ est nul $\left(\text{puisque } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}\right)$.

La primitive de $\frac{dx}{dt} = v_{0x}$ est : $x = v_{0x} . t + C^{te}$.

La constante est déterminée par les conditions initiales : si à $t = 0$, $x = x_0$ alors :

$$x = v_{0x} . t + x_0$$

C'est la loi horaire du mouvement rectiligne uniforme (fig. 15).
Le graphe $x = f(t)$ est une droite.

Remarque :
Il faut bien noter que x, x_0 et v_{0x} sont des **grandeurs algébriques.**
Par exemple, si dans le repère $(O, \vec{\imath})$ choisi sur la trajectoire rectiligne du point, la loi horaire est $x = -3t + 5$, l'abscisse initiale (à $t = 0$) est donc $x_0 = 5$ et la vitesse a pour valeur $v_0 = 3$, mais pour valeur algébrique $v_{0x} = -3$ (fig. 16) (toutes ces grandeurs étant exprimées en unités du SI).

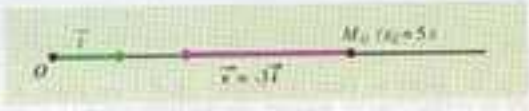


Fig. 16

2. Mouvement rectiligne uniformément varié

Un point est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié si sa trajectoire est rectiligne et si son vecteur-accélération est constant.

En conséquence, **le vecteur-accélération $\vec{a}$ est constant, $\vec{a} = \vec{a}_0$.**

a) Loi horaire

Soit le repère $(O, \vec{i})$ choisi sur la trajectoire rectiligne du point.

La primitive de $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_0$ est $\vec{v} = \vec{a}_0 . t + \vec{C}$.

La constante $\vec{C}$ est déterminée par les conditions initiales : si à $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$ alors :

$$v_x = a_{0x} . t + v_{0x} \quad \text{selon } (O, \vec{i})$$

et la primitive de $\frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} = \vec{v}$ est :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \vec{a}_0 . t^2 + \vec{v}_0 . t + \vec{C}'.$$

Cette seconde constante $\vec{C}'$ est elle aussi déterminée par les conditions initiales : si à $t = 0$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_0$ alors :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \vec{a}_0 . t^2 + \vec{v}_0 . t + \overrightarrow{OM}_0.$$

D'où la loi horaire selon $(O, \vec{i})$:

$$x = \frac{1}{2} a_{0x} . t^2 + v_{0x} . t + x_0$$

La courbe $x = f(t)$ est une parabole.

Dans le cas particulier où les conditions initiales sont : $t = 0$, $x_0 = 0$ et $v_{0x} = 0$, les expressions précédentes sont plus simples :

$$v_x = a_{0x} . t,$$

et

$$x = \frac{1}{2} a_{0x} . t^2.$$

b) Mouvement retardé et mouvement accéléré

— Un mouvement est **accéléré** si le produit $\vec{a} . \vec{v}$ est positif, soit $a_x . v_x > 0$ selon $(O, \vec{i})$. a_x et v_x ont donc même signe.
C'est l'exemple de la bille en chute libre (fig. 17).

— Un mouvement est **retardé** si le produit $\vec{a} . \vec{v}$ est négatif, soit $a_x . v_x < 0$ selon $(O, \vec{i})$. a_x et v_x sont donc de signes contraires.
C'est l'exemple d'une bille lancée verticalement vers le ciel.

3. Mouvement circulaire uniforme

Un point est animé d'un mouvement circulaire uniforme si sa trajectoire est un cercle et si sa vitesse a une valeur constante

$$v_x = v_{0x}.$$

a) Étude de l'abscisse curviligne

La trajectoire du point est un cercle (rayon R, centre O).
Le point occupe la position M à la date t (fig. 18).
Sur cette trajectoire on choisit une origine Ω et un sens positif de parcours.
L'abscisse curviligne du point en M est alors :

$$s = \overline{\Omega M}$$

et sa vitesse est : $v_x = \frac{ds}{dt}$ encore notée $\dot{s}$. Elle est constante : $v_x = v_{0x}$.

• *Loi horaire :*

La primitive de $\frac{ds}{dt} = v_{0x}$ est :

$$s = v_{0x} . t + s_0$$

(si $s = s_0$ à $t = 0$).
C'est la loi horaire du mouvement uniforme sur la circonférence.
Et si on choisit comme conditions initiales M au point origine Ω ($s_0 = 0$ à $t = 0$) l'expression précédente se simplifie : $s = v_{0x} t$.

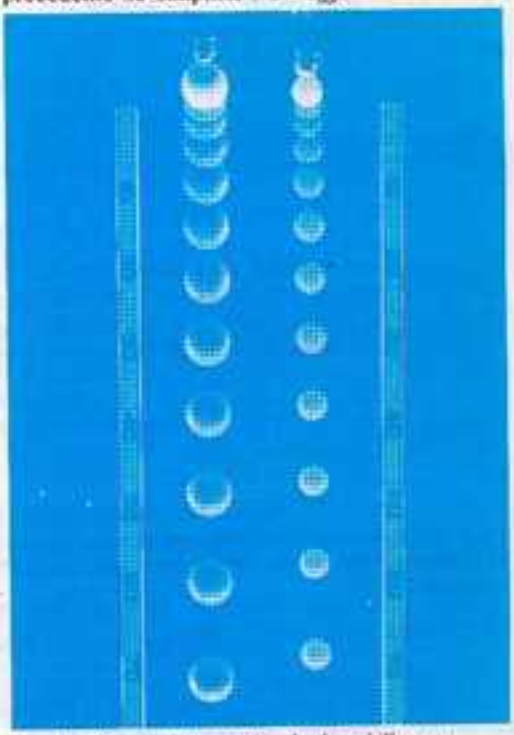


Fig. 17. *Chronophotographie de deux billes en chute libre verticale.*

• *Accélération :*
Dans la base de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{n})$ liée au point en M, l'accélération s'écrit :

$$\vec{a} = a_\tau . \vec{\tau} + a_n . \vec{n}.$$

Or la valeur de la vitesse du point étant constante, sa dérivée par rapport au temps est nulle : $a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = 0$, et l'expression de l'accélération $\vec{a}$ se réduit en :

$$\vec{a} = a_n . \vec{n}$$

avec : $$a_n = \frac{v_\tau^2}{R}$$

L'accélération $\vec{a}$ n'a plus qu'une composante normale.
Le vecteur-accélération du point est toujours dirigé vers le centre du cercle : il **est** dit **centripète.**
La valeur de l'accélération est constante et non nulle, puisque la vitesse a une valeur constante.

b) Étude des variables angulaires

• *Abscisse angulaire α du point :*
C'est l'angle $\alpha = (\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{OM})$.
Son unité SI est le radian (rad).
Sa relation avec l'abscisse curviligne $s = \widehat{\Omega M}$ est :

$$\alpha = \frac{\widehat{\Omega M}}{R} = \frac{s}{R}$$

soit : $$\boxed{s = R . \alpha}$$

• *Vitesse angulaire ω :*
C'est la dérivée par rapport au temps de α soit :

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} \text{ encore noté } \dot{\alpha}.$$

Son unité SI est le radian par seconde (rad.s^{-1}).
Sa relation avec la vitesse du point est obtenue en dérivant $\alpha = \frac{s}{R}$ d'où :

$$\omega = \frac{\dot{s}}{R} = \frac{v_\tau}{R}$$

soit : $$\boxed{v_\tau = R . \omega}$$

Pour un **mouvement circulaire uniforme** la vitesse angulaire ω, comme la vitesse curviligne v_τ, est **constante.**
La primitive de $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ s'écrit :

$$\alpha = \omega . t + \alpha_0$$

α_0 étant l'abscisse angulaire initiale ($t = 0$, $\alpha = \alpha_0$), c'est la *loi horaire du mouvement circulaire uniforme.*

Si les conditions initiales sont $t = 0$, $\alpha_0 = 0$ (le point est en Ω à $t = 0$), l'expression précédente devient : $\alpha = \omega . t$.

• *Accélération angulaire $\vec{\alpha}$:*
C'est la dérivée par rapport au temps de la vitesse angulaire ω soit :

$$\vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt}$$

Son unité SI est le radian par seconde carré (rad.s^{-2}).
Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, ω est constant, sa dérivée $\frac{d\omega}{dt}$ est donc nulle. **L'accélération angulaire** comme **l'accélération tangentielle est nulle.**
Mais le point possède une accélération normale :

$$a_n = \frac{v_\tau^2}{R}.$$

Compte tenu de $v_\tau = R . \omega$, cette expression s'écrit aussi :

$$\boxed{a_n = \omega^2 . R}$$

• *Période et fréquence :*
— La période T est la durée nécessaire pour effectuer un tour, soit un angle α de 2π :

$$\alpha = 2\pi = \omega . T$$

donc : $$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

La période s'exprime en seconde (s).
— La fréquence N est l'inverse de la période. C'est le nombre de périodes par seconde :

$$N = \frac{1}{T}.$$

Elle s'exprime en hertz (Hz).

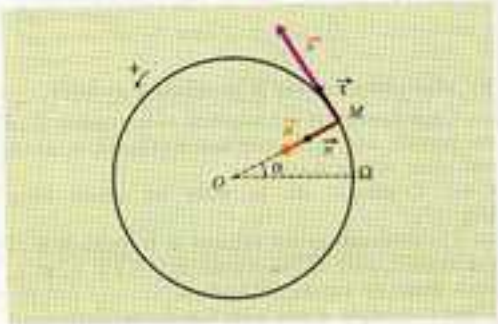


Fig. 18

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

• Pour étudier le mouvement d'un point il est nécessaire de :
— préciser le référentiel et le repère qui lui est lié;
— repérer la position M du point par son **vecteur-position** :

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

ou par son abscisse curviligne $s = \widehat{\Omega M}$, sur sa trajectoire curviligne d'origine Ω.

• Définir :
— le **vecteur-vitesse** :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{OM})}{\mathrm{d}t}$$

— le **vecteur-accélération** :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.$$

• Se souvenir de l'expression de $\vec{a}$ dans la **base de Frenet** $(\vec{\tau}, \vec{n})$ en M :

$$\vec{a} = a_\tau.\vec{\tau} + a_n.\vec{n}$$

a_τ est l'accélération tangentielle : $a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

a_n est l'accélération normale : $a_n = \dfrac{v^2}{R}$.

• Reconnaître un mouvement :
— **rectiligne et uniforme** : $\vec{v} = \vec{v}_0$, vecteur constant; donc $\vec{a} = \vec{0}$;
— **rectiligne et uniformément varié** : $\vec{a} = \vec{a}_0$, vecteur constant;
{uniformément **accéléré** si $\vec{a}.\vec{v} > 0$;
{uniformément **retardé** si $\vec{a}.\vec{v} < 0$;
— **circulaire uniforme** : la trajectoire est un cercle, la vitesse a une valeur constante.

• Mémoriser les relations du mouvement circulaire :

$$s = R.\alpha \qquad v = R.\omega.$$

• Connaître pour un mouvement circulaire et uniforme :

$$a_\tau = 0 \qquad a_n = \omega^2.R.$$

• Connaître la période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ et la fréquence $N = \dfrac{1}{T}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ sont obtenues par intégration de $\vec{v}$:

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = v_{0x}.t = 2t \\ z = -\dfrac{1}{2}a.t^2 = -5t^2 \end{cases}$$

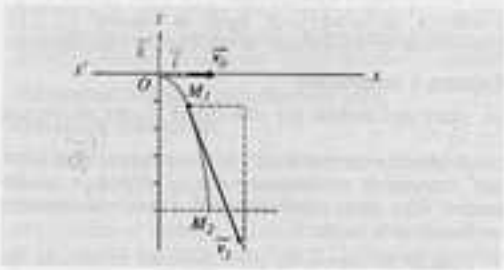
Ce sont les lois horaires du mouvement; en éliminant le paramètre t il vient :

$t = \dfrac{x}{2}$ et $z = -\dfrac{5}{4}x^2$.

L'équation cartésienne du mouvement est :

$$z = -1{,}25x^2.$$

La trajectoire du point est donc une parabole de sommet O.



3) Vecteur-vitesse $\vec{v}_1$

A la date $t_1 = 0{,}5$ s les coordonnées de $\vec{v}_1$ sont :

$$\vec{v}_1 \begin{cases} v_{1x} = v_{0x} = 2 \\ v_{1z} = -10 \times 0{,}5 = -5 \end{cases}$$

et sa valeur de : $v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1z}^2} = \sqrt{4+25}$

$v_1 = 5{,}4 \text{ m.s}^{-1}$

les coordonnées du point M_1 sont :

$$x_1 = 2 \times 0{,}5 = 1 \text{ m}$$

$$z_1 = -5 \times (0{,}5)^2 = -1{,}25 \text{ m}.$$

4) Date t_2 :

A la date t_2, $z = -5$.

De $z_2 = -5 = -5t_2^2$ il vient $t_2 = 1$ s.

EXERCICE 3 : mouvement circulaire uniforme

Une bille, supposée ponctuelle, fixée à un fil de longueur $R = 1{,}5$ m décrit un cercle de centre O à vitesse constante

$$v = \sqrt{2} \text{ m.s}^{-1}.$$

1) Déterminer les caractéristiques de son vecteur-vitesse $\vec{v}$ à un instant t quelconque.

2) Déterminer les caractéristiques de son vecteur-accélération $\vec{a}$, au même instant.

3) Calculer la valeur de sa vitesse angulaire ω.

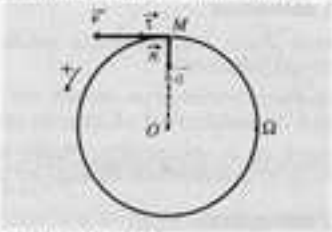
4) Donner les lois horaires $s(t)$ et $\alpha(t)$ du mouvement de la bille.

5) Calculer la période de son mouvement.

SOLUTION

1) Vecteur-vitesse

La bille, ponctuelle, décrit le cercle dans le sens positif.



A la date t elle est en M.

Son vecteur-vitesse $\vec{v}$ a les caractéristiques suivantes :

- **direction :** la tangente en M au cercle;
- **sens :** celui du déplacement;
- **valeur :** $v = \sqrt{2}$ m.s^{-1}, constante.

Dans la base $(\vec{n}, \vec{\tau})$ en M, le vecteur-vitesse est

$$\vec{v} = \sqrt{2}\vec{\tau}.$$

2) Vecteur-accélération

Par définition $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ donc $\vec{a} = \dfrac{d(v.\vec{\tau})}{dt}$

v est constant, mais $\vec{\tau}$ varie au cours du temps (en direction), donc $\vec{a}$ n'est pas nul. Dans la base de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{n})$ au point M :

$$\vec{a} = a_\tau.\vec{\tau} + a_n.\vec{n}$$

or $a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = 0$ et, $a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{(\sqrt{2})^2}{1{,}5} = 1{,}3 \text{ m.s}^{-2}$

donc $\vec{a} = a_n.\vec{n} = 1{,}3\vec{n}$.

Le vecteur accélération est centripète et sa valeur 1,3 m.s^{-2} est constante.

3) Vitesse angulaire :

La relation entre l'abscisse curviligne s et l'abscisse angulaire α du point en M est $s = R.\alpha$.

En dérivant par rapport au temps il vient

$$\frac{ds}{dt} = R.\frac{d\alpha}{dt} \quad \text{ou} \quad v = R.\omega.$$

La vitesse angulaire du point est alors :

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\sqrt{2}}{1{,}5} \qquad \omega = 0{,}95 \text{ rad.s}^{-1}.$$

4) Lois horaires

Les vitesses v et ω sont constantes. Le mouvement est donc uniforme. Avec les conditions initiales :

$s_0 = 0$ et $\alpha_0 = 0$ à $t = 0$,

il vient : $s = v.t = \sqrt{2}t$ et $\alpha = \omega.t = 0{,}95t$.

5) La période :

La période T est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0{,}95} = 6{,}7 \text{ s}.$$

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1 : mouvement rectiligne uniformément varié

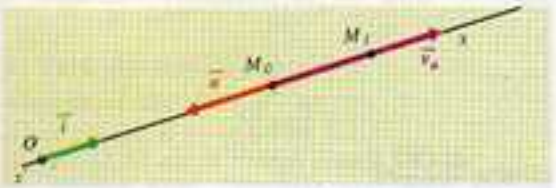
Une bille, assimilée à un point, est lancée dans une gouttière inclinée et la remonte.
Dans le repère $(O, \vec{i})$, (ascendant) choisi selon sa trajectoire, à la date $t = 0$, le point occupe la position M_0 ($x_0 = 5$ m) et a une vitesse $\vec{v}_0 = 3\vec{i}$.
Il est soumis à l'accélération $\vec{a} = -2\vec{i}$.

1) A quelle date t_1 et en quel point M_1 la bille s'arrête-t-elle?

2) A quelle date t_2 repasse-t-elle en M_0? Quel est alors son vecteur-vitesse?

3) A quelle date t_3 passe-t-elle à l'origine?

4) Préciser les phases de son mouvement pour $t \geq 0$.



SOLUTION

1) Date t_1 et position du point M_1

Le point a une trajectoire rectiligne et un vecteur-accélération constant.
Son mouvement est donc rectiligne uniformément varié. Dans le repère $(O, \vec{i})$, à la date t, sa vitesse est $\vec{v} = \vec{a}\,.t + \vec{v}_0$ (primitive de $\vec{a}$) et son vecteur-position est

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}\,.t^2 + \vec{v}_0.t + \overrightarrow{OM_0}$$

(primitive de $\vec{v}$). Tous ces vecteurs sont colinéaires. Les coordonnées de ces vecteurs sont :

$$a_x = -2, \quad v_x = -2t + 3 \quad (v_{0x} = 3)$$

et $$x = -\frac{1}{2} \times 2t^2 + 3t + 5 \quad (x_0 = 5)$$

$$x = -t^2 + 3t + 5.$$

Au point M_1 la vitesse du point est nulle :

$0 = -2t_1 + 3$ d'où **$t_1 = 1{,}5$ s.**

L'abscisse du point M_1 est alors

$x_1 = -(1{,}5)^2 + (3 \times 1{,}5) + 5$ **$x_1 = 7{,}25$ m.**

2) Date t_2 et vecteur-vitesse $\vec{v}_2$

A son retour au point M_0 ($x_0 = 5$), on a

$5 = -t^2 + 3t + 5$ soit : $t^2 - 3t = 0$

les deux solutions de cette équation sont $t = 0$ (origine des temps au départ en M_0) et

$t_2 = 3$ s.

La vitesse du point en M_0 est

$$v_2 = -(2 \times 3) + 3 = -3$$

donc $\vec{v}_2 = -3\vec{i}$ **$\vec{v}_2 = -\vec{v}_0$.**

3) Date t_3

A son passage à l'origine, $x = 0$ on a :

$$t^2 - 3t - 5 = 0$$

la seule solution à retenir est positive :

$$t_3 = \frac{3 + \sqrt{9 + 4 \times 5}}{2} \qquad \textbf{$t_3 = 4{,}2$ s.}$$

4) Les phases de son mouvement

- Pour **$0 \leq t \leq 1{,}5$ s,** alors $v_x > 0$ et $a_x < 0$, le mouvement est uniformément retardé. La bille remonte la gouttière en ralentissant.
- Pour **$t = 1{,}5$ s,** la bille est arrêtée (en M_1). Elle est au point culminant sur la gouttière.
- Pour **$t > 1{,}5$ s,** alors $v_x < 0$ et $a_x < 0$, le mouvement est uniformément accéléré. La bille redescend la gouttière, en accélérant.

EXERCICE 2 : mouvement parabolique

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{k})$, ($\vec{k}$ vertical ascendant) un projectile ponctuel est lancé dans l'espace du point O à la date $t = 0$ avec la vitesse $\vec{v}_0 = 2\vec{i}$: il subit l'accélération constante $\vec{a} = -10\vec{k}$.

1) Montrer que la trajectoire est plane. Déterminer ce plan.

2) Écrire les lois horaires $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement du projectile, puis l'équation cartésienne $z = f(x)$ de sa trajectoire.

3) Déterminer le vecteur-vitesse et la valeur de la vitesse du projectile à la date $t_1 = 0{,}5$ s ainsi que les coordonnées de sa position M_1.

4) A quelle date t_2 le projectile rencontre-t-il le plan $z = -5$ m?

SOLUTION

1) Trajectoire plane

Les conditions initiales sont : à $t = 0$, le projectile ponctuel est à l'origine ($x_0 = 0$ et $z_0 = 0$) et sa vitesse est $\vec{v}_0 = 2\vec{i}$.
La primitive de $\vec{a}$ donne : $\vec{v} = \vec{a}\,.t + \vec{v}_0$ ($\vec{a}$ est constant).

La primitive de $\vec{v}$ donne : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}\,.t^2 + \vec{v}_0.t + \vec{c}$

($\vec{c} = 0$ d'après les conditions initiales).
$\overrightarrow{OM}$ est donc dans le plan de $\vec{a}$, $\vec{v}_0$: la courbe est plane.

2) Lois horaires et équation cartésienne

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$, les projections du vecteur-accélération sont :

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -a = -10 \end{cases}$$

celles de $\vec{v}$, par intégration sont :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = v_{0x} = 2 \\ v_z = -a\,.t = -10t \end{cases}$$

(en tenant compte des conditions initiales à $t = 0$).

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATION

Sans calcul

Exercice 1

1) La vitesse d'une automobile qui recule, est-elle nécessairement négative?

2) Lorsque l'accélération d'un mobile est négative, celui-ci est-il nécessairement en train de ralentir?

3) Si le carré de la vitesse d'un mobile augmente, celui-ci va-t-il nécessairement de plus en plus vite?

Exercice 2

Chercher dans les représentations graphiques suivantes :

1) Celles qui correspondent à un mouvement uniforme.

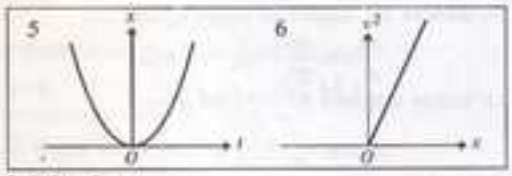
2) Celles qui correspondent à un mouvement uniformément accéléré.

3) Celles qui correspondent à un mouvement uniformément retardé.

x, v, t désignent respectivement l'abscisse, la valeur de la vitesse et la date.







Lois horaires

*** Exercice 3**

Vous courez le 100 m en 10 s.
Écrire la loi horaire de votre mouvement supposé uniforme avec les conventions suivantes :

1) Origine : point de départ. Trajectoire orientée dans le sens du mouvement. Date $t = 0$: date de départ.

2) Origine : point de départ. Trajectoire orientée en sens inverse du mouvement. Date $t = 0$: date de départ.

3) Origine : point d'arrivée. Trajectoire orientée dans le sens du mouvement. Date $t = 0$: date de départ.

4) Origine : point d'arrivée. Trajectoire orientée en sens inverse du mouvement. Date $t = 0$: date d'arrivée.

Exercice 4

1) Les coordonnées cartésiennes d'un mobile ponctuel sont : $x = 4t$ et $y = 4t$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer la trajectoire, la vitesse et l'accélération du mobile.

2) Mêmes questions pour $x = 4t^2$; $y = 4t^2$.

*** Exercice 5**

Les coordonnées cartésiennes d'un point mobile sont : $x = 4t - 4$ et $y = 2t^2 - 2$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer la trajectoire, la vitesse et l'accélération.

*** Exercice 6**

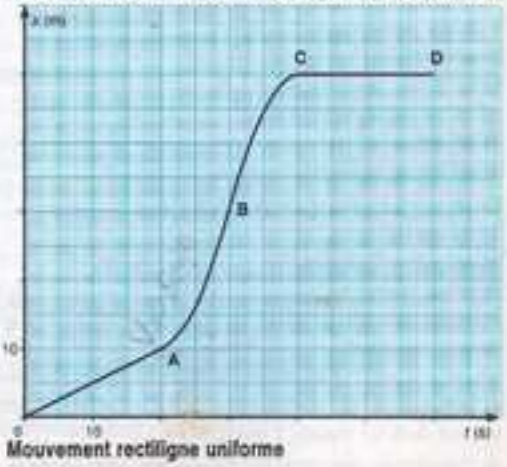
Un point est mobile sur une droite munie du repère $(O, \vec{i})$.
Le diagramme temporel $x(t)$ des abscisses de ce point est représenté ci-dessous. On y distingue quatre parties dont deux correspondent à des mouvements uniformément variés :

1) Évaluer la vitesse du point pendant la période où il est en mouvement uniforme.

2) Évaluer (ordre de grandeur) la vitesse maximale du point, puis la vitesse minimale (justifier les calculs).

3) Tracer le diagramme temporel $v(t)$ des vitesses du point de 0 à 60 ms.

4) Quelles sont les quatre phases du mouvement?



Mouvement rectiligne uniforme

Exercice 7

Le spot d'un oscilloscope électronique décrit sur l'écran une portion de droite horizontale de longueur 5 cm, depuis le point O à gauche de l'écran.
Le diagramme horaire de son mouvement est donné ci-dessous :

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATION

Sans calculs

Exercice 1

Un pendule élastique est écarté de sa position d'équilibre. Son élongation initiale est X_m. Il est lâché sans vitesse initiale. Parmi les grandeurs suivantes : {pulsation, vitesse au passage par la position d'équilibre, énergie mécanique}, quelles sont celles qui ne dépendent pas de X_m ?

Exercice 2

Un pendule élastique (masse m, raideur k) a pour période T_0, fréquence N_0, pulsation ω_0, amplitude X_m, énergie cinétique maximale $E_{c\,max}$.
Parmi ces grandeurs, quelles sont celles :

- qui augmentent avec la masse de l'oscillateur?
- qui diminuent si la masse est augmentée?
- qui ne dépendent pas de la masse?

Exercice 3

Un ressort à spires jointives peut-il être utilisé pour réaliser un pendule élastique vertical?

Exercice 4

Une force de valeur algébrique du type $F_x = -k.x^2$ peut-elle être une force de rappel? Même question pour $F_x = -k.x^3$.

Exercice 5

Un(e) élève de Terminale se laisse osciller sur une balançoire.

- Quelle est la cause principale d'amortissement?
- Comment procéder pour éviter cet amortissement?

Exercice 6

Une bille lâchée dans un bol évolue-t-elle dans une cuvette de potentiel?

Exercice 7

Deux bateaux flottent sur l'eau, moteurs arrêtés. La houle les fait osciller. La distance entre deux crêtes des vagues est désignée par λ. Quelles peuvent être, exprimées en fonction de λ, les distances entre les bateaux, pour qu'ils aient la même phase? Qu'ils soient en quadrature? Qu'ils soient en opposition?

Lois horaires

*** Exercice 8**

La loi horaire du mouvement d'un oscillateur est donnée (unités du SI) par

$$x = 0{,}05 \cos\left(25t - \frac{\pi}{3}\right).$$

1) Déterminer l'amplitude et la période du mouvement.

2) Quelles sont, à la date $t = 0$, l'abscisse, la vitesse et l'accélération du mobile?

Exercice 9

Établir la loi horaire donnant l'abscisse $x(t)$ d'un pendule élastique (masse $m = 0{,}10$ kg, raideur $k = 25$ N.m^{-1}) qui passe par sa position d'équilibre à la date $t = 1$ s avec une vitesse v égale à -2 m.s^{-1}.

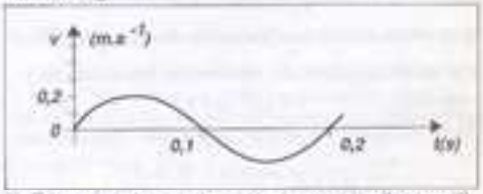
Exercice 10

Un pendule élastique vertical oscille de part et d'autre de sa position d'équilibre avec une amplitude $X_m = 5$ cm. Il passe par sa position la plus haute à la date $t = 0$.
Quelles sont les lois horaires des position, vitesse et accélération de ce pendule?

$m = 0{,}05$ kg; $k = 20$ N.m^{-1}.

*** Exercice 11**

La figure ci-dessous donne le diagramme temporel de la vitesse d'un pendule élastique horizontal de masse $m = 0{,}04$ kg.

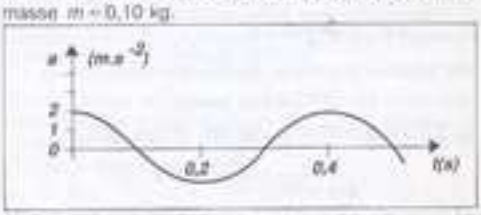


1) Déterminer les lois horaires donnant la vitesse $v(t)$, l'abscisse $x(t)$ et l'accélération $a(t)$.

2) Quelle est la raideur du ressort constituant le pendule?

Exercice 12

La figure ci-dessous donne le diagramme temporel de l'accélération d'un pendule élastique horizontal de masse $m = 0{,}10$ kg.



1) Déterminer les lois horaires donnant la vitesse $v(t)$ et l'abscisse $x(t)$ de l'oscillateur.

2) Quelle est l'expression de la force de rappel $F(x)$?

*** Exercice 13**

L'élongation d'un mobile de masse $m = 0{,}20$ kg est donnée en fonction du temps par

$$x = 0{,}05 \cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Déterminer les expressions de la valeur algébrique de la force de rappel $F_x(t)$ en fonction du temps et $F_x(x)$ en fonction de l'élongation.

2. EXERCICES PROPOSÉS

Énergie

Exercice 23

Un objet de masse $m = 0,50$ kg est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'amplitude $X_m = 0,10$ m et de période $T_0 = 2$ s.
Représenter graphiquement les courbes indiquant l'évolution des énergies cinétique, potentielle et mécanique :

1) En fonction de la position.

2) En fonction du temps.

Exercice 24

Un ressort, de masse négligeable vis-à-vis de celle des objets supposés ponctuels que l'on peut attacher à son extrémité inférieure, pend verticalement.

1) Quelles sont les expressions des énergies potentielles de pesanteur et élastique de cet oscillateur lorsqu'un objet de masse m est suspendu au ressort. Ces deux énergies potentielles seront choisies nulles lorsque le ressort n'est pas déformé.

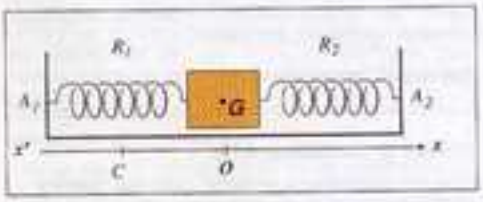
2) Indiquer l'allure de la courbe qui représente l'évolution en fonction de la cote z de l'objet, mesurée à partir de l'extrémité inférieure du ressort non chargé, de l'énergie potentielle (élastique et de pesanteur) du système.

3) Que devient l'expression de l'énergie potentielle du système lorsque les axes de la parabole précédente sont placés à son sommet? La cote de l'objet, mesurée à partir de la position d'équilibre de l'objet, sera désignée par z. Quelles peuvent être alors les conventions choisies pour les zéros des énergies potentielles?

EXERCICES D'APRÈS BACCALAURÉATS

Exercice 25

Un palet à coussin d'air, de masse $m = 700$ g, mobile sur une table horizontale, est accroché à deux ressorts identiques R_1 et R_2, de masse négligeable, tendus entre deux points A_1 et A_2.



Ces ressorts, de constantes de raideur :

$$k_1 = k_2 = 20\ \text{N.m}^{-1}$$

et de longueur à vide $\ell_{0_1} = \ell_{0_2} = 18$ cm, ont pour longueurs $\ell_1 = \ell_2 = 25$ cm, lorsque le palet est en équilibre.

1) Les frottements sont supposés négligeables. On écarte le palet de sa position d'équilibre de telle sorte que son centre d'inertie G se déplace dans la direction A_1A_2 vers A_1, de $\overline{OC} = -2$ cm, puis on l'abandonne sans vitesse initiale, à un instant qui sera choisi comme origine des dates.

a) Donner, à une date t quelconque, l'expression de l'allongement de chacun des ressorts en fonction de l'abscisse x de G.

b) Établir l'équation différentielle du mouvement de G.

c) Exprimer et calculer la pulsation propre et la période propre du mouvement.

d) Écrire l'équation horaire du mouvement de G.

2) En réalité, il existe des frottements. On admettra qu'ils peuvent être représentés par un vecteur force $\vec{f} = -\lambda.\vec{v}$, où λ est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur-vitesse de G.

a) Établir l'équation différentielle du mouvement de G.

b) Donner, en conservant les mêmes conditions initiales, l'allure des courbes représentant l'abscisse x de G en fonction du temps suivant l'importance des frottements.

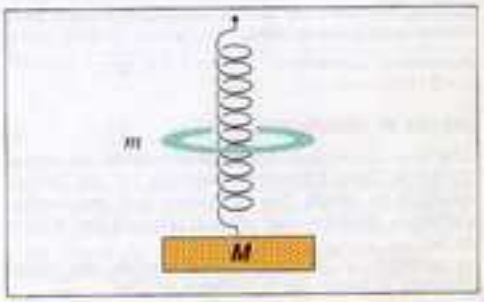
Exercice 26

Un objet de masse $M = 0,40$ kg est attaché à un ressort de raideur $k = 20\ \text{N.m}^{-1}$.

1) L'objet est lâché sans vitesse initiale, le ressort ayant sa longueur à vide. Déterminer l'amplitude des oscillations et leur période.

2) Le mobile s'immobilise après quelques oscillations. Quelle est la perte d'énergie mécanique du système? Qu'est devenue l'énergie perdue?

3) Un anneau de masse $m = 0,10$ kg est lâché sans vitesse initiale d'une hauteur $h = 0,20$ m au-dessus de l'objet. Il entoure le ressort et vient au contact de l'objet, auquel il reste collé.



2. EXERCICES PROPOSES

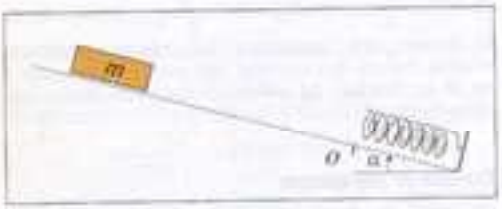
Quelle est la vitesse de l'anneau à l'instant du contact? Justifier la conservation de la quantité de mouvement du système lors du choc. Déterminer, en fonction de m, M, g et h, l'énergie cinétique du système juste après le choc.

4) Les énergies potentielles élastique et de pesanteur sont choisies nulles dans la position d'équilibre en charge (l'anneau n'ayant pas encore atteint le mobile M). Déterminer l'expression de l'énergie potentielle totale lorsque le mobile se trouve écarté de x à partir de la position d'équilibre précédente.

5) Déterminer l'amplitude des oscillations et leur période.

Exercice 27

Un mobile de masse m se déplace d'un mouvement rectiligne le long d'un banc à coussin d'air incliné d'un angle α sur l'horizontale. Un ressort à spires non jointives, de raideur k, est placé à l'extrémité inférieure du banc.



1) Lorsque le mobile est posé au contact du ressort, celui-ci se raccourcit de $\Delta\ell_0$ pour atteindre la position d'équilibre. Exprimer la raideur du ressort en fonction des données.

Application numérique : $m = 0{,}200$ kg; $\alpha = 10°$; $\Delta\ell_0 = 0{,}06$ m.

2) Le mobile est posé au contact du ressort non comprimé, puis lâché sans vitesse initiale. Déterminer l'amplitude et la période des oscillations.

Application numérique : $m = 0{,}200$ kg; $\alpha_1 = 10°$; $\alpha_2 = 30°$; $\alpha_3 = 60°$.

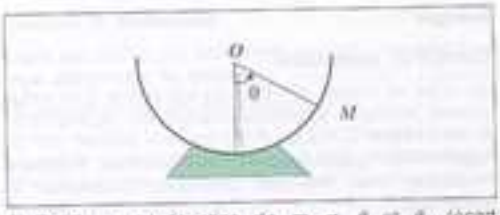
3) Le mobile est lâché sans vitesse initiale et parcourt une distance d sur le banc à air, avant de toucher le ressort. Déterminer le raccourcissement maximal du ressort. Combien de temps faut-il au mobile pour revenir à sa position initiale?

Application numérique : $m = 0{,}200$ kg; $\alpha = 10°$; $d = 0{,}10$ m.

Exercice 28

Une bille, assimilable à un point matériel de masse m, glisse sans frottement dans un bol de section circulaire de centre O et de rayon r. Son mouvement s'effectue dans un plan vertical passant par le fond du bol.

La position M de la bille est repérée par l'écart angulaire θ formé par la verticale et OM.



1) Exprimer, en fonction de m, g, θ et θ_0 (écart angulaire initial) la valeur R de l'action du bol sur la bille. Que devient la relation précédente

a) pour $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = 0°$

b) lorsque θ_0 peut être considéré comme un petit angle?

2) Dans le cas où θ_0 est un petit angle, le mouvement de la bille est pratiquement rectiligne au fond du bol. Quelle est l'expression de la valeur F de la force de rappel qu'elle subit? En déduire, en fonction de R et g, l'expression de la période des petites oscillations de la bille.

*** Exercice 29**

Un cube en bois de côté $a = 0{,}10$ m flotte sur l'eau, l'une de ses faces étant horizontale. La masse volumique du bois vaut $\rho = 750$ kg.m^{-3}.

a) Quelle est la hauteur de cube émergeant de l'eau?

b) Le cube est enfoncé de sorte que sa face supérieure affleure au niveau du liquide, puis lâché sans vitesse initiale. Calculer l'amplitude et la fréquence des oscillations verticales du cube.

c) Même question si le cube flotte sur de l'alcool, de masse volumique $\rho' = 790$ kg.m^{-3}.

Rappel : la valeur de la poussée d'Archimède est égale à celle du poids du fluide déplacé.

EXERCICES DESTINÉS A TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 30 A.1.a.

Définir les termes suivants : période, fréquence, pulsation, amplitude, élongation.

Exercice 31 A.1.a.

Quelles sont les unités de fréquence et de pulsation?

Exercice 32 A.1.b.

Pour les expériences réalisées avec des ressorts en travaux pratiques, quels étaient les ordres de grandeur des fréquences, des pulsations, et des énergies des oscillateurs?

Exercice 33 A.1.c.

Dans quel cas l'énergie mécanique d'un oscillateur se conserve-t-elle?

Fiche expérimentale

ILLUSTRATION EXPÉRIMENTALE DE $\Sigma\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

La relation $\Sigma\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ peut être vérifiée au cours d'une séance de travaux pratiques.

Un solide de masse $m = 0{,}620$ kg et de centre d'inertie G, est placé sur une table à coussin d'air horizontale. Il est retenu par un ressort tendu parallèlement à la table. L'autre extrémité du ressort est fixé en un point O (fig. 12 a).

Le solide est lancé et glisse. Son centre d'inertie décrit une trajectoire curviligne plane et sa position est repérée tous les $\tau = 20$ ms.

A la date t, le solide est soumis à trois forces (fig. 12 b) : son poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{R}$ du support et la tension $\vec{T}$ du ressort.

Leur somme vectorielle est $\Sigma\vec{f} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T}$.

Or la réaction de l'aérotable compense le poids :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0},$$

d'où :

$$\Sigma\vec{f} = \vec{T}$$

Il s'agit donc de vérifier expérimentalement que

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{T}$$

a) Mesure de $\vec{T}$

Les caractéristiques de cette force $\vec{T}$ sont :

— direction et sens : ceux de $\overrightarrow{GO}$;

— valeur $T = k.(\ell - \ell_0)$, où ℓ_0 est la longueur initiale du ressort non-tendu et ℓ la longueur du ressort tendu.

La **raideur** du ressort choisi est $k = 4{,}2$ N.m^{-1} et sa longueur initiale est $\ell_0 = 10{,}5$ cm. A la date t, le ressort est tendu et sa longueur est $\ell = 39{,}4$ cm. Par suite, la valeur de la tension est

$T = 4{,}2 \times (0{,}394 - 0{,}105)$, soit : **$T = 1{,}21$ N.**

b) Valeur de $\overrightarrow{\Delta T}$

Pendant une durée très brève, la tension $\vec{T}$ peut être considérée comme constante en direction et en valeur. En choisissant $\Delta t = 2\tau$, lorsque le centre d'inertie du solide passe de G_1 en G_2, cette condition est remplie.

c) Mesure de $\Delta\vec{p}$

Les vecteurs-vitesse correspondant à ces deux points G_1 et G_2, (fig. 12 c), ont les caractéristiques respectives :

$$\vec{v}_1 \begin{cases} \text{direction et sens : ceux de } \overrightarrow{G_1G_2} \\ \text{valeur } v_1 = \dfrac{G_1G_2}{2\tau} = 0{,}90 \text{ m.s}^{-1} \end{cases}$$

$$\vec{v}_2 \begin{cases} \text{direction et sens : ceux de } \overrightarrow{GG_3} \\ \text{valeur } v_2 = \dfrac{GG_3}{2\tau} = 0{,}94 \text{ m.s}^{-1} \end{cases}$$

La variation de la quantité de mouvement du solide :

$$\Delta\vec{p} = m.\Delta\vec{v}$$

pendant la durée Δt, se déduit de la construction de $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

- La construction de $\Delta\vec{p}$ montre que sa direction et celle de $\vec{T}$ sont confondues à 1° près.
- Avec la mesure $\Delta v = 0{,}08$ m.s^{-1}, il vient

$$\Delta p = m.\Delta v = 0{,}05 \text{ kg.m.s}^{-1} \text{ et } \frac{\Delta p}{\Delta t} = \mathbf{1{,}24\ N.}$$

d) Résultats

Le vecteur $\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$, aux incertitudes près, est égal au vecteur $\vec{T}$ (ici à 3 % près environ).

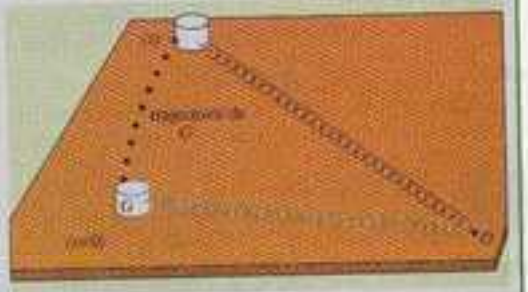


Fig. 12 a. *A la date $t = 0$, le solide a été lancé sur la table dans une direction différente de celle de l'axe du ressort tendu.*

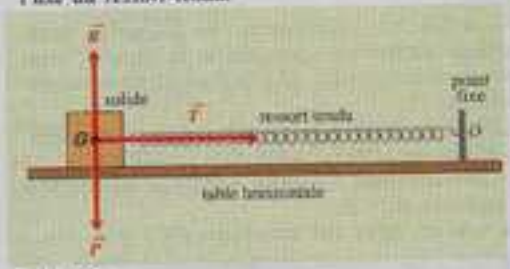


Fig. 12 b

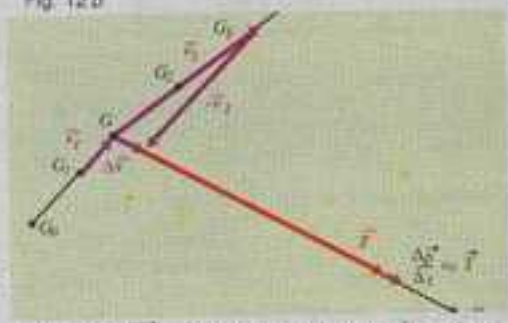


Fig. 12 c. *$\overrightarrow{GG_3} = \vec{v}_2$ est un représentant du vecteur-vitesse $\vec{v}_2$ de G_2 et $\overrightarrow{G_1G} = \vec{v}_1$ est un représentant de $\vec{v}_1$ de G_1.*
$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}$ est tracé à partir de G.

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

- Traiter les exercices dans des **repères galiléens.**
- Savoir que le **centre d'inertie** G d'un système de masse m est tel que :

$$\sum_{i}^{n} m_i . \overrightarrow{OG_i} = m . \overrightarrow{OG}.$$

- Connaître la définition du vecteur-**quantité de mouvement** :

$$\vec{p} = m . \vec{v}_G.$$

- Se rappeler l'énoncé du **principe d'inertie.**
- Retenir les relations :

$$\Sigma \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{et} \quad \Sigma \vec{f} = m . \vec{a}_G.$$

- Être capable d'appliquer le **théorème de l'énergie cinétique** :

$$\Sigma W_{\vec{f}(1,\,2)} = E_{c_2} - E_{c_1}.$$

- Résoudre un **problème de mécanique** par la méthode suivante :
— préciser le **système** considéré;
— choisir le **référentiel galiléen** et le munir d'un **repère** $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;
— rechercher toutes les **forces** appliquées au système;
— puis :

Soit :
— appliquer la **relation** $\Sigma \vec{f} = m . \vec{a}_G$ et en déduire l'accélération du centre d'inertie;
— préciser les **conditions initiales;**
— calculer par deux intégrations successives à partir de $\vec{a}_G$, la vitesse $\vec{v}_G$ puis les relations $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ permettant de déterminer le mouvement du centre d'inertie.

Soit :
— appliquer le **théorème de l'énergie cinétique** pour calculer directement la **vitesse** du centre d'inertie.

1. EXERCICES RESOLUS

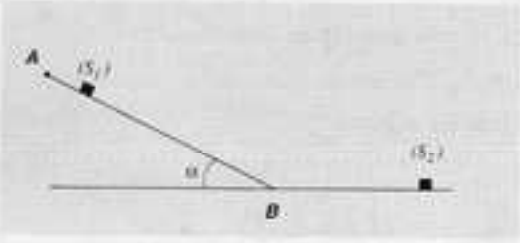
EXERCICE 1

Un solide S_1, supposé ponctuel, de masse $m_1 = 50$ g, est abandonné sans vitesse d'un point A et glisse sur un plan incliné de l'angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale. Après un parcours $AB = \ell = 1$ m, il aborde un plan horizontal sur lequel il continue de glisser avant de heurter un solide S_2, immobile, supposé ponctuel, de masse $m_2 = 150$ g.
Tous les mouvements s'effectuent sans frottement. On prendra $g = 10$ m.s^{-2}.

1) Calculer juste avant le choc avec S_2, la vitesse v_1 du solide S_1, sa quantité de mouvement p_1 et son énergie cinétique E_{c_1}.

2) Au moment du choc il y a accrochage des deux solides.
Appliquer la loi de conservation de la quantité de mouvement au système formé des deux solides S_1 et S_2. En déduire la vitesse v_G de son centre d'inertie, juste après le choc.

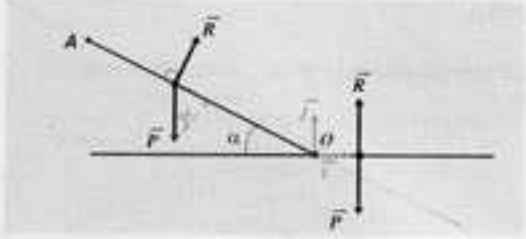
3) Y a-t-il eu conservation de l'énergie cinétique?



SOLUTION

1) Vitesse v_1, quantité de mouvement p_1 et énergie cinétique E_{c_1}

Le système est le solide S_1.
le repère orthonormé galiléen est $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'origine O est en B et $\vec{i}$ est selon l'horizontale.
Les forces appliquées au solide sont : son poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$ du support, perpendiculaire à ce dernier puisqu'il n'y a pas de frottements.
Leur somme : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{F}$ n'est donc pas nulle lorsque le solide est sur le plan incliné.



Calculons la vitesse $\vec{v}_B$ du solide en B, en appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre les instants où le solide est en A puis en B, il vient :

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{B(\vec{R})} + W_{B(\vec{P})}$$

Or $W_B = 0$ puisque $\vec{R}$ est perpendiculaire au plan,

d'où : $$\frac{1}{2} m . v_B^2 - 0 = \vec{P} . \overrightarrow{AB} = m . g . \ell . \sin \alpha$$

On en déduit : $$v_B = \sqrt{2g . \ell . \sin \alpha}$$

soit : $$v_B = \sqrt{2 \times 10 \times 1 \times \frac{1}{2}}$$

$$v_B = \sqrt{10} = 3{,}16 \text{ m.s}^{-1}$$

Sur l'horizontale, en l'absence de frottement, la somme des forces appliquées au solide en mouvement est $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$, et d'après le principe de l'inertie, le solide en B, a un mouvement rectiligne uniforme sur le plan horizontal :

$$\boldsymbol{v_B = v_1 = 3{,}16 \text{ m.s}^{-1}}.$$

La valeur de la quantité de mouvement du solide S_1 est :

$$p_1 = m_1 . v_1$$

$$= 0{,}050 \times 3{,}16$$

soit : $$\boldsymbol{p_1 = 1{,}6 \text{ kg.m.s}^{-1}}.$$

Son énergie cinétique est :

$$E_{c_1} = \frac{1}{2} m_1 . v_1^2$$

soit : $$\boldsymbol{E_{c_1} = 0{,}25 \text{ J}}.$$

2) Vitesse v_G du centre d'inertie du système formé des deux solides

Le système est maintenant l'ensemble des deux solides S_1 et S_2. Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est le même. Les forces appliquées au système sont : les poids $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ et les réactions $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$. Leur somme est nulle.
La *quantité de mouvement* du système **avant le choc** est : $\vec{p}_1 = m_1 . \vec{v}_1$, puisque S_2 est immobile. **Après le choc,** elle est :

$$\vec{p} = (m_1 + m_2) . \vec{v}_G$$

puisque les deux solides s'accrochent et partent donc avec la même vitesse $\vec{v}_G$.
Selon la loi de la **conservation de la quantité de mouvement,** on peut écrire :

$$\vec{p}_1 = \vec{p}$$

soit : $$m_1 . \vec{v}_1 = (m_1 + m_2) . \vec{v}_G$$

Les masses étant positives, $\vec{v}_G$ a la direction et le sens de $\vec{v}_1$ et sa valeur est :

$$v_G = \frac{m_1}{m_1 + m_2} . v_1$$

$$= \frac{0{,}050}{0{,}200} \times \sqrt{10} = \sqrt{0{,}625}$$

soit : $$\boldsymbol{v_G = 0{,}80 \text{ m.s}^{-1}}.$$

3) Y a-t-il eu conservation de l'énergie cinétique?

L'énergie cinétique du système après le choc est :

$$E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2).v_G^2$$

soit : $E_c = \frac{1}{2} \times (0{,}050 + 0{,}150) \times 0{,}625 = 0{,}062\,5$ J.

Or, avant le choc, l'énergie cinétique valait :

$$E_{c_0} = 0{,}25 \text{ J.}$$

soit $E_{c_0} > E_c$: au cours du choc avec accrochage il y a eu **perte d'énergie cinétique.** Le choc n'est pas élastique.

EXERCICE 2

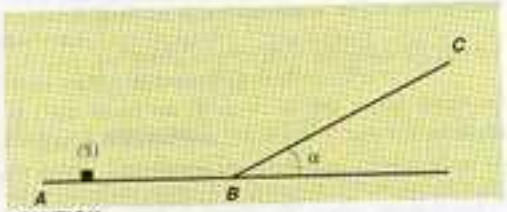
Dans un stand de fête foraine, un objet (S), de masse $m = 5$ kg assimilable à un point matériel, est placé sur des rails horizontaux de longueur AB. Pour « tester sa force », une personne pousse cet objet avec une force $\vec{F}$ constante, horizontale pendant une durée $t = 3$ s.

1) a) Déterminer la nature du mouvement de l'objet (S), en supposant qu'il glisse sans frottement sur les rails en partant de la position de repos.

b) Sachant qu'à la fin de la période de lancement, l'objet (S) a une vitesse égale à 6 m.s^{-1}, calculer la valeur numérique de la force $\vec{F}$.

c) Calculer la distance de lancement AB et le travail effectué par la personne.

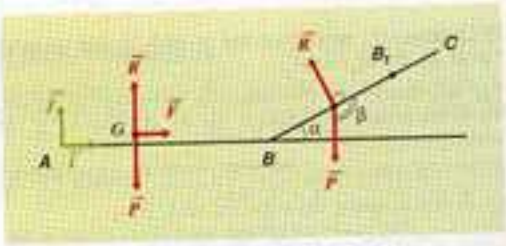
2) Arrivé en B, l'objet (S) doit s'élever sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport au plan horizontal.
En supposant les frottements négligeables, et le plan incliné suffisamment long, quelle longueur devrait parcourir l'objet (S) sur le plan incliné jusqu'à ce que sa vitesse s'annule? On prendra $g = 10$ m.s^{-2}.



SOLUTION

1) a) Nature du mouvement de l'objet (S) sur les rails

Le système est l'objet de masse $m = 5$ kg et de centre d'inertie G.
Le référentiel terrestre supposé galiléen est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans le plan vertical de la figure. (O est choisi en A.)
Les forces exercées sur l'objet sont : son poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{R}$ du support (perpendiculaire au support puisqu'il n'y a pas de frottement) et la force appliquée $\vec{F}$.



Leur somme est $\Sigma\vec{f} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{F}$ puisque $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$. Or :

$$\Sigma\vec{f} = m.\vec{a},$$

donc

$$\vec{F} = m.\vec{a}$$

et

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Puisque $\vec{F}$ est constant, l'accélération $\vec{a}$ est un vecteur constant et la vitesse, primitive de $\vec{a}$, est :

$$\vec{v} = \vec{a}.t + \vec{v}_0$$

Si les conditions initiales sont à $t = 0$, $v_0 = 0$, alors :

$$\vec{v} = \vec{a}.t$$

et le mouvement de l'objet sur les rails est **rectiligne uniformément accéléré.**

***b)* Valeur de la force $\vec{F}$**

La valeur de l'accélération au point B, est, pour $v_B = 6$ m.s^{-1} et $t = 3$ s :

$$a = \frac{v_B}{t} = \frac{6}{3}$$

d'où

$$a = 2 \text{ m.s}^{-2}$$

La valeur de la force F est :

$$F = m.a = 5 \times 2$$

$$\boldsymbol{F = 10 \text{ N.}}$$

***c)* Distance de lancement $AB = \ell$**

Par application du théorème de l'énergie cinétique entre les instants de date $t = 0$, en A, où l'objet part avec une vitesse initiale nulle, et de date $t = 3$ s, en B, où il a une vitesse $v_B = 6$ m.s^{-1}, il vient :

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{A\to B}(\vec{f})$$

puisque les travaux de $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont nuls ($\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont orthogonaux à AB).
Comme le solide est en translation,

$$E_c = \frac{1}{2} m.v^2 \quad \text{et} \quad W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{AB}$$

d'où :

$$\frac{1}{2} m.v_B^2 - 0 = F.\ell$$

On en déduit la distance ℓ :

$$\ell = \frac{1}{2} \frac{m.v_B^2}{F}$$

soit :

$$\ell = \frac{5 \times 36}{2 \times 10}$$

$$\boldsymbol{\ell = 9 \text{ m.}}$$

1. EXERCICES RESOLUS

2) Longueur ℓ_1 parcourue sur le plan incliné jusqu'à l'arrêt en B_1 de l'objet

Par application du théorème de l'énergie cinétique entre les instants où l'objet est en B puis en B_1 il vient :

$E_c(B_1) - E_c(B) = W_{AB_1}(\vec{P}) + W_{AB_1}(\vec{R})$ puisque $\vec{F} = \vec{0}$.

Or $\vec{P}$ est la seule force qui travaille, d'où :

$$0 - \frac{1}{2} m . v_B^2 = \vec{P} . \overrightarrow{BB_1} + 0.$$

Soit β l'angle entre $\vec{P}$ et $\overrightarrow{BB_1}$, et ℓ_1 la longueur BB_1, on obtient alors :

$$-\frac{1}{2} m . v_B^2 = m . g . \ell_1 . \cos \beta = -m . g . \ell_1 . \cos \alpha$$

puisque $\left(\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ le poids $\vec{P}$ effectue un travail résistant en remontant le plan. D'où :

$$\ell_1 = \frac{v_B^2}{2 . g . \cos \alpha} \qquad \text{soit :} \qquad \ell_1 = \frac{36}{2 \times 10 \times \cos 30}$$

$$\ell_1 = 3{,}6 \text{ m.}$$

EXERCICE 3

Un skieur assimilé à un point G, de masse $m = 80$ kg, glisse sur une piste formée de deux parties AB et BC situées dans un même plan vertical. L'arc $\overset{\frown}{AB}$ de centre O situé sur la verticale de B, a un rayon $r = 50$ m et BC est une partie rectiligne horizontale de longueur $\ell = 50$ m.

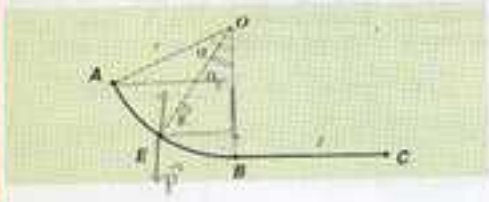
Le skieur part sans vitesse initiale du point A tel que :

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \alpha = \frac{\pi}{3}$$

1) En négligeant les frottements, calculer la vitesse du skieur au point E, tel que : $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}) = \alpha_E = \frac{\pi}{6}$, puis calculer sa vitesse en B.

2) En fait, sur le trajet ABC existent des forces de frottements assimilables à une force tangente à la trajectoire et d'intensité constante F. Si le skieur arrive sans vitesse en C, quelle est la valeur F de cette force de frottement ?

On prendra $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.



SOLUTION

1) Vitesse du skieur en E puis en B

Le système considéré est le skieur.

Le repère galiléen orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dans le plan vertical ABC.

Les forces exercées sur le skieur sont : son poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$ du support, ici constamment perpendiculaire au support puisqu'il n'y a pas de frottement.

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre les instants où le skieur est en A et en un point quelconque M de la trajectoire circulaire $\overset{\frown}{AB}$, (dans le cas général) il vient :

$$E_c(M) - E_c(A) = W_{AM}(\vec{P}) + W_{AM}(\vec{R})$$

$$\frac{1}{2} m . v_M^2 - 0 = W_P + 0.$$

Or le travail de $\vec{P}$ est $W_P = m . g . h$.

h étant la dénivellation entre le niveau de départ en A et le niveau du point en M, d'où :

$$\frac{1}{2} m . v_M^2 = m . g . (r . \cos \alpha_M - r . \cos \alpha)$$

avec $\alpha_M = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM})$.

D'où $\qquad v_M^2 = 2g . r . (\cos \alpha_M - \cos \alpha)$.

qui s'écrit en E :

$$v_E^2 = 2g . r . (\cos \alpha_E - \cos \alpha).$$

$$v_E = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 50 \times \left(\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3}\right)}.$$

$$\mathbf{v_E = 19 \text{ m.s}^{-1}}.$$

De même en B : $v_B^2 = 2g . r . (\cos 0 - \cos \alpha)$,

$$v_B = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 50 \times \left(1 - \cos \frac{\pi}{3}\right)}. \qquad \mathbf{v_B = 22 \text{ m.s}^{-1}}.$$

2) Valeur de la force de frottement

Le skieur est maintenant soumis aux deux forces : poids $\vec{P}$ et réaction $\vec{R}$, mais celle-ci n'est plus perpendiculaire à la trajectoire.

$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$ où R_t est la force de frottement. Dans l'exercice sa valeur est supposée constante : F.

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre les instants où le skieur est en A et en C il vient :

$$E_c(C) - E_c(A) = W_{AC}(\vec{P}) + W_{AC}(\vec{R})$$

$$0 \quad - \quad 0 \quad = m . g . r . (1 - \cos \alpha) + W_F.$$

Le travail fourni par la force $\vec{F}$ au cours de son déplacement $ABC = \overset{\frown}{AB} + BC$ est résistant et vaut :

$$W_{F(ABC)} = -F . (\overset{\frown}{AB} + BC),$$

soit : $\qquad = -F . (r . \alpha + \ell)$

puisque $s = r . \alpha = AB$ et $BC = \ell = r$, d'où :

$$0 = m . g . r . (1 - \cos \alpha) - F . r . (\alpha + 1)$$

et $\qquad F = \dfrac{m . g . (1 - \cos \alpha)}{(\alpha + 1)}$

$$F = \frac{80 \times 9{,}8 \times \left(1 - \cos \frac{\pi}{3}\right)}{\left(\frac{\pi}{3} + 1\right)},$$

d'où $\qquad \mathbf{F = 190 \text{ N}}.$

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATION

Sans calcul

Exercice 1

Un solide de masse m est au repos sur une table horizontale bien lisse. Des forces lui sont appliquées dont la somme est un vecteur constant $\vec{F}$, de direction parallèle à la table. Dans le référentiel de la table, prend-il un mouvement :
— rectiligne uniforme?
— uniformément varié?
— uniformément accéléré?
— rectiligne uniformément accéléré?
Justifier.

Exercice 2

Proposer un exemple concret dans lequel le mouvement d'un solide est :
— rectiligne uniforme ;
— rectiligne uniformément retardé ;
— rectiligne varié.

Exercice 3

1) Enoncer le théorème de l'énergie cinétique.

2) Une énergie cinétique peut-elle être négative? Justifier.

3) Une variation d'énergie cinétique peut-elle être négative? Justifier.
Illustrer par un exemple.

Mouvement de chute libre

*** Exercice 4**

Un solide tombe d'une hauteur de 100 m en partant du repos.
Combien de temps met-il pour atteindre le sol en l'absence de frottement ($g = 10\ m.s^{-2}$).

*** Exercice 5**

Un solide, abandonné sans vitesse, tombe dans le vide en chute libre. S'il parcourt 10 m pendant la dernière seconde de chute, de quelle hauteur est-il tombé? ($g = 10\ m.s^{-2}$)

*** Exercice 6**

Une pierre est abandonnée sans vitesse du haut d'un immeuble.
Elle atteint le sol 2,5 s après.

1) Quelle est la hauteur de l'immeuble?
($g = 9{,}8\ m.s^{-2}$)

2) Quelle est l'énergie cinétique de la pierre au niveau du sol, si sa masse est $m = 200$ g?

Exercice 7

Une goutte de pluie supposée sphérique, de rayon r, tombe en chute libre dans l'air et subit une force de frottement proportionnelle à sa vitesse.

L'expression de cette force est :

$$\vec{F} = 6\pi.\eta.r.\vec{v}$$

où η est le coefficient de viscosité de l'air.
Montrer que la goutte d'eau atteint une vitesse limite v_l et calculer sa valeur.

Données :

volume d'une sphère $V = \frac{4}{3}.\pi.r^3$;

masse volumique de l'eau : $10^3\ kg.m^{-3}$;

$g = 9{,}8\ m.s^{-2}$; $\eta = 1{,}8 \times 10^{-5}$ S.I. ; $r = 10^{-3}$ m.

Exercice 8

De la terrasse d'un immeuble de 20 m de haut, un enfant abandonne une bille sans vitesse.

1) Combien de temps après, un autre enfant situé 5 m plus bas doit-il lâcher sans vitesse, une autre bille, pour qu'elles arrivent ensemble au sol?

2) Où était la première bille lorsque la deuxième fut abandonnée?

Quantité de mouvement

Exercice 9

Une petite bille d'acier de masse $m = 200$ g, est abandonnée sans vitesse, de la hauteur h, au-dessus d'une plaque d'acier horizontale placée sur le sol.
Elle tombe, rebondit verticalement et remonte à la même hauteur.

1) Exprimer sa vitesse juste avant le choc sur la plaque en fonction de h et de g, accélération de la pesanteur. Calculer la valeur de v pour $h = 5$ m. On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.

2) Calculer la valeur de la quantité de mouvement p, de la bille, juste avant le choc, et représenter le vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$ de la bille.

3) Quel est le vecteur quantité de mouvement $\vec{p}'$ de la bille juste après le choc? Justifier.
Donner la variation de quantité de mouvement $\Delta\vec{p}$ subie par la bille au cours du choc.

4) Déterminer alors la force $\vec{F}$, supposée constante, que la plaque a exercé sur la bille au cours du choc qui a duré $\Delta t = 0{,}02$ s.

5) En appliquant le principe des actions réciproques au cours du choc. Déterminer la force $\vec{F}'$ que la bille a exercé sur la plaque posée sur le sol.

2. EXERCICES PROPOSES

Mouvement le long d'un plan incliné

Exercice 10

Un solide ponctuel de masse m, glisse le long d'un plan incliné de l'angle α sur l'horizontale.
Partant du repos en O, le solide acquiert la vitesse v lorsqu'il a franchi la distance $OA = x$.

1) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique établir l'expression de v^2 en fonction de x.

2) En dérivant par rapport à t cette expression, montrer que l'on retrouve la relation :

$$m.a = m.g.\sin\alpha.$$

Exercice 11

Un solide glisse sans frottement le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné de l'angle α sur l'horizontale.

1) Établir l'expression de l'accélération a_G de son centre d'inertie G.
Dépend-elle de la masse du solide?

2) Comment régler le montage pour avoir $a_G = \frac{g}{2}$?

La démonstration sera accompagnée d'un schéma soigné des vecteurs-forces appliqués au solide.

Exercice 12

Un solide, de centre d'inertie G et de masse m, est lancé sur un plan incliné qu'il remonte en glissant sans frottement.
L'inclinaison du plan sur l'horizontale est $\alpha = 20°$.
En bas du plan, à la date $t = 0$, la vitesse initiale du solide est $v_0 = 2\ m.s^{-1}$.

1) Déterminer la nature du mouvement du point G.

2) Évaluer l'accélération a_G.

3) Calculer la distance franchie par le centre d'inertie jusqu'à son arrêt.
On prendra $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.

* Exercice 13

Une bille homogène de masse m, roule sans glisser, le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné de l'angle α sur l'horizontale.
La mesure de l'accélération de son centre d'inertie conduit à l'expression :

$$a_G = \frac{5}{7} g.\sin\alpha.$$

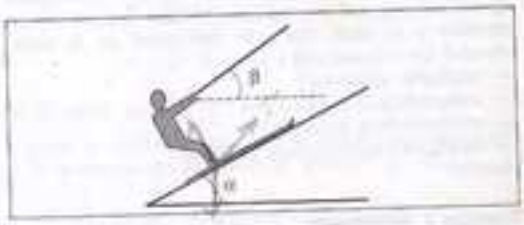
Montrer que la réaction $\vec{R}$ du support n'a pas une direction orthogonale au plan incliné. Déterminer ses caractéristiques.

Données numériques :
$\alpha = 30°$; $m = 100$ g; $g = 10\ m.s^{-2}$.

Tension d'un câble

* Exercice 14

Sur un remonte-pente un skieur, de masse m, est tiré par une barre. Le plan est incliné de l'angle α sur l'horizontale et la barre de l'angle β.



1) Dresser, au cours d'un arrêt du skieur sur la pente, le bilan des forces exercées sur lui et qui justifient son équilibre, dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

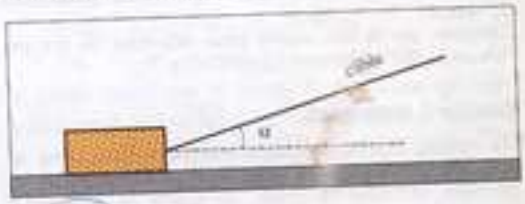
2) Déterminer la réaction $\vec{R}$ du support et la tension $\vec{T}$ de la barre, en supposant les frottements négligeables.

3) Les forces varieraient-elles si le skieur était en mouvement rectiligne uniforme? Justifier.

Données :
$m = 80$ kg; $\alpha = 20°$; $\beta = 50°$; $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.

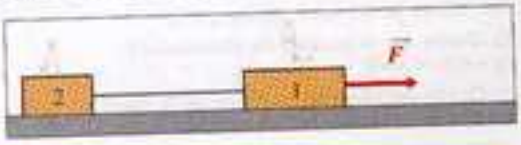
Exercice 15

Un traîneau, de masse $m = 80$ kg, est tiré sur un sol horizontal, par l'intermédiaire d'un câble faisant l'angle $\alpha = 15°$ avec l'horizontale.
La force de tension du câble est $F = 200$ N.
Si le traîneau a un mouvement rectiligne et uniforme, déterminer la force de réaction $\vec{R}$ (valeur et direction) exercée par le sol sur le traîneau.
On prendra $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.



* Exercice 16

Sur un sol horizontal parfaitement lisse, deux traîneaux ① et ② de masses respectives m_1 et m_2, sont reliés par une barre d'attelage, dont la masse est négligeable.



Le premier traîneau est tiré par une corde qui exerce la force $\vec{F}$ de valeur constante et de direction parallèle au sol. L'ensemble glisse sans frottement.

1) Exprimer l'accélération du centre d'inertie du système constitué par les deux traîneaux, puis la tension T que la barre exerce sur le second traîneau.

2) Comparer les valeurs de T et F et interpréter. (Pour cela rechercher la force T' que l'autre extrémité de la barre d'attelage exerce sur le premier traîneau.)

Application numérique :
$m_1 = 150$ kg; $m_2 = 130$ kg et $F = 1\,400$ N.

EXERCICES D'APRÈS BACCALAURÉATS

Exercice 17

Répondre aux questions en indiquant la lettre correspondante à la réponse correcte et en justifiant ce choix. (Les situations suivantes sont décrites dans un référentiel galiléen.)

1) Toutes les actions, sauf une nécessitent l'intervention d'une force. Laquelle fait exception?

a) Faire passer un solide, assimilable à un point matériel de l'état de repos à l'état de mouvement.

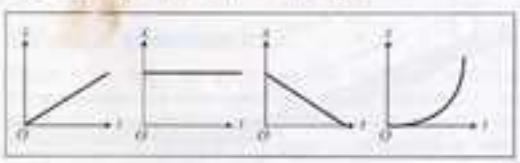
b) Conserver à cet objet un mouvement de vecteur vitesse constant.

c) Modifier la vitesse de cet objet sans changer le sens et la direction du mouvement.

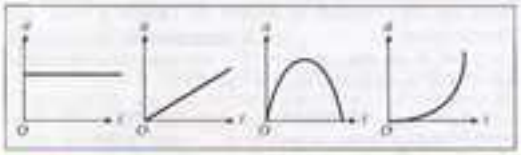
d) Maintenir cet objet en mouvement circulaire et uniforme.

e) Modifier la direction du mouvement de cet objet sans changer sa vitesse.

2) Un solide glisse sans frottement selon une ligne de plus grande pente d'un plan incliné. Quel graphique représente la distance x parcourue par son centre d'inertie en fonction du temps? La distance x est mesurée dans un repère $(O, \vec{i})$, convenablement choisi, associé au référentiel galiléen.



3) Un volant tourne à vitesse constante autour d'un axe fixe dans le référentiel choisi. Si on considère un point du volant, quel graphique représente l'accélération a de ce point en fonction du temps?



4) Un solide repose sur une table. Parmi les énoncés suivants, lequel décrit cette situation.

a) Aucune force n'agit sur lui.

b) Le solide est au repos dans tous les référentiels possibles.

c) Le solide n'exerce aucune force sur la table.

d) Plusieurs forces agissent sur le solide, mais elles s'équilibrent.

Exercice 18

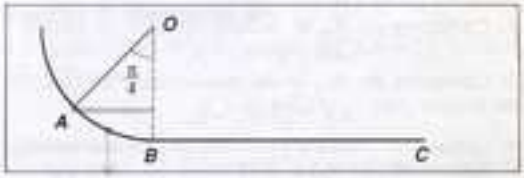
1) Un ascenseur de masse totale $m = 400$ kg, initialement immobile, est tiré par un câble vertical tendu par une force de 5 000 N et s'élève depuis le rez-de-chaussée.
Quelle est la nature de son mouvement? Calculer son accélération. De quelle hauteur s'élève-t-il en 3 s?

2) L'ascenseur continue ensuite en mouvement rectiligne uniforme pendant 6 s.
Quelle distance a-t-il franchie?
Quelle est la nouvelle tension du câble?

3) Avant d'arriver à l'étage souhaité le mécanisme de freinage agit pendant 4 s jusqu'à l'arrêt.
Si son mouvement est uniformément retardé, quelle est la tension du câble?
Quelle est la longueur totale de son déplacement?

Exercice 19

Un skieur de masse $m = 60$ kg glisse sur la portion de piste ABC.



AB représente une portion de circonférence de rayon r, de centre O et telle que $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{4}$ rad.

BC est une partie rectiligne horizontale de longueur $2r$.
Toute la trajectoire est située dans un plan vertical.
On prendra $g = 9{,}81$ m.s^{-2}.
Le skieur démarre sur la piste, en A, avec une vitesse nulle. Dans tout le problème on assimilera le mouvement du skieur à celui d'un point matériel.
La piste est bien enneigée et, pour simplifier, on admettra que le long du trajet ABC la force de frottement $\vec{f}$, exercée par la neige, se réduit à une force unique de même direction que $\vec{V}$, mais de sens contraire et de valeur constante.

1) Exprimer la vitesse du skieur en B et C (V_B et V_C) en fonction de F, r, m et g.

2) Le skieur arrivant en C avec une vitesse nulle, déterminer l'expression littérale et la valeur numérique de la force F.

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 20

On réalise sur une table à coussin d'air horizontale, l'enregistrement du mouvement du centre d'inertie d'un mobile autoporteur lié par un fil à un dynamomètre qui peut s'orienter librement en tournant autour d'un axe perpendiculaire à la table. La masse du mobile vaut $m = 0{,}67$ kg.
Quand le dynamomètre est étiré il exerce sur le mobile une force $\vec{F}$ qui incurve sa trajectoire.
On obtient le document ci-après.

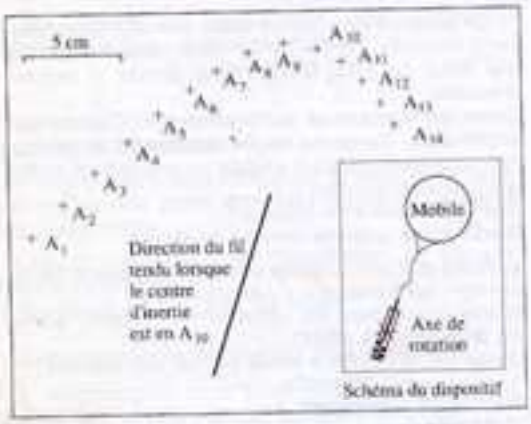


Schéma du dispositif

1) Déterminer la vitesse du centre d'inertie aux instants t_9 et t_{11} ; représenter les vecteurs correspondants en A_9 et A_{11}.

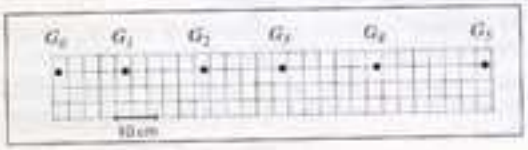
2) Construire en A_{10} le vecteur-variation de vitesse :
$$\Delta\vec{v}_{11-9} = \vec{v}_{11} - \vec{v}_9$$

3) Construire en A_{10} le vecteur-variation de quantité de mouvement :
$$\Delta\vec{p}_{11-9} = \vec{p}_{11} - \vec{p}_9$$

4) Lorsque le centre d'inertie du mobile est en A_{10}, le dynamomètre indique 0,85 N.
Comparer la force $\vec{F}$ ainsi mesurée, au vecteur $\dfrac{\Delta\vec{p}_{11-9}}{t_{11} - t_9}$.
Commenter ce résultat.
On prendra pour échelles :
2 cm pour 0,1 $m \cdot s^{-1}$ et 4 cm pour 0,1 $kg \cdot m \cdot s^{-1}$.

Exercice 21

Un solide S de masse $m = 400$ g, abandonné sans vitesse initiale, glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 35°$ par rapport au plan horizontal. Un dispositif approprié permet d'enregistrer quelques positions successives G_i de son centre d'inertie G, à des dates t_i régulièrement espacées :
$$t_{i+1} - t_i = \tau = 80 \text{ ms}$$



L'origine des dates correspond à la position G_0.
On néglige les dimensions de S et on prend
$$g = 9{,}80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

1) Établir l'expression de la valeur a_{th} de l'accélération théorique qu'aurait G, s'il n'y avait pas de frottements ; faire l'application numérique.

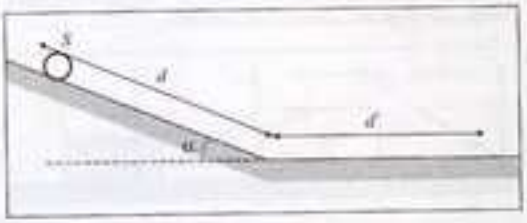
2) Soient v_i et a_i les valeurs expérimentales de la vitesse et de l'accélération de G à la date t_i. Reproduire et compléter le tableau suivant en utilisant l'enregistrement ; on indiquera la méthode de calcul utilisée.

t_i	$t_0 = 0$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
v_i ($m \cdot s^{-1}$)						
a_i ($m \cdot s^{-2}$)						

3) Comparer les valeurs de a_i à celle de a_{th} calculée dans la première question. On interprète la différence entre a_i et a_{th} par l'existence de frottements.
En supposant ces frottements représentés par une force unique $\vec{f}$ constante, calculer l'intensité f de cette force.

4) A quelle date a-t-on abandonné S sur le plan incliné ?

5) Le plan incliné est raccordé à un plan horizontal. S a été lâché sans vitesse initiale à une distance $d = 2$ m de la ligne de raccordement.
On admettra que le passage de S sur cette ligne ne produit pas de choc susceptible de modifier la valeur v de sa vitesse.
Quelle distance d' le solide S, parcourt-il sur le plan horizontal avant de s'arrêter, si on suppose que les frottements sont représentés par une force unique $\vec{f}'$, d'intensité $f' = 0{,}75$ N pendant toute la durée du mouvement ?



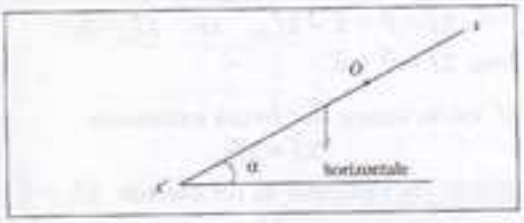
* Exercice 22

Deux petits palets A et B, considérés comme ponctuels, peuvent glisser sans frottement sur un rail dans un plan vertical et incliné de l'angle $\alpha = 30°$ sur l'horizontale.
Le palet B de masse $M = 10$ g est maintenu immobile en O par une butée sur le rail.

1) Le palet A, de masse $m = 5$ g, est lancé vers B et possède la vitesse $v_A = 3$ $m \cdot s^{-1}$ juste avant le choc.

Lorsque le palet A frappe B, la bulle s'escamotte, ce qui le libère.
Calculer les vitesses des deux palets juste après le choc, supposé élastique (on vérifiera que le palet A rebondit sur B).

2) Le palet B part alors avec la vitesse $v_2 = 2\ m.s^{-1}$. Étudier son mouvement après le choc et situer le point C, où, sur le plan, sa vitesse s'annule.
On prendra $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.



EXERCICES DESTINÉS A TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 23 — A.1.a

Une énergie cinétique peut-elle être exprimée en kWh, en kJ, en MeV, en $N.m^2.s^{-2}$, en $kg.m^2.s^{-2}$?

Exercice 24 — A.1.b

Quels sont les ordres de grandeur (exprimés en J par une puissance entière de 10), des énergies cinétiques des systèmes suivants :

1) Élève de terminale se promenant à vélo?

2) Automobile sur autoroute?

Exercice 25 — A.1.c

Comparer les valeurs des énergies cinétiques et des quantités de mouvement d'un marteau de masse 1 kg et de vitesse $20\ m.s^{-1}$ et d'une valise de 20 kg déplacée à une vitesse de $1\ m.s^{-1}$.

Exercice 26 — A.2.a

Poser votre livre de physique sur diverses surfaces horizontales de plus grandes dimensions que lui (classeur, planche à dessin, vitre non coupante...). En inclinant progressivement le plan qui supporte le livre, trouver à partir de quelle inclinaison α, le livre commence à glisser ($\tan\alpha$ peut être obtenue à partir de mesures au double décimètre). En déduire la valeur de la force de frottement qui agit sur votre livre, exprimée en fonction de son poids, selon la nature du support.

Exercice 27 — A.2.b

Sur un banc à coussin d'air incliné d'un angle α sur l'horizontale, un mobile peut parcourir une distance de 2 m. Le mobile est lâché sans vitesse initiale. Exprimer la durée de la descente en fonction de g et α.

Exercice 28 — B.1

Rechercher dans une encyclopédie des éléments biographiques sur COPERNIC et GALILÉE.

Exercice 29 — B.2

Un mobile de masse m, glisse le long d'un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale. Il subit l'action d'une force de frottement $\vec{F}$, dont la valeur dépend de l'inclinaison du plan selon la loi $F = 0{,}1\ m.g.\cos\alpha$. Le plan incliné est orienté dans le sens de la descente.

1) A partir de quelle inclinaison α_1, le mobile commence-t-il à glisser sur le plan incliné?

2) Pour une inclinaison α, supérieure à α_1, exprimer les accélérations a_d et a_m du mobile lorsqu'il descend ou monte sur le plan incliné.

3) Interpréter le cas où $\alpha = 0$.
Rédiger très soigneusement la solution de cet exercice.

Exercice 30 — B.3

Un objet de masse $m = 2$ kg est au repos à la date $t = 0$. Il subit pendant 2 s l'action d'une force de direction constante, dont la valeur est donnée en fonction du temps par $F = 12t$ (SI). Trouver les expressions de l'accélération $a(t)$, de la vitesse $v(t)$ et de l'abscisse $x(t)$, ainsi que l'expression du travail $W(t)$ de la force, en fonction du temps.

Exercice 31 — B.4

Le vecteur-vitesse d'un mobile est donné en fonction du temps par :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0.t$$

Relativement à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les composantes de $\vec{v}_0$ sont $(2\vec{i}, \vec{j})$ et celles de $\vec{a}_0$ sont $(O, -\vec{j})$. Les valeurs des composantes sont exprimées en $m.s^{-1}$.

1) Dessiner, à l'échelle 1 cm pour $1\ m.s^{-1}$, des flèches de même origine, représentant les vecteurs-vitesse aux dates $t = 0$, $t = 1$ s, $t = 2$ s ... $t = 8$ s.

2) Placer bout à bout les flèches représentant les vecteurs-vitesse précédents. Dessiner soigneusement la trajectoire du mobile.

Exercice 32 — C.1.b

Une règle à coussin d'air de longueur utile d, est inclinée d'un angle α sur l'horizontale. A la date $t = 0$, un mobile de masse m est lâché du haut du banc sans vitesse initiale, et un mobile identique au précédent est lancé avec une vitesse initiale vers le haut.
Déterminer les vitesses des deux mobiles immédiatement après leur choc éventuel. (La conservation de la quantité de mouvement pendant la brève durée du choc sera justifiée.)

Pour en savoir plus

FORCES EXTÉRIEURES ET FORCES INTÉRIEURES DANS LES SYSTÈMES DÉFORMABLES

Les systèmes matériels étudiés dans le cours sont **indéformables,** ce sont des **solides.**
Tous les autres systèmes appartiennent à la catégorie des systèmes **déformables,** tel l'ensemble Terre-satellite qui sera étudié au chapitre 3, ou un système comprenant un ressort.
Expérimentons avec le système déformable constitué de deux cylindres, de masses m_1 et m_2, chacun muni d'un ressort identique, de masse négligeable (fig. 13).
Les deux cylindres, placés sur l'aérotable horizontale, sont rapprochés l'un de l'autre afin de comprimer les ressorts (fig. 14).
L'ensemble est tenu immobile sur la table.
Supposons que les deux solides soient identiques et de même masse ($m_1 = m_2$), le centre d'inertie G du système est le point de contact des deux ressorts. L'origine O du repère lié à la table, est choisi sur la projection de G dans ce plan.
Le repère est considéré comme galiléen.
Le système est alors abandonné à lui-même.
Les deux ressorts se détendent et les solides se séparent.
Leurs centres d'inertie G_1 et G_2 décrivent une trajectoire rectiligne de même direction, mais à tout instant, le centre d'inertie G du système, reste immobile (fig. 15). Interprétons.

1. Bilan des forces

a) Les forces extérieures

Ce sont les poids $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ des deux cylindres, et les réactions $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ que le support exerce sur eux (fig. 16).

b) Les forces intérieures

Les deux ressorts comprimés exercent des forces de tensions $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ sur les deux cylindres. Ce sont ces forces qui les font entrer en mouvement après la séparation. Ce sont des forces d'interaction entre une partie du système et une autre : elles sont dites **forces intérieures** (fig. 16).



Fig. 13

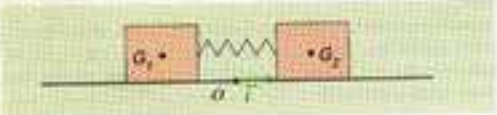


Fig. 14

Et à tout instant, d'après le principe de l'action et de la réaction la somme $\vec{T}_1 + \vec{T}_2$ est nulle, donc :

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \Sigma \vec{f}_{int} = \vec{0}.$$

Pour ce système, **la somme, $\Sigma \vec{f}_{int}$, des forces intérieures est nulle à tout instant.**
Ce résultat est général.
Dans le cas d'un solide, ce sont les forces intérieures au système qui assurent sa cohésion.

2. Relation $\Sigma \vec{f} = m \cdot \vec{a}_G$

La somme vectorielle de toutes les forces agissant sur le système (fig. 17) est :

$$\Sigma \vec{f} = \vec{P} + \vec{R} + \Sigma \vec{f}_{int}. \quad \text{Or} \quad \Sigma \vec{f}_{int} = \vec{0},$$

donc $\Sigma \vec{f} = \vec{P} + \vec{R}$.

$\Sigma \vec{f}$ est la somme des forces extérieures :

$$\Sigma \vec{f} = \Sigma \vec{f}_{ext}.$$

Dans le cas particulier de cet exemple, $\Sigma \vec{f}_{ext} = \vec{0}$,

donc : $$\vec{a}_G = \frac{\Sigma \vec{f}_{ext}}{m} = \vec{0}.$$

La primitive de $\vec{a}_G$ est $\vec{v}_G$. C'est un vecteur constant.
Comme le système a été abandonné immobile (conditions initiales) $\vec{v}_G = \vec{0}$, le centre d'inertie du système **reste au repos,** bien que les deux cylindres munis des ressorts entrent en mouvement en se séparant.

Donc, dans un repère galiléen, le **mouvement du centre d'inertie d'un système** quelconque est **déterminé par les forces extérieures** exercées sur les différentes parties du système :

$$\Sigma \vec{f}_{ext} = m \cdot \vec{a}_G.$$

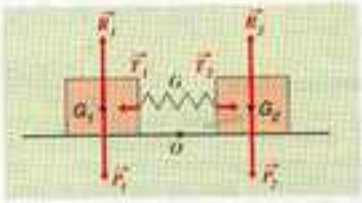


Fig. 16

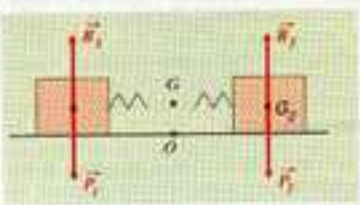


Fig. 15

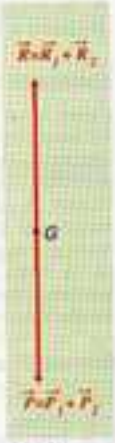


Fig. 17

3 Interaction gravitationnelle

1. Loi de la gravitation.
2. Champ de gravitation.
3. Champ de gravitation terrestre.
4. Mouvement circulaire des satellites.
5. Mouvement des planètes.



Clair de Terre.
« Il fallait être Newton pour percevoir que la Lune tombe alors que tout le monde voit bien qu'elle ne tombe pas. »
Paul Valéry.

Ce chapitre présente la théorie de la gravitation énoncée par Newton en 1687 et la loi célèbre qui maintenant porte son nom.

1 LOI DE LA GRAVITATION

1. Définition de l'interaction gravitationnelle

Du fait de leurs **masses,** les corps sont en interaction gravitationnelle.
Celle-ci se traduit par des forces attractives dites **forces gravitationnelles.**
Pour deux corps ponctuels, situés en A_1 et A_2, à la distance r l'un de l'autre (fig. 1), $\vec{F}_{2\to1}$ est la force que le corps de masse m_2 exerce sur le corps de masse m_1, et inversement $\vec{F}_{1\to2}$ est la force exercée par le corps de masse m_1 sur le corps de masse m_2.
Ces deux forces gravitationnelles vérifient le principe des actions réciproques (ou principe de l'action et de la réaction), soit :

$$\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$$

elles ont donc même valeur F.

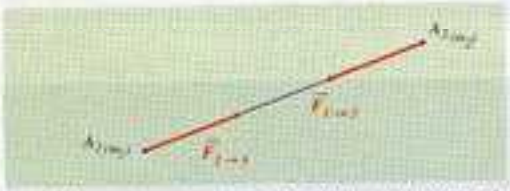


Fig. 1. *Les masses m_1 et m_2 des deux corps ponctuels distants de r développent les forces gravitationnelles $\vec{F}_{1\to2}$ et $\vec{F}_{2\to1}$.*

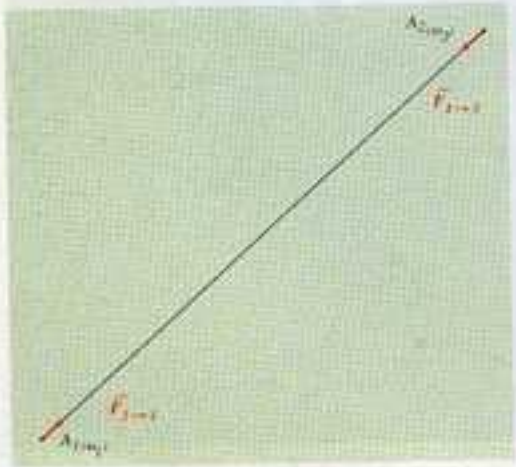


Fig. 2. *Les deux corps précédents sont séparés par une distance double : $2r$. Les forces sont quatre fois plus faibles.*

Ainsi, la Terre attire la Lune avec une force opposée à la force d'attraction de la Lune sur la Terre.

2. Loi de la gravitation

Les forces gravitationnelles sont proportionnelles aux masses m_1 et m_2 en présence et varient en fonction de leur distance r, en $\frac{1}{r^2}$ (fig. 2).

La loi de la gravitation s'exprime alors par la relation :

$$F = G.\frac{m_1.m_2}{r^2}.$$

m en kilogramme (kg)
r en mètre (m)
F en newton (N).

Elle s'énonce :

> Deux corps ponctuels, exercent l'un sur l'autre, des forces attractives proportionnelles à leurs masses et inversement proportionnelles au carré de leur distance.

G est appelé **constante de la gravitation.**
Sa valeur est :

$$G = 6{,}672\,59 \times 10^{-11}\ \mathrm{N.m^2.kg^{-2}}.$$

Il s'agit d'une constante universelle.

C'est Newton vers 1667, qui le premier a énoncé une loi en $\frac{1}{r^2}$, à partir des observations de Kepler sur le mouvement des planètes.

3. Caractère universel

La théorie de l'attraction gravitationnelle a trouvé d'abord sa confirmation dans l'observation du mouvement des planètes du système solaire. Elle fut aussi vérifiée dans des exemples aussi variés que ceux des systèmes suivants :
— les planètes et leurs satellites, par exemple Jupiter et Io (fig. 3);
— le Soleil et les comètes, telle la comète de Halley (fig. 4);
— les étoiles d'une galaxie, par exemple Andromède (fig. 5);
— les galaxies entre elles;
— et aussi dans l'infiniment petit, comme entre les atomes d'une molécule.
Dès qu'il y a des masses en présence il y a attraction gravitationnelle, d'où le qualificatif *universel* joint à la très célèbre loi qui porte maintenant le nom de Newton.

Ce chapitre présente la théorie de la gravitation énoncée par Newton en 1687 et la loi célèbre qui maintenant porte son nom.

1 LOI DE LA GRAVITATION

1. Définition de l'interaction gravitationnelle

Du fait de leurs **masses,** les corps sont en interaction gravitationnelle.
Celle-ci se traduit par des forces attractives dites **forces gravitationnelles.**
Pour deux corps ponctuels, situés en A_1 et A_2, à la distance r l'un de l'autre (fig. 1), $\vec{F}_{2\to1}$ est la force que le corps de masse m_2 exerce sur le corps de masse m_1, et inversement $\vec{F}_{1\to2}$ est la force exercée par le corps de masse m_1 sur le corps de masse m_2.
Ces deux forces gravitationnelles vérifient le principe des actions réciproques (ou principe de l'action et de la réaction), soit :

$$\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$$

elles ont donc même valeur F.

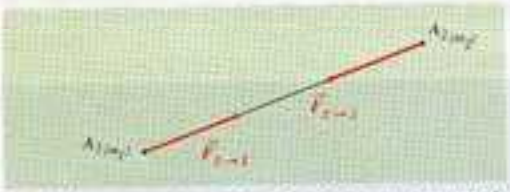


Fig. 1. *Les masses m_1 et m_2 des deux corps ponctuels distants de r développent les forces gravitationnelles $\vec{F}_{1\to2}$ et $\vec{F}_{2\to1}$.*

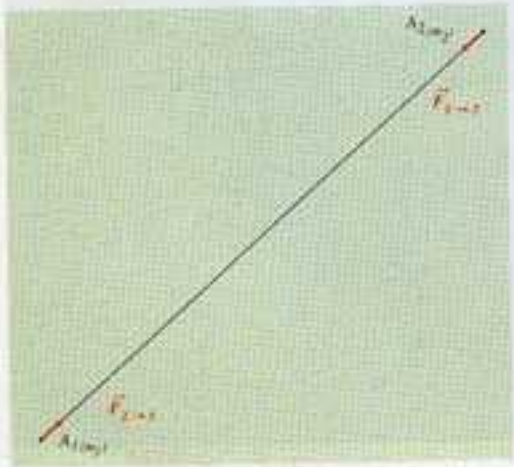


Fig. 2. *Les deux corps précédents sont séparés par une distance double : $2r$. Les forces sont quatre fois plus faibles.*

Ainsi, la Terre attire la Lune avec une force opposée à la force d'attraction de la Lune sur la Terre.

2. Loi de la gravitation

Les forces gravitationnelles sont proportionnelles aux masses m_1 et m_2 en présence et varient en fonction de leur distance r, en $\frac{1}{r^2}$ (fig. 2).

La loi de la gravitation s'exprime alors par la relation :

$$F = G.\frac{m_1.m_2}{r^2}.$$

m en kilogramme (kg)
r en mètre (m)
F en newton (N).

Elle s'énonce :

> Deux corps ponctuels, exercent l'un sur l'autre, des forces attractives proportionnelles à leurs masses et inversement proportionnelles au carré de leur distance.

G est appelé **constante de la gravitation.**
Sa valeur est :

$$G = 6{,}672\,59 \times 10^{-11}\ \mathrm{N.m^2.kg^{-2}}.$$

Il s'agit d'une constante universelle.

C'est Newton vers 1667, qui le premier a énoncé une loi en $\frac{1}{r^2}$, à partir des observations de Kepler sur le mouvement des planètes.

3. Caractère universel

La théorie de l'attraction gravitationnelle a trouvé d'abord sa confirmation dans l'observation du mouvement des planètes du système solaire. Elle fut aussi vérifiée dans des exemples aussi variés que ceux des systèmes suivants :
— les planètes et leurs satellites, par exemple Jupiter et Io (fig. 3);
— le Soleil et les comètes, telle la comète de Halley (fig. 4);
— les étoiles d'une galaxie, par exemple Andromède (fig. 5);
— les galaxies entre elles;
— et aussi dans l'infiniment petit, comme entre les atomes d'une molécule.
Dès qu'il y a des masses en présence il y a attraction gravitationnelle, d'où le qualificatif *universel* joint à la très célèbre loi qui porte maintenant le nom de Newton.



Fig. 3. *Jupiter et son satellite Io.*



Fig. 4. *Comète de Halley.*

4. Quelques valeurs de forces gravitationnelles

Calculées à partir de la relation de la gravitation :

$$F = G.\frac{m_1.m_2}{r^2},$$

le tableau ci-dessous, donne quelques valeurs de forces gravitationnelles développées entre deux corps.

Forces gravitationnelles développées entre deux corps			
Corps	Masse (kg)	Distance (m)	Valeurs des forces (N)
Soleil Terre	2×10^{30} 6×10^{24}	$1{,}5\times10^{11}$	$\frac{6{,}67\times10^{-11}\times2\times10^{30}\times6\times10^{24}}{(1{,}5\times10^{11})^2}=3{,}6\times10^{22}$
Terre Lune	6×10^{24} $7{,}35\times10^{22}$	$3{,}85\times10^{8}$	2×10^{20}
Terre Individu	6×10^{24} 60	$6{,}4\times10^{6}$	600
deux individus	60	1	$2{,}4\times10^{-7}$
proton électron	$1{,}67\times10^{-27}$ $9{,}1\times10^{-31}$	53×10^{-12}	$3{,}6\times10^{-47}$

Dans le dernier exemple, les forces électrostatiques développées entre les deux particules portant des charges électriques, sont environ 2×10^{39} fois plus fortes que les forces gravitationnelles, et elles les masquent. En effet la force électrostatique est donnée par :

$$F = 9\times10^{9}\,\frac{q.q'}{r^2},$$

soit dans ce cas :

$$F=\frac{9\times10^{9}\times(1{,}6\times10^{-19})^2}{(53\times10^{-12})^2}\approx 8{,}2\times10^{-8}\ \text{N}.$$

Mais selon le signe des charges, la force électrostatique peut être attractive ou répulsive, tandis que la force gravitationnelle est toujours attractive.

D'une façon générale, entre particules élémentaires chargées, les interactions gravitationnelles sont négligeables devant les interactions électrostatiques. Par contre, à l'échelle macroscopique, la force gravitationnelle devient prépondérante, car la matière est électriquement neutre.



Fig. 5. *Les étoiles de la galaxie Andromède restent assemblées par gravitation.*

2 CHAMP DE GRAVITATION

1. Vecteur champ de gravitation

Deux corps ponctuels de masses M et m, situés respectivement en O et en A, distants de r, (fig. 6) interagissent.
Le corps en A est soumis à la force attractive :

$$F = G.\frac{M.m}{r^2}$$

selon la loi de la gravitation.

Si $\vec{u}$, est le vecteur unitaire de la droite OA orientée de O vers A, le vecteur-force en A s'écrit :

$$\vec{F} = -G.\frac{M.m}{r^2}.\vec{u}.$$

Le rapport $\frac{\vec{F}}{m}$ est indépendant de la masse m.

Ce quotient $\frac{\vec{F}}{m} = \vec{\mathcal{G}}_{A(M)}$ est appelé **vecteur-champ de gravitation.**
Il exprime une propriété de l'espace au point A qui traduit l'influence gravitationnelle de la masse M en O, sur une masse quelconque en A.

C'est le vecteur-champ créé par le corps ponctuel de masse M (en O). Son expression en A est :

$$\vec{\mathcal{G}}_{A(M)} = -G.\frac{M}{r_{OA}^2}.\vec{u}.$$

Le vecteur $\vec{\mathcal{G}}_{A(M)}$ est orienté vers la masse M, source du champ de gravitation (fig. 7).
Sa valeur, $\mathcal{G}_{A(M)}$, est proportionnelle à la masse, M, créatrice du champ et inversement proportionnelle au carré de la distance entre cette masse et le point A.

2. Espace champ de gravitation

C'est la région de l'espace où un corps est soumis à une force gravitationnelle.

Il découle de ce qui précède, qu'un corps de masse m, placé en un point où le vecteur champ de gravitation est $\vec{\mathcal{G}}$, subit la force gravitationnelle (fig. 8) :

$$\vec{F} = m.\vec{\mathcal{G}}$$

Dans le cas où un corps est soumis à l'attraction de plusieurs masses M_1, M_2, M_3 (fig. 9) le champ gravitationnel auquel il est soumis, est la somme vectorielle des champs créés par chacune d'elles.

La notion de champ, permet ainsi de ne plus faire apparaître la ou les masses, sources de force.

3. Accélération acquise

Si dans un référentiel galiléen, un corps de masse m n'est soumis qu'à la **seule force** de gravitation $m.\vec{\mathcal{G}}$, son accélération est facilement calculable.

En effet : $m.\vec{\mathcal{G}} = m.\vec{a}$,

donc : $\vec{a} = \vec{\mathcal{G}}$.

Le vecteur-accélération s'identifie au vecteur-champ de gravitation en chaque point du champ.
Il est indépendant de la masse m du corps.
Ce résultat est général : le mouvement d'un corps quelconque soumis aux seules forces de gravitation est indépendant de sa masse.
L'unité SI de $\mathcal{G}$ est donc celle d'une accélération : le mètre par seconde carrée ($m.s^{-2}$).



Fig. 6. *Le corps de masse m, situé en A à la distance r de la masse ponctuelle M, subit la force gravitationnelle :*

$$\vec{F} = -G.\frac{M.m}{r^2}.\vec{u}.$$



Fig. 7. *Le vecteur-champ de gravitation créé en A, par la masse ponctuelle M, à la distance r, de ce point est :*

$$\vec{\mathcal{G}}_{A(M)} = -\vec{G}.\frac{M}{r^2}.\vec{u}.$$



Fig. 8. *Le corps de masse m situé au point A où existe le vecteur-champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}$, subit la force gravitationnelle :*

$$\vec{F} = m.\vec{\mathcal{G}}.$$

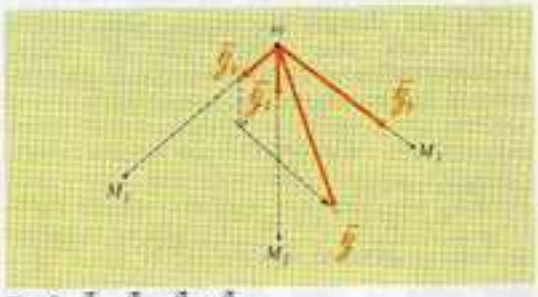


Fig. 9 $\vec{\mathcal{G}} = \vec{\mathcal{G}}_1 + \vec{\mathcal{G}}_2 + \vec{\mathcal{G}}_3$

4. Champ de gravitation créé par une répartition sphérique de masse

Une sphère massive composée de couches homogènes concentriques, possède une répartition de masse ayant une symétrie sphérique.
On démontre que le champ gravitationnel qu'elle crée à l'extérieur, est le même que si toute sa masse était concentrée en son centre (fig. 10).
Le Soleil, les planètes (en particulier notre Terre) et leurs satellites, possèdent cette propriété.

Par exemple, à partir de l'expression $\mathcal{G} = G.\frac{M}{r^2}$

le calcul du champ de gravitation créé par la Terre à la surface de la Lune donne :

$$\mathcal{G}_{(T/L)} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\times6\times10^{24}}{(3{,}85\times10^{8})^2} = 2{,}7\times10^{-3}\ \text{m.s}^{-2},$$

et celui que la Lune crée à la surface de la Terre donne :

$$\mathcal{G}_{(L/T)} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\times7{,}35\times10^{22}}{(3{,}85\times10^{8})^2} = 3{,}3\times10^{-5}\ \text{m.s}^{-2}$$

(les rayons des deux corps célestes ont été négligés par rapport à la distance des centres Terre-Lune).

3 CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

1. Champ créé par la Terre

La Terre, assimilée à une sphère de centre O, de rayon R_T et de masse M_T, crée dans l'espace qui l'entoure un champ de gravitation.
Comme elle a une symétrie sphérique de masse, le vecteur-champ de gravitation en un point A de cet espace, est défini par :

$$\vec{\mathcal{G}}_A = -G.\frac{M_T}{r^2}.\vec{u} \quad \text{avec} \quad r = d(O, A) = R_T.$$

En l'absence de toute autre masse, il peut être représenté comme l'indique la figure 11.
Tous les vecteurs-champ sont **centripètes**, c'est-à-dire dirigés vers le centre O de la Terre.
En fait, les champs de gravitation de la Lune et du Soleil se superposent à celui de la Terre.

Mais au voisinage de la Terre ils sont beaucoup plus faibles et seront ici négligés, bien qu'ils soient responsables du phénomène des marées.

2. Vecteurs-champ de gravitation terrestre

La valeur et la direction du vecteur-champ de gravitation dépendent du point considéré.

a) Valeur à la surface terrestre

Les points de la surface terrestre sont à la distance R_T du centre de la Terre (6 400 km). $\mathcal{G}_0$ la valeur du champ à ce niveau d'altitude nulle, se calcule aisément :

$$\mathcal{G}_0 = G.\frac{M_T}{R_T^2} = 6{,}67\times10^{-11}\times\frac{6\times10^{24}}{(6{,}4\times10^{6})^2}$$

soit :

$$\mathcal{G}_0 = 9{,}8\ \text{m.s}^{-2}.$$

Le champ de gravitation à la surface d'autres corps célestes, se calcule de la même façon.

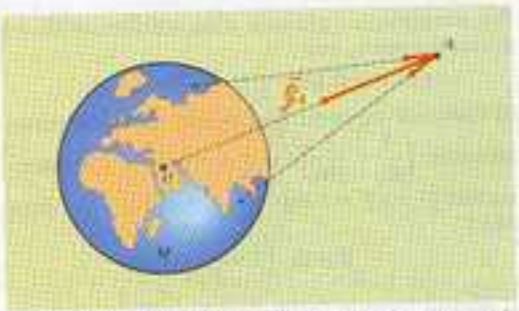


Fig. 10 a. *Chaque masse élémentaire de la Terre crée en A un champ gravitationnel. Leur ensemble est le vecteur-champ $\vec{\mathcal{G}}_A$ créé par la Terre de masse M_T.*

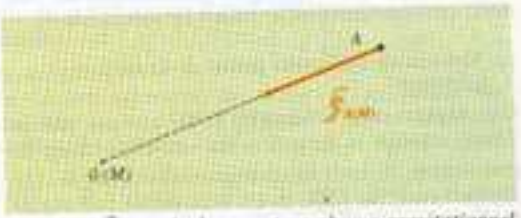


Fig. 10 b. *$\vec{\mathcal{G}}_A$ est égal au vecteur-champ gravitationnel créé en A par la masse M située en O à la distance r de A.*

$$\vec{\mathcal{G}}_{A/M} = -G.\frac{M}{r^2}\vec{u}.$$



Fig. 11. *Les vecteurs-champ de gravitation de la Terre sont centripètes.*

b) Valeurs à différentes altitudes

Si h est l'altitude d'un point, sa distance au centre de la Terre est : $r = R_T + h$ (fig. 12).

Alors, $$\mathcal{G} = G.\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

En faisant apparaître le rapport $\frac{h}{R_T}$ il vient :

$$\mathcal{G} = G.\frac{M_T}{R_T^2.\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2}$$

En introduisant $\mathcal{G}_0$ il vient :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0.\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^{-2}.$$

Par exemple, à l'altitude d'un satellite artificiel géostationnaire, soit :

$$h = 36\,000 \text{ km}, \quad \mathcal{G} = 0{,}22 \text{ m.s}^{-2}.$$

Si l'*altitude* du point *reste faible* devant le rayon terrestre $\left(\frac{h}{R_T} < \frac{1}{100}\right)$, soit $h < 64$ km, l'approximation $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n.\varepsilon$ est possible. $\mathcal{G}$ s'écrit alors :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0.\left(1-\frac{2h}{R_T}\right).$$

$\mathcal{G}$ décroît lorsque l'altitude augmente, mais cette variation reste faible.

C'est ainsi que lorsque l'on passe de 0 à 8 km (hauteur des plus hautes montagnes), $\mathcal{G}$ décroît de 9,8 à 9,7775 m.s^{-2}.

Une variation, de quelques kilomètres, ne fait donc pratiquement pas varier la valeur de $\mathcal{G}$.

c) Valeurs en différents points de la surface terrestre

Un déplacement (fig. 13) à la surface de la Terre, change la direction du vecteur-champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}$, mais ce changement est faible. Un déplacement de 1850 m en latitude ne fait varier la direction de $\vec{\mathcal{G}}$ que d'une minute d'angle.

Dans un espace de dimensions limitées (quelques km^3), *les vecteurs-champ de gravitation terrestre* sont donc pratiquement *constants* en valeur, direction et sens : le **champ est dit uniforme.**

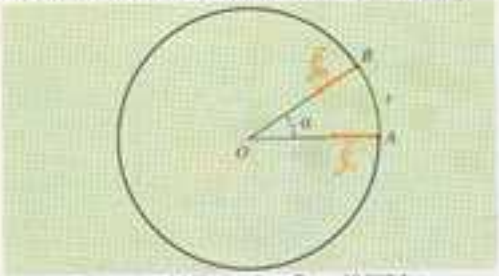


Fig. 13. *Pour* $\alpha = 360°$, $s = 2\pi.R_T = 40\,000$ km,

pour $\alpha = 1'$, $s = \frac{40\,000}{360 \times 60} = 1{,}85$ km $= 1\,850$ m,

c'est la définition du mille marin fixé à 1 852 m.

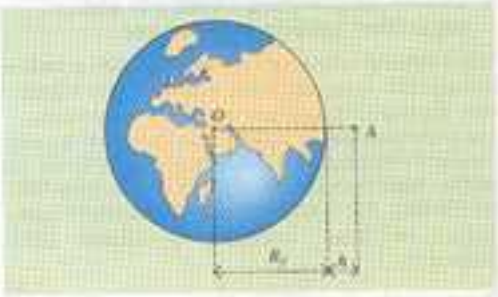


Fig. 12. $d(O, A) = r$ avec $r = R_T + h$.

3. Champ de gravitation terrestre et champ de pesanteur

La valeur du champ de gravitation terrestre à l'altitude nulle : $\mathcal{G}_0 = 9{,}8$ m.s^{-2}, nous conduit à la confondre avec la valeur g_0 de l'intensité de la pesanteur en ce lieu.

On montre que le vecteur-champ de pesanteur $\vec{g}$, en un point quelconque, est donné par l'expression :

$$\vec{g} = \vec{\mathcal{G}} + \vec{\varepsilon},$$

le terme additionnel $\vec{\varepsilon}$ étant dû à la rotation de la Terre. Le poids d'un corps $\vec{P} = m.\vec{g}$, n'est donc pas rigoureusement identique à la force gravitationnelle $m.\vec{\mathcal{G}}$, que la Terre exerce sur lui.

Cependant le terme ε est faible par rapport à $\mathcal{G}$, comme le montre l'application numérique (fig. 14).

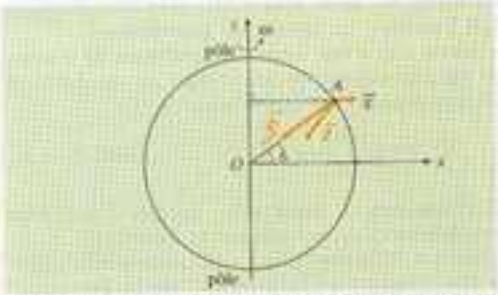


Fig. 14. *Le vecteur-champ de pesanteur* $\vec{g}$ *au point A est la somme vectorielle de deux termes :* $\vec{g} = \vec{\mathcal{G}} + \vec{\varepsilon}$.

Si A est à la surface terrestre $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 = 9{,}8$ m.s^{-2}. *La position de A est définie par sa latitude* λ.

On montre que ε *vaut* $\omega^2.R_T.\cos\lambda$, ω *étant la vitesse angulaire de rotation de la Terre.*

Par exemple, si $\lambda = 45°$,

$$\varepsilon = \left(\frac{2\pi}{86\,164}\right)^2 \times 6{,}4 \times 10^6 \times \cos 45 = 0{,}024 \text{ m.s}^{-2}$$

donc $\varepsilon \ll \mathcal{G}$ *et* $\vec{g} = \vec{\mathcal{G}}$.

En pratique, en un lieu donné, **le champ de pesanteur est assimilé au champ de gravitation de la Terre** :

$$\vec{g} \approx \vec{\mathcal{G}}$$

et le **poids d'un corps est assimilé à la force de gravitation qui agit sur lui** :

$$m.\vec{g} \approx m.\vec{\mathcal{G}}$$

4 MOUVEMENT CIRCULAIRE DES SATELLITES

1. Mouvement uniforme

Un grand nombre de satellites artificiels ont été mis sur orbite autour de la Terre depuis le 4 octobre 1957, date du lancement du premier satellite Spoutnik 1 (fig. 15).
Dans le référentiel géocentrique galiléen, les satellites décrivent des trajectoires elliptiques ou des trajectoires circulaires.
Nous nous limiterons ici à l'étude des satellites ayant une trajectoire circulaire autour du centre de la Terre. Un satellite supposé ponctuel, de masse m, dans le champ de gravitation terrestre, *est soumis à une seule force*, la **force gravitationnelle** que la Terre exerce sur lui :

$$\vec{F} = -G.\frac{M_T.m}{r^2}.\vec{u},$$

r étant le rayon de la trajectoire du satellite. Cette force $\vec{F}$ est constamment dirigée vers le centre de la Terre, elle est **centripète**.

La relation $\Sigma\vec{f} = m.\vec{a}$, se réduit ici à $\vec{F} = m.\vec{a}$, d'où $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.



Fig. 15. Météosat P2 au centre spatial de Kourou (Guyane) lancé le 7 mars 1989.

Dans la base de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{n})$ liée au satellite (fig. 16), $\vec{F}$ et $\vec{a}$ se projettent selon :

$$\vec{F}\begin{cases} F_\tau = 0 \\ F_n = G.\frac{M_T.m}{r^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{a}\begin{cases} a_\tau = 0 \\ a_n = G.\frac{M_T}{r^2} \end{cases}$$

Or $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, donc $\frac{dv}{dt} = 0$.

La valeur v de la vitesse du satellite est constante. Le mouvement du satellite est circulaire **uniforme**.

2. Vitesse du satellite

Dans un mouvement circulaire uniforme, vitesse et accélération normale sont liées par :

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Or : $$a_n = G.\frac{M_T}{r^2},$$

d'où : $$\frac{v^2}{r} = G.\frac{M_T}{r^2},$$

et $$v = \sqrt{\frac{G.M_T}{r}} \quad \text{avec} \quad r = R_T + h.$$

La vitesse du satellite est indépendante de sa masse et elle est d'autant plus faible, qu'il est situé sur une orbite plus haute (d'altitude plus grande).
Par exemple pour une altitude $h = 600$ km (avec $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg et $R_T = 6\,400$ km) la vitesse du satellite est : $v = 7{,}55$ km.s^{-1}.

Remarque :
En faisant apparaître la valeur g_0 du champ de pesanteur au sol, dans l'expression de la vitesse du satellite, il vient,

avec : $g_0 = G.\frac{M_T}{R_T^2}$ et $G.M_T = g_0.R_T^2$,

$$v = \sqrt{\frac{g_0.R_T^2}{r}},$$

soit : $$v = R_T.\sqrt{\frac{g_0}{r}} = R_T.\sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}}.$$



Fig. 16. Le satellite en S est soumis à la seule force $\vec{F}$ de gravitation que la Terre exerce sur lui.

3. Période du mouvement du satellite

La période, durée pour effectuer un tour, est :

$$T = \frac{2\pi . r}{v}$$

Or, $v = \sqrt{G . \frac{M_T}{r}}$. En remplaçant v par sa valeur, et en élevant au carré, il vient :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 . r^3}{G . M_T}$$

D'où :

$$T = 2\pi . \sqrt{\frac{r^3}{G . M_T}}$$

La période du mouvement est indépendante de la masse du satellite et elle est d'autant plus grande, qu'il tourne à plus haute altitude.
Pour une altitude $h = 600$ km on trouve une période $T = 5\,816$ s, soit 1 h 36 min 56 s.

Remarque :

Avec $g_0 = \frac{G . M_T}{R_T^2}$, ou $G . M_T = g_0 . R_T^2$, et $r = R_T + h$, l'expression précédente de la période s'écrit :

$$T = 2\pi . \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_0 . R_T^2}}$$

4. Satellites géostationnaires

Dans un repère géocentrique galiléen, les satellites qui tournent dans le sens de rotation de la Terre avec la *même vitesse angulaire* qu'elle, apparaissent *fixes*. Ces satellites sont par suite, appelés **géostationnaires.** Grâce à cette propriété de fixité apparente, ils sont utilisés pour assurer des communications intercontinentales permanentes.
La période T de leur révolution est de 1 jour sidéral, soit 23 h 56 min 4 s ou 86 164 s.
On montre que ces satellites sont nécessairement *sur une orbite circulaire dans le plan équatorial terrestre* (fig. 17).
Cette orbite particulière est à une *altitude déterminée*, qui se calcule à partir de la relation reliant la période au rayon de l'orbite :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 . r^3}{G . M_T}$$

soit,

$$r^3 = \frac{T^2 . G . M_T}{4\pi^2}$$

et :

$$r = \left(\frac{T^2 . G . M_T}{4\pi^2}\right)^{1/3},$$

$$r = 4{,}22 \times 10^7 \text{ m}.$$

L'altitude de cette orbite est donc :

$$h = 42\,200 - 6\,400 = 35\,800 \text{ km}.$$

La vitesse de tout satellite géostationnaire y est de :

$$v = R_T . \sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}} \approx 3 \text{ km} . \text{s}^{-1}.$$

Plus de 150 satellites sont actuellement sur l'orbite géostationnaire, celle-ci devenant une piste très encombrée. (Voir « Pour en savoir plus ».)
Les satellites non géostationnaires ont, en général, des orbites elliptiques, qui leur permettent une surveillance détaillée de divers points de la Terre. Ils ont reçu des applications particulières, puisqu'ils s'approchent davantage de la Terre.
C'est ainsi que le satellite SPOT-1 lancé par Ariane le 22 février 1986 permet d'obtenir des photos précises (fig. 18), à 832 km d'altitude seulement.

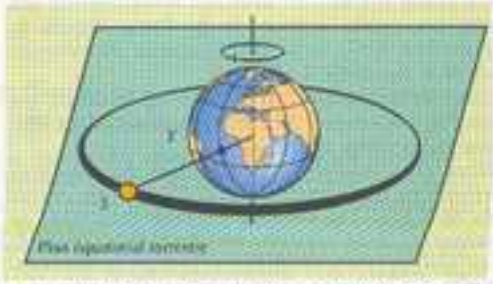


Fig. 17. *L'orbite d'un satellite géostationnaire est circulaire, dans le plan équatorial terrestre, à l'altitude de* 35 800 km.

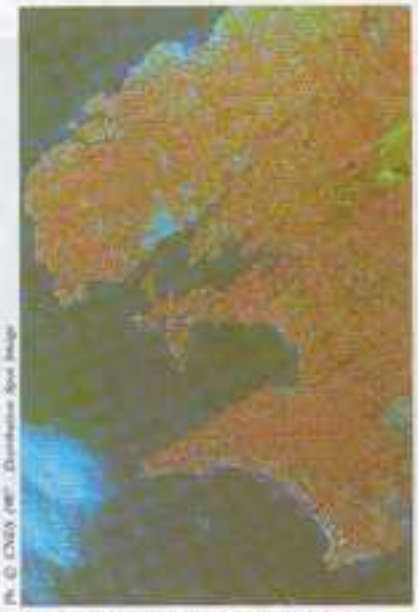


Fig. 18. *Photo prise par le satellite Spot.*

5. Impesanteur

Chacun a observé des cosmonautes en évolution dans l'espace de leur cabine, ou en dehors du satellite artificiel. Dans le référentiel de la cabine le *poids apparent* du cosmonaute est *nul* : il est dit en **état d'impesanteur.**

Ceci est dû au fait, que le cosmonaute et sa cabine, sont satellisés de la même façon, puisque dans un champ gravitationnel, les accélérations, donc les mouvements, sont indépendants des masses des corps satellisés.

Ceci ne s'observe strictement qu'au centre d'inertie du satellite, quelle que soit la masse du cosmonaute. Mais l'impesanteur cesse si les moteurs-fusées du satellite fonctionnent, car le satellite et le cosmonaute ne sont plus soumis aux mêmes influences.

Les effets physiologiques de l'impesanteur, demandent une mise en condition des cosmonautes, qu'ils reçoivent dans des avions en vol balistique, où pendant quelques minutes, ils sont en état d'impesanteur.

Cet état pourrait également s'observer dans un ascenseur en chute libre!



Fig. 19. *Une planète du système solaire décrit une trajectoire elliptique dont le Soleil occupe l'un des foyers.*
Elle est à sa distance maximale du Soleil r_{max} en A (aphélie) et à sa distance minimale r_{min} en P (périhélie). Le demi-grand axe correspond à la distance moyenne de la planète au Soleil :

$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2}$$

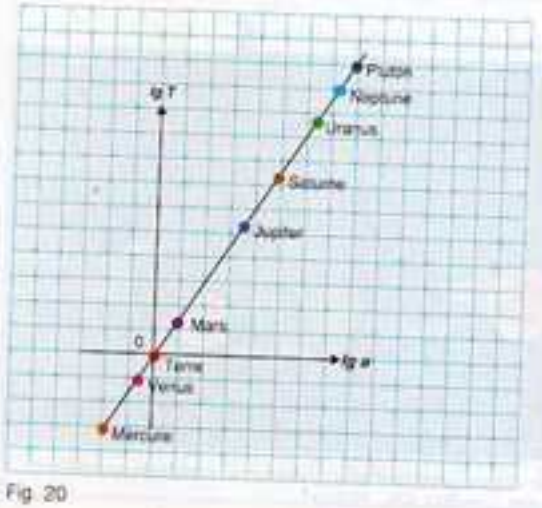


Fig. 20

5 MOUVEMENT DES PLANÈTES

1. La troisième loi de Kepler

La relation $T^2 = \frac{4\pi^2 . r^3}{G . M_T}$ exprimant la période du mouvement des satellites artificiels de la Terre, peut encore s'écrire sous la forme :

$$\frac{T^2}{r^3} = C_T \quad \text{avec} \quad C_T = \frac{4\pi^2}{G . M_T}$$

C_T, est une constante, qui ne dépend que de la masse M_T de la Terre et pas de celle du satellite.

Dès 1618, Kepler avait établi une loi du même type, à partir des mesures de la période T de révolution d'une planète autour du Soleil et de sa distance moyenne a, au Soleil :

$$\frac{T^2}{a^3} = C_S$$

C_S, est une constante, qui ne dépend que de la masse M_S du Soleil et qui est indépendante de la masse des planètes : $C_S = \frac{4\pi^2}{G . M_S}$. Cette loi est vérifiée pour *toutes* les planètes du système solaire et plus généralement pour *tout* corps gravitant autour d'un autre, par exemple une comète autour du Soleil.

Elle s'applique aussi aux planètes d'orbite elliptique (fig. 19). Dans ce cas, a, représente la distance moyenne au Soleil, c'est-à-dire le demi-grand axe de l'ellipse.

Le tableau des valeurs des périodes de révolution des planètes et de leurs distances moyennes au Soleil, permet de vérifier la troisième loi de Kepler. En calculant les logarithmes décimaux des membres de l'expression $\frac{T^2}{a^3} = C_S$, il vient :

$$\lg T = \frac{3}{2} \lg a + \frac{1}{2} \lg C_S$$

La courbe de $\lg T$ en fonction de $\lg a$ montre l'alignement des points obtenus (fig. 20).

Planète	Demi-grand axe a (UA)	Période T (ans et jours)
Mercure	0,39	88 j
Vénus	0,72	225 j
Terre	1,00	1 an
Mars	1,52	1 an 322 j
Jupiter	5,20	11 ans 315 j
Saturne	9,55	29 ans 161 j
Uranus	19,22	84 ans 7 j
Neptune	30,11	164 ans 280 j
Pluton	39,52	248 ans 157 j

Comme l'indique ce tableau, l'unité astronomique (UA) est la longueur du demi-grand axe de l'ellipse terrestre :

$$1 \text{ UA} = 1{,}496 \times 10^{11} \text{ m}.$$

2. Cette loi est générale

Appliquée par exemple à deux satellites de Jupiter, Io et Europe, la troisième loi de Kepler s'écrit :

$$\frac{T_{Io}^2}{r_{Io}^3} = \frac{T_{Europe}^2}{r_{Europe}^3} = C_J$$

T_{Io} et T_{Europe} sont les périodes de révolution des satellites de Jupiter; r_{Io} et r_{Europe} sont les demi-grands axes des trajectoires de ces satellites autour de Jupiter; la constante C_J ne dépend que de la masse M_J de Jupiter :

$$C_J = \frac{4\pi^2}{G.M_J}$$

3. Applications

a) Rapport des masses de corps célestes

La troisième loi de Kepler permet de déterminer le rapport de la masse d'une planète possédant des satellites, à la masse du Soleil.

Il suffit de considérer le Soleil de masse M_S et la planète de masse M_P parcourant une orbite de demi-grand axe a, avec la période T.

On a alors :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_S} \quad \text{soit :} \quad M_S = \left(\frac{4\pi^2}{G}\right).\left(\frac{a^3}{T^2}\right).$$

Si le satellite de la planète décrit une orbite de demi-grand axe a', avec la période T', on a :

$$\frac{T'^2}{a'^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_P}, \quad \text{soit :} \quad M_P = \left(\frac{4\pi^2}{G}\right).\left(\frac{a'^3}{T'^2}\right).$$

D'où le rapport de la masse de la planète à la masse du Soleil :

$$\frac{M_P}{M_S} = \left(\frac{a'}{a}\right)^3.\left(\frac{T}{T'}\right)^2.$$

Les mesures de a, a', T et T' permettent de déterminer le rapport de la masse de la planète à celle du Soleil.

b) Mesure de la masse d'un corps céleste

• La valeur de la masse du Soleil peut être calculée à partir de l'expression $M_S = \frac{4\pi^2}{G}.\frac{a^3}{T^2}$ connaissant les valeurs de a et T d'une de ses planètes et la valeur de la constante de gravitation G.

Par exemple, à partir des données relatives à la Terre : $a_T = 1{,}5 \times 10^{11}$ m (valeur moyenne), $T_T = 1$ an $= 3{,}16 \times 10^7$ s, il vient :

$$M_S = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11}}.\frac{(1{,}5 \times 10^{11})^3}{(3{,}16 \times 10^7)^2} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

• La valeur de la masse d'une planète avec satellite, se déduit alors de l'expression $\frac{M_P}{M_S}$ connaissant a, a', T et T', ou directement de l'expression $M_P = \frac{4\pi^2}{G}.\frac{a'^3}{T'^2}$.

Remarque :

La masse de la Terre pourrait aussi être calculée à partir de l'expression :

$$g_0 = G.\frac{M_T}{R_T^2},$$

soit :

$$M_T = g_0.\frac{R_T^2}{G} = \frac{9{,}8 \times (6{,}4 \times 10^6)^2}{6{,}67 \times 10^{-11}} = 6 \times 10^{24} \text{ kg}.$$

De toute façon, *la détermination de la masse d'une planète, passe par la connaissance de la valeur de la constante de la gravitation universelle G*, qui a été mesurée pour la première fois en 1797 par Cavendish.

La détermination de la masse d'un corps céleste sans satellite, fait appel aux perturbations mutuelles entre corps célestes voisins, qui entraînent des modifications de trajectoires décelables.

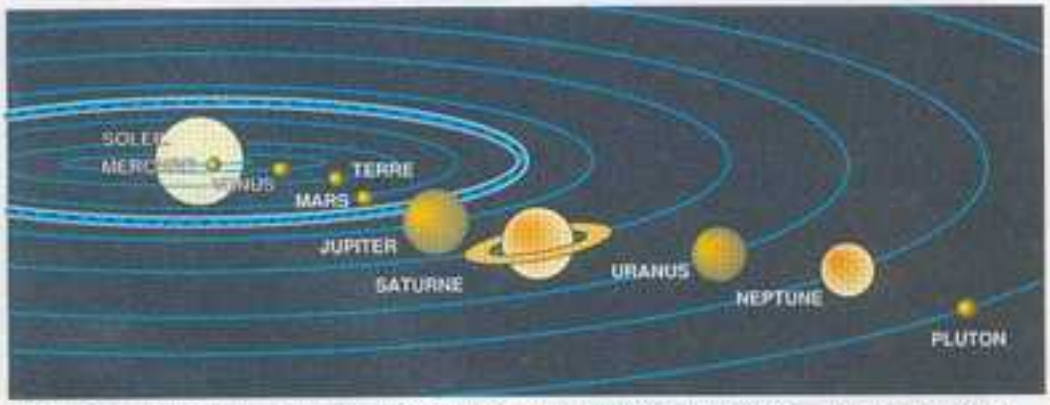


Fig. 21. *Le système solaire est constitué du Soleil autour duquel gravitent neuf planètes — certaines possédant des satellites (ex. Terre, Jupiter) — des astéroïdes et des comètes (ex. Halley).*

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

- Retenir la **loi de la gravitation** :

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}.$$

- Se souvenir qu'une masse m, soumise au vecteur-champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}$ subit la force :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{\mathcal{G}}.$$

- Assimiler **champ de pesanteur et champ de gravitation terrestre** :

$$\vec{g} = \vec{\mathcal{G}}.$$

et mémoriser sa valeur à la surface de la Terre :

$$g_0 = \mathcal{G}_0 = 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

- Être capable d'établir l'expression du champ en altitude :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \cdot \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^{-2}.$$

- Établir l'expression de **la vitesse d'un satellite** en orbite circulaire et l'expression de **sa période**.

- Se rappeler la troisième **loi de Kepler** :

$$\frac{T^2}{a^3} = C^{te}.$$

1. EXERCICES RESOLUS

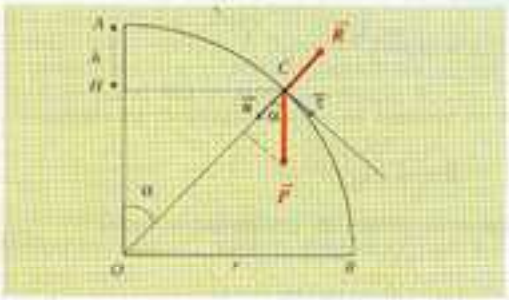
EXERCICE 1

Un skieur, supposé ponctuel, aborde en A une piste circulaire AB avec une vitesse négligeable. AB est dans un plan vertical et représente un quart de circonférence de centre O et de rayon $r = 15$ m.
La piste est verglacée et les frottements sont négligeables.
Le skieur perd le contact avec la piste en un point C, tel que l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \alpha$.

1) Exprimer sa vitesse v_C au point C, en fonction de α, r et g.

2) Calculer numériquement l'angle α.

3) Déterminer le vecteur-vitesse $\vec{v}_C$ du skieur en C.



SOLUTION

1) Expression de la vitesse du skieur au point *C*

Le *système* est le skieur supposé ici ponctuel.
Le *référentiel* galiléen est la piste.
Les forces appliquées au skieur en contact avec la piste sont : son poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$ du support.
La direction de $\vec{R}$ est perpendiculaire à la piste, puisqu'il n'y a pas de frottement.
En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre les points A et C, il vient :

$$E_c(C) - E_c(A) = W_{\vec{P}(A \to C)} + W_{\vec{R}(A \to C)}$$

soit : $\frac{1}{2} m . v_C^2 - 0 = m . g . h + 0$,

h étant la dénivellation entre les niveaux de A et de C. On en déduit :

$$h = AO - HO = r - r . \cos \alpha = r . (1 - \cos \alpha),$$

d'où : $\frac{1}{2} m . v_C^2 = m . g . r . (1 - \cos \alpha)$

et $\boldsymbol{v_C^2 = 2g . r . (1 - \cos \alpha).}$

2) Valeur de l'angle α

Si le skieur est encore en contact avec la piste en C, il est soumis aux deux forces $\vec{P}$ et $\vec{R}$.
Leur somme est $\vec{P} + \vec{R} = \Sigma \vec{F} = m . \vec{a}_G = \vec{F}$.
Leurs coordonnées dans la base de Frenet $(\vec{t}, \vec{n})$, au point C, sont :

$$\vec{P} \begin{cases} P_t = m . g . \sin \alpha \\ P_n = m . g . \cos \alpha \end{cases} \qquad \vec{R} \begin{cases} R_t = 0 \\ R_n = -R \end{cases}$$

et $$\vec{F} \begin{cases} F_t = m . \frac{dv}{dt} \\ F_n = m . \frac{v_C^2}{r} \end{cases}$$

La relation permettant de déterminer v_C est :

$$P_n + R_n = F_n$$

soit : $$m . g . \cos \alpha - R = m . \frac{v_C^2}{r}$$

Or, $$v_C^2 = 2g . r . (1 - \cos \alpha),$$

d'où : $$m . g . \cos \alpha - R = 2 m . g . (1 - \cos \alpha)$$

et $$3m . g . \cos \alpha - R = 2m . g$$

Si le skieur perd le contact avec la piste, la réaction n'existe plus ($R = 0$), et : $3m . g . \cos \alpha = 2m . g$.

d'où : $$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

En C, l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ vaut :

$$\boldsymbol{\alpha = 48°.}$$

Remarquons que cet angle est indépendant de la masse du skieur.

3) Vecteur-vitesse du skieur en *C*

Sa *direction* est celle du vecteur unitaire $\vec{\tau}$, de la tangente en C à la piste, qui fait donc l'angle

$$90° - 48° = 42°,$$

avec la verticale OA.
Son *sens* est toujours celui du mouvement (donc aussi celui de $\vec{\tau}$).

Sa *valeur* est :

$$v_C = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 15 \times (1 - \cos 48)} = \boldsymbol{10\ m . s^{-1}}.$$

Ensuite, le skieur quitte la piste en C et décrit une parabole qui sera étudiée au chapitre suivant.



1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 2

Un satellite artificiel assimilé à un point S, décrit une trajectoire circulaire concentrique au centre O de la Terre. Son altitude est h.
Seule l'interaction gravitationnelle entre Terre et satellite est prise en compte.

1) Montrer que dans un repère géocentrique galiléen, le mouvement du satellite S est uniforme. Exprimer sa vitesse v et sa période de révolution T, en fonction du rayon terrestre R_T, de son altitude h et de l'intensité $\mathcal{G}_0$ du champ de gravitation à la surface de la Terre.

2) Calculer les valeurs de v et T si $\mathcal{G}_0 = 9{,}8\ \text{m.s}^{-2}$, $R_T = 6\,400$ km et $h = 1\,000$ km.

3) Montrer que le quotient $\dfrac{T^2}{(R_T + h)^3} = C^{te}$, ce qui constitue un cas particulier de la troisième loi de Kepler.

4) Le centre d'inertie de la Lune décrit autour de la Terre une orbite assimilée à un cercle, de rayon r_L, avec une période $T_L = 27$ jours 7 heures 43 minutes. En utilisant le résultat précédent, en déduire la valeur de r.

SOLUTION

1) Mouvement uniforme, vitesse v_c et période T

Le système considéré est le satellite artificiel S, de masse m, dont le mouvement est étudié dans un repère géocentrique galiléen, dont l'origine est le centre O de la Terre.
Il est soumis à une seule force : la force de gravitation $\vec{F} = m.\vec{\mathcal{G}}$, centripète.
L'accélération de son mouvement est donc centripète :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{\mathcal{G}}$$

et l'accélération tangentielle a_τ est nulle : $a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = 0$.
Sa vitesse v est constante et son mouvement est uniforme. La valeur de sa vitesse v est obtenue à partir de :

$$a = a_n = \frac{v^2}{r} \quad \text{et de} \quad \mathcal{G} = \frac{G.M_T}{r^2}$$

D'où :

$$v^2 = \frac{G.M_T}{r}$$

Or l'intensité du champ de gravitation à la surface terrestre est :

$$\mathcal{G}_0 = \frac{G.M_T}{R_T^2}$$

Par suite, l'expression de v en fonction de R_T, h et $\mathcal{G}_0$ est :

$$v^2 = \mathcal{G}_0.\frac{R_T^2}{r},$$

soit :

$$v = R_T.\sqrt{\frac{\mathcal{G}_0}{r}},$$

avec

$$r = R_T + h$$

La période T de révolution, se calcule à partir de l'expression :

$$T = \frac{2\pi.r}{v} \quad \text{soit :} \quad T = \frac{2\pi.r^{3/2}}{R_T.\mathcal{G}_0^{1/2}}$$

$$\boldsymbol{T = \frac{2\pi.(R_T + h)^{3/2}}{R_T.\mathcal{G}_0^{1/2}}}.$$

2) Application numérique

$$v = 6{,}4 \times 10^6 \times \sqrt{\frac{9{,}8}{7{,}4 \times 10^6}} = 7{,}36 \times 10^3\ \text{m.s}^{-1}$$

$$\boldsymbol{v \approx 7{,}36\ \text{km.s}^{-1}}.$$

$$T = \frac{2\pi.(7{,}4 \times 10^6)^{3/2}}{6{,}4 \times 10^6 \times 9{,}8^{1/2}} = 6{,}31 \times 10^3\ \text{s}$$

$$\boldsymbol{T = 1\ \text{h}\ 45\ \text{min}}.$$

3) La troisième loi de Kepler

En élevant au carré l'expression de T, il vient :

$$T^2 = \frac{4\pi^2.r^3}{R_T^2.\mathcal{G}_0}$$

En divisant par r^3, on obtient la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{R_T^2.\mathcal{G}_0} = C^{te}$$

$(C^{te} = 0{,}098\,35 \times 10^{-12})$.

4) Distance Terre-Lune

Cette loi, appliquée à la Lune, satellite naturel de la Terre, conduit à :

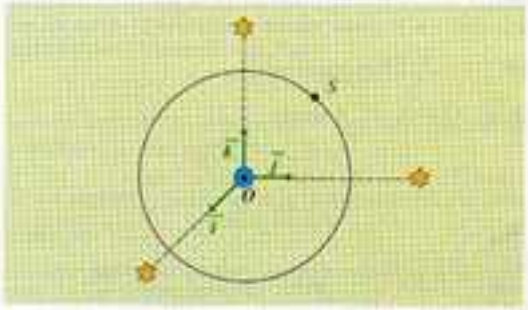
$$\frac{T_L^2}{r_L^3} = C^{te}$$

D'où :

$$r_L = \left(\frac{T_L^2}{C^{te}}\right)^{1/3},$$

$$r_L = \left[\frac{(2\,360\,58 \times 10^6)^2}{0{,}098\,35 \times 10^{-12}}\right]^{1/3},$$

$$\boldsymbol{r_L = 3{,}84 \times 10^8\ \text{m}}.$$



1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 3

C'est pendant sa retraite à Woolsthorpe en 1664, que Newton découvre la loi en $\frac{1}{r^2}$ qui maintenant porte son nom, il avait alors 22 ans!

« Je commençais à penser que la gravité s'étendait à l'orbite de la Lune et à partir de la règle de Kepler sur les temps périodiques des planètes, je déduisais que les forces qui maintiennent les planètes sur leurs orbites doivent être inversement proportionnelles aux carrés de leurs distances au centre autour duquel elles tournent. »

Montrer les étapes du calcul qui ont conduit Newton à établir cette loi.

SOLUTION

Kepler avait établi au début du 17e siècle, à partir des mesures de la période de révolution des planètes autour du Soleil et de leur distance moyenne au Soleil, la relation : $T^2 = C_s \cdot r^3$ où C_s est une constante.

Newton applique aussi cette loi à la Lune qui gravite autour de la Terre sur une orbite sensiblement circulaire de rayon r_L et de période T_L, soit :

$$T_L^2 = C_T \cdot r_L^3$$

Naturellement, les deux constantes C_s et C_T ne sont pas égales, comme le montrent les deux applications numériques :

$$C_s = \frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{(365)^2}{(1{,}5 \times 10^{11})^3} = 4 \times 10^{-34} \text{ pour la planète Terre}$$

et $C_T = \frac{T_L^2}{r_L^3} = \frac{(27{,}325)^2}{(3{,}85 \times 10^8)^3} = 1{,}3 \times 10^{-23}$ pour la Lune.

Ces constantes sont ici exprimées en $jour^2 \cdot m^{-3}$.

Newton pose que c'est la force gravitationnelle attractive que la Terre exerce sur la Lune (de masse m_L), qui permet à celle-ci de rester en rotation autour de la Terre, soit :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \text{avec} \quad a = a_n = \frac{v^2}{r}$$

puisque force $\vec{F}$ et accélération $\vec{a}$ sont centripètes. Or la vitesse v de la Lune sur son orbite circulaire est

$$v = \frac{2\pi \cdot r_L}{T_L}$$

donc

$$F = m_L \cdot \frac{v^2}{r_L} = m_L \cdot \frac{(2\pi \cdot r_L)^2}{r_L \cdot T_L^2}$$

et

$$F = m_L \cdot \frac{4\pi^2 \cdot r_L}{T_L^2}$$

Avec $T_L^2 = C_T \cdot r_L^3$, il vient :

$$F = m_L \cdot \frac{4\pi^2 \cdot r_L}{C_T \cdot r_L^3}$$

ou

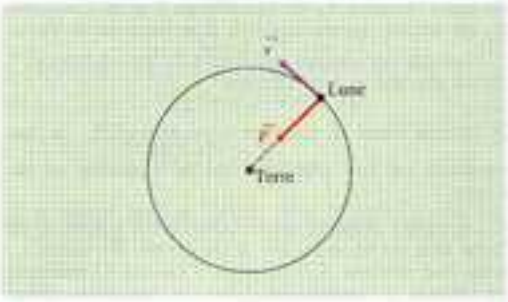
$$F = \frac{4\pi^2 \cdot m_L}{C_T} \cdot \frac{1}{r_L^2}$$

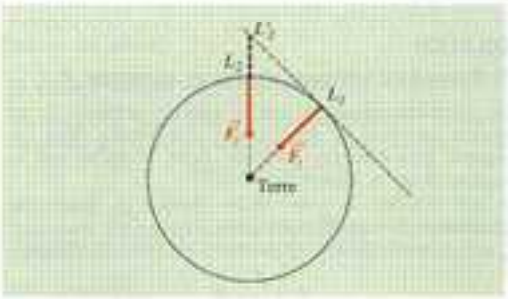
soit : $F = K \cdot \frac{1}{r_L^2}$ avec $K = \frac{4\pi^2 \cdot m_L}{C_T} = C^{te}$

La force attractive est inversement proportionnelle au carré de la distance Terre-Lune.

Si en L_1, la force gravitationnelle n'existait pas, la Lune suivrait la direction L_1L_2' de la tangente. Comme en fait elle reste sur son orbite circulaire, de rayon r_L, elle est tombée de L_2' en L_2, attirée par la Terre.

« *Il fallait être Newton pour percevoir que la Lune tombe alors que tout le monde voit bien qu'elle ne tombe pas* » **Paul Valéry.**





2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATION

Repères galiléens

*** Exercice 1**

1) Définir le repère de Copernic.

2) Le Soleil appartient à un amas d'étoiles nommé Galaxie, ayant la forme d'une lentille.
La vitesse du Soleil par rapport au centre de la Galaxie est environ 3×10^5 m.s^{-1}. Si le Soleil décrit une orbite circulaire, de rayon approximatif 3×10^{20} m, autour du centre galactique, calculer l'accélération de son mouvement.
Votre réponse conduit à assimiler le repère de Copernic à un repère galiléen, qui est sans accélération.

*** Exercice 2**

1) Définir un repère géocentrique galiléen.

2) La Terre décrit autour du Soleil une orbite quasi circulaire, de rayon $r_T = 1{,}50 \times 10^{11}$ m, en un an.
Calculer la vitesse du centre de la Terre autour du Soleil, puis l'accélération de son mouvement.
Comparer à la valeur précédente. Conclure.

*** Exercice 3**

Un référentiel terrestre est-il galiléen? Pour répondre à cette question, montrer, qu'un laboratoire lié à la surface terrestre, subit une accélération due à la rotation diurne terrestre. Calculer sa valeur pour un point situé à la surface de la Terre à l'équateur.
Rayon terrestre $R_T = 6\,400$ km; un jour = $8{,}6 \times 10^4$ s.
Conclure.

Remarque : Cette valeur intervient pour une part dans le fait que l'accélération g de la pesanteur, n'est pas la même aux pôles et à l'équateur ($g_{pôle\ Nord} \sim 9{,}83$ et $g_{Equateur} \sim 9{,}78$ en m.s^{-2}), l'autre part étant due à la forme ellipsoïdale de la Terre.

Valeur du champ de gravitation

*** Exercice 4**

Calculer la valeur des champs de gravitation à la surface des planètes du système solaire.
On donne : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ SI et $R_T = 6\,370$ km.

Planète	Masse (kg)	Rayon moyen (km)
Mercure	$3{,}28 \times 10^{23}$	$0{,}387 R_T$
Vénus	$4{,}83 \times 10^{24}$	$0{,}723 R_T$
Terre	6×10^{24}	$6\,370 = R_T$
Mars	$6{,}37 \times 10^{23}$	$1{,}523 R_T$
Jupiter	$1{,}90 \times 10^{27}$	$5{,}202 R_T$
Saturne	$5{,}67 \times 10^{26}$	$9{,}554 R_T$
Uranus	$8{,}80 \times 10^{25}$	$19{,}218 R_T$
Neptune	$1{,}03 \times 10^{26}$	$30{,}109 R_T$
Pluton	$5{,}4 \times 10^{24}$	$39{,}60\ R_T$

*** Exercice 5**

1) Calculer la valeur du champ de gravitation terrestre aux points d'altitude $h_0 = 0$; $h_1 = 50$ km; $h_2 = 200$ km et $h_3 = 36\,000$ km.

2) A quelle altitude a-t-on $g = \frac{g_0}{2}$?

Masse de la Terre : 6×10^{24} kg.
Rayon terrestre : 6 400 km. $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ SI.

Exercice 6

On considère l'interaction Terre-Lune.

1) Comparer les deux forces de cette interaction.

2) Expliquer pourquoi la valeur du champ de gravitation que la Terre crée à la surface de la Lune, est environ 80 fois plus forte, que celle du champ de gravitation que la Lune crée à la surface terrestre.
Masse de la Terre $M = 6 \times 10^{24}$ kg;
masse de la Lune $m = 7{,}35 \times 10^{22}$ kg;
distance Terre-Lune $r = 3{,}8 \times 10^5$ km;
rayon terrestre $R = 6\,400$ km;
rayon de la Lune $r = 1\,740$ km.

Exercice 7

1) Connaissant le rayon de la Terre R_T et la valeur du champ de gravitation à sa surface $\mathcal{G}_0$, calculer la masse de la Terre.
Données : $R_T = 6\,370$ km; $\mathcal{G}_0 = 9{,}81$ m.s^{-2} et $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ SI.

2) Évaluer la masse volumique moyenne de la Terre en l'assimilant à une sphère homogène (volume d'une sphère $V = \frac{4}{3} \pi . R^3$).

3) Qu'en déduire si la valeur de la masse volumique des couches superficielles de la Terre est voisine de 3×10^3 kg.m^{-3} ?

Exercice 8

Le physicien Niels Bohr a proposé en 1913 un modèle de l'atome d'hydrogène où l'électron, de charge $q = -e$ et de masse m, est en mouvement uniforme sur une orbite circulaire de rayon r centrée sur le proton supposé immobile, de charge $q' = +e$ et de masse m'.

1) Comparer la valeur de la force d'interaction gravitationnelle F qui existe entre ces deux particules, à celle de la force d'interaction électrostatique F', qui est donnée par l'expression :

$$F' = 9 \times 10^9 \frac{q . q'}{r^2}$$

$e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C; $m = 9 \times 10^{-31}$ kg; $m' = 1\,840\ m$ et $r = 53$ pm (1 pico = 10^{-12}).

2) Le rapport $\frac{F'}{F}$ varie-t-il si la distance entre les deux particules varie?

3) Ces forces sont-elles attractives? Peut-il y avoir des forces électrostatiques répulsives?

2. EXERCICES PROPOSES

Satellites

Exercice 9

1) Qu'appelle-t-on satellite géostationnaire?

2) Dans quel plan sa trajectoire est-elle contenue? Quel est son sens de révolution?

3) Calculer son altitude h et la vitesse v avec laquelle il décrit sa trajectoire.

1 jour sidéral = 86 164 s; $g_0 = 9{,}8\ m.s^{-2}$; $R_T = 6\,370$ km.

Exercice 10

Un satellite, de masse $m = 500$ kg, est animé d'un mouvement circulaire uniforme de période

$$T = 1\ h\ 37\ min,$$

sur une orbite de rayon 7 000 km, dont le centre est celui de la Terre.

1) Calculer l'énergie cinétique du satellite supposé en mouvement de translation.

2) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au satellite à deux instants quelconques de son mouvement. Expliquer le résultat.

* Exercice 11

C'est à partir du repérage des positions de la comète qui reçut son nom, que Halley, détermina le rayon moyen (ou demi-grand axe) de son orbite lorsqu'elle s'approcha à nouveau du Soleil en 1759.

$$r_{Halley} = 18.r_{Terre}$$

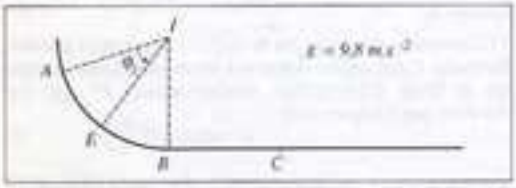
Connaissant la période de révolution de la Terre autour du Soleil en déduire celle de la comète de Halley.

EXERCICES D'APRÈS BACCALAURÉATS

Mouvement circulaire

Exercice 12

Un cube M de masse $m = 1{,}0$ kg assimilable à un point matériel glisse sur une piste formée de 2 parties AB et BC.



AB et BC sont dans un même plan vertical. AB représente $\frac{1}{6}$ de circonférence de centre I et de rayon $r = 15{,}0$ m. Le point I est situé sur la verticale de B. BC est une partie rectiligne de longueur $\ell = 15{,}0$ m. Le cube est lancé en A avec une vitesse initiale $\vec{V}_A$ telle que $V_A = 6{,}0\ m.s^{-1}$.

1) On néglige les frottements. Calculer la vitesse en un point E défini par l'angle:

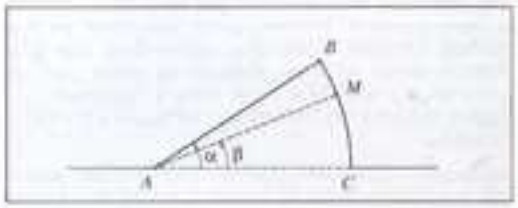
$$\varphi_1 = (\vec{IA}, \vec{IE}) = \frac{\pi}{6}$$

Quelle sont les caractéristiques de la réaction $\vec{N}$ de la piste sur le cube en ce point?

2) En fait, sur le trajet ABC existent des forces de frottements assimilables à une force $\vec{f}$ tangente à la trajectoire d'intensité supposée constante. Le mobile arrive en C avec une vitesse $\vec{V}_C$. Calculer f sachant que $V_C = 12{,}5\ m.s^{-1}$.
On prendra $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.

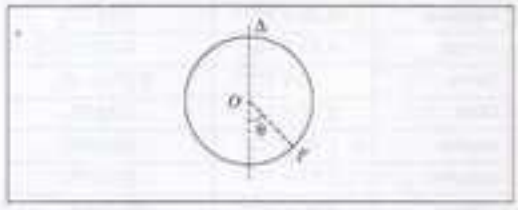
* Exercice 13

Un objet (S) assimilé à un point matériel, aborde sans vitesse, une piste circulaire BC dans un plan vertical, de centre A, de rayon $\ell = AB = 3$ m et d'angle $\widehat{BAC} = \alpha$. La position de l'objet (S) sur la piste circulaire BC est repérée par l'angle $\beta = (\vec{AC}, \vec{AM})$. Les frottements seront négligés.
Exprimer en fonction de ℓ, α, β et g, la vitesse de (S) au point M.
Calculer cette vitesse pour $\beta = 20°$, $\alpha = 30°$, $\ell = 3$ m et $g = 10\ m.s^{-2}$.



* Exercice 14

Un palet (P) coulisse sans frottement sur un anneau circulaire de centre O et de rayon $r = 30$ cm. L'anneau, situé dans un plan vertical tourne à vitesse angulaire ω constante autour de l'axe vertical Δ passant par O. Il effectue un tour par seconde. On repère la position d'équilibre du palet par l'angle θ entre la verticale et OP.



1) Établir l'équation liant θ et ω.

2) Calculer la valeur de l'angle θ (réponse avec 3 chiffres significatifs).

2. EXERCICES PROPOSES

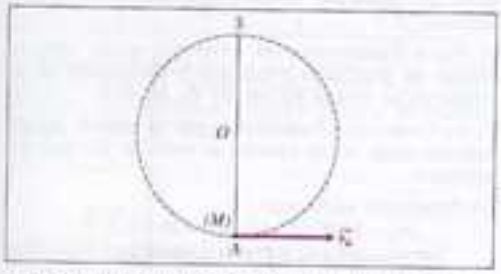
Exercice 15

Étude d'une fronde : dans tout le problème on néglige les frottements.

On prendra, pour l'intensité du champ de pesanteur, $g = 10\ m.s^{-2}$.

Une fronde est constituée par un objet ponctuel (M) de masse m accroché à l'une des extrémités d'un fil de longueur ℓ et de masse négligeable, dont l'autre extrémité O est maintenue fixe.

On fait tourner la fronde autour de O, dans un plan vertical, de manière que l'objet ponctuel (M) décrive un cercle de centre O. Pour provoquer ce mouvement, on communique à l'objet (M) quand le système est dans sa position d'équilibre OA, une vitesse horizontale $\vec{V}_0$.



1) Exprimer en fonction de V_0, ℓ et g, la vitesse V_S de l'objet ponctuel (M) quand il passe au sommet S de sa trajectoire.

2) Exprimer en fonction de m, ℓ, V_0 et g la tension T du fil quand l'objet (M) est dans la position S.

3) Quelle doit être la valeur minimale de la vitesse V_0 pour que le fil reste tendu en S?

Donnée : $\ell = 0,80\ m$.

Exercice 16

Le dispositif inventé par *Cavendish* pour mesurer la constante de la gravitation G, est un pendule de torsion constitué de deux petites sphères identiques de masse m, disposées aux extrémités d'une tige de longueur 2ℓ (fig. *a*), suspendue en son milieu à un fil dont la constante de torsion est C.

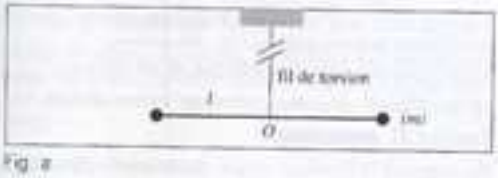


Fig. *a*

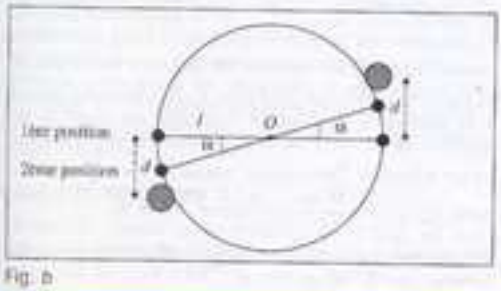


Fig. *b*

Deux grosses sphères de masse M sont approchées des deux petites sphères à la distance d (fig. *b*). La tige effectue alors une très petite rotation, le fil se tordant de l'angle α.

Étudier l'équilibre final de la tige et montrer que la constante de gravitation est donnée par l'expression

$$G = \frac{C.\alpha.(d-\ell.\alpha)^2}{2M.m.\ell}$$

Calculer sa valeur avec :

$m = 5 \times 10^{-2}\ kg$; $M = 30\ kg$;

$C = 4,5 \times 10^{-7}\ N.m.rad^{-1}$; $d = 0,15\ m$;

$\ell = 10\ cm$ et $\alpha = 1,98 \times 10^{-2}\ rad$.

Remarquer que $\sin \alpha \approx \alpha$ et que $\cos \alpha \approx 1$, puisque l'angle α est très petit.

Gravitation et satellite

Exercice 17

On se propose de déterminer la masse de Jupiter en étudiant le mouvement de ses principaux satellites : Io, Europe, Ganymède et Callisto.

1) Le mouvement d'un satellite, de masse m, est étudié dans un repère considéré comme galiléen, ayant son origine au centre de Jupiter et ses axes dirigés vers des étoiles lointaines, considérées comme fixes. On supposera que Jupiter et ses satellites ont une répartition de masse à symétrie sphérique. Le satellite se déplace sur une trajectoire circulaire, à la distance r du centre de Jupiter.

a) Déterminer la nature de son mouvement, puis sa vitesse v en fonction de r, de la masse M de Jupiter et de G, constante de gravitation universelle.

b) En déduire l'expression de la période de révolution T du satellite.

c) Montrer que le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est constant (ce qui constitue la troisième loi de Kepler).

2) Les périodes de révolution et les rayons des orbites des quatre principaux satellites de Jupiter ont été déterminés et ont les valeurs suivantes :

	Io	Europe	Ganymède	Callisto
T (heures)	42,5	85,2	171,7	400,5
r (km)	422×10^3	671×10^3	$1\,070 \times 10^3$	$1\,883 \times 10^3$

a) Représenter sur papier millimétré, la courbe donnant les variations de T^2 en fonction de r^3.

Échelle : 1 cm représente $10^{11}\ s^2$

1 cm représente $4 \times 10^{25}\ m^3$.

Conclure.

b) En reliant ces résultats à ceux du 1) *b*), déterminer la masse M de Jupiter.

On donne : $G = 6,67 \times 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$.

2. EXERCICES PROPOSES

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 18

Dans cet exercice, les mouvements étudiés sont rapportés à des repères qu'on admet être galiléens. Seules les interactions gravitationnelles sont prises en compte. Les mobiles concernés (astres ou satellites) présentent une répartition de masse à symétrie sphérique.

1) Dans un repère $\mathcal{R}$, on considère deux astres ou satellites : A (de masse M) et B (de masse m). A, dont la masse est très grande devant celle de B, est supposé être immobile dans $\mathcal{R}$; dans ce repère, B tourne autour de A avec un mouvement uniforme et son centre décrit un cercle de rayon R.

a) Établir la relation qui lie la vitesse v du centre de B, le rayon R de l'orbite, la masse M de A et la constante de gravitation universelle G.

b) On connaît la période de révolution T de B autour de A ; exprimer v en fonction de T, en déduire la troisième loi de Kepler :

$$\frac{R^3}{T^2} = C' \cdot M$$

et donner l'expression littérale de C' en fonction de G.

2) *Application* : un satellite tourne autour de la Terre en 134 min, selon une orbite circulaire de rayon $R_s = 8{,}713 \times 10^3$ km. Sachant que la Terre décrit autour du Soleil en 365,25 jours, une orbite qu'on pourra considérer comme circulaire de rayon

$$R_t = 1{,}496 \times 10^8 \text{ km},$$

calculer le rapport de la masse de la Terre à celle du Soleil.

Exercice 19

La Terre est assimilée à une sphère de rayon $R = 6\,370$ km, animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de la ligne des pôles (qui est perpendiculaire au plan de l'équateur). On supposera que le repère géocentrique, dont l'origine coïncide avec le centre de la Terre et dont les axes ont une direction fixe par rapport aux étoiles, est galiléen. A la surface de la Terre, l'intensité du champ de pesanteur est $g_0 = 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. A l'altitude h, elle est égale à :

$$g_h = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

1) Un satellite, assimilé à un point matériel, décrit d'un mouvement uniforme une orbite circulaire à l'altitude $h = 400$ km. L'orbite est dans le plan de l'équateur.

a) Déterminer la vitesse v du satellite dans le repère géocentrique.

b) Déterminer, dans le même repère, la période T et la vitesse angulaire ω_s du satellite.

c) Le satellite se déplace vers l'est. Déterminer l'intervalle de temps qui sépare deux passages successifs du satellite à la verticale d'un point donné de l'équateur. La vitesse angulaire de rotation de la Terre dans le repère géocentrique est :

$$\omega_t = 7{,}29 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1},$$

et on rappelle que, dans ce repère, la vitesse d'un point de l'équateur est dirigée vers l'est.

2) Un satellite géostationnaire reste en permanence à la verticale d'un même point du globe. Son orbite est dans le plan de l'équateur.

a) Quelle est la vitesse angulaire de ce satellite dans le repère géocentrique ?

b) Calculer le rayon de son orbite.

Satellite et énergie

Le chapitre 4 rappelle la notion d'énergie potentielle.

Exercice 20

Un satellite supposé ponctuel, de masse m_s, décrit une orbite circulaire d'altitude h autour de la Terre assimilée à une sphère de rayon R_t. On fera l'étude dans un référentiel géocentrique considéré comme galiléen.

1) Établir l'expression de l'intensité g du vecteur-champ de gravitation à l'altitude h en fonction de sa valeur g_0 au niveau du sol, de R_t et de h.

2) *a)* Déterminer l'expression de la vitesse v_s du satellite, celle de sa période et celle de son énergie cinétique.

b) Application numérique :

$$m_s = 1\,020 \text{ kg} ; \quad g_0 = 9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} ;$$
$$R_t = 6\,400 \text{ km} ; \quad h = 400 \text{ km}.$$

3) L'énergie potentielle du satellite dans le champ de pesanteur à l'altitude h est donnée par la relation :

$$E_p = -\frac{G \cdot m_s \cdot M_t}{R_t + h},$$

avec G, constante de gravitation et M_t masse de la Terre et en convenant que $E_p = 0$ pour $h = \infty$. Justifier le signe négatif et exprimer E_p en fonction de m_s, g_0, R_t et h. Déterminer l'expression de l'énergie mécanique E du satellite, puis comparer E_p à E_c et E à E_c.

4) On fournit au satellite un supplément d'énergie

$$\Delta E = +5{,}0 \times 10^8 \text{ J}.$$

Il prend alors une nouvelle orbite circulaire.
En utilisant les résultats du 3), déterminer :

a) sa nouvelle énergie cinétique et sa vitesse,

b) sa nouvelle énergie potentielle et son altitude.

Exercice 21

On suppose la Terre sphérique et homogène de centre O, de masse M, de rayon R. A la distance $r > R$ de son centre d'inertie se trouve un corps de masse m.

1) Rappeler les caractéristiques de la force gravitationnelle $\vec{F}$ exercée par la Terre sur le solide de masse m.

2) Exprimer l'énergie cinétique E_c du corps qui gravite à la vitesse v sur l'orbite circulaire de rayon r, en fonction de M, m, r et G constante de la gravitation.

3) Le système Terre-corps possède l'énergie potentielle $E_p = -\dfrac{G \cdot M \cdot m}{r}$. Comparer E_c et E_p.

4) Exprimer l'énergie mécanique totale du système en fonction de G, M, m et r.

5) Quelle énergie minimale faut-il fournir au corps solide depuis le sol terrestre, pour qu'il quitte définitivement la Terre?

6) Établir l'expression de la « vitesse de libération » du corps à partir du sol terrestre. Calculer sa valeur. On donne :

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{SI}.$$

7) Quelle serait sa valeur depuis le sol de la Lune, de Jupiter, du Soleil?

Données :	Rayon (km)	Masse (kg)
Terre	6 400	6×10^{24}
Lune	1 740	$7{,}34 \times 10^{22}$
Jupiter	71 500	$1{,}9 \times 10^{27}$
Soleil	7×10^{5}	2×10^{30}

8) Quelle vitesse faudrait-il communiquer au corps depuis un point de l'orbite terrestre, pour qu'il puisse se libérer de l'attraction solaire? (Rayon de l'orbite terrestre : $1{,}5 \times 10^{11}$ m.)

EXERCICES DESTINÉS A TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 22 — A.1.a.

Définir les termes : interaction gravitationnelle; champ de gravitation uniforme; satellite géostationnaire.

Exercice 23 — A.1.a.

Exprimer l'unité de la constante gravitationnelle G en fonction des unités du SI (m, kg, s). Même question pour la constante $G.M_s$ (M_s désignant la masse du Soleil).
La constante $G.M_s$ est-elle une constante universelle?

Exercice 24 — A.1.b.

Estimer la vitesse du centre de la Terre sur son orbite autour du Soleil. Combien de temps la lumière met-elle pour arriver sur la Terre en venant du Soleil? de la Lune?

Exercice 25 — A.1.c.

L'étoile la plus proche « Proxima du Centaure » est à 4 années-lumière de la Terre. Exprimer cette distance en km.
Combien de temps des astronautes mettraient-ils pour rejoindre cette étoile en voyageant à une vitesse de 50 000 km.h^{-1}? Quelles réflexions cela vous suggère-t-il en ce qui concerne les visites d'éventuels « extra-terrestres »?

Exercice 26 — A.2.b.

Calculer le champ de gravitation au niveau du sol lunaire. Le rayon de la Lune est de 1 740 km et sa masse est de $7{,}34 \times 10^{22}$ kg.

Exercice 27 — B.1.

Préparer un exposé sur les biographies de Kepler et Newton. Vous pouvez disposer lors de l'exposé d'un rétro-projecteur et d'un projecteur de diapositives.

Exercice 28 — B.3

Démontrer la loi de Kepler pour les satellites en orbite circulaire circumterrestre en partant de la loi de Newton.

Préciser la valeur constante du rapport $\frac{T^2}{a^3}$ pour ces satellites.

Exercice 29 — B.4

D'après les données qui se trouvent dans le cours, représenter à l'échelle les trajectoires supposées circulaires et dans le même plan (dit plan de l'écliptique)

1) Des planètes intérieures (Mercure et Vénus), échelle : 10 cm pour le rayon de l'orbite terrestre.

2) Des autres planètes du système solaire, échelle : 0,5 cm pour l'orbite terrestre.

Exercice 30 — C.1.b

Comparer les périodes de révolution de satellites évoluant sur une trajectoire circulaire à une altitude égale au rayon de l'astre attracteur :
— pour un satellite de la Terre;
— pour un satellite de la Lune.



Fig. 22. *Hipparcos : il doit mesurer la distance nous séparant de 400 000 étoiles.*

SATELLITES GÉOSTATIONNAIRES

D'après Électronique applications n° 60, Juin-Juillet 1988.

1. La mise sur orbite

Le processus complet comporte le lancement, la mise à poste et le maintien à poste. Au départ, le satellite est mis sur **une orbite dite de transfert** sur laquelle il accomplit quelques révolutions (fig. 23). **Cette orbite est elliptique et très excentrique** : l'apogée (point de l'orbite le plus éloigné de la Terre) est à environ 36 000 km, et le périgée (point le plus près de la Terre) se situe entre 200 et 600 km, avec une durée de révolution d'environ 11 h. Par économie, le lanceur vise le périgée de l'orbite de transfert. L'orbite de transfert est inclinée par rapport au plan de l'équateur, et c'est au périgée que le satellite coupe le plan équatorial, pour se diriger vers l'apogée.

Vient ensuite **la mise à poste.** Le satellite arrive au point d'apogée et à ce moment reçoit, par la mise en route d'un moteur, une poussée et l'augmentation de vitesse qui en découle croît avec l'inclinaison de l'orbite de transfert, ce qui explique l'importance du choix proche de l'équateur pour établir les bases de lancement. *Le centre spatial de Kourou en Guyane à 5° de l'équateur est le site opérationnel le mieux adapté.*

Un satellite artificiel dans l'espace est soumis à des effets perturbateurs qui auront tendance à l'écarter de sa position nominale.

Pour corriger ces effets perturbateurs, il est nécessaire de mettre en œuvre une procédure de **maintien à poste.**

Le maintien à poste d'un satellite nécessite la mise en route périodique des systèmes propulsifs, ce qui consomme du gaz et, comme celui-ci n'est pas renouvelable, **la capacité des réservoirs conditionne la durée de vie de l'engin.**

Actuellement, on prévoit 10 kg de gaz par an pour le maintien à poste d'un satellite de 500 kg, ce qui fait 70 kg de gaz pour une durée de vie de 7 ans, ce qui est loin d'être négligeable.

2. Une orbite encombrée

L'orbite des satellites géostationnaires est unique et très convoitée. Cela veut dire une saturation prochaine de cet anneau, qui pourtant fait 265 000 km de circonférence (fig. 24).

3. Le cimetière des satellites

Le problème auquel sont confrontés les spécialistes concerne la « mort des satellites ». Quand le satellite est devenu inopérationnel, celui-ci reste sur l'orbite et commence à dériver lentement pour aller rejoindre (à la manière des éléphants!) ses « congénaires » dans un sanctuaire technologique : « ... Les satellites partent à la dérive, s'écartant chaque jour de 3,3° en direction de l'ouest jusqu'à atteindre l'un des deux points de stabilité de l'orbite où ils forment des espèces de cimetières... (Valéri Jarkov Novosti) ». On est alors obligé d'effectuer des manœuvres d'évitement avec les satellites opérationnels pour laisser passer ces « vaisseaux fantômes ».



Fig. 24. Plus de 150 satellites géostationnaires sont actuellement placés sur cette orbite équatoriale, mais ils ne sont pas répartis uniformément sur cette longue piste de 265 000 km. La figure montre des concentrations de satellites au-dessus du continent Nord Américain, de l'Europe, de l'U.R.S.S., liées à la multiplicité des télécommunications.

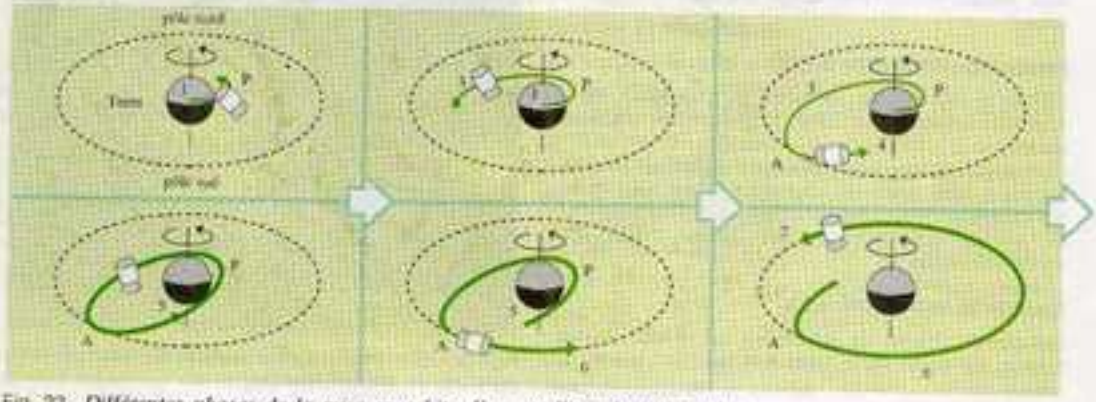


Fig. 23. Différentes phases de la mise en orbite d'un satellite géostationnaire.

4 Mouvement d'une particule soumise à une force constante

1 Mouvement d'un projectile.

2 Mouvement d'une particule chargée.

3 L'oscilloscope électronique.



L'acrobate évolue dans un champ uniforme. Il est soumis à une force constante : son poids. Son centre d'inertie décrit une trajectoire parabolique.

Un corps de masse m, placé dans un champ de pesanteur uniforme, est soumis à une force constante : son poids $\vec{P} = m.\vec{g}$. De même une particule de charge électrique q, située dans un champ électrostatique uniforme, est soumise à une force électrique constante : $\vec{F} = q.\vec{E}$.
Ce chapitre étudie leurs mouvements sous l'action de telles forces.

1 MOUVEMENT D'UN PROJECTILE DANS UN CHAMP DE PESANTEUR UNIFORME

1. Exemples

Un projectile lancé avec une vitesse $\vec{v}_0$, faisant l'angle de tir α avec le plan horizontal (fig. 1), décrit une trajectoire d'allure parabolique dans un champ de pesanteur uniforme.
C'est le cas d'une pierre projetée du cratère d'un volcan (fig. 2), des gouttes d'eau d'un jet d'eau, d'une balle (fig. 3), etc.

2. Accélération du centre d'inertie

Le mouvement du centre d'inertie du projectile est étudié dans un référentiel terrestre, supposé galiléen.
La résistance de l'air sera négligée dans cet exposé.
Le projectile de masse m (fig. 4) est soumis à une seule force : son poids $\vec{P} = m.\vec{g}$. C'est une **force constante.**
D'après la relation $\Sigma\vec{f} = m.\vec{a}_G$, l'accélération de son centre d'inertie est : $\vec{a}_G = \dfrac{\vec{P}}{m} = \vec{g}$.
C'est un **vecteur constant,** indépendant de la masse du projectile et égal au vecteur-champ de pesanteur.

3. Vecteur-position

La vitesse du centre d'inertie en M, à la date t, est :

$$\vec{v} = g.\vec{t} + \vec{v}_0,$$

puisque $\vec{v}$ est la primitive de $\vec{a}$ et que à $t = 0$, la vitesse est $\vec{v}_0$. Le vecteur-position $\overrightarrow{OM}$, primitive de $\vec{v}$ est alors :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}.t^2 + \vec{v}_0.t + \overrightarrow{OM}_0,$$

soit :

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}.t^2 + \vec{v}_0.t + \vec{r}_0.$$

Les conditions initiales sont celles du lancement : à $t = 0$, le centre d'inertie est en O à l'origine, et sa vitesse est $\vec{v}_0$, d'où $\overrightarrow{OM}_0 = \vec{0} = \vec{r}_0$.
L'expression précédente s'écrit alors :

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}.t^2 + \vec{v}_0.t.$$

A tout instant le centre d'inertie est dans le plan vertical $\vec{g}$, $\vec{v}_0$. **La trajectoire est donc inscrite dans le plan vertical de tir.**

4. Équation cartésienne et trajectoire

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{k})$, choisi dans le plan $\vec{g}$, $\vec{v}_0$ (fig. 4), les projections du vecteur accélération $\vec{a}_G = \vec{g}$ sont :

$$\vec{g} \begin{cases} g_x = \ddot{x} = 0 \\ g_z = \ddot{z} = -g \end{cases}$$

et celles de $\vec{v}_0$ sont : $\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0.\cos\alpha \\ v_{0z} = v_0.\sin\alpha. \end{cases}$

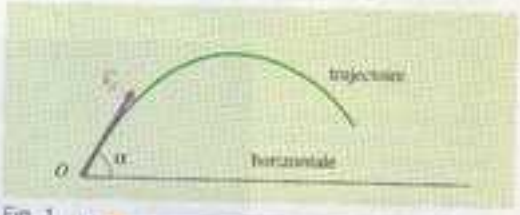


Fig. 1


Fig. 2. *Chaque pierre projetée du cratère décrit une trajectoire parabolique.*


Fig. 3. *La balle décrit une parabole.*

Par une première intégration de $\vec{a}$, pour tout angle α de tir, avec les conditions initiales choisies (à $t=0$, le centre d'inertie est en O), il vient :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = \dot{x} = v_0.\cos\alpha \\ v_z = \dot{z} = -g.t + v_0.\sin\alpha. \end{cases}$$

Par une deuxième intégration on trouve :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = (v_0.\cos\alpha).t \\ z = -\frac{1}{2}g.t^2 + (v_0.\sin\alpha).t. \end{cases}$$

Le mouvement de la projection du centre d'inertie selon l'axe horizontal $x'x$ est uniforme et selon l'axe vertical $z'z$, il est uniformément varié.
En éliminant la variable temps, t, entre les lois horaires $x(t)$ et $z(t)$, il vient :

$$t = \frac{x}{v_0.\cos\alpha} \quad \text{pour} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} \quad \text{soit} \quad \cos\alpha \neq 0,$$

et : $$z = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2.\cos^2\alpha}.x^2 + x.\tan\alpha.$$

C'est l'**équation cartésienne** de la trajectoire du centre d'inertie du projectile. Cette trajectoire est une **parabole.**
Son allure est indépendante de la masse du projectile. Elle ne dépend que de la vitesse initiale v_0 et que de l'angle de tir α.
Dans le cas particulier d'un tir effectué verticalement, soit avec un angle de tir de 90°, les lois horaires deviennent :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad z = -\frac{1}{2}g.t^2 + v_0.t.$$

La trajectoire est la verticale de lancement. Le mouvement du centre d'inertie est rectiligne uniformément varié. Le mobile monte en ralentissant, il atteint un point culminant puis redescend en accélérant.

La trajectoire du centre d'inertie d'un projectile lancé dans un champ de pesanteur uniforme, est une portion de parabole pour $\alpha \neq 90°$ et un segment de droite vertical pour $\alpha = 90°$.

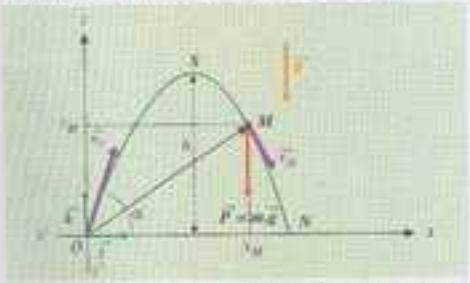


Fig. 4. Le champ est uniforme ($\vec{g}$ constant). Le vecteur-position du projectile en M est : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}.t^2 + \vec{v}_0.t$. La trajectoire de M est dans le plan vertical $\vec{g}, \vec{v}_0$. Le repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$ est choisi dans ce plan.

5. Caractéristiques de la trajectoire

a) *Portée*

C'est la distance $d(O, N)$, entre le point de chute N sur l'horizontale et le point de lancement O (fig. 4).
Sa valeur d, est déterminée en faisant $z=0$ et $x=d$, dans l'équation cartésienne. Il vient :

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2.\cos^2\alpha}.d^2 + d.\tan\alpha,$$

soit : $$0 = d.\left(-\frac{g}{2v_0^2.\cos^2\alpha}.d + \tan\alpha\right).$$

La solution $d=0$, correspond au point de lancement. L'autre solution est :

$$d = \frac{2v_0^2.\cos^2\alpha.\tan\alpha}{g} = \frac{2v_0^2.\cos^2\alpha.\sin\alpha}{g.\cos\alpha}$$

$$= \frac{2v_0^2.\cos\alpha.\sin\alpha}{g},$$

soit : $$d = \frac{v_0^2.\sin 2\alpha}{g}$$

puisque $2\cos\alpha.\sin\alpha = \sin 2\alpha$.
Pour une vitesse initiale v_0 donnée, la portée d, a même valeur pour deux angles complémentaires. Le tir est dit tendu pour $\alpha < \frac{\pi}{4}$ et plongeant pour $\alpha > \frac{\pi}{4}$. La portée est maximale pour $\sin 2\alpha = 1$, soit pour un angle de tir de 45°.
Dans ce cas la portée est : $d_{max} = \frac{v_0^2}{g}$ (fig. 5).

b) *Flèche*

C'est l'altitude maximale h, atteinte par le projectile en S, sommet de la parabole (fig. 4).
L'abscisse de S se détermine par la condition $\left(\frac{dz}{dx}\right)_S = 0$, soit :

$$-\frac{g.x_S}{v_0^2.\cos^2\alpha} + \tan\alpha = 0,$$

d'où : $$x_S = \frac{v_0^2.\cos^2\alpha.\tan\alpha}{g},$$

et $$x_S = \frac{v_0^2.\sin 2\alpha}{2g} = \frac{d}{2}.$$

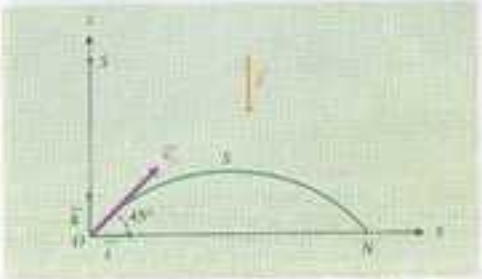


Fig. 5. La portée est maximale pour $\alpha = 45°$.

En reportant dans l'équation cartésienne, il vient :

$$h = -\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot \left(\frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 + \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{2g} \cdot \tan \alpha,$$

soit : $$h = -\frac{g \cdot (v_0^2 \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot 4g^2} + \frac{v_0^2 \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2g} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

et : $$h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Pour une vitesse initiale v_0 donnée, la plus grande valeur de la flèche h, correspond à $\sin^2 \alpha = 1$, soit $\alpha = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire à un tir vertical, ce qui est évident.

Remarque :
La résistance de l'air réduit notablement la portée, mais aussi la flèche (fig. 6).

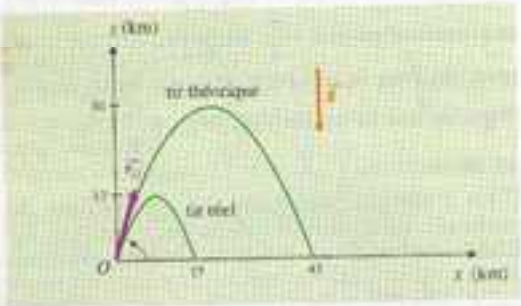


Fig. 6

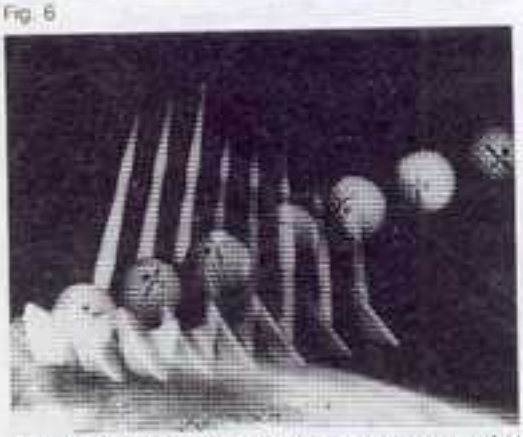


Fig. 7. Une balle de golf, du fait de sa surface alvéolée, peut lorsqu'elle tourne, dépasser la portée théorique malgré la résistance de l'air, car les trous « accrochent » les molécules du gaz d'où une différence de pression excédentaire en dessous de la balle, ce qui la porte.

6. Énergie cinétique et énergie potentielle

Soit le système projectile, dans le champ de pesanteur uniforme.
Il est considéré dans les états 1 en M_1, et 2 en M_2 (fig. 8).
Le bilan énergétique (rappel du cours de première) peut être détaillé ainsi :

a) Énergie cinétique

L'énergie cinétique du projectile en translation dans un état donné est $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, soit dans l'état 1 : $E_c(1) = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2$ et dans l'état 2 : $E_c(2) = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2$.

La variation d'énergie cinétique du système entre les états 1 et 2 est d'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$E_c(2) - E_c(1) = W_{(1 \to 2)}$$

le poids étant la *seule* force appliquée sur le projectile. Or **cette force est conservative**, donc :

$$W_{(1 \to 2)} = \vec{P} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = m \cdot g \cdot (z_1 - z_2),$$

soit : $$E_c(2) - E_c(1) = m \cdot g \cdot z_1 - m \cdot g \cdot z_2.$$

b) Énergie potentielle de pesanteur

• Par définition l'énergie potentielle de pesanteur du système est :

$$E_p = m \cdot g \cdot z + C^{te}$$

(z est la cote du projectile de poids constant). L'énergie potentielle n'est donc connue qu'à une constante près.

Or cette constante est la valeur de l'énergie potentielle à la cote 0, soit :

$$E_p(0) = 0 + C^{te}.$$

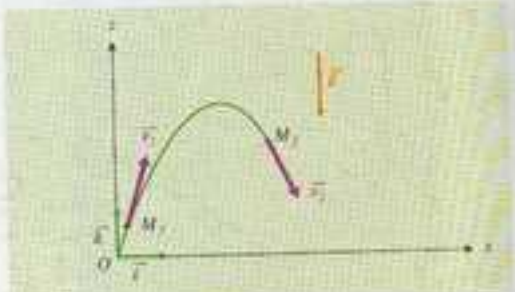


Fig. 8. En l'absence de frottement le système projectile dans le champ de pesanteur, est conservatif.

$$E_c(M_1) + E_p(M_1) = E_c(M_2) + E_p(M_2).$$

Celle-ci sera déterminée en choisissant **un état de référence** (cote z_R) **où, par définition, l'énergie potentielle est nulle :**

$$0 = m \cdot g \cdot z_R + C^{te}.$$

L'expression de l'énergie potentielle se simplifie, si l'état de référence correspond au niveau origine ($z_R = 0$), car la constante est alors nulle, d'où :

$$E_p = m \cdot g \cdot z$$

• La variation d'énergie potentielle de pesanteur entre les états 1 et 2 est :

$$E_p(2) - E_p(1) = m \cdot g \cdot z_2 - m \cdot g \cdot z_1,$$

donc la variation d'énergie potentielle ne dépend que des états 1 et 2 du système.
Par suite :

$$E_p(2) - E_p(1) = -W_{(1 \to 2)},$$

et $$E_p(2) - E_p(1) = -(E_c(2) - E_c(1)).$$

La variation de l'énergie cinétique du système est égale à l'opposé de la variation de son énergie potentielle.

c) Énergie mécanique

Par définition l'énergie mécanique d'un système dans un état donné, est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$E = E_c + E_p$$

L'expression précédente conduit à :

$$E_c(1) + E_p(1) = E_c(2) + E_p(2)$$

soit :

$$E(1) = E(2) = C^{te}$$

Ceci traduit la **conservation de l'énergie mécanique du projectile dans le champ de pesanteur.**



Fig. 9. *Accélérateur linéaire de particules.*

2 MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP ÉLECTROSTATIQUE UNIFORME

Une particule chargée, lancée dans une région où règne un champ électrostatique uniforme subit une accélération.

C'est le cas de protons ou d'électrons dans les accélérateurs de particules (fig. 9) et des électrons dans un oscilloscope électronique.

Leur trajectoire peut être rectiligne ou parabolique.

1. Champ électrostatique uniforme

Le vecteur-champ électrostatique $\vec{E}$, obtenu entre les armatures A et B d'un condensateur plan (fig. 10) soumis à une différence de potentiel $V_A - V_B = u_{AB}$, est tel que :

$$V_A - V_B = \vec{E} \cdot \overrightarrow{AB}$$

en chaque point de cet espace.

• *Le vecteur* $\vec{E}$ est *orthogonal* aux armatures du condensateur et il est orienté vers les potentiels *décroissants*.

Si la tension u_{AB} est constante, le vecteur-champ $\vec{E}$ *est constant.*

Le champ électrostatique entre les deux armatures du condensateur est dit **uniforme.**

• En posant $V_A - V_B = u_{AB} = U$, *la valeur* du champ E est donnée par la relation :

$$E = \frac{U}{d}$$

U en volt (V)
d en mètre (m)
E en volt par mètre ($V.m^{-1}$).

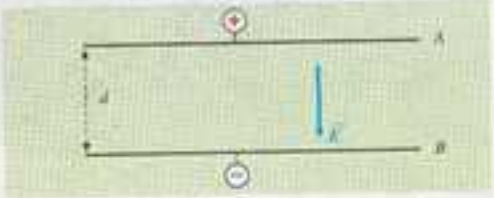


Fig. 10. $V_A - V_B = \vec{E} \cdot \overrightarrow{AB}$.
$\vec{E}$ *est orienté vers les potentiels décroissants.*

2. Force électrostatique

Dans un champ électrostatique $\vec{E}$, une particule de charge q, est soumise à la force électrostatique $\vec{F}$, telle que :

$$\vec{F} = q.\vec{E}$$

Dans les applications numériques, on prend :
q en coulomb (C)
E en volt par mètre ($V.m^{-1}$)
F en newton (N).

Cette force (fig. 11) **est constante** si le champ électrostatique est **uniforme.**
Le poids de la particule est négligeable devant cette force.

3. Accélération dans un champ uniforme

Dans le référentiel galiléen du laboratoire, la particule n'est soumise qu'à la seule force électrostatique.
Donc, la relation $\Sigma\vec{f} = m.\vec{a}$, s'écrit :

$$q.\vec{E} = m.\vec{a}, \quad \text{d'où :} \quad \vec{a} = \frac{q.\vec{E}}{m}.$$

Le vecteur-accélération $\vec{a}$, de la particule est **constant** puisque le vecteur $\vec{E}$, l'est.

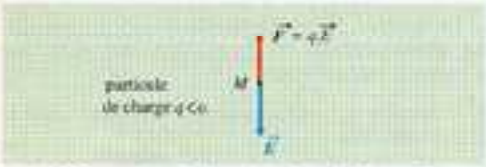


Fig. 11. *La particule chargée dans le champ électrostatique est soumise à la force électrostatique :*

$$\vec{F} = q.\vec{E}.$$

Si $q > 0$: $\vec{F}$ et $\vec{E}$ ont même sens;
si $q < 0$: $\vec{F}$ et $\vec{E}$ sont de sens contraires.

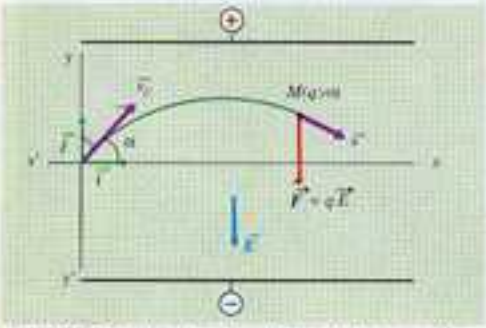


Fig. 12. *Dans le champ électrostatique uniforme ($\vec{E}$ constant) la particule chargée a une trajectoire parabolique.*

Son vecteur-position est : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\frac{q.\vec{E}}{m}.t^2 + \vec{v}_0.t.$

Il a la direction de $\vec{E}$, mais son sens dépend du *signe* de la charge. Sa valeur dépend aussi de la *masse* de la particule.

4. Vecteur-position

La particule (ici de charge q, positive) pénètre en O avec la vitesse $\vec{v}_0$, dans une région de l'espace où règne un champ électrostatique uniforme (fig. 12).
Elle est en M à la date t et sa vitesse $\vec{v}$, est la primitive de $\vec{a}$. Si à $t = 0$ la vitesse est $\vec{v}_0$, il vient :

$$\vec{v} = \vec{a}.t + \vec{v}_0,$$

soit en remplaçant $\vec{a}$ par $\frac{q.\vec{E}}{m}$:

$$\vec{v} = \frac{q.\vec{E}}{m}.t + \vec{v}_0.$$

Le vecteur-position, primitive de $\vec{v}$, est alors :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\frac{q.\vec{E}}{m}.t^2 + \vec{v}_0.t + \overrightarrow{OM}_0,$$

soit : $$\vec{r} = \frac{1}{2}\frac{q.\vec{E}}{m}.t^2 + \vec{v}_0.t + \vec{r}_0.$$

L'expression précédente est formellement identique à celle obtenue p. 64 concernant les projectiles, mais selon le cas, $\vec{a} = \vec{g}$ ou $\vec{a} = \frac{q.\vec{E}}{m}$.
Les résultats de l'étude du projectile s'appliquent au mouvement de la particule dans un champ électrostatique uniforme.
Avec les conditions initiales du lancement ($t = 0$, particule en O, $\overrightarrow{OM}_0 = \vec{r}_0 = \vec{0}$, vitesse initiale $\vec{v}_0$), il vient :

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\frac{q.\vec{E}}{m}.t^2 + \vec{v}_0.t$$

la **trajectoire de la particule est donc plane,** dans le plan $\vec{E}$, $\vec{v}_0$.

5. Équation cartésienne et trajectoire

Avec un système d'axes analogues au cas du projectile dans le champ de pesanteur (fig. 12), les coordonnées du vecteur-accélération $\vec{a} = q.\frac{\vec{E}}{m}$, sont :

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = \ddot{x} = 0 \\ a_y = \ddot{y} = -\dfrac{q.E}{m} \end{cases}.$$

et celles de la vitesse $\vec{v}_0$ sont : $\vec{v}_0 \begin{cases} v_0.\cos\alpha \\ v_0.\sin\alpha. \end{cases}$

Par une première intégration de $\vec{a}$ avec les conditions initiales choisies, il vient :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = \dot{x} = v_0.\cos\alpha \\ v_y = \dot{y} = -\dfrac{q.E}{m}.t + v_0.\sin\alpha. \end{cases}$$

Par une deuxième intégration on a :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = (v_0 . \cos\alpha) . t \\ y = -\frac{1}{2}\frac{q . E}{m} . t^2 + (v_0 . \sin\alpha) . t. \end{cases}$$

En éliminant la variable t, entre les lois horaires, l'**équation cartésienne** de la trajectoire de la particule s'écrit pour $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$:

$$y = -\frac{1}{2}\frac{q . E}{m . v_0^2 . \cos^2\alpha} . x^2 + x . \tan\alpha.$$

Cette trajectoire est une **parabole.**
Son allure, contrairement à celle du projectile dans le champ de pesanteur, dépend de la charge (valeur et signe) et aussi de la masse de la particule.

6. Trois réalisations importantes

Dans la pratique, trois cas sont particulièrement intéressants par leurs applications.
Les particules pénètrent dans un champ électrostatique uniforme :

a) Avec une vitesse initiale négligeable (fig. 13)
Les lois horaires se simplifient alors :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2}\frac{q . E}{m} . t^2. \end{cases}$$

et le mouvement de la particule chargée est rectiligne uniformément accéléré.
Sa trajectoire est parallèle à la direction de $\vec{E}$. C'est ce qui est réalisé dans la première «plaque» de l'accélérateur linéaire et dans le canon à électrons.

b) Avec un vecteur-vitesse initial de même direction que celui du vecteur-champ

Les lois horaires deviennent, avec $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2}\frac{q . E}{m} . t^2 + v_0 . t. \end{cases}$$

Le mouvement de la particule chargée est rectiligne uniformément varié.
Sa trajectoire est parallèle à la direction de $\vec{E}$ et de $\vec{v}_0$. C'est ce qui se produit dans les étages de l'accélérateur linéaire.

c) Avec un vecteur-vitesse initial orthogonal au vecteur-champ (fig. 14)
Dans ce cas l'angle $\alpha = 0$ et les lois horaires :

$$\begin{cases} x = v_0 . t \\ y = -\frac{1}{2}\frac{q . E}{m} . t^2 \end{cases}$$

conduisent à l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$y = -\frac{1}{2}\frac{q . E}{m . v_0^2} . x^2.$$

La trajectoire des particules chargées est une parabole de sommet O, mais le signe du déplacement y, dépend du signe de q.
L'expérience réalisée avec l'appareil de la figure 15, met en évidence la trajectoire parabolique des électrons qui, sortant du canon à électrons, pénètrent dans la région du champ électrostatique avec un vecteur-vitesse orthogonal au vecteur-champ électrostatique.
Un tel dispositif est utilisé dans l'oscilloscope électronique.

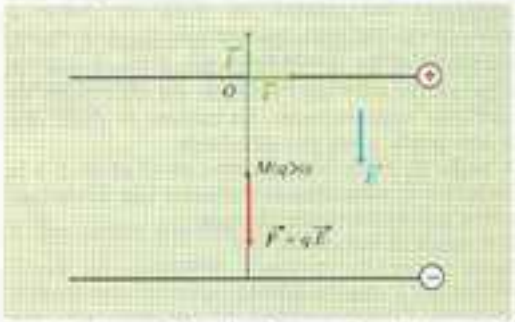


Fig. 13. *La particule de charge $q > 0$ pénètre en O, sans vitesse, dans le champ électrostatique uniforme. Sa trajectoire a la direction de $\vec{E}$ et son mouvement est rectiligne uniformément accéléré.*

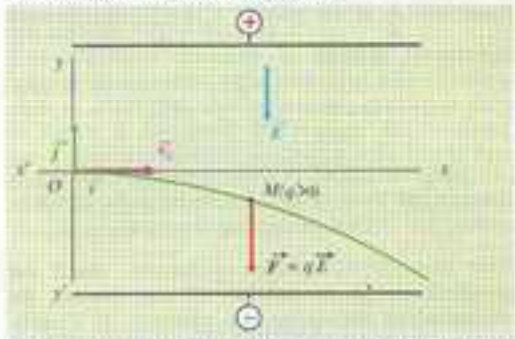


Fig. 14. *Lorsque $\vec{v}_0$ est orthogonal à $\vec{E}$ la trajectoire parabolique de la particule a pour sommet le point O.*



Fig. 15. *Dans l'ampoule, les électrons sortant du canon à électrons pénètrent dans un champ électrostatique uniforme et sont soumis à la force :*
$\vec{F} = q . \vec{e} = -e . \vec{E}$
qui les dévie vers le haut.

7. Déflexion d'un faisceau de particules

Soit une particule chargée, par exemple un électron de charge $q = -e$, qui pénètre en O dans un champ électrostatique uniforme, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ orthogonale au champ $\vec{E}$ et en ressort en S (fig. 16).
La trajectoire de la particule, de O en S, est *parabolique*. Au-delà elle est *rectiligne*, puisque après S, le champ $\vec{E}$ est nul, donc la force électrostatique $\vec{F} = q.\vec{E} = \vec{0}$.
La particule prend alors la tangente en S à la parabole.
Du fait de l'importance de la vitesse $\vec{v}_0$ de la particule et de la faible distance parcourue, le « temps de vol » de l'électron est de l'ordre de quelques nanosecondes. La hauteur de chute due à son poids n'est pas décelable.
L'angle β, entre les tangentes en O et en S à la trajectoire, **détermine la déflexion** (ou déviation) subie par la particule chargée.
Cet angle β est donné par :

$$\tan\beta = \left(\frac{dy}{dx}\right)_S.$$

soit :

$$\tan\beta = -\frac{q.E}{m.v_0^2}.x_s.$$

Avec $E = \frac{U}{d}$ et en posant $x_s = \ell$ (longueur des armatures), il vient :

$$\tan\beta = -\frac{q.\ell}{m.v_0^2.d}.U.$$

Les grandeurs q et m caractérisent la particule chargée, et ℓ et d les dimensions du condensateur. La déflexion dépend de v_0 et U.

Pour une vitesse initiale v_0 donnée, **$\tan\beta$ est proportionnel à la tension U aux bornes du condensateur déflecteur.** Le principe de l'oscilloscope électronique est basé sur cette propriété (paragraphe 3).



Fig. 16. *La déviation des électrons (de charge $q = -e$) est mesurée par l'angle β.*

8. Énergie cinétique et énergie potentielle

Soit le système particule chargée dans un champ électrostatique uniforme. Il est considéré entre les états 1 (en B) et 2 (en A) (fig. 17).
Le bilan énergétique (rappel du cours de première) est :

a) Énergie cinétique

L'énergie cinétique de la particule dans un état donné est :

$$E_c = \frac{1}{2} m.v^2.$$

La variation de son énergie cinétique entre les deux états est :

$$E_c(A) - E_c(B) = W_{\vec{F}(B,A)},$$

la force électrostatique $\vec{F}$, étant la seule force appliquée à la particule; or c'est une **force conservative,** donc :

$$W_{\vec{F}(B,A)} = \vec{F}.\overrightarrow{BA} = q.\vec{E}.\overrightarrow{BA} = -q.\vec{E}.\overrightarrow{AB}$$

d'où $E_c(A) - E_c(B) = -q.\vec{E}.\overrightarrow{AB}$,

et $E_c(A) - E_c(B) = -q(V_A - V_B)$.

Ainsi, dans l'exemple de la figure 17, où la particule est un électron, de charge $q = -e$, qui se déplace de B en A, si sa vitesse initiale en B est nulle, donc $E_c(B) = 0$, alors $E_c(A) = e.U$ en posant $U = V_A - V_B$.
La valeur v_A, de la vitesse en A de l'électron, puisque $E_c = \frac{1}{2} m.v^2$, est donc : $v_A = \sqrt{\frac{2e.U}{m}}$.
L'énergie cinétique et la vitesse de la particule croissent avec la tension aux bornes du condensateur. Cette tension U est dite *tension accélératrice*.
Par exemple pour $U = 1\,000$ V, l'énergie acquise par l'électron est :

$$E_c(A) = 1{,}6\times10^{-19}\times10^3 = 1{,}6\times10^{-16}\ \text{J}.$$

En pratique, dans ce domaine d'énergie, on utilise plutôt l'**électronvolt (eV)** qui est l'énergie acquise par un électron sous une différence de potentiel de un volt : $1\ \text{eV} = 1{,}6\times10^{-19}$ J.

$$1\ \text{eV} = 1{,}6\times10^{-19}\ \text{J}.$$

Avec cette unité, l'énergie précédente est alors $E_c(A) = 1$ keV.
La vitesse en A de l'électron peut être calculée sachant que la masse de l'électron est $m = 9\times19^{-31}$ kg :

$$v_A = \sqrt{\frac{2\times1{,}6\times10^{-19}\times10^3}{9\times10^{-31}}} \approx 1{,}9\times10^7\ \text{m.s}^{-1},$$

soit : $v_A \approx 19\,000\ \text{km.s}^{-1}$.

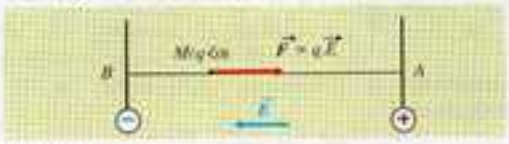


Fig. 17.

Remarque :
Cette vitesse est importante, mais reste cependant faible par rapport à celle de la lumière ($c = 300\,000\ km.s^{-1}$).
Si la tension accélératrice U augmente, la vitesse croît et tend vers celle de la lumière. Les résultats obtenus doivent alors être interprétés différemment.

b) Énergie potentielle électrostatique

• Par définition l'énergie potentielle électrostatique du système est :

$$E_p = q \cdot V + C^{te},$$

V étant le potentiel correspondant à la position de la particule chargée.
Dans l'état de référence, par définition, l'énergie potentielle est nulle et :

$$0 = q \cdot V_R + C^{te},$$

et si l'état de référence correspond au potentiel nul, alors la constante est nulle. L'expression de l'énergie potentielle se simplifie alors :

$$E_p = q \cdot V$$

• La variation de l'énergie potentielle électrostatique entre les états 1 (en B) et 2 (en A), s'écrit :

$$E_p(A) - E_p(B) = q \cdot V_A - q \cdot V_B = q(V_A - V_B).$$

Elle ne dépend que des états A et B.
Par suite :

$$E_p(A) - E_p(B) = -(E_c(A) - E_c(B))$$

résultat identique à celui déjà obtenu pour le projectile dans le champ de pesanteur.

La variation d'énergie cinétique d'une particule chargée dans un champ électrostatique est égale à l'opposé de la variation de son énergie potentielle.

Écrit sous la forme :

$$E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B),$$

soit :

$$E(A) = E(B) = C^{te}$$

Ce résultat traduit la **conservation de l'énergie de la particule dans le champ électrostatique.**

3 L'OSCILLOSCOPE ÉLECTRONIQUE

L'appareil est constitué d'un tube en verre contenant un canon à électrons et deux paires de plaques déflectrices (fig. 18).
Un vide poussé a été réalisé à l'intérieur du tube, afin que les électrons sortant du canon parviennent à l'écran, sans être déviés par suite de chocs avec les molécules du gaz résiduel.
L'écran, en face du canon, est recouvert intérieurement d'une fine couche d'une substance à base de phosphore, permettant la visualisation du point d'impact *(spot)* des électrons.

1. Le canon à électrons

C'est un dispositif *émetteur et accélérateur d'électrons*. Il comporte une cathode C, chauffée par un filament à incandescence assurant l'émission des électrons par effet thermoélectronique, et plusieurs anodes cylindriques A_1, A_2, A_3, d'axe commun. Des tensions de plus en plus élevées sont établies entre la cathode et les anodes ($V_A - V_C > 0$).
Les électrons quittent la cathode avec une vitesse négligeable, puis subissent une accélération et décrivent une trajectoire rectiligne dans le canon à électrons. Le réglage des tensions, par l'intermédiaire de boutons placés sur la face avant de l'appareil, permet d'ajuster la finesse et la luminosité du spot (ce sont les *boutons de focalisation et de luminosité*).

2. Les plaques déflectrices

Le mince faisceau électronique qui sort du canon à électrons, traverse l'espace entre les armatures de deux condensateurs plans disposés comme le montre la figure 18, et arrive sur l'écran : un *spot* est alors visible.

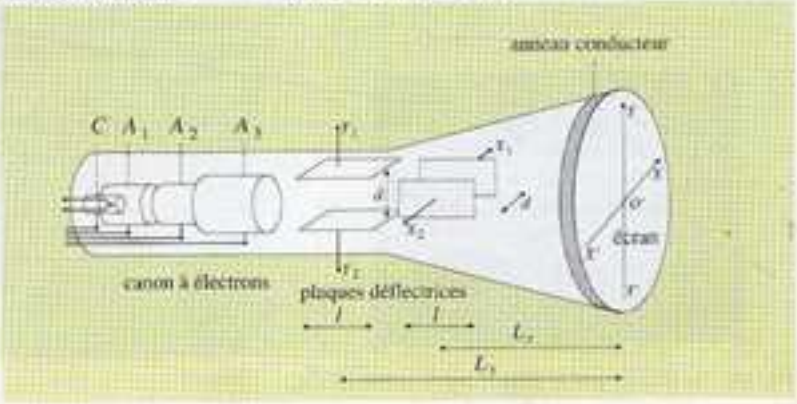


Fig. 18. *L'anneau conducteur permet la conduction des électrons vers la masse de l'appareil, puis la terre.*

Toute tension U constante, appliquée entre les armatures (ou plaques) d'un condensateur, provoque une déflexion des électrons telle que (voir p. 70) : $\tan\beta = \frac{e \cdot \ell}{m \cdot v_0^2 \cdot d} \cdot U = k \cdot U$ (k est une constante).

Les *plaques horizontales* provoquent une *déflexion verticale*.

Les *plaques verticales* provoquent une *déflexion horizontale*.

a) Déflexion verticale

Si U_y est la tension appliquée aux plaques horizontales (fig. 19), le spot subit sur l'écran le déplacement vertical $O'S' = Y_{s'}$ (fig. 20) tel que : $\tan\beta = \frac{O'S'}{O'I} = \frac{Y_{s'}}{L_y}$,

d'où : $Y_{s'} = L_y \cdot \tan\beta = k \cdot L_y \cdot U_y$,

qui s'écrit encore : $Y_{s'} = K_y \cdot U_y$

(K_y est une constante).

Le déplacement du spot est donc proportionnel à la tension.

Utilisé ainsi, l'oscilloscope peut être considéré comme un voltmètre.

La sensibilité verticale de l'appareil est définie par le quotient $\frac{U_y}{Y_{s'}}$. Elle s'exprime en $V.cm^{-1}$ (ou encore en volt par division).

Son choix se fait à l'aide du *bouton sensibilité verticale*.



Fig. 20.

b) Déflexion horizontale

Le même raisonnement avec les plaques verticales permet d'écrire avec $O'S'' = X_{s'}$:

$$X_{s'} = K_x \cdot U_x \quad \text{(fig. 21)}$$

et d'exprimer la sensibilité horizontale par : $\frac{U_x}{X_{s'}}$, qui est réglée par le *bouton sensibilité horizontale*.

c) Déflexions combinées

En appliquant à la fois une tension U_y et une tension U_x, le spot se positionne au point S de coordonnées :

$Y_{s'} = K_y \cdot U_y$ et $X_{s'} = K_x \cdot U_x$ (fig. 22).

Selon les valeurs de U_x et U_y le spot occupe une position particulière sur l'écran.



Fig. 21.



Fig. 22.

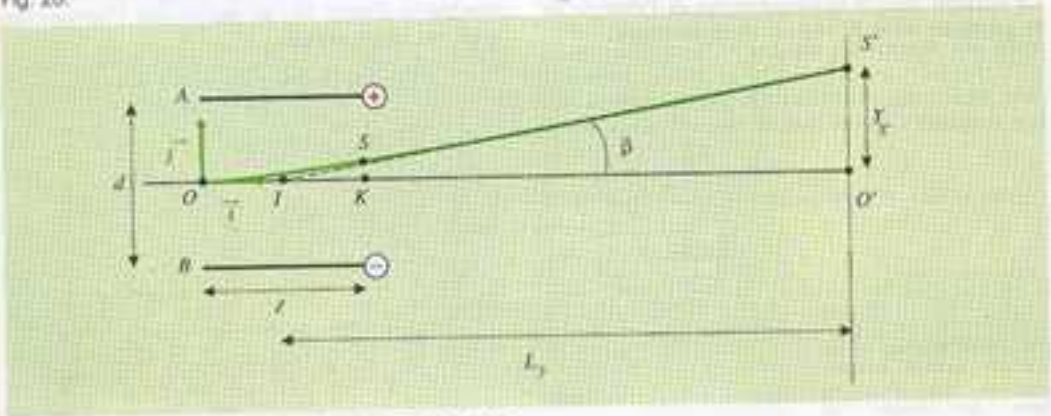


Fig. 19. *On montre que le point I est le milieu de OK.*

3. Application à l'analyse des courbes

a) Déflexion verticale

Si une tension variable au cours du temps, $u(t)$ est appliquée entre les plaques déflectrices, le déplacement du spot est également variable.

Par exemple, si $u(t) = U_y . \cos \frac{2\pi . t}{T}$ est appliquée entre les plaques horizontales, le déplacement vertical du spot est $Y_s = K_y . U_y . \cos \frac{2\pi . t}{T}$.

Le spot aura donc selon l'axe vertical de l'écran un mouvement rectiligne sinusoïdal (fig. 23).



Fig. 23.

b) Balayage horizontal

Appliquons une tension périodique dite en **dents de scie** (fig. 24), de période T_b, aux bornes du condensateur à plaques verticales. Dans l'intervalle O, T_b, la tension est $u_x(t) = a . t$ (a étant une constante) et le spot subit le **déplacement** horizontal $X_s = K_x . a . t$, **proportionnel au temps**, de la gauche vers la droite de l'écran. Le retour du spot à gauche de l'écran est ensuite quasi-instantané et n'est pas visible sur l'écran. Le phénomène se reproduit ensuite périodiquement.

La période T_b est la **durée de balayage** horizontal du spot.

c) Visualisation d'une sinusoïde

Si on applique à la fois une tension sinusoïdale $u_y(t)$ de période T et la tension de balayage $u_x(t) = a . t$, et si les deux périodes T et T_b sont égales, le spot décrit sur l'écran (fig. 25) une portion de sinusoïde correspondant à une période complète. Cette durée T_b est réglée par le *bouton durée de balayage*.

Si la période de balayage est choisie telle que $T_b = 2T$, le spot décrit sur l'écran une sinusoïde (fig. 26) dont les sommets sont deux fois plus serrés.

Remarque :

La tension de balayage est fournie par un dispositif électronique incorporé à l'appareil.



Fig. 25.

d) Visualisation d'une fonction périodique

L'oscilloscope permet ainsi de visualiser une tension périodique $u = f(t)$. Plus généralement pour analyser un phénomène vibratoire mécanique, optique, acoustique, on le transforme par un « capteur », en une tension électrique (fig. 27), que l'on envoie sur l'oscilloscope.



Fig. 26.

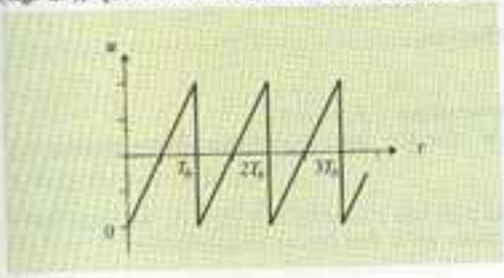


Fig. 24.



Fig. 27.

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Ⓐ *A propos du mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme*

- Établir :
— l'expression du **vecteur-position :**

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}\,.t^2 + \vec{v}_0.t + \vec{r}_0;$$

— l'**équation cartésienne** $z(x)$, de la trajectoire du centre d'inertie.

- Être capable de calculer : **la portée; la flèche.**

- Se rappeler :
— l'expression de l'**énergie potentielle de pesanteur :** $E_p = m\,.\,g\,.\,z$
— l'expression de l'**énergie mécanique** du projectile : $E = E_c + E_p$.

Ⓑ *A propos du mouvement d'une particule électrisée dans un champ électrostatique uniforme*

- Se souvenir des relations : $V_A - V_B = \vec{E}\,.\overrightarrow{AB}$ et $E = \frac{U}{d}$.

- Connaître l'expression de la **force électrostatique :** $\vec{F} = q\,.\vec{E}$.

- Établir l'expression du vecteur-position :

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\,q\,.\frac{\vec{E}}{m}.t^2 + \vec{v}_0.t + \vec{r}_0;$$

— raisonner sur les trois cas particuliers :

$$\vec{v}_0 = \vec{0}; \quad \vec{v}_0 /\!/ \vec{E}\,; \quad \vec{v}_0 \perp \vec{E}\,;$$

- déterminer l'**angle de déflexion.**

- Pouvoir exprimer :
— l'**énergie potentielle électrostatique :** $E_p = q\,.\,V$;
— l'**énergie de la particule chargée dans le champ électrostatique :** $E = E_c + E_p$.

- Se souvenir, pour les deux cas, que l'énergie $E = E_p + E_c$, se conserve lorsque le système n'est soumis qu'à des forces conservatives.

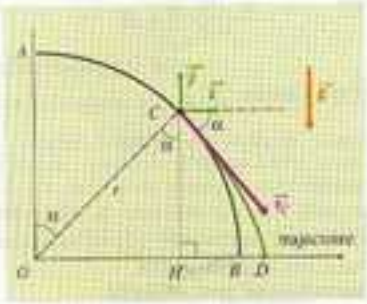
1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

Un skieur glisse sur une piste circulaire AB contenue dans un plan vertical qui représente un quart de circonférence de rayon $r = 15$ m et de centre O.
Il perd le contact avec la piste au point C, tel que : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \alpha = 48°$. Sa vitesse vaut alors : $v_c = 10\ m.s^{-1}$ (voir exercice résolu du chapitre III).

1) Déterminer la trajectoire du skieur, assimilé à un point, après son passage en C dans le repère $(C, \vec{i}, \vec{j})$.

2) En quel point D touche-t-il le sol horizontal passant par B? On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.



SOLUTION

1) Trajectoire

Le système considéré est le skieur. Son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre galiléen muni du repère orthonormé $(C, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Après avoir quitté la piste, le skieur est soumis à la seule force de pesanteur $\vec{P} = m.\vec{g}$ (vecteur constant).
Son vecteur-accélération $\vec{a} = \vec{g}$ est donc constant.
Les conditions initiales sont : à $t = 0$ le skieur en C, origine du repère, et son vecteur-vitesse $\vec{v}_0 = \vec{v}_C$, tel que l'angle $(\vec{i}, \vec{v}_0) = \alpha = 48°$ et $v_0 = v_C = 10\ m.s^{-1}$.
A la date t en M, le vecteur-vitesse est : $\vec{v} = \vec{g}.t + \vec{v}_0$ (primitive de $\vec{g}$) et le vecteur position est :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}.t^2 + \vec{v}_0.t \quad \text{(primitive de } \vec{v}\text{)}$$

La trajectoire du skieur est donc contenue dans le plan vertical $\vec{g}, \vec{v}_0$, ce plan contenant aussi $(C, \vec{i}, \vec{j})$.
Les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ sont :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = (v_0.\cos\alpha).t \\ y = -\frac{1}{2}g.t^2 + (v_0.\sin\alpha).t \end{cases}$$

L'équation cartésienne de la trajectoire est alors (avec $t = \frac{x}{v_0.\cos\alpha}$) : $y = -\frac{1}{2}g.\frac{x^2}{v_0^2.\cos^2\alpha} + (\tan\alpha).x$

***CD* est une *portion de parabole*.**

2) Point d'arrivée sur le sol

Les coordonnées du point d'arrivée D sur le sol sont x_D et y_D dans le repère $(C, \vec{i}, \vec{j})$.

Or : $y_D = -r.\cos\alpha = -15 \times \cos 48°$,

d'où :

$$-15 \times \cos 48° = -\frac{10x_D^2}{2 \times 10^2 \times \cos^2 48°} + (\tan 48°).x_D$$

Après avoir effectué il vient :

$$-10 = -0{,}1115x_D^2 + 1{,}11x_D$$

ou : $0{,}1115x_D^2 + 1{,}11x_D - 10 = 0$

$$x_D = \frac{-1{,}11 + \sqrt{1{,}11^2 + 40 \times 0{,}1115}}{2 \times 0{,}1115}$$

$x_D = HD = 5{,}7$ m, est la seule solution possible.

Or, $HB = OB - OH = r - r.\sin\alpha = 3{,}85$ m,

donc : $BD = 5{,}7 - 3{,}85 = 1{,}85$ m.

Le skieur tombe à 1,85 m de la base de la calotte sphérique AB.

EXERCICE 2

Dans la chambre d'ionisation (1), des atomes de lithium sont ionisés en Li^+ (tous les ions possèdent la charge $q = e$).

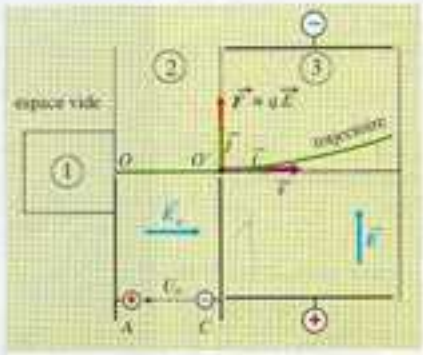
Ils pénètrent avec une vitesse négligeable, par l'orifice O, dans une chambre (2), où la tension U_0 établie entre les plaques A et C, les accélère. Ils en sortent par l'orifice O'.

Ils entrent alors dans une autre enceinte (3), où règne un champ électrostatique uniforme de vecteur $\vec{E}$.

Les atomes de lithium possèdent les isotopes ^6Li et ^7Li de masse respective m_1 et m_2.

1) Exprimer les vitesses v_1 et v_2 de ces ions isotopes au passage en O'.

2) Déterminer dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$, la trajectoire des isotopes dans la chambre (3), le vecteur $\vec{E}$ étant orthogonal aux vecteurs vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.
Ce dispositif permet-il de séparer les isotopes?



1. EXERCICES RESOLUS

SOLUTION

1) Vitesse v_1 et v_2

Considérons un ion quelconque dans la chambre (2), où la tension accélératrice est $U_0 = V_A - V_C > 0$.
Chaque ion, de charge $q = +e$, est soumis à la seule force électrostatique $\vec{F} = q.\vec{E}_0 = +e.\vec{E}_0$ (le poids étant négligeable).
Par application du théorème de l'énergie cinétique entre O et O' il vient :

$$E_c(O') - E_c(O) = W_{\vec{F}(O,O')} = +e.\vec{E}_0.\overrightarrow{OO'},$$

soit : $\frac{1}{2} m.v^2 - 0 = e.\vec{E}_0.\overrightarrow{OO'}$.

Or, $V_A - V_C = \vec{E}_0.\overrightarrow{AC}$ ou encore : $U_0 = \vec{E}_0.\overrightarrow{OO'}$,

d'où : $\frac{1}{2} m.v^2 = e.U_0$.

soit : $v^2 = \frac{2e.U_0}{m}$

pour l'isotope ^{6}Li, de masse m_1 : $\boxed{v_1^2 = \frac{2e.U_0}{m_1}}$

et pour l'isotope ^{7}Li, de masse m_2 : $\boxed{v_2^2 = \frac{2e.U_0}{m_2}}$

La vitesse v_2 de ce dernier est inférieure à la vitesse v_1 puisque $m_2 > m_1$.

2) Trajectoire des isotopes

Considérons un ion, dont la vitesse est $\vec{v}_0$ à l'entrée en O' de la chambre (3).
Il est soumis à une *autre* force électrostatique $\vec{F} = +e.\vec{E}$ (constante). Il a donc une accélération $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = +\frac{e}{m}.\vec{E}$ (vecteur constant). Ce vecteur $\vec{a}$, comme $\vec{E}$, est orthogonal à $\vec{v}_0$.
Le repère choisi est tel que $\vec{v}_0 = v_0.\vec{i}$ et $\vec{E} = +E.\vec{j}$,

donc les coordonnées de $\vec{a}$ sont : $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{e}{m}.E \end{cases}$

Or les conditions initiales sont : en O', à $t = 0$, l'ion a la vitesse $\vec{v}_0$.
Par suite, la primitive de $\vec{a}$ est la vitesse de l'ion à la date t :

$$\vec{v} = \vec{a}.t + \vec{v}_0$$

Ses coordonnées sont : $\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = \frac{e}{m}.E.t \end{cases}$

Son vecteur position est $\overrightarrow{O'M} = \frac{1}{2}\vec{a}.t^2 + \vec{v}_0.t$.

de coordonnées : $\begin{cases} x = v_0.t \\ y = \frac{1}{2}\frac{e}{m}.E.t^2 \end{cases}$

L'équation cartésienne de la trajectoire d'un ion est avec $t = \frac{x}{v_0}$:

$$y = \frac{1}{2}\frac{e.E}{m.v_0^2}.x^2$$

Dans la chambre (3) l'ion décrit *une parabole de sommet O'*. Pour l'ion isotope ^{6}Li$^+$ l'équation est :

$y_1 = \frac{e.E}{2m_1.v_1^2}.x^2$, avec $v_1^2 = \frac{2e.U_0}{m_1}$. Après simplification on obtient :

$$y_1 = \frac{E}{4U_0}.x^2,$$

et pour l'ion isotope ^{7}Li$^+$:

$$y_2 = \frac{E}{4U_0}.x^2 = y_1$$

Par suite, tous les ions décrivent *la même trajectoire* parabolique dans la chambre (3) et les isotopes en sortent tous par le même point.
Ils ne seront donc pas séparés.

EXERCICE 3

Le mouvement d'un satellite de la Terre est étudié dans le référentiel géocentrique. La Terre est supposée sphérique, de centre O, de rayon R_T et de masse M_T. Le satellite, assimilé à un point matériel de masse m, décrit la trajectoire géostationnaire de rayon r autour de O, dans le plan équatorial terrestre.

1) Exprimer l'énergie cinétique du satellite en fonction de M_T, m, r et G la constante de la gravitation.

2) L'expression de l'énergie potentielle d'un satellite dans le champ de pesanteur est $E_p = -G.\frac{M_T.m}{r}$ en posant $E_p = 0$ pour r infini. Comment varie E_p en fonction de r? Exprimer l'énergie mécanique totale du satellite.

3) Quelle énergie mécanique minimale doit-on fournir au satellite depuis un point de lancement de l'équateur, pour le mettre sur l'orbite géostationnaire à l'altitude h, en négligeant les frottements dus à la résistance de l'air. Calculer sa valeur avec $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ SI; $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg; $R_T = 6\,400$ km; $m = 10^3$ kg et $h = 35\,800$ km.

1. EXERCICES RESOLUS

SOLUTION

1) Energie cinétique

La force gravitationnelle est : $F = G.\frac{M_T.m}{r^2}$.

Le vecteur force $\vec{F}$ est centripète, donc : $F = m.\frac{v^2}{r}$

v étant la vitesse du satellite sur son orbite.

Son énergie cinétique est : $E_c = \frac{1}{2} m.v^2$.

De l'égalité : $G.\frac{M_T.m}{r^2} = \frac{m.v^2}{r}$ il vient $v^2 = \frac{G.M_T}{r}$,

d'où $$E_c = \frac{G.M_T.m}{2r}.$$

2) Energie mécanique totale

L'énergie potentielle du satellite est $E_p = -\frac{G.M_T.m}{r}$.

Plus le satellite s'éloigne de la Terre, plus l'énergie potentielle du système Satellite-Terre croît. Pour r infini, $E_p = 0$, donc pour toutes autres valeurs de r, E_p est négatif.

L'énergie mécanique totale E du système est :

$$E = E_c + E_p$$

soit $$E = \frac{G.M_T.m}{2r} - \frac{G.M_T.m}{r}$$

$$E = -\frac{G.M_T.m}{2r}.$$

Donc lorsque le satellite s'éloigne de la Terre, r croît, E croît et tend vers zéro.

3) Energie minimale à fournir au satellite pour le mettre sur orbite

• Sur le sol terrestre, $r = R_T$ (altitude zéro). A l'instant du lancement, l'énergie mécanique est :

$$E_0 = E_{c_0} - \frac{G.M_T.m}{R_T}$$

E_{c_0} est l'énergie fournie au satellite sous forme cinétique pour le propulser depuis la base de lancement sur le sol terrestre.

• Sur l'orbite à l'altitude h, telle que : $r = R_T + h$, l'énergie mécanique est : $E = -\frac{G.M_T.m}{2r}$

En l'absence de perte d'énergie, le système est conservatif :

$$E_0 = E$$

et $$E_{c_0} - \frac{G.M_T.m}{R_T} = -\frac{G.M_T.m}{2r}$$

soit : $$E_{c_0} = G.M_T.m.\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)$$

Sa valeur est :

$$E_{c_0} = 1{,}2 \times 10^{10}\ \text{J}.$$

Cette énergie croît avec la masse du satellite à lancer.



L'astronaute G. Nelson récupère le satellite d'observation du Soleil (Solar max).

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATION

Projectile dans le champ de pesanteur

Exercice 1

Deux projectiles de masses différentes sont lancés avec la même vitesse, verticalement. Atteindront-ils la même hauteur?

Exercice 2

Une bille de masse m, est lancée dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$, verticalement vers le haut et s'élève jusqu'au point C, puis retombe. En prenant le repère vertical $(O, \vec{k})$, l'origine étant au point C, dire comment varient son énergie potentielle E_p et son énergie cinétique E_c.

*** Exercice 3**

Avec quelle vitesse faudrait-il lancer un projectile vers le haut verticalement, pour qu'il atteigne la hauteur de la tour Eiffel ($h = 300$ m), en l'absence de frottement?

*** Exercice 4**

Afin de mesurer la vitesse initiale v_0 d'un projectile sortant d'un petit pistolet, on tire verticalement depuis un point O pris pour origine et situé à 2 m au-dessus du sol. Le projectile retombe sur le sol 2,5 s après son départ. Calculer la vitesse v_0.

Exercice 5

Une flèche est tirée d'un point O avec une vitesse initiale de 50 $m.s^{-1}$ sur une cible à 50 m. Quel doit être l'angle de tir pour qu'elle atteigne la cible située à 50 cm en dessous du niveau horizontal du point O? ($g = 10\ m.s^{-2}$).

Particule chargée dans un champ électrostatique

Exercice 6

Une particule de charge q, immobile dans un repère, est plongée dans un champ électrostatique uniforme ($\vec{E}$ constant). Subit-elle une force?
Même question si la particule est en mouvement dans le repère.

Exercice 7

Une particule de charge électrique q est plongée dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$. La force électrostatique qu'elle subit a-t-elle toujours la direction et le sens de $\vec{E}$? Son accélération dépend-elle de la masse de la particule?

*** Exercice 8**

Des protons de charge $q = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C et de masse $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg, sont accélérés dans le vide par une tension U, jusqu'à la vitesse $v = 1{,}4 \times 10^{6}\ m.s^{-1}$.
Quelle est la valeur de la tension?

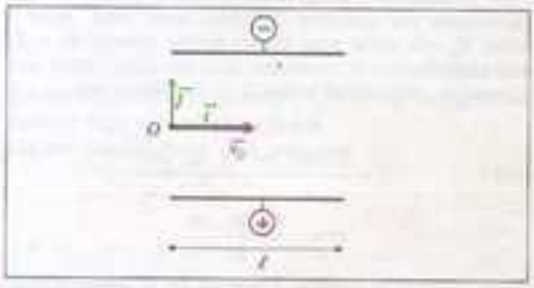
Exercice 9

Un électron de masse m et de charge q, pénètre dans un champ électrostatique uniforme. Montrer que le poids de la particule est négligeable devant l'autre force qu'elle subit.

$m = 9 \times 10^{-31}$ kg; $q = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C; $E = 10^{3}\ V.m^{-1}$.

*** Exercice 10**

Un faisceau homocinétique d'électrons et de positrons pénètre en O, dans le champ électrostatique uniforme établi entre les armatures d'un condensateur plan. Chaque particule en O, a la même vitesse $\vec{v}_0$ et ce vecteur est orthogonal à $\vec{E}$.
Après avoir vérifié que l'équation cartésienne de la trajectoire de l'électron est $y = -\dfrac{e.E}{2v_0^2.m}.x^2$, calculer la distance de leurs points de sortie S_1 et S_2 du champ, si les armatures ont une longueur ℓ.



Données : charge élémentaire $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C; masse de l'électron (et du positron) :

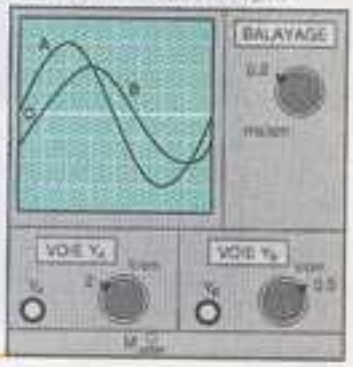
$m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg;

tension aux bornes du condensateur $U = 10^2$ V, longueur des armatures $\ell = 10$ cm, distance des armatures $d = 5$ cm; vitesse d'une particule en O, $v_0 = 10^7\ m.s^{-1}$.

Réglage de l'oscilloscope

*** Exercice 11**

La figure représente la face avant d'un oscilloscope et les deux courbes A et B inscrites sur l'écran.
En tenant compte des réglages de l'appareil, évaluer pour chacune des deux tensions $u_A(t)$ et $u_B(t)$:
— l'amplitude de la tension;
— la période puis la fréquence;
— le décalage horaire θ. Préciser la tension en avance sur l'autre.



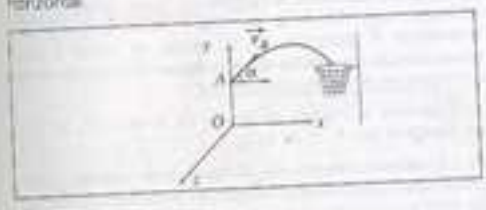
2. EXERCICES PROPOSÉS

EXERCICES D'APRÈS BACCALAURÉATS

Solide dans le champ de pesanteur

Exercice 12

On négligera l'action de l'air.
On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.
Lors d'un match de basket, pour marquer un panier, il faut que le ballon passe dans un cercle métallique situé dans un plan horizontal, à 3,05 m du sol horizontal. Pour simplifier, on remplacera le ballon par un point matériel devant passer exactement au centre C du cercle métallique. xOy est un plan vertical contenant le point C; xOz est le plan du sol supposé horizontal.



1) D'un point A de Oy situé à 2 m du sol, un basketteur, sans adversaire, lance le ballon, avec une vitesse $\vec{v}_0$ contenue dans le plan xOy. Sa direction fait un angle $\alpha = 45°$ avec un plan horizontal.

a) Montrer que la trajectoire du ballon est plane.

b) Établir l'équation de cette trajectoire dans le système d'axes indiqué, en fonction de v_0.

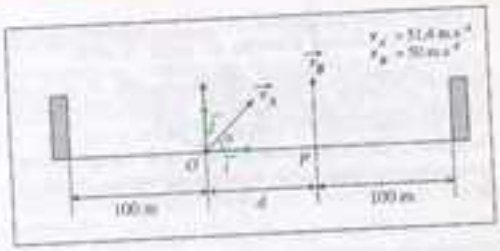
c) Quelle doit être la valeur de v_0 pour que le panier soit réussi, sachant que les verticales de A et de C sont distantes de 7,10 m?

d) Quelle est la durée du trajet effectué par le ballon du point A au point C?

2) Voulant arrêter le ballon, un adversaire situé à 0,90 m du tireur, saute verticalement en levant les bras. La hauteur atteinte alors par ses mains est de 2,70 m au-dessus du sol.
α et v_0 ayant les mêmes valeurs que précédemment, le panier sera-t-il marqué?

Exercice 13

Deux fusées A et B doivent être tirées simultanément à partir de deux points O et P situés au sol et distants de $d = 30$ m. Les fusées vont exploser à la date $t_1 = 4$ s après leur lancement. L'une B est tirée de P avec une vitesse $\vec{v}_B$ verticale, l'autre A est tirée de O avec une vitesse $\vec{v}_A$ inclinée de α par rapport à l'horizontale et située dans le même plan vertical que $\vec{v}_B$.



1) Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, établir, sous forme littérale uniquement, les équations horaires des mouvements de chaque fusée après leur lancement, instant qui sera choisi comme instant initial. Préciser la nature de leur trajectoire, en donner l'allure.

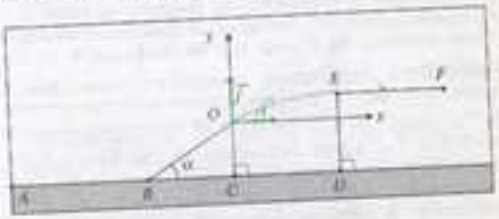
2) Déterminer l'inclinaison α de la vitesse initiale $\vec{v}_A$ de A, pour que l'explosion ait lieu à la verticale de P.

3) Quelle est la distance qui sépare les deux fusées au moment de l'explosion?

4) Les barrières de sécurité pour les spectateurs sont installées de façon à respecter la distance de 100 m des points de lancement O et P. Ces spectateurs sont-ils en sécurité lors de la retombée des fusées en cas de non explosion en altitude?
On négligera les frottements de l'air.
Prendre $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.

Exercice 14

Un cascadeur veut sauter avec sa voiture sur la terrasse horizontale EF d'un immeuble.



Il utilise un tremplin BOC formant un angle α avec le sol horizontal $ABCD$ et placé à la distance CD de la maison (OC et DE sont des parois verticales).
On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.

La masse de l'automobile et du pilote égale une tonne. On étudiera le mouvement de l'ensemble assimilable à son centre d'inertie G. Pour simplifier le problème, on considérera les frottements inexistants dans la phase aérienne et on admettra qu'à la date initiale le centre d'inertie G quitte le point O avec la vitesse $\vec{v}_0$ et qu'il est confondu avec le point E à l'arrivée.

2. EXERCICES PROPOSES

1) Etablir dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'équation de la trajectoire du centre d'inertie G, entre O et E.

2) *a*) Calculer la vitesse initiale V_0 en $m.s^{-1}$ et $km.h^{-1}$ et l'angle α, pour que le système arrive en E avec un vecteur-vitesse $\vec{V}_E$ horizontal.

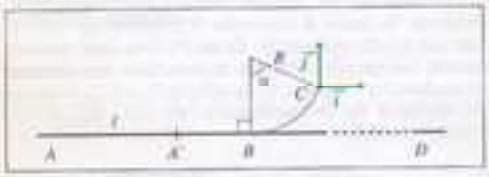
Données : $CD = 15$ m, $DE = 10$ m, $OC = 8$ m.

b) Calculer la vitesse V_E à l'arrivée de l'automobile en E.

3) En considérant qu'une fois l'automobile sur la terrasse, les frottements sont équivalents à une force constante $\vec{f}$ parallèle au déplacement et d'intensité 500 N, calculer l'intensité de la force de freinage $\vec{F}$, qui permettra au véhicule de s'arrêter après un trajet $EF = L = 100$ m.

Exercice 15

On lance un projectile M, supposé ponctuel, de masse m, suivant une piste dont la figure représente la trace ABC dans un plan vertical.
AB est horizontal, BC circulaire, de rayon r, tangente en B à AB. Les frottements ainsi que la résistance de l'air sont négligeables.



Le lancement est effectué en faisant agir sur M, initialement au repos en A, une force $\vec{F}$, horizontale, d'intensité F constante, sur une longueur $AA' = \ell$.

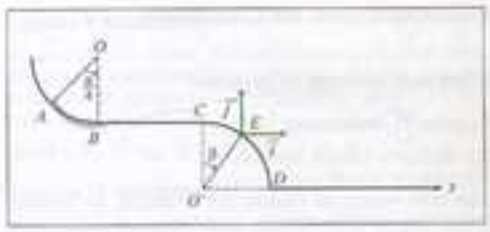
1) Déterminer la vitesse V_C du projectile au point C, en fonction de F, m, r, ℓ, g et α. Quelle doit être la valeur minimale de F pour que M atteigne C?

Application numérique : $m = 0{,}1$ kg ; $r = 0{,}8$ m ; $\alpha = 60°$; $\ell = 0{,}5$ m ; $g = 10\ m.s^{-2}$.

2) On suppose que la force $\vec{F}$ a pour intensité $F = 2{,}0$ N. Les autres valeurs numériques sont celles du paragraphe 1). Quelle est dans le repère $(C, \vec{i}, \vec{j})$, l'équation de la trajectoire de M, quand il a quitté C? Déterminer la distance au point B du point d'impact D sur le plan horizontal contenant AB. (Pour résoudre l'équation donnant la position de D, opérer avec les valeurs numériques.)

Exercice 16

Un skieur de masse $m = 60$ kg glisse sur une portion de piste formée de quatre parties AB, BC, CD et Dx.
AB représente une portion de circonférence de rayon r, de centre O et telle que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4}$ rad.
BC est une partie rectiligne horizontale de longueur $2r$.
CD un quart de cercle de centre O' et de rayon r, et Dx une partie horizontale.
Toute la trajectoire est située dans un plan vertical. On prendra $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$.



Le skieur démarre sur la piste, en A, avec une vitesse nulle. Dans tout le problème on assimilera le mouvement du skieur à celui d'un point matériel.

1) La piste est bien enneigée et, pour simplifier, on admettra que le long du trajet ABC la force de frottement $\vec{f}$, exercée par la neige, se réduit à une force unique de même direction que $\vec{V}$, mais de sens contraire et de valeur constante f.

a) Exprimer la vitesse du skieur en B et C (V_B et V_C) en fonction de f, r, m et g.

b) Le skieur arrivant en C avec une vitesse nulle, déterminer l'expression littérale et la valeur numérique de f.

2) Le skieur aborde la partie CD ($V_C = 0$). La piste est maintenant verglacée, les frottements sont négligeables.
Il perd le contact avec la piste en un point E tel que

$$(\overrightarrow{O'C}, \overrightarrow{O'E}) = \beta.$$

a) Exprimer sa vitesse V_E en fonction de β, r et g.

b) Calculer numériquement β.

3) Déterminer, dans le repère $(E, \vec{i}, \vec{j})$, la nature de la trajectoire du skieur après son passage en E. L'équation de la trajectoire n'est pas demandée.

Particules dans un champ électrostatique

Exercice 17

Dans un tube sous vide, un faisceau d'électrons est émis, sans vitesse initiale, par une cathode C. Ce faisceau est accéléré par une tension U_1, positive appliquée entre la plaque P et la cathode C.

1) Calculer U_1 pour que les électrons arrivent sur la plaque avec la vitesse $v_1 = 25\,000\ km.s^{-1}$.

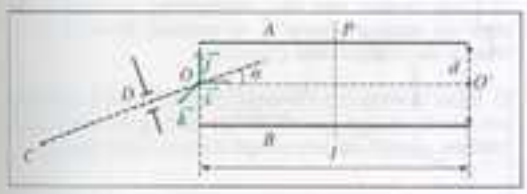
2) La plaque P est percée d'un trou et le faisceau entre ensuite, suivant l'axe horizontal Ox, avec la vitesse v_1, entre les armatures A et B de forme carrée d'un condensateur plan C.
Soit : d, la distance entre les deux armatures, ℓ, leur longueur, D, la distance du centre I du condensateur à un écran E, et U, la tension entre les armatures.
Calculer la trajectoire d'un électron entre les armatures.

2. EXERCICES PROPOSES

3) Montrer que, sur l'écran, la déviation est proportionnelle à U. Calculer cette déviation pour $U = 100$ V; $D = 0{,}4$ m; $\ell = 0{,}1$ m.
On donne : $d = 0{,}025$ m; $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C; $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg.



Exercice 18



Un condensateur plan est constitué de deux plaques parallèles métalliques rectangulaires horizontales A et B de longueur ℓ et séparées par une distance d.
On raisonnera dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ constituant un trièdre direct, orthonormé. Le point O est équidistant des deux plaques.
Un faisceau homocinétique de protons, émis en C à vitesse nulle, est accéléré entre les points C et D, situés dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Il pénètre en O, en formant l'angle α avec i, dans le champ électrique supposé uniforme $\vec{E}$ du condensateur.

1) Après avoir indiqué en le justifiant le signe de $V_D - V_C$, calculer en fonction de $U = |V_D - V_C|$ la vitesse v_0 de pénétration dans le champ électrique uniforme.

Application numérique : $U = 1\,000$ V, masse du proton $= 1{,}6 \times 10^{-27}$ kg, charge électrique élémentaire $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

2) Indiquer en le justifiant, le signe de $V_A - V_B$ tel que le faisceau de protons puisse passer par le point O'. Donner l'équation de la trajectoire des protons dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en fonction de U, $U' = |V_A - V_B|$, α et d.
Quelle est la nature du mouvement des protons?
Calculer la valeur numérique de U' qui permet de réaliser la sortie en O' pour $\alpha = 30°$, $L = 20$ cm et $d = 7$ cm.

3) Dans le cas où la tension U' a la valeur précédemment calculée, déterminer à quelle distance minimale du plateau supérieur passe le faisceau de proton.

N.B. Toute l'expérience a lieu dans le vide et on négligera les forces de pesanteur.

Exercice 19

Deux plaques métalliques rectangulaires A et B, de longueur ℓ, horizontales, produisent dans l'espace qui les sépare un champ électrique uniforme $\vec{E}$, dirigé vers le haut. On a choisi un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans un plan vertical (fig. *a*). A la distance ℓ de O, en C, on a placé un écran, perpendiculaire à Ox. Lorsqu'un faisceau électronique frappe l'écran, on observe une tache lumineuse.



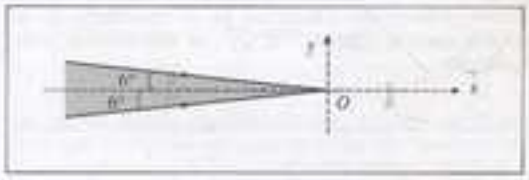
1) Un électron arrive en O avec la vitesse $\vec{v}_0$, contenue dans le plan (Ox, Oy). La mesure α de l'angle $(\vec{i}, \vec{v}_0)$ est comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

a) Établir l'équation de la trajectoire de cet électron sous forme littérale. Quelle est la nature géométrique de cette trajectoire?

b) Exprimer littéralement la condition qui doit être vérifiée par α si l'on veut que l'électron arrive sur l'écran en C. L'écartement des plaques est suffisant pour que l'électron n'entre pas en collision avec l'une d'elles.

Application numérique : déterminer la valeur minimale de α qui convient.

2) On envoie maintenant un faisceau d'électrons entièrement situé dans le plan (Ox, Oy), convergent en O, de demi-angle au sommet 6,0° (fig. *b*). La valeur de la vitesse est la même pour tous les électrons : $1{,}0 \times 10^7$ m.s^{-1}. On ne tiendra pas compte des chocs entre électrons qui pourraient se produire en O.
La trace observée sur l'écran est-elle ponctuelle? Sinon, quelle est sa longueur?



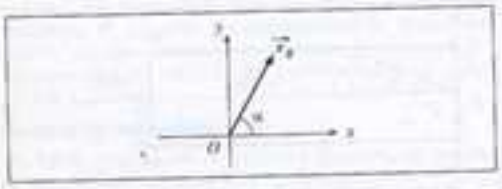
Données numériques :
charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C;
masse de l'électron : $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg;
$\ell = 15$ cm; $E = 790$ V.m^{-1}; $v_0 = 1{,}0 \times 10^7$ m.s^{-1}.

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 20

Toutes les expériences suivantes sont supposées être réalisées dans le vide et dans un champ de pesanteur uniforme d'intensité $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.

1) A l'instant $t = 0$, une sphère S, supposée ponctuelle, de masse $m = 2{,}0$ g, est lancée à partir d'un point O avec une vitesse $\vec{v}_0$ de valeur $1{,}5\ m.s^{-1}$, faisant un angle égal à 60° avec l'horizontale $\overrightarrow{Ox}$.



a) Établir dans le repère $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ l'équation de la trajectoire de la sphère.

b) A quel instant l'ordonnée y de la sphère est-elle maximale? Calculer la valeur numérique de cette ordonnée maximale.

c) Après son lancement, la sphère recoupe l'axe $\overrightarrow{Ox}$ en un point P; calculer l'abscisse de P et l'instant où la sphère est en P.

2) On superpose au champ de pesanteur, un champ électrostatique uniforme, caractérisé par un vecteur $\vec{E}$. La sphère S est maintenant électrisée et porte une charge négative : $q = -2{,}0 \times 10^{-6}$ C.

a) Lorsqu'on projette la sphère avec une vitesse $\vec{v}_0$ quelconque, son mouvement est rectiligne et uniforme. Donner les caractéristiques du vecteur $\vec{E}$ (direction, sens et valeur).

b) Le vecteur $\vec{E}$ ayant même intensité qu'au a) est maintenant parallèle à $\overrightarrow{Ox}$.
La sphère S est abandonnée au point O sans vitesse initiale. Déterminer l'équation de la trajectoire de la sphère dans le repère $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ et représenter cette trajectoire.



Exercice 21

Deux plateaux métalliques carrés, de côté ℓ, sont placés en regard, parallèlement l'un à l'autre dans une enceinte où règne un vide poussé. En chargeant les plateaux, on crée entre eux un champ électrostatique uniforme de vecteur $\vec{E}$. (On ne tient pas compte des effets de bords.) Un faisceau homocinétique de noyaux de deutérium (ou deutons) $^2_1H^+$ pénètre en O dans la région du champ et en sort en S.

Le poids des particules a un effet négligeable sur leur mouvement. Leur charge est q, leur masse m. En O, leur vitesse est $\vec{v}_0$.

A) La trajectoire des particules est représentée dans quatre cas : figures a, b, c, d.

1) Dans chacun des cas, représenter la direction, le sens du vecteur-champ $\vec{E}$ et préciser le signe de la charge de chacun des plateaux.

2) Dans quel(s) cas l'énergie cinétique d'une particule est-elle la même en O et en S? La réponse sera justifiée par un raisonnement simple, sans calculs.

B) Dans le cas représenté sur la figure a, les particules sorties du champ électrostatique en S sont reçues en I sur un écran H, dont le plan est perpendiculaire au plan de la figure (fig. e). La distance entre O et l'écran est $D = OO'$. Sur l'écran, on mesure $O'I = d$.

1) Quelle est la nature du mouvement des particules entre S et I? Justifier brièvement la réponse sans calculs.

2) a) Établir l'équation de la trajectoire d'une particule entre O et S dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (fig. f).

b) Montrer que la déviation angulaire de la particule, animée en O de la vitesse $\vec{v}_0$, dépend du rapport $\frac{q}{m}$, appelé charge massique de la particule.

On peut utiliser la propriété d'une parabole de sommet O $(x = 0,\ y = 0)$: la tangente au point d'abscisse x coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{x}{2}$.

2. EXERCICES PROPOSES



Fig. a

EXERCICES DESTINÉS A TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 22 — A.1.a.

Définir les termes suivants : plan de tir, portée, flèche.

Exercice 23 — A.2.b.

En quelle unité du SI s'exprime le champ électrique? Exprimer cette unité à l'aide des unités de base : m, kg, s, A.

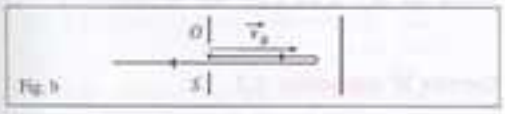


Fig. b

Exercice 24 — A.2.b.

Montrer, que la trajectoire du centre d'inertie d'un projectile lancé depuis le point O à la vitesse $\vec{v}_0$ dans un champ de pesanteur uniforme est dans le plan de tir.



Fig. c

Exercice 25 — B.1.

Renseignez-vous auprès de votre professeur d'éducation physique pour connaître :
— les barèmes de notes concernant le lancer du « poids », du marteau, du javelot, du saut en hauteur ;
— les records mondiaux masculins et féminins réalisés.

Exercice 26 — B.2.

Lire le texte de l'exercice et le brouillon correct de l'élève. Rédiger la solution.

Texte de l'exercice :

Dans tout cet exercice on négligera la résistance de l'air.

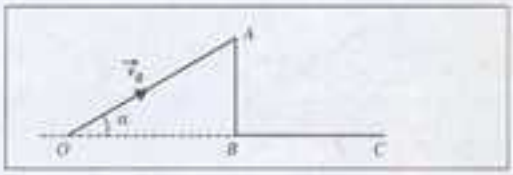
Un mobile de masse m est lancé le long d'une ligne de plus grande pente d'un plan incliné de longueur $L = OA$, faisant un angle α avec l'horizontale passant par O, B et C.



Fig. d



Fig. e



La vitesse initiale de lancement v_0 à partir de O est telle que le mobile est projeté après son passage en A et retombe sur le plan horizontal contenant B et C au point M.

1) Dans la phase de lancement le long de OA, on suppose que les frottements sur le plan incliné sont négligeables.
Quelle est la vitesse du mobile à son arrivée sur le plan BC?

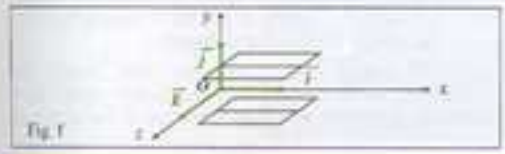


Fig. f

2. EXERCICES PROPOSES

2) Calculer la hauteur maximale atteinte par le mobile au point culminant S.

Applications numériques :
$v_0 = 5\ m.s^{-1}$ $\quad L = 1\ m$ $\quad \alpha = 30°$ $\quad g = 10\ m.s^{-2}$.

Brouillon de l'élève :
Système : mobile dans champ de pesanteur.
Repère : $(O, \vec{i}, \vec{k})$.
Forces : $\vec{P}$ et $\vec{R}$ (pour OA).

1) $E_c(M) - E_c(O) = W_{\vec{P}}$

$= m.g.(z_O - z_M) = 0$

$\longrightarrow \quad E_c(M) = E_c(O)$

$\mathbf{v_M = v_0 = 5\ m.s^{-1}}$.

2) $E_c(S) - E_c(O) = W_{\vec{P}}$

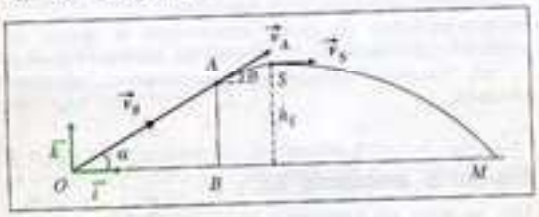
$$\frac{1}{2} m.v_S^2 - \frac{1}{2} m.v_O^2 = m.g.(z_O - z_S)$$

$$v_S^2 - v_O^2 = -2g.h_S \quad (1)$$

or calcul de v_S : $v_S = v_A.\cos\alpha$.

et $E_c(A) - E_c(O) = -m.g.AB$

$v_A^2 = v_O^2 - 2g.L.\sin\alpha$



donc $\quad v_S^2 = 15\cos^2 30°$.

$$(1) \longrightarrow 2g.h_S = v_O^2 - v_S^2$$

$$h_S = \frac{v_O^2 - v_A^2.\cos^2\alpha}{2g} \qquad \mathbf{h_S = 13{,}75\ m.}$$

Exercice 27 B.3.

Sur l'écran d'un oscilloscope, le spot décrit une courbe dont les coordonnées du spot sont données en fonction du temps t, par :

$x = v.t$ et $y = a.\cos(\omega.t)$;

avec $v = 0{,}5\ m.s^{-1}$, $a = 3$ cm et $\omega = \frac{\pi}{25}\ rad.s^{-1}$.

Trouver les coordonnées du vecteur-vitesse du spot et exprimer la valeur de la vitesse en fonction du temps.

Exercice 28 B.4

Sur l'écran d'un oscilloscope le spot décrit une courbe, dont les coordonnées du spot sont données en fonction du temps t, par :

$x = a.\cos(\omega.t)$ et $y = a.\cos(\omega.t)$.

Quelle est la courbe $y = f(x)$?

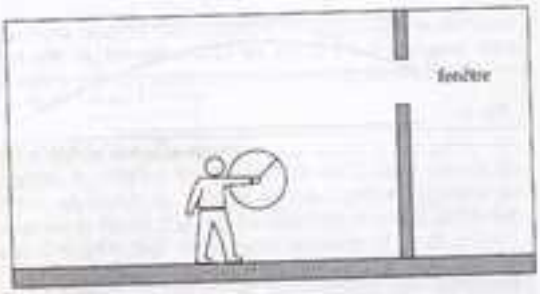
Exercice 29 C.1.b.

Lire l'extrait de « la Recherche » et répondre à la question : « Io est un astre des plus extraordinaires, sa surface étonnamment colorée est entièrement façonnée par un volcanisme très actif. Les photographies de Voyager I ont révélé au moins huit volcans projetant des panaches de matière à des altitudes atteignant 280 km pour certains d'entre eux, ce qui implique une vitesse de « projection dans l'espace de l'ordre de 1 000 m/s ».
Sachant que Io n'a pas d'atmosphère ces valeurs vous semblent-elles compatibles?

Données : Rayon de Io : $R = 1\,820$ km, masse de Io : $M = 8 \times 10^{22}$ kg, $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ SI.

Exercice 30 C.2.

Dans cet exercice on ne demande aucun calcul, ni littéral, ni numérique. On pourra utiliser, sans les démontrer, les résultats établis en cours sur la chute des corps dans le champ de pesanteur terrestre. On négige l'action de l'air sur le caillou.



A proximité d'un mur où se trouve une fenêtre, un enfant fait tourner un caillou au bout d'une ficelle de longueur constante. Le mouvement du caillou a lieu dans le plan vertical perpendiculaire au mur et en face de la fenêtre. Le mouvement du caillou est supposé circulaire et uniforme. La main de l'enfant est toujours à la même position.

Le bas de la fenêtre est situé plus haut que le sommet du cercle. La ficelle casse quand le caillou est en un point P de la trajectoire.

A partir de l'analyse des différentes formes possibles de la trajectoire du caillou après rupture de la ficelle, déterminer l'ensemble (E) des points P à partir desquels il est impossible que le caillou atteigne la fenêtre, quelles que soient les valeurs des différentes grandeurs pouvant varier. On envisagera les deux sens de rotation possibles.

Faire la liste de toutes les grandeurs dont il est nécessaire de connaître la valeur pour pouvoir répondre à la question : « dans le cas où P n'appartient pas à (E), le caillou atteint-il la fenêtre? »

Plusieurs listes sont possibles, une seule est demandée. La présence d'une grandeur inutile sera pénalisée au même titre que l'absence d'une grandeur utile.

5 Pendule élastique

1 Variété des oscillateurs mécaniques.

2 Étude théorique du mouvement d'un oscillateur.

3 Conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur.

4 Amortissement des oscillations.



Les amortisseurs du T. G. V. Atlantique.

L'ensemble {atome, balançoire, cœur, électron, marées, montre, moteur d'automobile, œil, oiseau en vol, oreille, planète, téléviseur, trompette, violon...} est constitué d'éléments fort disparates, classés ici par ordre alphabétique. Tous ont un point commun : leur comportement peut être partiellement décrit à l'aide de fonctions sinusoïdales du temps.
Ce chapitre est consacré à l'étude du ***pendule élastique****, qui peut servir de modèle pour l'étude des vibrations de systèmes plus complexes, tels ceux qui sont cités dans l'ensemble précédent.*

1 VARIÉTÉ DES OSCILLATEURS MÉCANIQUES

Un oscillateur mécanique est un objet qui se déplace en repassant périodiquement par une position d'équilibre.

1. Exemples d'oscillateurs mécaniques

a) Quelques dispositifs

• A notre échelle

Les figures 1 et 2 montrent des oscillateurs usuels.

De nombreux autres oscillateurs mécaniques peuvent être cités : balançoire, aiguille d'une boussole, automobile sur ses amortisseurs, diapason, tambour...

Tous ces systèmes possèdent une **position d'équilibre stable,** qu'ils finissent par retrouver après oscillations quand aucune action extérieure n'intervient pour entretenir leurs mouvements.

Plus généralement, tous les solides peuvent vibrer (vitre...), ainsi que les liquides (vagues sur l'océan...) et les gaz (transmission des ondes sonores dans l'air...).



Fig. 1. Rostropovitch en récital.

• A l'échelle moléculaire

Le comportement oscillatoire des molécules peut être décrit en première approximation par le modèle représenté par la figure 3.



*Fig. 3. **Modèle descriptif des vibrations moléculaires.** Les ressorts modélisent les liaisons covalentes. I désigne la position du centre d'inertie des molécules.*

Le mouvement vibratoire des molécules diatomiques est étudié relativement à un référentiel dans lequel les atomes sont animés de mouvements rectilignes et où le centre d'inertie *I* reste fixe. Dans le cas de la molécule de chlorure d'hydrogène HCl, l'atome de chlore, 35 fois plus massif que l'atome d'hydrogène, reste pratiquement immobile.

L'étude du mouvement complet d'un ensemble de molécules doit aussi prendre en compte la rotation des molécules et les interactions moléculaires.

b) Force de rappel et inertie

Les vibrations des systèmes mécaniques résultent de la compétition entre deux types de phénomènes :

L'existence d'une ***force de rappel,*** équivalente à l'action d'un ressort, qui tend à faire revenir l'objet mobile vers sa position d'équilibre.

L'***inertie*** de l'objet, dont la tendance naturelle est de poursuivre un mouvement rectiligne et uniforme, en l'absence d'actions, et qui continue ainsi à se mouvoir lorsqu'il passe par sa position d'équilibre où la force de rappel est nulle.



Fig. 2. Horloge à balancier.

c) Allure des oscillations

La figure 4 indique une méthode expérimentale d'enregistrement des oscillations d'un corps, attaché à un ressort, en mouvement de translation vertical.

Ce dispositif constitue un ***pendule élastique.***

Puisque le papier se déroule à vitesse constante, l'abscisse est proportionnelle au temps. L'enregistrement fournit ainsi la position de l'oscillateur en fonction du temps. La courbe obtenue a l'allure d'une ***sinusoïde.***

d) Amortissement des oscillations

Du fait des frottements extérieurs et/ou des frictions intermoléculaires, les oscillations deviennent de moins en moins amples : elles sont **amorties.** Les oscillateurs finissent par se retrouver immobiles. Les forces responsables de cet amortissement sont qualifiées de **dissipatives.** Lors d'une première approche théorique, ces forces dissipatives seront supposées suffisamment petites pour être considérées comme nulles. Dans ces conditions, les oscillateurs ne sont plus amortis.

2. Le pendule élastique

Un pendule élastique est un oscillateur mécanique en translation.

a) Dispositif théorique

Un mobile de masse m, guidé rectilignement sur un banc à coussin d'air, est attaché à un ressort horizontal de raideur k. Ce ressort, de masse supposée nulle et à spires non jointives, peut travailler en extension et en compression (fig. 5).

Le ressort est attaché à un obstacle fixe. La position d'équilibre du centre d'inertie est repérée par le point I de l'axe $\overline{Ox}$ muni du vecteur unitaire $\vec{i}$.

Si on écarte le mobile de sa position d'équilibre, il effectue des oscillations de translation autour de cette position.

b) Dispositifs expérimentaux

Il est difficile d'utiliser un ressort qui travaille en extension ou en compression sans qu'il s'affaisse pendant la phase de compression. Des dispositifs, plus aisés à manipuler, sont obtenus :

— soit en attachant deux ressorts de part et d'autre d'un mobile sur une table à coussin d'air (fig. 6). Les deux ressorts utilisés n'ont ni nécessairement la même longueur à vide, ni le même coefficient de raideur k. Ils équivalent à un seul ressort, de raideur : $k = k_1 + k_2$.

(Voir « Pour en savoir plus ».)

— soit en réalisant des oscillations verticales (fig. 7). Un ressort de raideur k est accroché en A à un support (fig. 7). Un objet de masse m est attaché à son extrémité inférieure. Le ressort s'allonge et prend un nouvel état d'équilibre.

Écarté verticalement de cette position, puis lâché, l'objet effectue des oscillations verticales autour de sa position d'équilibre en charge.

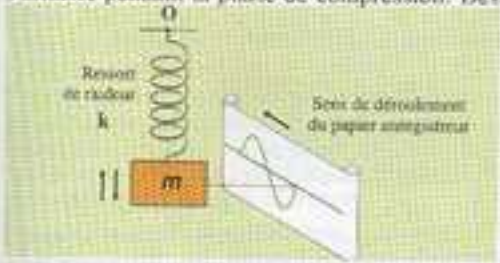


Fig. 4. ***Enregistrement des oscillations d'un pendule élastique.*** *Un stylet solidaire du pendule inscrit sa position sur le papier qui se déroule à vitesse constante.*

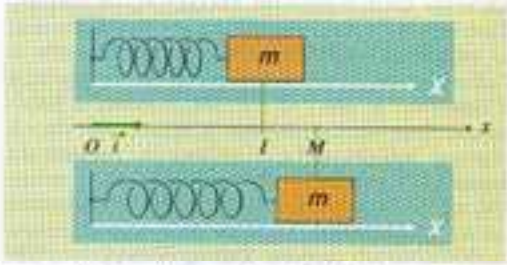


Fig. 5. ***Pendule élastique horizontal.*** *Le mobile est représenté à l'équilibre et dans une position quelconque M, lors d'une extension du ressort.*

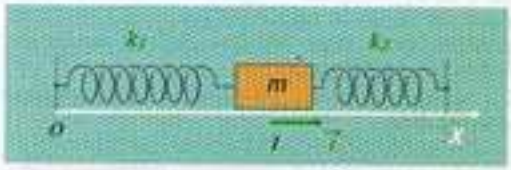


Fig. 6. ***Réalisation pratique d'un pendule élastique horizontal.***

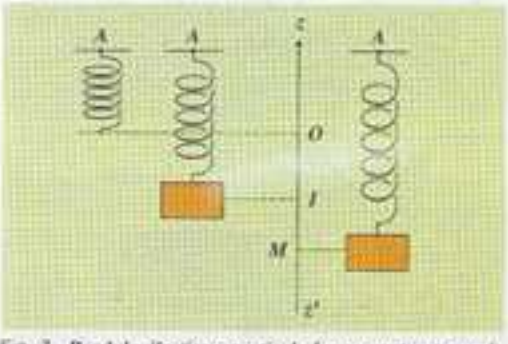


Fig. 7. ***Pendule élastique vertical.*** *Le ressort est représenté à l'équilibre à vide, à l'équilibre en charge, et pendant les oscillations.*

2 ÉTUDE THÉORIQUE DU MOUVEMENT D'UN OSCILLATEUR

L'oscillateur mécanique qui va être étudié est le plus simple qui soit : il effectue des oscillations de translation horizontales, non amorties, dans une seule direction.

1. Équation différentielle régissant le mouvement de l'oscillateur

a) Caractéristiques de la force de rappel élastique

Dans le cas théorique simple de la figure 5, l'effet du poids est annulé par la réaction du coussin d'air : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ (fig. 8).
La seule force active est l'action $\vec{F}$ du ressort. Tant que la limite d'élasticité n'est pas dépassée, la valeur de cette force est proportionnelle à l'***allongement*** du ressort à partir de sa position d'équilibre I, soit : $F = k \cdot IM$. Lorsqu'il fonctionne dans ces conditions, le ressort est dit « à réponse linéaire ». La constante k, **raideur** du ressort, s'exprime en newton par mètre ($N.m^{-1}$). Que le ressort travaille en extension ou en compression, la force qu'il exerce pointe toujours vers la position I d'équilibre. Pour cette raison, elle est nommée force de rappel (fig. 9).
La force de rappel élastique s'exprime vectoriellement par :

$$\vec{F} = -k \cdot \overline{IM},$$

où I et M désignent respectivement les projections sur $\overline{Ix}$ de la position d'équilibre I et d'une position quelconque M, du centre d'inertie de l'objet en mouvement.
La valeur algébrique $\overline{IM}$ prend souvent le nom d'**élongation.**

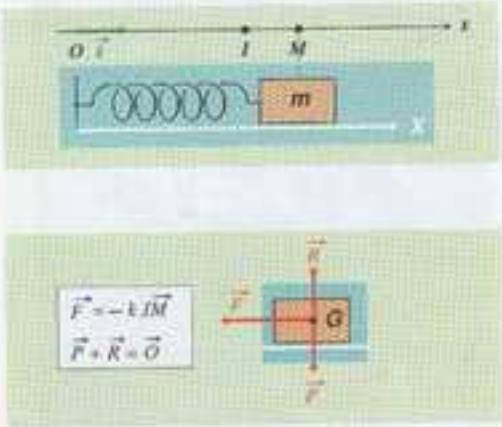


Fig. 8

b) Mise en équation

Le référentiel de la classe, par rapport auquel sont étudiés les mouvements rectilignes de l'oscillateur, est galiléen. La relation générale $\Sigma \vec{f} = m \cdot \vec{a}$, se simplifie, car la somme de toutes les forces agissant sur le mobile équivaut à la seule force de rappel $\vec{F} = -k \cdot \overline{IM}$.
Le centre d'inertie du mobile prend donc une accélération $\vec{a}$ telle que :

$$m \cdot \vec{a} = -k \cdot \overline{IM}.$$

Le choix d'un repère dont l'origine est la position d'équilibre I, et la direction celle du mouvement, simplifie l'écriture des équations (fig. 10).

Selon l'axe $\overline{Ix}$, la relation précédente donne :

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} = -k \cdot x \cdot \vec{i},$$

soit :

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0 \quad \text{ou} \quad m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$$

Cette équation, qui fait intervenir la variable $x(t)$ et sa dérivée seconde par rapport au temps, est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

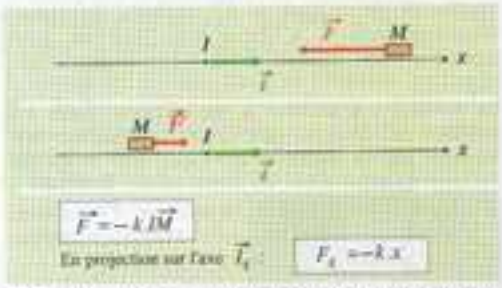


Fig. 9. ***Force de rappel élastique.*** *Elle pointe toujours vers la position d'équilibre I choisie ici comme origine. Sa valeur double, triple... lorsque la distance IM double, triple... aussi.*

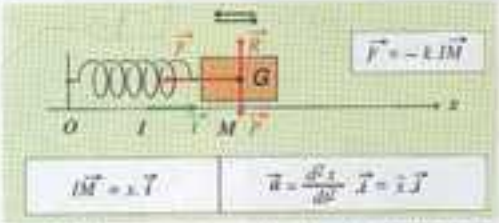


Fig. 10. ***Composantes et coordonnées des vecteurs position et accélération du mobile.*** *I correspond à la position d'équilibre.*

$$\Sigma \vec{f} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{F} = -k \cdot \overline{IM}.$$

2. Résolution de l'équation différentielle

a) *Recherche de la solution*

L'enregistrement du mouvement d'un oscillateur (fig. 4) suggère que son écart x, à la position d'équilibre, évolue sinusoïdalement en fonction du temps.
En d'autres termes, la solution de l'équation :

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0,$$

semble être du type :

$$x(t) = X_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi),$$

où X_m, ω et φ sont des constantes.
S'il en est ainsi,

$$\frac{dx}{dt} = -\omega \cdot X_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

et :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot X_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = -\omega^2 \cdot x.$$

En reportant dans l'équation différentielle, il vient :

$$-m \cdot \omega^2 \cdot x(t) + k \cdot x(t) = 0.$$

Cette équation est satisfaite quelque soit t si $m \cdot \omega^2 = k$.
La solution sinusoïdale envisagée convient donc à condition que la constante ω, qu'elle fait intervenir, soit liée aux caractéristiques mécaniques de l'oscillateur par la relation :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

b) *Mouvement harmonique*

• La constante $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est appelée **pulsation propre** (ou pulsation naturelle) de l'oscillateur. Elle est souvent notée ω_0. Elle s'exprime en radian par seconde ($rad.s^{-1}$).

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	ω_0 en radian par seconde ($rad.s^{-1}$) k en newton par mètre ($N.m^{-1}$) m en kilogramme (kg).

• Aucune condition ne se trouve mathématiquement imposée aux constantes X_m et φ. Leurs valeurs dépendent des conditions de lancement de l'oscillateur (position et vitesse).
— X_m est l'***amplitude*** du mouvement. Elle est positive, déterminée par les conditions initiales choisies à l'instant où le mobile est lâché.
$x(t)$ varie entre $-X_m$ et $+X_m$. L'amplitude X_m est égale à l'élongation maximale.
— La constante φ est la ***phase*** à la date $t = 0$. La loi horaire qui donne l'abscisse du centre d'inertie de l'oscillateur mécanique envisagé ici est donc de la forme :

$$x(t) = X_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi).$$

Un tel mouvement est dit sinusoïdal, ou **harmonique.**

Remarques :

La relation précédente donne l'élongation du mobile, car l'origine a été choisie en la position d'équilibre I. Si l'origine est un point quelconque, l'abscisse est plus généralement donnée par :

$$x(t) = X_I + X_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi),$$

où X_I désigne l'abscisse de I.

Si le centre d'inertie a pour abscisse X_m à la date $t = 0$, la phase peut être choisie nulle. La loi horaire donnant l'élongation devient :

$$x(t) = X_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t).$$

c) *Période propre et fréquence propre*

• A chaque fois que $(\omega_0 \cdot t + \varphi)$ augmente de 2π rad, le mobile se retrouve à la même position dans les mêmes conditions. Cela demande un intervalle de temps T_0, tel que :

$$(\omega_0 \cdot (t + T_0) + \varphi) = (\omega_0 \cdot t + \varphi) + 2\pi.$$

Par suite, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, d'où :

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

T_0 est appelée **période propre** de l'oscillateur. Elle s'exprime en seconde *(s)*.

• Si chaque période dure T_0 secondes, il se produit $N_0 = \frac{1}{T_0}$ oscillations par seconde. N_0 est la **fréquence propre** des oscillations. Elle s'exprime en hertz *(Hz)*.
Le tableau ci-dessous récapitule tous ces résultats :

OSCILLATEURS MÉCANIQUES HARMONIQUES	
Équation différentielle : $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0$ ou $m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$.	
Solution : $x = X_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$	
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $T_0 = \frac{1}{N_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$.	
m	en kilogramme (kg)
x et X_m	en mètre (m)
k	en newton par mètre ($N.m^{-1}$)
ω_0	en radian par seconde ($rad.s^{-1}$)
T_0	en seconde (s)
N_0	en hertz (Hz)
φ	en radian (rad).

3. Lois horaires et diagrammes

a) *Vitesse et accélération d'un mouvement harmonique*

• *Choix de l'origine des dates*

Choisir la phase φ nulle, par souci de simplicité, ne restreint pas la généralité des raisonnements puisque cela revient à décider que la date $t = 0$ correspond à un passage par l'élongation maximale.

Dans ces conditions, l'élongation du mobile est donnée par :

$$x(t) = X_m . \cos(\omega_0 . t).$$

• *Vitesse*

La vitesse s'obtient par dérivation :

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 . X_m . \sin(\omega_0 . t),$$

qui s'écrit aussi, en gardant la fonction cosinus :

$$v_x(t) = \omega_0 . X_m . \cos\left(\omega_0 . t + \frac{\pi}{2}\right).$$

La vitesse maximale est donc $V_m = \omega_0 . X_m$. C'est l'amplitude de la vitesse.

La phase de la vitesse v_x par rapport l'élongation x, vaut ici $\frac{\pi}{2} = 1{,}57$ rad. Dans ce cas, la vitesse est dite en *quadrature avance* sur l'élongation. L'élongation est aussi dite en *quadrature retard* sur la vitesse.

• *Accélération*

L'accélération s'obtient en dérivant une nouvelle fois :

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\omega_0 . X_m . \sin(\omega_0 . t)\right)$$
$$= -\omega_0^2 . X_m . \cos(\omega_0 . t),$$

ou encore, pour supprimer le signe moins :

$$a_x(t) = \omega_0^2 . X_m . \cos(\omega_0 . t + \pi).$$

L'accélération maximale est donc $A_m = \omega_0^2 . X_m$. C'est l'amplitude de l'accélération.

La phase de l'accélération a_x par rapport à l'élongation x, vaut π (3,14... rad). L'accélération est dite *en opposition* avec l'élongation : $a_x(t)$ et $x(t)$ sont toujours de signes contraires, comme le montre aussi la relation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 . x,$$

qui est une relation caractéristique des mouvements harmoniques.

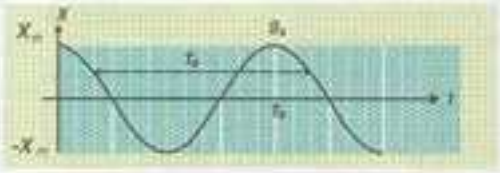
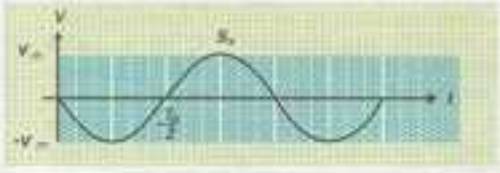
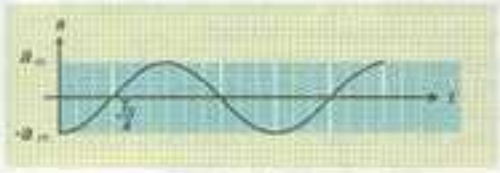
La phase de l'accélération (π), est supérieure de $\frac{\pi}{2}$, à celle de la vitesse : l'accélération est en quadrature avance sur la vitesse.

b) *Diagrammes temporels*

Les résultats précédents sont résumés par les diagrammes ci-dessous.

La vitesse est en *quadrature avance* sur l'élongation : $v_x(t)$ est extrémale aux instants où $x(t)$ est nulle. En suivant l'axe des temps, un sommet S_v de $v_x(t)$ *précède* le sommet voisin S_x de $x(t)$.

L'accélération $a_x(t)$ est toujours du signe contraire à $x(t)$, ce qui traduit le fait que la force $\vec{F} = m . \vec{a}_x(t)$ est une force de rappel : $F_x = -k . x$.

ÉLONGATION : $x = X_m . \cos(\omega_0 . t)$	
VITESSE : $v_x = V_m . \cos\left(\omega_0 . t + \frac{\pi}{2}\right)$ $V_m = \omega_0 . X_m$ v_x est en quadrature avance sur x.	
ACCÉLÉRATION : $a_x = A_m . \cos(\omega_0 . t + \pi)$ $A_m = \omega_0^2 . X_m$ a_x et x sont en opposition.	

3 CONSERVATION DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE D'UN OSCILLATEUR

1. Énergie cinétique de translation

Afin d'alléger l'écriture, la phase φ est encore ici choisie nulle.

Ainsi : $x(t) = X_m . \cos(\omega_0 . t)$,

et : $v_x(t) = -\omega_0 . X_m . \sin(\omega_0 . t)$.

L'expression de l'énergie cinétique de translation du mobile est donc :

$$E_c = \frac{1}{2} m . v^2 = \frac{1}{2} m . \omega_0^2 . X_m^2 . \sin^2(\omega_0 . t).$$

En tenant compte de la relation :

$$2 \sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha),$$

cette expression devient :

$$E_c = \frac{1}{4} m . \omega_0^2 . X_m^2 . (1 - \cos(2\omega_0 . t)).$$

L'énergie cinétique se présente ainsi comme une fonction sinusoïdale du temps, qui varie autour de la valeur moyenne :

$$E_{c\,moy} = \frac{1}{4} m . \omega_0^2 . X_m^2.$$

Sa pulsation est $2\omega_0$. Sa fréquence est $2N_0$ et sa période $\frac{T_0}{2}$.

Elle est maximale lorsque $\sin^2(\omega_0 . t) = 1$, soit pour $\omega_0 . t = \frac{\pi}{2} + n . \pi$, où n est un entier relatif.

Pour ces valeurs, $x(t) = 0$. L'énergie cinétique est donc *maximale lors des passages*, dans un sens ou dans l'autre, *par la position d'équilibre*.

Elle vaut alors $E_{c\,max} = \frac{1}{2} m . \omega_0^2 . X_m^2$.

Elle est évidemment nulle pour $x = \pm X_m$, lorsque le mobile arrive en bout de course et repart dans l'autre sens.

La figure 11 résume ces résultats.

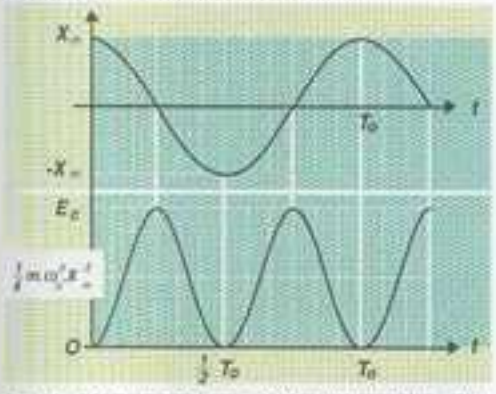


Fig. 11. *L'énergie cinétique de l'oscillateur varie sinusoïdalement à une fréquence double de celle de l'élongation.*

2. Énergie potentielle élastique

a) Travail de la force élastique

• Lors des oscillations horizontales de l'objet, la réaction et le poids, orthogonaux au déplacement, ne travaillent pas. La seule force qui travaille est la force de rappel élastique. Le théorème de l'énergie cinétique permet de calculer le travail W, de cette force, entre deux instants,

$$W = E_{c_2} - E_{c_1}.$$

• L'expression de l'énergie cinétique en fonction du temps :

$$E_c = \frac{1}{2} m . \omega_0^2 . X_m^2 . \sin^2(\omega_0 . t),$$

permet de calculer ce travail. Elle devient en effet, en tenant compte de $m . \omega_0^2 = k$:

$$E_c = \frac{1}{2} k . X_m^2 . \sin^2(\omega_0 . t).$$

La variable de position $x(t) = X_m . \cos(\omega_0 . t)$ peut s'introduire au seconde membre en tenant compte de la relation :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Alors,

$$E_c = \frac{1}{2} k . X_m^2 . (1 - \cos^2(\omega_0 . t))$$

$$= \frac{1}{2} k . X_m^2 - \frac{1}{2} k . X_m^2 . \cos^2(\omega_0 . t),$$

soit : $E_c = \frac{1}{2} k . X_m^2 - \frac{1}{2} k . x^2(t).$

En calculant la variation $E_{c_2} - E_{c_1}$ de l'énergie cinétique, le terme constant $\frac{1}{2} k . X_m^2$ disparaît, et il reste :

$$E_{c_2} - E_{c_1} = \frac{1}{2} k . x_1^2(t) - \frac{1}{2} k . x_2^2(t).$$

Ainsi, le travail de la force élastique peut être déterminé par :

$$W = \frac{1}{2} k . x_1^2 - \frac{1}{2} k . x_2^2.$$

Les parenthèses rappelant que x_1 et x_2 dépendent du temps ont été supprimées.

Il est à noter que cette expression n'est pas la variation de $\frac{1}{2} k . x^2$, mais son opposée, qui sera appelée sa perte (algébrique) dans la suite.

b) Énergie potentielle élastique

Une situation analogue s'est déjà présentée pour le travail du poids et le travail de la force électrique (chapitre 4). Le travail de ces forces a été calculé comme la perte (algébrique) des fonctions $E_p = m.g.z$, ou $E_p(M) = q.V_M$, appelées respectivement énergie potentielle de pesanteur et énergie potentielle électrique.

De même, l'expression $E_p = \frac{1}{2} k.x^2$ est appelée **énergie potentielle élastique.** La variable qui intervient dans cette fonction est la *variable de position*, et non la vitesse comme dans le cas de l'énergie cinétique.

Comme l'énergie potentielle n'intervient que par ses différences, il est possible éventuellement de lui ajouter une constante qui disparaît dans les différences $\left(E_p = \frac{1}{2} k.x^2 + C^{te}\right)$. Dans le cas des ressorts, le plus simple est de choisir cette constante nulle. Cela revient à poser que l'énergie potentielle est nulle lorsque le ressort n'est pas déformé.

L'énergie potentielle élastique d'un oscillateur mécanique est donc définie par :

$E_p = \frac{1}{2} k.x^2$	E_p en joule (J) k en newton par mètre ($N.m^{-1}$) x en mètre (m)

Cette expression est établie dans « Pour en savoir plus » de ce chapitre, par calcul direct du travail de la force élastique.

Remarque :

Le théorème de l'énergie cinétique est applicable dans tous les cas pour calculer le travail d'une force, ou d'un ensemble de forces quelconques agissant sur un système.

Lorsqu'il n'y a pas de frottements, ce travail peut en général aussi être déterminé comme ici en calculant la perte (algébrique) d'une ***fonction de variables de position (x,...)***, appelée ***énergie potentielle :***

$$W = E_{p_1} - E_{p_2}$$

Pour deux positions voisines distantes de dx, le travail de la force est égal à la perte d'énergie potentielle :

$$dW = -dE_p = F.dx.$$

3. Énergie mécanique d'un oscillateur

a) Expression de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique E, d'un système, est définie comme étant la somme de ses énergies cinétique et potentielle :

$$E = E_c + E_p.$$

Dans le cas du pendule élastique, elle vaut donc :

$$E = \frac{1}{2} m.v^2 + \frac{1}{2} k.x^2$$

L'expression du travail de la force élastique :

$$W = \frac{1}{2} m.v_2^2 - \frac{1}{2} m.v_1^2 = \frac{1}{2} k.x_1^2 - \frac{1}{2} k.x_2^2,$$

montre qu'à deux instants t_1 et t_2 quelconques,

$$\frac{1}{2} m.v_1^2 + \frac{1}{2} k.x_1^2 = \frac{1}{2} m.v_2^2 + \frac{1}{2} k.x_2^2.$$

Par suite, **l'énergie mécanique d'un oscillateur non amorti est constante.**

Cette énergie mécanique constante E_m est égale à l'énergie cinétique maximale (quand l'énergie potentielle est nulle, pour $x = 0$) ou à l'énergie potentielle maximale (quand l'énergie cinétique est nulle, pour $v = 0$, lorsque $x = \pm X_m$) :

$$E = \frac{1}{2} m.V_m^2 = \frac{1}{2} k.X_m^2 = \frac{1}{2} m.\omega_0^2.X_m^2.$$

Remarque :

Puisque $v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$, l'équation de l'énergie mécanique est une équation différentielle du premier ordre, mais non linéaire :

$$E = \frac{1}{2} m.\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k.x^2 = C^{te}.$$

b) Cuvette de potentiel

• La représentation graphique de l'évolution de l'énergie potentielle élastique $E_p = \frac{1}{2} k.x^2$ en fonction de l'élongation x est une parabole (fig. 12). Le mobile oscille entre les points d'abscisses $+X_m$ et $-X_m$, et la forme de la courbe fait dire qu'il évolue dans une *« cuvette de potentiel »*.

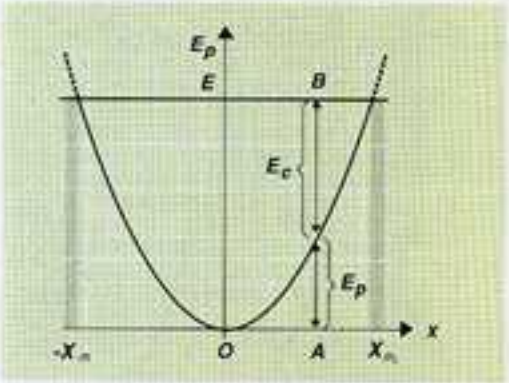


Fig. 12. ***Évolution de l'énergie potentielle en fonction de l'élongation.*** *Le minimum de l'énergie potentielle correspond à la position d'équilibre stable.*

• La valeur de l'énergie mécanique E dépend des conditions de lancement de l'oscillateur, et reste ensuite constante. Elle se représente sur le graphique par un segment d'ordonnée constante E.
Pour une abscisse donnée, l'énergie cinétique E_c peut être déterminée sur le graphique à partir de la courbe précédente. E_c est en effet ce qu'il faut ajouter à E_p pour obtenir l'énergie mécanique E (segment AB de la figure 12).
Les oscillations correspondent à un déplacement du segment AB parallèlement à lui-même, entre $+X_m$ et $-X_m$. Cela permet de suivre les ***échanges d'énergie*** cinétique en énergie potentielle, et vice-versa, pendant le mouvement.
Lorsque l'oscillateur est le plus éloigné de sa position d'équilibre ($x = \pm X_m$) son énergie mécanique est uniquement de l'énergie potentielle ($E_c = 0$). Au passage à la position d'équilibre ($x = 0$), son énergie mécanique est uniquement sous forme cinétique ($E_p = 0$). Lors des oscillations il y a transformations réciproques entre les énergies cinétique et potentielle.

• La position d'équilibre correspond à l'élongation nulle ($x = 0$), c'est-à-dire au minimum de la courbe. Ce résultat peut être étendu à toutes situations physiques où il est possible de définir une énergie potentielle. Par exemple, pour les molécules de dihydrogène H_2 et de chlorure d'hydrogène HCl (fig. 3), l'allure de l'évolution de l'énergie potentielle d'interaction en fonction de la distance entre les atomes, a aussi une allure parabolique (pour les vibrations de faible amplitude). Le minimum correspond à la stabilité des molécules.
Plus généralement, ***un minimum d'énergie potentielle correspond à une position d'équilibre stable.***

• Puisque le travail de la force élastique est égal à la perte d'énergie potentielle :

$$\mathrm{d}W = -\mathrm{d}E_p = \mathrm{F}.\mathrm{d}x,$$

le coefficient directeur de la tangente en un point de la courbe précédente donne la valeur, changée de signe, de la force élastique :

$$\mathrm{F} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}.$$



Fig. 13.
Non entretenu, le métronome s'arrête.

4 AMORTISSEMENT DES OSCILLATIONS

1. Causes des pertes d'énergie mécanique

a) Phénomènes dissipatifs

L'amplitude des oscillateurs mécaniques réels diminue progressivement (fig. 13). Même sur une table à coussin d'air, où les frottements sont notablement amoindris, les oscillations prennent fin au bout d'un intervalle de temps plus ou moins long. En effet, les frictions internes dans les spires des ressorts absorbent une partie de l'énergie (le ressort s'échauffe).
Une autre cause courante de ralentissement réside dans les frottements au contact du mobile avec son support. A l'échelle atomique, ce sont les chocs des atomes du mobile contre les atomes du support qui provoquent globalement l'effet de ralentissement.
Que ce soit à l'intérieur des ressorts ou au contact des mobiles et des supports, l'agitation atomique désordonnée augmente. Cet accroissement d'énergie à l'échelle atomique correspond, à notre échelle, à une création d'énergie thermique qui compense exactement la perte d'énergie mécanique. Cela est conforme au principe général de ***conservation de l'énergie.***
Les phénomènes qui contribuent à faire diminuer l'énergie mécanique sont qualifiés de « dissipatifs ». ***Par suite de l'existence d'inévitables phénomènes dissipatifs, l'énergie mécanique des oscillateurs diminue.***
Les oscillations correspondent à un mouvement d'ensemble ordonné, dans un sens ou dans l'autre, des différents atomes constituant l'oscillateur. Cet ordre disparaît progressivement alors que s'instaure un mouvement désordonné d'agitation thermique. Cette ***évolution de l'ordre vers le désordre*** est naturelle.

b) Étude qualitative des frottements mécaniques

A l'échelle macroscopique, les phénomènes dissipatifs précédents sont modélisables en fonction des circonstances de la dissipation.

• Les *frottements solide/solide* peuvent en général être modélisés par une force de valeur constante et de sens opposé à celui du vecteur vitesse de l'oscillateur.

• Les *frottements solide/fluide* sont plus complexes.
Dans le cas de faibles vitesses des solides dans les fluides, la force de ralentissement est assez bien modélisée par une expression du type $\vec{F} = -\lambda . \vec{v}$, où λ est une constante. Les forces de ce type correspondent à un « *frottement visqueux* ».
Pour des vitesses plus grandes les lois sont encore plus complexes.

2. Équation différentielle d'un oscillateur amorti

a) Recherche de l'équation

La figure 14 représente un oscillateur amorti. Sous l'action de son poids $\vec{P}$, de la réaction $\vec{R}$ du coussin d'air (opposée au poids), de la force élastique $\vec{F}$ et d'une force de frottement visqueux $\vec{F'} = -\lambda . \vec{v}$, un mobile de masse m prend une accélération $\vec{a}$ telle que :

$$\Sigma \vec{f} = m . \vec{a} = \vec{F} + \vec{F'} + (\vec{P} + \vec{R}) = -k . \overrightarrow{IM} - \lambda . \vec{v} + (\vec{0}).$$

Cette relation, projetée sur l'axe $\overrightarrow{Ix}$, donne, avec

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m . \frac{d^2x}{dt^2} = -k . x - \lambda . \frac{dx}{dt}$$

d'où :

$$m . \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda . \frac{dx}{dt} + k . x = 0.$$

b) Approche qualitative des solutions

L'intégration de l'équation précédente, c'est-à-dire la recherche de ses solutions, n'est pas au programme de la classe de terminale.
Il est cependant possible de pressentir la forme des solutions :

- En l'absence de frottements ($\lambda = 0$), l'équation redonne celle du mouvement non amorti, comme cela était prévisible.
- Pour de faibles résistances mécaniques, le mouvement est faiblement amorti et les oscillations peuvent être considérées comme harmoniques pendant quelques périodes.
Les amortissements faibles sont recherchés dans les dispositifs où les oscillations sont désirées (instruments de musique à cordes par exemple).

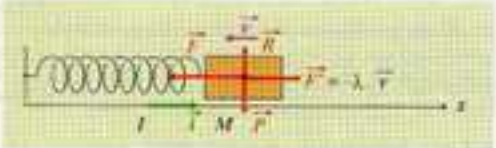


Fig. 14. ***Analyse des actions subies par un oscillateur subissant un frottement visqueux. Les flèches qui représentent les forces ont été dessinées avec le centre d'inertie comme origine.***

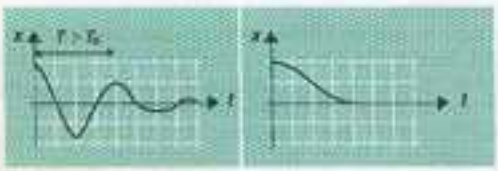


Fig. 15. ***Régimes pseudopériodique et apériodique d'un oscillateur mécanique.***

- Pour des résistances mécaniques de plus en plus grandes, l'amortissement devient de plus en plus sensible; le régime est « **pseudo-périodique** » (fig. 15). La période T des oscillations devient supérieure à la période T_0.
- Pour des résistances mécaniques très importantes, le régime n'est plus oscillant. Le système regagne sa position sans la dépasser (bien que, dans le cas des frottements visqueux, la force de ralentissement tende vers zéro avec la vitesse). Le régime est **apériodique** (fig. 15). Pour les véhicules, ce régime est obtenu par les amortisseurs.

c) Entretien des oscillations

Pour maintenir en vibration un oscillateur réel, nécessairement amorti, il faut compenser les pertes d'énergie mécanique. L'amplitude est maintenue constante par un dispositif qui fournit, à chaque période, autant d'énergie que celle que les forces dissipatives consomment.
Dans le cas d'une montre à quartz, c'est en général une petite pile électrique du type « bouton » qui fournit l'énergie nécessaire. Certains réveils possèdent encore des ressorts qu'il faut « remonter » pour qu'ils continuent à fonctionner. Dans les vieilles horloges à balancier, c'est la descente de « poids » qui assure par à-coups (tic tac) l'entretien du mouvement du balancier.
De même, il suffit d'une petite impulsion à chaque oscillation pour entretenir le mouvement d'une personne sur une balançoire.



Fig. 16.

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

• Un **oscillateur mécanique harmonique de translation** :

— est animé d'un **mouvement rectiligne sinusoïdal** sous l'influence d'une **force de rappel** : $\vec{F} = -k \cdot x \cdot \vec{i}$

— a un mouvement **d'équation différentielle** : $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0$

— a une **élongation** telle que : $x = X_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$

X_m est **l'amplitude**;
ω_0 est la **pulsation propre**;
φ est la **phase**.

• Connaître les relations donnant :

— la **pulsation propre** : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

— la **période** : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ou $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$

— la **fréquence** : $N_0 = \frac{1}{T_0}$

— **l'accélération** : $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 \cdot x$

• Se rappeler :

— l'expression de **l'énergie potentielle élastique** : $E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$

— la **conservation de l'énergie mécanique** : $\frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2 = C^{te}$.

• Ne pas oublier qu'un oscillateur non entretenu, effectue des oscillations dont l'amplitude diminue progressivement, par suite des **phénomènes dissipatifs**. Il y a **amortissement** des oscillations.

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

Un ressort à réponse linéaire, de longueur à vide ℓ_0, de raideur k, accroché en un point fixe A, pend verticalement. Un objet de masse m est attaché à son extrémité inférieure, dont la position est repérée sur un axe $\overrightarrow{Oz}$ orienté vers le haut. O désigne la position de l'extrémité inférieure du ressort à vide.

1) Déterminer l'allongement $\Delta\ell_0$ du ressort lorsque son extrémité inférieure se trouve en sa position I d'équilibre en charge.

Application numérique :

$$k = 35\ \text{N.m}^{-1}; \quad P = m.g = 1{,}5\ \text{N}.$$

2) Le ressort oscille verticalement. Établir la relation entre la somme vectorielle des forces appliquées et le vecteur allongement $\overrightarrow{IM}$ déterminé à partir de la position I d'équilibre en charge.

SOLUTION

Le système étudié est l'objet attaché au ressort, relativement au référentiel de la classe, considéré comme galiléen.

1) A l'équilibre, le poids $\vec{P} = m.\vec{g}$ de l'objet est opposé à l'action $\vec{T}_0$ exercée par le ressort sur l'objet :

$$m.\vec{g} + \vec{T}_0 = \vec{0}.$$

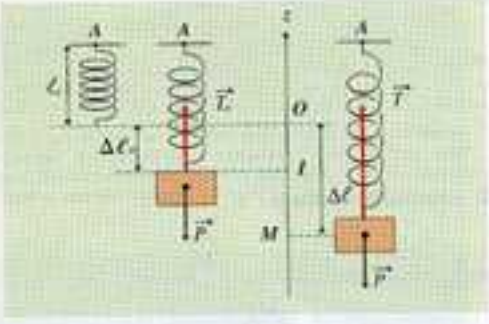
Le ressort étant à réponse linéaire, $\vec{T}_0 = -k.\overrightarrow{OI}$. Par suite, $m.\vec{g} = k.\overrightarrow{OI}$ et, en valeur absolue :

$$OI = \Delta\ell_0 = \frac{m.g}{k}$$

La position d'équilibre I dépend ici du poids de l'objet accroché au ressort.

Application numérique :

$$\Delta\ell_0 = \frac{1{,}5}{35} \approx 4{,}3 \times 10^{-2}\ \text{m} \quad \text{soit} \quad \mathbf{4{,}3\ cm.}$$



2) Lorsque l'extrémité inférieure du ressort se trouve en un point M quelconque, l'objet attaché subit les actions suivantes :

- son poids $\vec{P} = m.\vec{g}$ vertical vers le bas ;
- l'action $\vec{T}$ du ressort, verticale vers le haut : $\vec{T} = -k.\overrightarrow{OM}$ puisque le ressort est à réponse linéaire.

La somme vectorielle de ces deux forces est :

$$\Sigma\vec{T} = m.\vec{g} + \vec{T} = k.\overrightarrow{OI} - k.\overrightarrow{OM}$$
$$= -k.(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OM}) = -k.\overrightarrow{IM}.$$

La somme de ces forces équivaut donc à une seule, du type $\vec{F} = -k.\overrightarrow{IM}$, comme dans le cas du pendule horizontal.

EXERCICE 2

Un ressort à spires non jointives, de longueur à vide $\ell_0 = 10{,}0$ cm, peut être allongé ou raccourci au maximum de 8,50 cm.

1) Le ressort pend verticalement. En attachant un objet de masse $m = 100$ g à son extrémité inférieure, sa longueur totale devient $\ell = 15{,}0$ cm.
Déterminer la raideur k du ressort. On choisira pour l'accélération g de la pesanteur une valeur compatible avec la précision des données.

2) Le ressort, horizontal, est attaché à un mobile de masse $m = 100$ g posé sur une règle à air horizontale qui le guide rectilignement.
Déterminer la pulsation ω_0, la période T_0 et la fréquence N_0 des oscillations.

3) Le mobile est écarté de sa position d'équilibre I. L'abscisse de son centre d'inertie G est alors égale à $x_0 = 5{,}50$ cm.
Indiquer la loi horaire du mouvement dans les cas suivants :

a) Le mobile est lâché sans vitesse initiale à la date $t = 0$.

b) Le mobile est lâché sans vitesse initiale et passe pour la première fois par sa position d'équilibre à la date $t = 0$.

c) Le mobile est lâché à la date $t = 0$ avec une vitesse initiale, vers les x croissants, telle qu'il subisse ensuite son raccourcissement maximal.

SOLUTION

1) Le ressort à l'équilibre a subi un allongement $\Delta\ell_0 = \ell - \ell_0 = 0{,}05$ m. Sa raideur k est telle que $m.g = k.\Delta\ell_0$.
Les données comportant trois chiffres significatifs, il convient de prendre $g = 9{,}81\ \text{m.s}^{-2}$.

Par suite, $k = \dfrac{m.g}{\Delta\ell_0} = \dfrac{0{,}1 \times 9{,}81}{0{,}05} \approx 19{,}6$

$$\mathbf{k = 19{,}6\ N.m^{-1}.}$$

2) La pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ a pour valeur numérique :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{19{,}6}{0{,}1}} = 14{,}0\ \text{rad.s}^{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{\omega_0 = 14\ rad.s^{-1}.}$$

La période propre $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ vaut donc

1. EXERCICES RESOLUS

$$\frac{2\times 3{,}14}{14} = 0{,}449 \text{ s} \quad : \quad \boldsymbol{T_0 = 0{,}45 \text{ s}}.$$

La fréquence propre s'en déduit :

$$N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{0{,}449} \approx 2{,}23 \text{ Hz} \quad : \quad \boldsymbol{N_0 \approx 2{,}2 \text{ Hz}}.$$

Remarque : les données étant à 3 chiffres significatifs, le dernier chiffre est incertain. Après calcul, le troisième chiffre significatif devient probablement faux. C'est pourquoi les résultats ne sont donnés ici qu'avec deux chiffres. Cependant, les calculs doivent être menés à la calculatrice en gardant en mémoire le résultat complet afin de ne pas accumuler les erreurs.

3) La loi horaire donnant l'abscisse du mobile est du type :

$$x = X_m . \cos(\omega_0 . t + \varphi).$$

La vitesse est alors donnée par :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 . X_m . \sin(\omega_0 . t + \varphi)$$

a) A la date $t = 0$, $x_0 = 5{,}5 \times 10^{-2}$ m et $v_0 = 0$.
Ces conditions initiales se traduisent par :

$$5{,}5 \times 10^{-2} = X_m . \cos\varphi \quad (\text{d'où } \cos\varphi > 0)$$

et par : $0 = -\omega_0 . X_m . \sin\varphi$ (d'où $\sin\varphi = 0$).

Ces deux conditions sur φ permettent de choisir $\varphi = 0$.
La loi horaire donnant l'abscisse du mobile est donc :

$$\boldsymbol{x = 5{,}5 \times 10^{-2} \cos 14t}.$$

b) A la date $t = 0$, les conditions initiales sont $x = 0$ et, si l'abscisse d'où est lâché le mobile est positive, la vitesse est négative.
Par suite $0 = X_m . \cos\varphi$ (d'où $\cos\varphi = 0$) et : $-\omega_0 . X_m . \sin\varphi < 0$ (d'où $\sin\varphi > 0$).
Ces deux conditions sur φ permettent de choisir $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

La loi horaire donnant l'abscisse du mobile est donc :

$$x = 5{,}5 \times 10^{-2} \cos\left(14t + \frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{-5{,}5 \times 10^{-2} \sin 14t}.$$

c) Puisque le ressort subit son raccourcissement maximal, l'amplitude du mouvement est :

$$X_m = 8{,}5 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

La loi horaire est donc du type :

$$x = 8{,}5 \times 10^{-2} \cos(14t + \varphi).$$

A la date $t = 0$, $x = 5{,}5 \times 10^{-2}$ m et la vitesse est positive.
Par suite, $5{,}5 \times 10^{-2} = 8{,}5 \times 10^{-2} \cos\varphi$, d'où : $\cos\varphi = 0{,}647$, ce qui donne $\varphi = \pm 0{,}87$ rad.
La condition sur la vitesse conduit à :

$$-\omega_0 . X_m \sin\varphi > 0, \quad \text{d'où} \quad \sin\varphi < 0.$$

Cette seconde condition impose :

$$\varphi = -0{,}87 \text{ rad}.$$

La loi horaire est donc :

$$\boldsymbol{x = 8{,}5 \times 10^{-2} \cos(14t - 0{,}87)}.$$

EXERCICE 3

1) Exprimer, pour un pendule élastique de masse m et de raideur k, les dérivées par rapport au temps de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle E_p en fonction de k, m, x, $v = \dot{x}$ et $a = \ddot{x}$.

2) Partant de l'équation différentielle du second ordre qui régit le mouvement de l'oscillateur, la transformer par une astuce de calcul pour faire intervenir les dérivées précédentes.

3) En déduire une propriété de la somme $E_c + E_p$.

SOLUTION

1) La dérivée de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m . v^2$ par rapport au temps s'écrit :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{dE_c}{dv} . \frac{dv}{dt} = m . v . \frac{dv}{dt} = \boldsymbol{m . v . a}.$$

De même, la dérivée de l'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2} k . x^2$$

s'écrit : $\frac{dE_p}{dt} = \frac{dE_p}{dx} . \frac{dx}{dt} = k . x . \frac{dx}{dt} = \boldsymbol{k . x . v}$.

2) L'équation différentielle qui régit le mouvement de l'oscillateur est $m . a + k . x = 0$.
En multipliant par v, il vient : $\boldsymbol{m . v . a + k . x . v = 0}$.

3) La relation précédente s'écrit aussi :

$$\frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d(E_c + E_p)}{dt} = 0.$$

Par suite, $E_c + E_p = C^{te}$, relation qui n'est autre que l'équation différentielle du premier ordre établie dans le cours par une autre méthode.

EXERCICE 4

Un ressort vertical à spires non jointives, de raideur $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$, supporte un plateau de faible masse (qui sera supposée nulle; ainsi le plateau ne peut osciller que si un objet est posé sur lui). Le plateau est guidé verticalement sans frottement. Il oscille lorsqu'il supporte un objet de masse m (poids $P = 2{,}0$ N), dont les dimensions seront négligées. La modélisation du système justifie de se contenter de la valeur $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ pour l'accélération de la pesanteur.
La position d'équilibre du plateau non chargé est choisie comme origine (O), et la verticale Oz est orientée vers le haut.

1) Quelles sont les expressions :

a) de l'énergie potentielle de pesanteur de l'objet, supposée nulle pour $z = 0$?

b) de l'énergie potentielle élastique lorsque l'objet est au contact du plateau?

1. EXERCICES RESOLUS



c) de l'énergie potentielle totale (élastique et de pesanteur) du système? Distinguer les deux cas : $z>0$ et $z<0$.

2) Représenter graphiquement la courbe montrant l'évolution de l'énergie potentielle totale du système en fonction de l'altitude z, positive ou négative, de l'objet. Préciser comment les courbes se raccordent pour $z=0$. Quelles sont les coordonnées du minimum de la courbe, et à quoi correspond-t-il?

3) L'objet est posé sur le plateau en O, et lâché sans vitesse initiale.

a) A partir de la courbe précédente, déterminer l'amplitude des oscillations.

b) Calculer la période du mouvement.

c) Le mouvement est-il harmonique?

SOLUTION

1) a) L'énergie potentielle de pesanteur, nulle pour $z=0$, s'exprime par $\boldsymbol{E_p = m.g.z}$, puisque la verticale est orientée vers le haut.

b) L'objet étant au contact du plateau, l'énergie potentielle élastique est $\boldsymbol{E_p = \frac{1}{2} k.z^2}$. Le ressort ne travaille ici qu'en compression, et la relation précédente ne vaut que pour $z<0$.

c) Lorsque l'objet ne touche pas au plateau ($z>0$), l'énergie potentielle est uniquement due à la pesanteur, et $\boldsymbol{E_p = m.g.z}$.
Lorsque l'objet touche le plateau ($z<0$), l'énergie potentielle est à la fois de pesanteur et élastique et a pour expression :

$$\boldsymbol{E_p = \frac{1}{2} k.z^2 + m.g.z}$$

2) Pour $z>0$, la représentation graphique de

$$E_p = m.g.z,$$

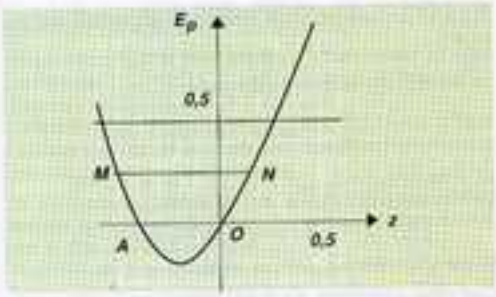
en fonction de z, donne une demi-droite passant par l'origine, et de coefficient directeur $m.g = P$.
Pour $z<0$, la courbe représentant l'évolution de :

$$E_p = \frac{1}{2} k.z^2 + m.g.z,$$

est une parabole.
Sa dérivée $\frac{dE_p}{dz} = k.z + m.g$ est égale à $m.g$ pour $z=0$. Les deux courbes obtenues pour $z>0$ et $z<0$ se raccordent donc tangentiellement puisque la tangente à la parabole a le même coefficient directeur que la demi-droite.
La dérivée s'annulle pour $z = z_0 = -\frac{m.g}{k}$. L'énergie potentielle est alors minimale et vaut :

$$E_{p\,min} = \frac{1}{2} k.\left(-\frac{m.g}{k}\right)^2 + m.g.\left(-\frac{m.g}{k}\right) = -\frac{1}{2}(m.g)^2.\frac{1}{k}.$$

L'application numérique donne $E_{p\,min} = -0{,}2$ J pour $z = -0{,}2$ m.
L'ordonnée de la parabole est nulle lorsque $z=0$ et $z = -2\frac{m.g}{k} = -0{,}4$ m.
Ces renseignements suffisent pour tracer les courbes.



3) a) Les conditions initiales correspondent à des valeurs nulles pour les deux énergies potentielles, c'est-à-dire à l'origine de la courbe. Comme l'énergie cinétique initiale est nulle, l'énergie mécanique est nulle et, puisqu'il n'y a pas d'amortissement, reste nulle : elle est représentée par le segment OA d'ordonnée nulle de l'axe Oz. Le système oscille entre O et A, d'abscisse $z_A = -0{,}4$ m, autour de la position d'équilibre correspondant au minimum de la courbe. L'amplitude est donc : $\boldsymbol{X_m = 0{,}2}$ **m.**

b) La période est : $\boldsymbol{T = 2\pi.\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}9}$ **s.**

c) L'objet situé sur le plateau est soumis aux actions suivantes :

— son poids vertical vers le bas, de valeur algébrique négative selon Oz ;

— la force élastique de valeur algébrique $-k.z$ (positive car $z<0$: elle agit vers le haut).

Par suite, $F_z = -m.g - k.z$ (expression conforme à $F_z = -\frac{dE_p}{dz}$).

En faisant intervenir l'ordonnée $z_0 = -\frac{m.g}{k}$, correspondant à la position d'équilibre, il vient :

$$F_z = -k.(z - z_0).$$

Il s'agit donc d'une *force de rappel* dont la valeur est proportionnelle à la distance à la position d'équilibre : **le mouvement est harmonique.**

• *Courants sources de champ magnétique :* une aiguille magnétique dévie au voisinage d'un courant électrique (fig. 5). Cet effet a été découvert par le physicien danois Œrsted en 1819. Les courants électriques sont donc producteurs de champ magnétique, dans leur voisinage.

Les expériences précédentes montrent que **les aimants et les courants électriques sont des sources de champs magnétiques.**

b) Vecteur champ magnétique

L'orientation prise par l'aiguille aimantée, montre qu'elle est sensible à une grandeur orientée, qui est appelée vecteur-champ magnétique, désigné traditionnellement par $\vec{B}$.

• *Direction*

La direction du vecteur-champ est, tout naturellement, celle que prend l'aiguille aimantée qui le détecte.

• *Sens*

Par convention, le sens de $\vec{B}$ est choisi selon le sens $\vec{sn}$ (sud-nord) de l'aiguille aimantée détectrice.

• *Valeur*

La valeur du champ magnétique se mesure à l'aide d'un **teslamètre** (fig. 6). Le nom de cet appareil vient de ce que l'unité du SI de champ magnétique est le **tesla** (T), dont la définition sera précisée ultérieurement.

Il est utile de retenir qu'un champ magnétique de valeur 1 T est un champ intense. Par exemple, la composante horizontale du champ géomagnétique ne vaut que $B_h \approx 2 \times 10^{-5}$ T.

Les aimants supraconducteurs industriels permettent d'obtenir des champs beaucoup plus intenses, jusqu'à 10 T.

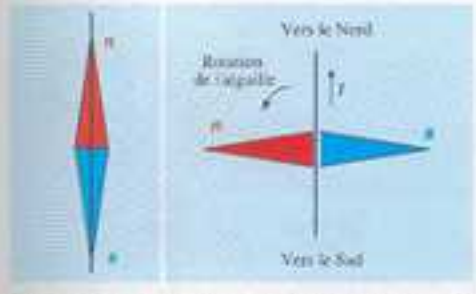


*Fig. 5. **Action d'un courant sur une aiguille aimantée.** L'aiguille dévie pratiquement de 90° si le courant est suffisamment intense.*

3. Interactions d'origine magnétique

a) Interactions aimant-aimant

L'expérience réalisée avec deux barreaux aimantés (fig. 7), dont la nature des extrémités est connue met en évidence les résultats suivants : chaque aimant est sensible au champ magnétique créé par l'autre.

• **Deux extrémités de même nature** (toutes deux *N*, ou *S*) **se repoussent.**

• **Deux extrémités de nature différente s'attirent.**

Cette propriété est parfois utilisée pour déterminer la nature nord ou sud des extrémités d'un aimant inconnu, par référence à un autre bien connu : boussole par exemple.

b) Interactions aimant-courant

• *Les courants agissent sur les aimants*

Cet effet a déjà été signalé à propos de l'expérience d'Œrsted (fig. 5). Le passage d'un courant à proximité d'un aimant tend à l'orienter ou à le déplacer, car l'aimant est sensible au champ magnétique créé par le courant.



*Fig. 6. **Teslamètre.***

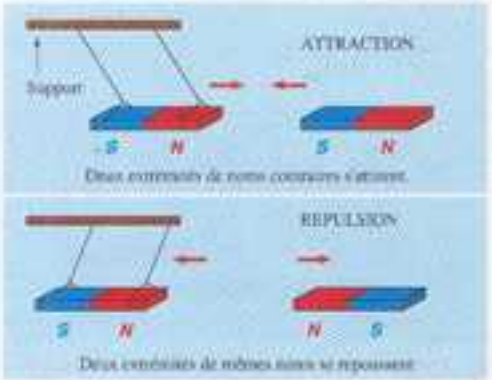


*Fig. 7. **Interactions attractives ou répulsives entre aimants.***

• *Les aimants agissent sur les courants*

La figure 8 *a* montre l'action d'un aimant sur un fil parcouru par un courant et la figure 8 *b*, l'action d'un aimant sur un pinceau d'électrons, qui constitue un courant électrique encore plus simple. Le fil conducteur se déplace, et le pinceau d'électrons est dévié. Ainsi, un courant agit sur un aimant et un aimant agit sur un courant. Il s'agit d'*actions réciproques*.

Le principe des moteurs électriques est basé sur cette mise en mouvement, dans un champ magnétique, des conducteurs parcourus par un courant.

c) Interactions courant-courant

Chaque fil parcouru par un courant est sensible au champ magnétique dont l'autre est la source. Selon les sens relatifs des courants, les interactions sont attractives ou répulsives (fig. 9).

Ces expériences, qui unissent la mécanique et l'électricité, sont à la base de la définition légale de l'ampère.

L'étude des interactions entre les courants et les aimants constitue l'électromagnétisme.

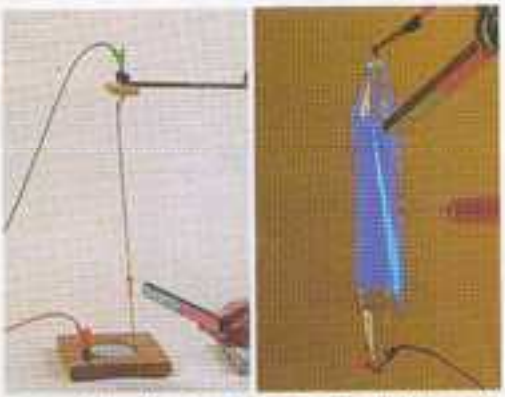


Fig. 8. ***Action d'un aimant sur un courant dans un fil (a) ou sur un pinceau d'électrons (b).***

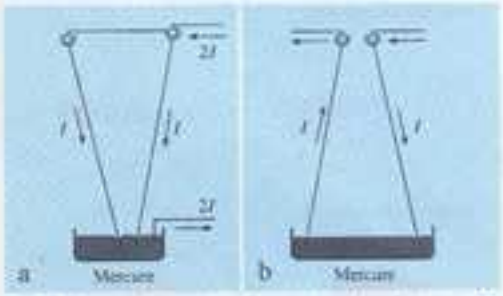


Fig. 9. ***Interactions attractives ou répulsives entre courants.***

a) Attraction entre fils parcourus par des courants de même sens.

b) Répulsion si les courants sont de sens contraires.

2 TOPOGRAPHIE D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE

La topographie d'un champ magnétique est une description de la structure spatiale du champ.

1. Spectre magnétique

a) Expérience

L'extrémité d'un aimant droit plongée dans de la limaille de fer se recouvre d'une houppe de limaille. Celle-ci est constituée de files de grains de fer attachés les uns aux autres (fig. 10 *a*), et qui dessinent une figure géométrique.

L'organisation de la limaille en files peut s'interpréter comme suit : placé dans un champ magnétique, chaque grain de limaille de fer devient un minuscule aimant qui agit comme une aiguille aimantée (fig. 10 *b*).



a) *b)*

Fig. 10. ***Un aimant,*** *introduit dans de la limaille de fer, s'entoure à ses extrémités d'une houppe de limaille qui matérialise les «lignes de champ magnétique». Il est commode d'entourer l'aimant d'une feuille de papier afin de se débarrasser plus facilement de la limaille.*



Fig. 11. ***Matérialisation des lignes de champ magnétique par de la limaille de fer.***

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATION

Sans calculs

Exercice 1

Un pendule élastique est écarté de sa position d'équilibre. Son élongation initiale est X_m. Il est lâché sans vitesse initiale. Parmi les grandeurs suivantes : {pulsation, vitesse au passage par la position d'équilibre, énergie mécanique}, quelles sont celles qui ne dépendent pas de X_m ?

Exercice 2

Un pendule élastique (masse m, raideur k) a pour période T_0, fréquence N_0, pulsation ω_0, amplitude X_m, énergie cinétique maximale $E_{c\,max}$.
Parmi ces grandeurs, quelles sont celles :

- qui augmentent avec la masse de l'oscillateur?
- qui diminuent si la masse est augmentée?
- qui ne dépendent pas de la masse?

Exercice 3

Un ressort à spires jointives peut-il être utilisé pour réaliser un pendule élastique vertical?

Exercice 4

Une force de valeur algébrique du type $F_x = -k.x^2$ peut-elle être une force de rappel? Même question pour $F_x = -k.x^3$.

Exercice 5

Un(e) élève de Terminale se laisse osciller sur une balançoire.

- Quelle est la cause principale d'amortissement?
- Comment procéder pour éviter cet amortissement?

Exercice 6

Une bille lâchée dans un bol évolue-t-elle dans une cuvette de potentiel?

Exercice 7

Deux bateaux flottent sur l'eau, moteurs arrêtés. La houle les fait osciller. La distance entre deux crêtes des vagues est désignée par λ. Quelles peuvent être, exprimées en fonction de λ, les distances entre les bateaux, pour qu'ils aient la même phase? Qu'ils soient en quadrature? Qu'ils soient en opposition?

Lois horaires

*** Exercice 8**

La loi horaire du mouvement d'un oscillateur est donnée (unités du SI) par

$$x = 0{,}05 \cos\left(25t - \frac{\pi}{3}\right).$$

1) Déterminer l'amplitude et la période du mouvement.

2) Quelles sont, à la date $t = 0$, l'abscisse, la vitesse et l'accélération du mobile?

Exercice 9

Établir la loi horaire donnant l'abscisse $x(t)$ d'un pendule élastique (masse $m = 0{,}10$ kg, raideur $k = 25$ N.m^{-1}) qui passe par sa position d'équilibre à la date $t = 1$ s avec une vitesse v égale à -2 m.s^{-1}.

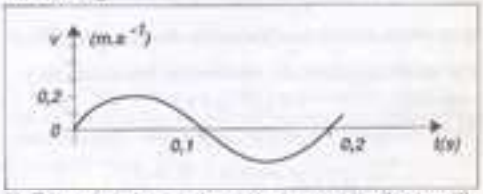
Exercice 10

Un pendule élastique vertical oscille de part et d'autre de sa position d'équilibre avec une amplitude $X_m = 5$ cm. Il passe par sa position la plus haute à la date $t = 0$.
Quelles sont les lois horaires des position, vitesse et accélération de ce pendule?

$m = 0{,}05$ kg; $k = 20$ N.m^{-1}.

*** Exercice 11**

La figure ci-dessous donne le diagramme temporel de la vitesse d'un pendule élastique horizontal de masse $m = 0{,}04$ kg.

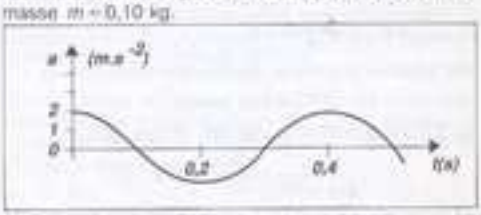


1) Déterminer les lois horaires donnant la vitesse $v(t)$, l'abscisse $x(t)$ et l'accélération $a(t)$.

2) Quelle est la raideur du ressort constituant le pendule?

Exercice 12

La figure ci-dessous donne le diagramme temporel de l'accélération d'un pendule élastique horizontal de masse $m = 0{,}10$ kg.



1) Déterminer les lois horaires donnant la vitesse $v(t)$ et l'abscisse $x(t)$ de l'oscillateur.

2) Quelle est l'expression de la force de rappel $F(x)$?

*** Exercice 13**

L'élongation d'un mobile de masse $m = 0{,}20$ kg est donnée en fonction du temps par

$$x = 0{,}05 \cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Déterminer les expressions de la valeur algébrique de la force de rappel $F_x(t)$ en fonction du temps et $F_x(x)$ en fonction de l'élongation.

2. EXERCICES PROPOSÉS

Énergie

Exercice 23

Un objet de masse $m = 0,50$ kg est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'amplitude $X_m = 0,10$ m et de période $T_0 = 2$ s.
Représenter graphiquement les courbes indiquant l'évolution des énergies cinétique, potentielle et mécanique :

1) En fonction de la position.

2) En fonction du temps.

Exercice 24

Un ressort, de masse négligeable vis-à-vis de celle des objets supposés ponctuels que l'on peut attacher à son extrémité inférieure, pend verticalement.

1) Quelles sont les expressions des énergies potentielles de pesanteur et élastique de cet oscillateur lorsqu'un objet de masse m est suspendu au ressort. Ces deux énergies potentielles seront choisies nulles lorsque le ressort n'est pas déformé.

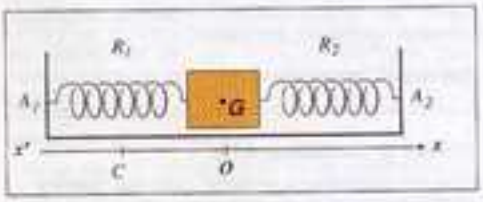
2) Indiquer l'allure de la courbe qui représente l'évolution en fonction de la cote z de l'objet, mesurée à partir de l'extrémité inférieure du ressort non chargé, de l'énergie potentielle (élastique et de pesanteur) du système.

3) Que devient l'expression de l'énergie potentielle du système lorsque les axes de la parabole précédente sont placés à son sommet? La cote de l'objet, mesurée à partir de la position d'équilibre de l'objet, sera désignée par z. Quelles peuvent être alors les conventions choisies pour les zéros des énergies potentielles?

EXERCICES D'APRÈS BACCALAURÉATS

Exercice 25

Un palet à coussin d'air, de masse $m = 700$ g, mobile sur une table horizontale, est accroché à deux ressorts identiques R_1 et R_2, de masse négligeable, tendus entre deux points A_1 et A_2.



Ces ressorts, de constantes de raideur :

$$k_1 = k_2 = 20\ \text{N.m}^{-1}$$

et de longueur à vide $\ell_{0_1} = \ell_{0_2} = 18$ cm, ont pour longueurs $\ell_1 = \ell_2 = 25$ cm, lorsque le palet est en équilibre.

1) Les frottements sont supposés négligeables. On écarte le palet de sa position d'équilibre de telle sorte que son centre d'inertie G se déplace dans la direction A_1A_2 vers A_1, de $\overline{OC} = -2$ cm, puis on l'abandonne sans vitesse initiale, à un instant qui sera choisi comme origine des dates.

a) Donner, à une date t quelconque, l'expression de l'allongement de chacun des ressorts en fonction de l'abscisse x de G.

b) Établir l'équation différentielle du mouvement de G.

c) Exprimer et calculer la pulsation propre et la période propre du mouvement.

d) Écrire l'équation horaire du mouvement de G.

2) En réalité, il existe des frottements. On admettra qu'ils peuvent être représentés par un vecteur force $\vec{f} = -\lambda.\vec{v}$, où λ est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur-vitesse de G.

a) Établir l'équation différentielle du mouvement de G.

b) Donner, en conservant les mêmes conditions initiales, l'allure des courbes représentant l'abscisse x de G en fonction du temps suivant l'importance des frottements.

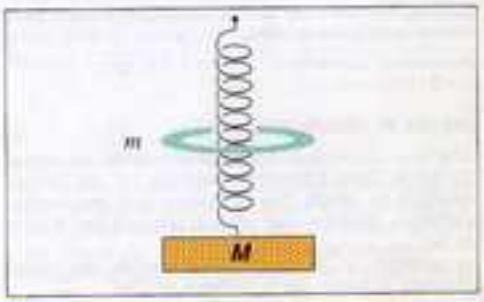
Exercice 26

Un objet de masse $M = 0,40$ kg est attaché à un ressort de raideur $k = 20\ \text{N.m}^{-1}$.

1) L'objet est lâché sans vitesse initiale, le ressort ayant sa longueur à vide. Déterminer l'amplitude des oscillations et leur période.

2) Le mobile s'immobilise après quelques oscillations. Quelle est la perte d'énergie mécanique du système? Qu'est devenue l'énergie perdue?

3) Un anneau de masse $m = 0,10$ kg est lâché sans vitesse initiale d'une hauteur $h = 0,20$ m au-dessus de l'objet. Il entoure le ressort et vient au contact de l'objet, auquel il reste collé.



2. EXERCICES PROPOSES

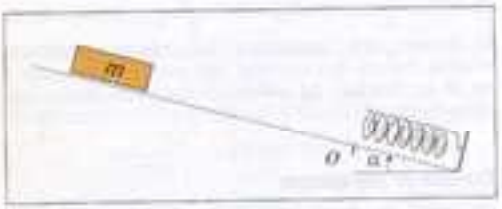
Quelle est la vitesse de l'anneau à l'instant du contact? Justifier la conservation de la quantité de mouvement du système lors du choc. Déterminer, en fonction de m, M, g et h, l'énergie cinétique du système juste après le choc.

4) Les énergies potentielles élastique et de pesanteur sont choisies nulles dans la position d'équilibre en charge (l'anneau n'ayant pas encore atteint le mobile M). Déterminer l'expression de l'énergie potentielle totale lorsque le mobile se trouve écarté de x à partir de la position d'équilibre précédente.

5) Déterminer l'amplitude des oscillations et leur période.

Exercice 27

Un mobile de masse m se déplace d'un mouvement rectiligne le long d'un banc à coussin d'air incliné d'un angle α sur l'horizontale. Un ressort à spires non jointives, de raideur k, est placé à l'extrémité inférieure du banc.



1) Lorsque le mobile est posé au contact du ressort, celui-ci se raccourcit de $\Delta\ell_0$ pour atteindre la position d'équilibre. Exprimer la raideur du ressort en fonction des données.

Application numérique : $m = 0{,}200$ kg; $\alpha = 10°$; $\Delta\ell_0 = 0{,}06$ m.

2) Le mobile est posé au contact du ressort non comprimé, puis lâché sans vitesse initiale. Déterminer l'amplitude et la période des oscillations.

Application numérique : $m = 0{,}200$ kg; $\alpha_1 = 10°$; $\alpha_2 = 30°$; $\alpha_3 = 60°$.

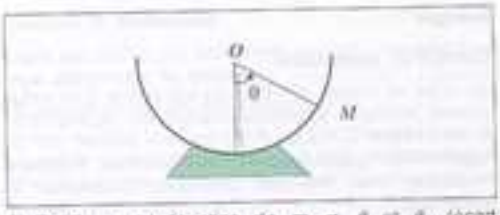
3) Le mobile est lâché sans vitesse initiale et parcourt une distance d sur le banc à air, avant de toucher le ressort. Déterminer le raccourcissement maximal du ressort. Combien de temps faut-il au mobile pour revenir à sa position initiale?

Application numérique : $m = 0{,}200$ kg; $\alpha = 10°$; $d = 0{,}10$ m.

Exercice 28

Une bille, assimilable à un point matériel de masse m, glisse sans frottement dans un bol de section circulaire de centre O et de rayon r. Son mouvement s'effectue dans un plan vertical passant par le fond du bol.

La position M de la bille est repérée par l'écart angulaire θ formé par la verticale et OM.



1) Exprimer, en fonction de m, g, θ et θ_0 (écart angulaire initial) la valeur R de l'action du bol sur la bille. Que devient la relation précédente

a) pour $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = 0°$

b) lorsque θ_0 peut être considéré comme un petit angle?

2) Dans le cas où θ_0 est un petit angle, le mouvement de la bille est pratiquement rectiligne au fond du bol. Quelle est l'expression de la valeur F de la force de rappel qu'elle subit? En déduire, en fonction de R et g, l'expression de la période des petites oscillations de la bille.

*** Exercice 29**

Un cube en bois de côté $a = 0{,}10$ m flotte sur l'eau, l'une de ses faces étant horizontale. La masse volumique du bois vaut $\rho = 750$ kg.m^{-3}.

a) Quelle est la hauteur de cube émergeant de l'eau?

b) Le cube est enfoncé de sorte que sa face supérieure affleure au niveau du liquide, puis lâché sans vitesse initiale. Calculer l'amplitude et la fréquence des oscillations verticales du cube.

c) Même question si le cube flotte sur de l'alcool, de masse volumique $\rho' = 790$ kg.m^{-3}.

Rappel : la valeur de la poussée d'Archimède est égale à celle du poids du fluide déplacé.

EXERCICES DESTINÉS A TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 30 A.1.a.

Définir les termes suivants : période, fréquence, pulsation, amplitude, élongation.

Exercice 31 A.1.a.

Quelles sont les unités de fréquence et de pulsation?

Exercice 32 A.1.b.

Pour les expériences réalisées avec des ressorts en travaux pratiques, quels étaient les ordres de grandeur des fréquences, des pulsations, et des énergies des oscillateurs?

Exercice 33 A.1.c.

Dans quel cas l'énergie mécanique d'un oscillateur se conserve-t-elle?

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 34 — A.1.c.

En attachant des masses marquées à l'extrémité inférieure d'un ressort, à prend les longueurs suivantes :

Masse (g)	0	50	100	150	200	250
Longueur (cm)	20,0	23,1	26,3	29,4	32,5	35,6

Masse (g)	300	350	400	450	500
Longueur (cm)	38,8	41,7	44,3	46,4	48,1

Ce ressort peut-il être modélisé comme étant à réponse linéaire?

Exercice 35 — A.2.a.

Attacher un fil de caoutchouc entre deux chaises afin qu'il soit horizontal. Dans la région centrale, attacher différents objets (par exemple des cuillers à soupe...) et mesurez la période des oscillations verticales pour 1, 2, 3... objets identiques accrochés. Tracer la courbe d'étalonnage de votre dispositif. Suspendre ensuite votre trousse et déterminer sa masse (en prenant pour unité de masse celle d'une cuiller). Si possible, vérifier vos résultats avec une balance de cuisine.

Exercice 36 — A.2.b.

Établir l'équation différentielle qui régit le mouvement d'un pendule élastique vertical.

*** Exercice 37** — A.2.b.

Exprimer l'énergie mécanique d'un oscillateur horizontal (m, k) en fonction

— de l'amplitude X_m,

— de la vitesse maximale V_m,

— de la fréquence propre N_0 et de l'amplitude X_m.

Exercice 38 — B.1.

Chercher des documents relatifs aux nuisances supportées par le corps humain aux très basses fréquences (genre mal de mer...) ou à fréquences plus élevées (tracteurs, perforeuses...). L'enquête peut être collective.

Exercice 39 — B.2.

Faire un résumé (100 mots = 10 %) du paragraphe I.1. du chapitre. Le résumé ne doit pas être rédigé en « style télégraphique ».

Exercice 40 — B.3.

Écrire l'équation différentielle du premier ordre qui traduit la conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur non amorti. Dériver cette relation par rapport au temps. Quelle relation est ainsi retrouvée?

Exercice 41 — B.3.

Écrire, en utilisant les variables x et $v_x = \dot{x}$, l'équation différentielle non linéaire du premier ordre qui traduit la conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur horizontal. Chercher directement à quelle(s) condition(s) cette équation admet une solution du type

$$x = X_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

Exercice 42 — B.3.

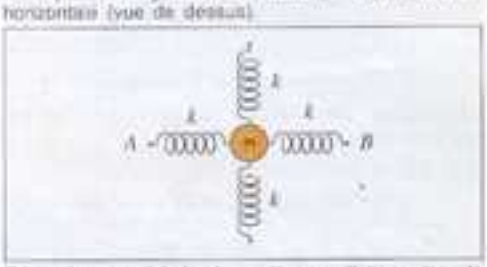
Écrire l'équation différentielle du second ordre qui régit le mouvement d'un oscillateur amorti (m, k, λ).
Chercher à quelle condition une solution du type $x = A \cdot e^{-\lambda/2m} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$, où A et φ sont déterminés par les conditions initiales, convient. Exprimer la constante C en fonction de k et m, et la pulsation ω en fonction de k, m et λ.

Exercice 43 — B.4.

Représenter graphiquement les courbes qui montrent l'évolution de l'énergie cinétique d'un mobile :
— en fonction du temps;
— en fonction de l'abscisse;
— en fonction du carré de la vitesse.

*** Exercice 44** — C.1.b.

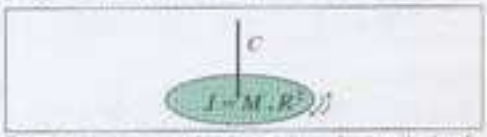
La figure ci-dessous représente un petit de masse m en équilibre sous l'action de quatre ressorts identiques, orthogonaux, sur une table à coussin d'air horizontale (vue de dessus).



Déterminer la période des petites oscillations dans la direction AB.

Exercice 45 — C.2.b.

La figure ci-dessous représente un disque susceptible d'effectuer des oscillations de rotation horizontales autour d'un fil vertical de constante de torsion C.



Pour ces mouvements de rotation, la constante de torsion C joue le rôle de la raideur k d'un ressort, et la masse doit être remplacée par le moment d'inertie J du disque par rapport à son axe de rotation.
Exprimer la période des oscillations en fonction de M, R et C.

Pour en savoir plus

OSCILLATIONS HORIZONTALES D'UN MOBILE ATTACHÉ A DEUX RESSORTS

1) *Dispositif*

Il est possible de faire osciller, sur une table à coussin d'air horizontale, un mobile autoporté attaché à deux ressorts de raideurs éventuellement différentes k_1 et k_2 (fig. 17), et de longueurs à vide sont ℓ_1 et ℓ_2.

2) *Analyse des actions*

• Le poids de l'objet et la réaction de la table, qui sont verticaux et opposés, annulent leurs effets (ils ne sont pas représentés sur la figure).

• Pour accrocher les ressorts, il faut les allonger de $\Delta\ell_1 = O_1N_0$ et $\Delta\ell_2 = O_2P_0$. L'objet prend une position d'équilibre sous l'action des deux tractions opposées $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ exercées par les ressorts, le centre d'inertie se trouvant au niveau du point I sur l'axe Ax.

$\vec{T}_1 = -k_1.\overrightarrow{O_1N_0}$; $\vec{T}_2 = -k_2.\overrightarrow{O_2P_0}$ et $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$, d'où, en faisant intervenir la position du centre d'inertie :

$$-k_1.(\overrightarrow{O_1I} + \overrightarrow{IN_0}) - k_2.(\overrightarrow{O_2I} + \overrightarrow{IP_0}) = \vec{0}. \quad (1)$$

• Si le mobile est lâché après avoir été écarté de sa position d'équilibre, il effectue des oscillations longitudinales. Pour une position quelconque où le centre d'inertie est au niveau de M sur Ax, les forces de traction horizontales des ressorts s'expriment par : $\vec{F}_1 = -k_1.\overrightarrow{O_1N}$ et $\vec{F}_2 = -k_2.\overrightarrow{O_2P}$.

3) *Force équivalente associée aux actions*

L'ensemble des forces agissant sur l'objet équivaut donc à :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -k_1.\overrightarrow{O_1N} - k_2.\overrightarrow{O_2P}$$
$$= -k_1.(\overrightarrow{O_1I} + \overrightarrow{IN}) - k_2.(\overrightarrow{O_2I} + \overrightarrow{IP}).$$

Par soustraction de la relation d'équilibre (1) il vient : $\vec{F} = -k_1.(\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IN_0}) - k_2.(\overrightarrow{IP} - \overrightarrow{IP_0})$

$$= -k_1.(\overrightarrow{N_0N}) - k_2.(\overrightarrow{P_0P}).$$

$\overrightarrow{N_0N}$ et $\overrightarrow{P_0P}$ représentent les vecteurs déplacements des extrémités N et P de l'objet, qui sont aussi égaux au déplacement $\overrightarrow{IM}$ du centre d'inertie du solide.

Finalement : $\vec{F} = -(k_1 + k_2).\overrightarrow{IM}$.

4) *Conclusion*

Un objet autoporté sur une table horizontale, attaché à deux ressorts de même direction, de raideurs k_1 et k_2, subit, lorsqu'il est écarté de sa position d'équilibre I dans la direction des ressorts, un ensemble de forces équivalentes à une force de rappel du type $\vec{F} = -k.\overrightarrow{IM}$.

La constante de rappel k est égale à la somme des raideurs des deux ressorts.

TRAVAIL D'UNE FORCE ÉLASTIQUE

1) *Analyse*

Pour maintenir allongé un ressort dont une extrémité A est fixe, il convient d'exercer à son extrémité une force $\vec{F}$ opposée à la force élastique $\vec{F}_{élas}$ (fig. 18) qui est une *force de rappel*.

Lorsque le ressort est étiré progressivement, la force élastique augmente en valeur absolue. Il en va de même si le ressort est comprimé.

Dans les deux cas, si le ressort est à réponse linéaire, $\vec{F}_{élas} = -k.\overrightarrow{OM}$, ou, en passant aux valeurs algébriques, $F_{x\,élas} = -k.x$.

2) *Calcul du travail*

Le *travail élémentaire* dW est défini par :

$dW = F_{x\,élas}.dx$, soit : $dW = -k.x.dx$.

Lorsque l'extrémité M du ressort passe d'un point M_1 (abscisse x_1) à un point M_2 (abscisse x_2) le travail total s'obtient en faisant la somme de tous les travaux élémentaires :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} -k.x.dx = \frac{1}{2}k.x_1^2 - \frac{1}{2}k.x_2^2.$$

3) *Interprétation*

L'expression précédente montre que le travail peut être considéré comme la *perte algébrique* (c'est-à-dire l'opposée de la variation) de la fonction $\frac{1}{2}k.x^2$, à laquelle il serait possible d'ajouter une constante. Il s'agit d'une fonction de la *variable de position* x. Cette fonction est appelée ***énergie potentielle*** associée à la force élastique.

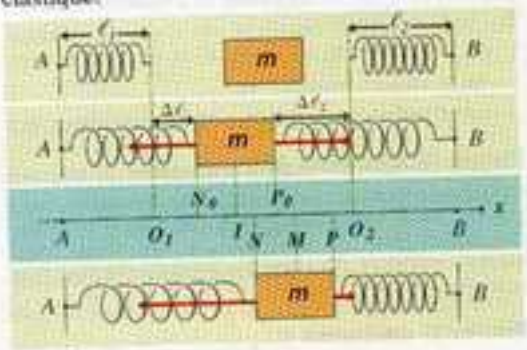


Fig. 17

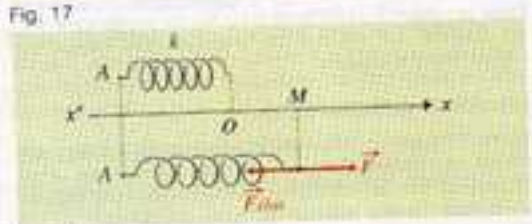


Fig. 18

Pour en savoir plus

OSCILLATIONS HORIZONTALES D'UN MOBILE ATTACHÉ A DEUX RESSORTS

1) *Dispositif*

Il est possible de faire osciller, sur une table à coussin d'air horizontale, un mobile autoporté attaché à deux ressorts de raideurs éventuellement différentes k_1 et k_2 (fig. 17), et de longueurs à vide sont ℓ_1 et ℓ_2.

2) *Analyse des actions*

• Le poids de l'objet et la réaction de la table, qui sont verticaux et opposés, annulent leurs effets (ils ne sont pas représentés sur la figure).

• Pour accrocher les ressorts, il faut les allonger de $\Delta\ell_1 = O_1N_0$ et $\Delta\ell_2 = O_2P_0$. L'objet prend une position d'équilibre sous l'action des deux tractions opposées $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ exercées par les ressorts, le centre d'inertie se trouvant au niveau du point I sur l'axe $\vec{Ax}$.

$\vec{T}_1 = -k_1.\overrightarrow{O_1N_0}$; $\vec{T}_2 = -k_2.\overrightarrow{O_2P_0}$ et $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$, d'où, en faisant intervenir la position du centre d'inertie :

$$-k_1.(\overrightarrow{O_1I} + \overrightarrow{IN_0}) - k_2.(\overrightarrow{O_2I} + \overrightarrow{IP_0}) = \vec{0}. \quad (1)$$

• Si le mobile est lâché après avoir été écarté de sa position d'équilibre, il effectue des oscillations longitudinales. Pour une position quelconque où le centre d'inertie est au niveau de M sur $\vec{Ax}$, les forces de traction horizontales des ressorts s'expriment par : $\vec{F}_1 = -k_1.\overrightarrow{O_1N}$ et $\vec{F}_2 = -k_2.\overrightarrow{O_2P}$.

3) *Force équivalente associée aux actions*

L'ensemble des forces agissant sur l'objet équivaut donc à :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -k_1.\overrightarrow{O_1N} - k_2.\overrightarrow{O_2P}$$
$$= -k_1.(\overrightarrow{O_1I} + \overrightarrow{IN}) - k_2.(\overrightarrow{O_2I} + \overrightarrow{IP}),$$

Par soustraction de la relation d'équilibre (1) il vient :

$$\vec{F} = = -k_1.(\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IN_0}) - k_2.(\overrightarrow{IP} - \overrightarrow{IP_0})$$
$$= -k_1.(\overrightarrow{N_0N}) - k_2.(\overrightarrow{P_0P}).$$

$\overrightarrow{N_0N}$ et $\overrightarrow{P_0P}$ représentent les vecteurs déplacements des extrémités N et P de l'objet, qui sont aussi égaux au déplacement $\overrightarrow{IM}$ du centre d'inertie du solide.

Finalement : $\vec{F} = -(k_1 + k_2).\overrightarrow{IM}$.

4) *Conclusion*

Un objet autoporté sur une table horizontale, attaché à deux ressorts de même direction, de raideurs k_1 et k_2, subit, lorsqu'il est écarté de sa position d'équilibre I dans la direction des ressorts, un ensemble de forces équivalentes à une force de rappel du type $\vec{F} = -k.\overrightarrow{IM}$.

La constante de rappel k est égale à la somme des raideurs des deux ressorts.

TRAVAIL D'UNE FORCE ÉLASTIQUE

1) *Analyse*

Pour maintenir allongé un ressort dont une extrémité A est fixe, il convient d'exercer à son extrémité une force $\vec{F}$ opposée à la force élastique $\vec{F}_{élas}$ (fig. 18) qui est une *force de rappel*.

Lorsque le ressort est étiré progressivement, la force élastique augmente en valeur absolue. Il en va de même si le ressort est comprimé.

Dans les deux cas, si le ressort est à réponse linéaire, $\vec{F}_{élas} = -k.\overrightarrow{OM}$, ou, en passant aux valeurs algébriques, $F_{x\,élas} = -k.x$.

2) *Calcul du travail*

Le *travail élémentaire* dW est défini par :

$$dW = F_{x\,élas}.dx, \quad \text{soit :} \quad dW = -k.x.dx.$$

Lorsque l'extrémité M du ressort passe d'un point M_1 (abscisse x_1) à un point M_2 (abscisse x_2) le travail total s'obtient en faisant la somme de tous les travaux élémentaires :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} -k.x.dx = \frac{1}{2}k.x_1^2 - \frac{1}{2}k.x_2^2.$$

3) *Interprétation*

L'expression précédente montre que le travail peut être considéré comme la *perte algébrique* (c'est-à-dire l'opposée de la variation) de la fonction $\frac{1}{2}k.x^2$, à laquelle il serait possible d'ajouter une constante. Il s'agit d'une fonction de la *variable de position* x. Cette fonction est appelée ***énergie potentielle*** associée à la force élastique.

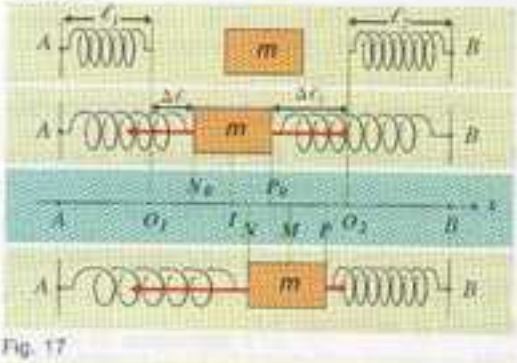


Fig. 17

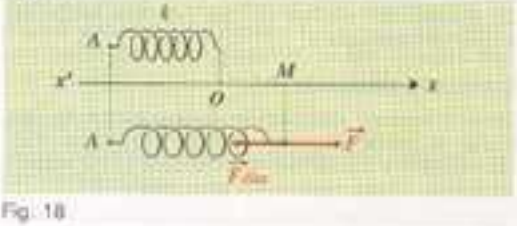
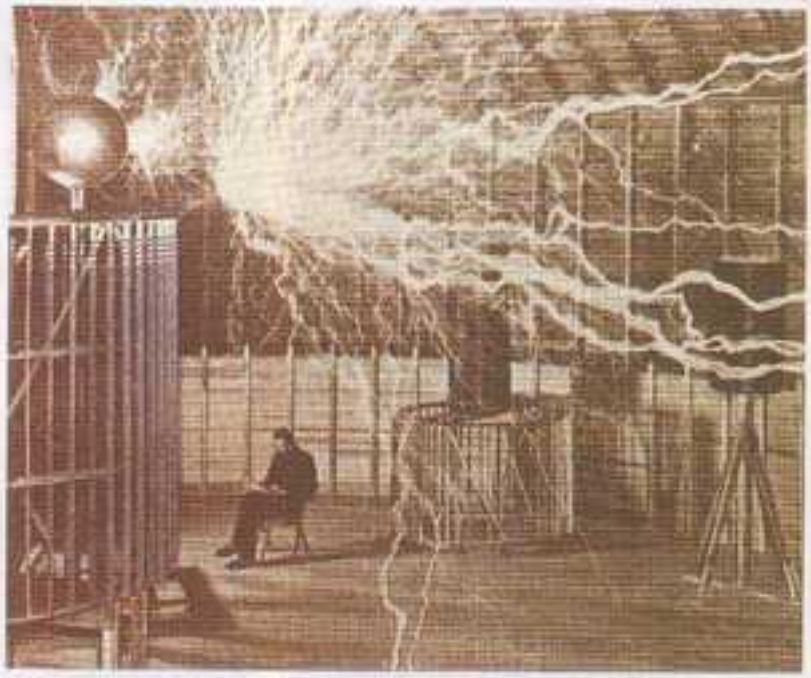


Fig. 18

6 Champ magnétique

1 Phénomènes magnétiques.
2 Topographie d'un champ magnétique.
3 Le solénoïde.
4 Action d'un champ magnétique sur une particule chargée
5 Applications.



Tesla lisant sous les étincelles fournies par ses transformateurs.
Il a envoyé cette photographie au physicien William Crookes avec les mots suivants : « A mon illustre ami sir William Crookes, à qui je pense toujours ainsi qu'à ses aimables lettres auxquelles je ne réponds jamais ! »
(Nikola Tesla, 17 juin 1901.)

Une boussole prend une direction privilégiée dans l'espace : l'une de ses extrémités pointe toujours sensiblement vers le nord. Un aimant permet de ramasser des aiguilles en acier en les attirant à distance... Ces interactions fascinaient déjà les Anciens.
L'étude de ce chapitre devrait rendre ces phénomènes moins mystérieux.

1 PHÉNOMÈNES MAGNÉTIQUES

1. Quelques propriétés des aimants

L'aiguille d'une boussole est habituellement constituée d'une fine tige en acier qui a été frottée contre un aimant. Elle possède une propriété étonnante : placée n'importe où sur la Terre, elle reprend toujours, au même endroit, la même direction.

L'une de ses extrémités pointe sensiblement vers le nord. On l'appelle « extrémité nord ». L'autre est l'« extrémité sud ». Ces extrémités sont encore appelées parfois par tradition « pôle nord » et « pôle sud ».

Un aimant droit, horizontal possède la même propriété d'orientation spontanée (fig. 1), puisqu'une boussole n'est autre qu'un petit aimant. En revanche, une tige en laiton ou en matière plastique ne s'oriente pas naturellement dans l'espace.

Les objets qui ont la propriété de s'orienter de façon privilégiée au voisinage de la Terre sont dits **magnétiques**. Il s'agit là d'une propriété nouvelle, sans relation ni avec les forces de gravitation, ni avec les forces électriques.

La figure 2 donne une représentation schématique d'une aiguille magnétique. Une boussole est l'association d'une aiguille magnétique à une graduation circulaire portant les points cardinaux.



Fig. 1. ***Un aimant droit, s'oriente dans la direction sud-nord.***

2. Champ magnétique

Il règne un champ magnétique dans une région de l'espace, lorsqu'une aiguille aimantée y subit des actions.

a) Sources de champs

• *Champ géomagnétique :* la Terre est la source d'un champ magnétique, appelé **champ géomagnétique.** Ce champ est détecté par les boussoles. Une aiguille aimantée, suspendue par un axe passant par son centre d'inertie, ne s'oriente pas horizontalement dans le champ géomagnétique (fig. 3). Le plan vertical qui contient l'aiguille orientée est appelé plan **méridien magnétique** du lieu. (Voir « Pour en savoir plus ».)

• *Aimants sources de champ magnétique :* un aimant approché latéralement d'une aiguille aimantée la fait dévier (fig. 4).

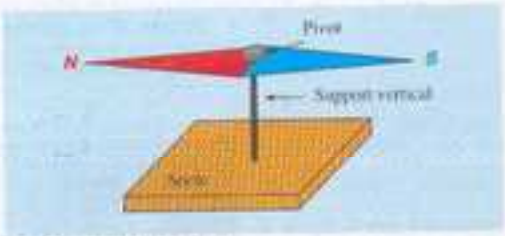


Fig. 2. ***Aiguille aimantée.***

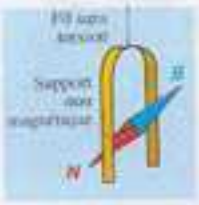


Fig. 3. ***Détection du champ magnétique terrestre.***

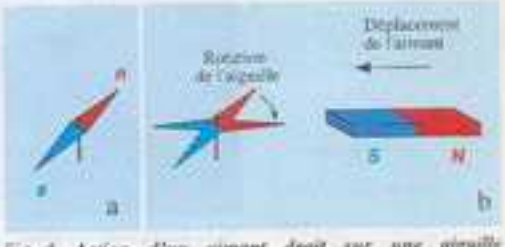


Fig. 4. ***Action d'un aimant droit sur une aiguille aimantée.***
a) Aiguille orientée dans le champ terrestre.
b) Rotation de l'aiguille sous l'influence de l'aimant.

5 APPLICATIONS

1. Spectrographe de masse

La constitution d'un spectrographe de masse est indiquée à la figure 34.
Des ions positifs dont on veut mesurer la masse, sont émis pratiquement sans vitesse initiale, par une source S. Ils acquièrent entre des plaques accélératrices une vitesse v telle que :

$$\frac{1}{2}\, m \,.\, v^2 = q \,.\, U \quad \text{soit} \quad v = \sqrt{\frac{2q \,.\, U}{m}}$$

Ils pénètrent dans un champ magnétique uniforme. Leur trajectoire devient un cercle de rayon R lié à leur quantité de mouvement par :

$$p = m \,.\, v = q \,.\, B \,.\, R.$$

Leur masse, s'exprime par :

$$m = \frac{(m \,.\, v)^2}{m \,.\, v^2} = \frac{(q \,.\, B \,.\, R)^2}{2q \,.\, U},$$

d'où :

$$m = \frac{1}{2}\,\frac{q \,.\, B^2 \,.\, R^2}{U}.$$

Tout ce qui figure au second membre est connu ou mesurable (le rayon de courbure R se déduit de la position de l'impact sur la plaque photographique). Les masses peuvent ainsi être déterminées avec précision.
C'est avec des dispositifs de ce genre que les **isotopes** ont été mis en évidence, en constatant l'existence d'impacts voisins sur les plaques photographiques.
Un petite fente fine de sortie peut remplacer la plaque photographique, à la distance $2R$ de la fente d'entrée. D'après la relation précédente,

$$R^2 = \frac{2m \,.\, U}{q \,.\, B^2}, \text{ d'où : } R = \sqrt{\frac{2m \,.\, U}{q \,.\, B^2}},$$

ou

$$2R = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2m \,.\, U}{q}}.$$

Tous les ions de même rapport $\frac{q}{m}$, appelé « charge massique », sortent par la fente. Ils sont ainsi séparés des autres isotopes et peuvent être recueillis dans un collecteur.

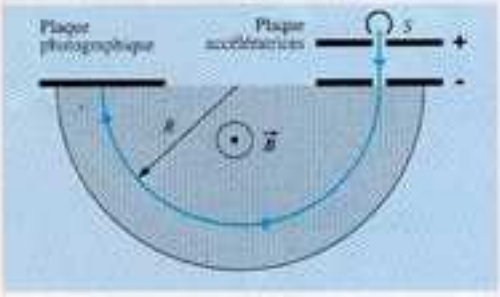


Fig. 34

2. Cyclotron

Les cyclotrons sont des **accélérateurs cycliques de particules chargées.** Leur constitution est indiquée à la figure 35.

La figure est une vue de dessus. Deux boîtes conductrices cylindriques, appelées « dees » (leur forme de lettre D rappelle celle d'une boîte à camembert coupée en deux) baignent dans un champ magnétique uniforme ($B \approx 1$ T). Une source d'ions, positifs dans le cas de figure, est placée dans la région centrale O. L'ensemble est maintenu dans un vide poussé.

Une tension alternative ($U_m \approx 10$ kV) est appliquée aux dees. L'effet de cette tension est d'accélérer rectilignement, pendant une très courte durée, les ions quand ils se trouvent entre les deux cavités. Ils entrent ensuite dans un dee où règne le champ magnétique qui incurve leur trajectoire selon un demi-cercle. Quand les ions sortent d'un dee, l'autre est devenu attracteur.

A chaque demi-tour, ils acquièrent un supplément d'énergie électrique $q \,.\, U_m$.

Les demi-cercles successifs sont décrits à la vitesse angulaire $\omega = \frac{q}{m} \,.\, B$. Comme ω est indépendante de l'énergie des ions, elle demeure constante au cours de l'accélération.

Comme la tension change de signe à chaque demi-tour, sa période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est égale à la durée d'un tour. Par suite, la vitesse angulaire ω des ions est égale à la pulsation de la tension alternative appliquée aux dees.

Quand le rayon de courbure de la trajectoire est devenu pratiquement égal au rayon R des dees, les particules atteignent une région où le champ magnétique est rendu localement nul. Elles ne sont alors plus incurvées et sortent tangentiellement de la cavité avec une quantité de mouvement de valeur :

$$p = q \,.\, B \,.\, R.$$

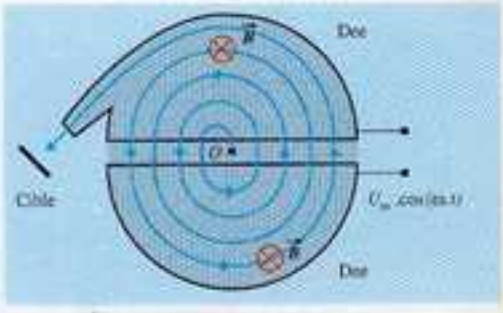


Fig. 35. *Éléments d'un cyclotron.*

Les particules sont envoyées sur des cibles. Leur énergie cinétique est maximale à la sortie et vaut :

$$E_c = \frac{1}{2} m . v^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{q^2 . B^2 . R^2}{m}.$$

Cette énergie se trouve limitée par les caractéristiques de l'appareil (B et R).

Remarque :
Il semblerait, d'après la relation $p = q . B . R$, que la vitesse $v = \frac{p}{m} = \frac{q}{m} . B . R$ ne soit pas limitée supérieurement (en augmentant B et R). Il n'en est rien : **une particule matérielle a toujours une vitesse inférieure à la célérité de la lumière.** Cette importante question sera reprise au chapitre 15.

3. Déflexion magnétique

a) Calcul d'une petite déflexion

Pénétrant en O avec une vitesse $\vec{v}$ orthogonale au champ magnétique uniforme $\vec{B}$ (fig. 36), les particules décrivent à vitesse constante un arc de cercle OS, tant qu'elles sont sous l'influence du champ uniforme. A la sortie en S du champ, elles retrouvent en l'absence d'actions une trajectoire rectiligne ST' qui semble provenir d'un point I situé dans la région centrale de la zone d'influence du champ. Dans ce cas de figure, le champ magnétique pointe vers l'arrière et les particules sont négatives.
La longueur $\ell = OS$ de l'arc de cercle de rayon R est donnée en fonction de la déviation α par $\ell = R . \alpha$, à condition d'exprimer α en radian. La valeur de la quantité de mouvement des particules reste constante :

$$m . v_0 = |q| . B . R.$$

Sur l'écran, placé à la distance L de I, l'impact du pinceau passe de T (en l'absence de champ) à T'. TT' est la distance D de déflexion, que l'on abrège souvent en « déflexion ». Cette distance est telle que $\tan \alpha = \frac{D}{L}$.

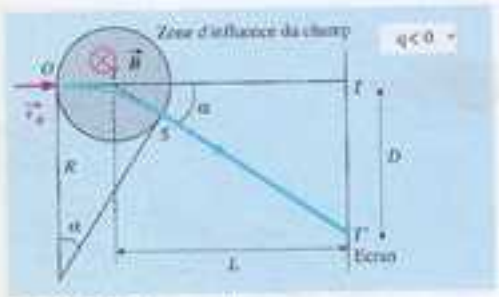


Fig. 36. ***Déflexion magnétique.***

Si la déviation est petite, $\tan \alpha \approx \alpha \approx \frac{D}{L}$ alors, $\alpha \approx \frac{D}{L} = \frac{\ell}{R} = \frac{\ell . |q| . B}{m . v_0}$, d'où :

$$D = L . \ell . \frac{|q|}{m} . \frac{B}{v_0}.$$

Applications

- Connaissant L, ℓ, B, v_0 et mesurant D, cela donne une méthode de détermination du rapport $\frac{|q|}{m}$ des particules (d'où leur masse si leur charge est connue).

- Si ce sont des particules élémentaires ($|q| \approx 1{,}6 \times 10^{-19}$ C) qui sont injectées, leur déviation est inversement proportionnelle à leur quantité de mouvement $m . v_0$.
Toutes les particules de même signe et de même quantité de mouvement arrivent au même point sur l'écran. Une fente, ménagée au point d'impact, ne laisse passer qu'elles : l'appareil est un sélecteur de quantité de mouvement.

b) Déflexions magnétiques dans un téléviseur

Dès sa sortie du canon à électrons, le pinceau électronique pénètre dans deux champs magnétiques orthogonaux, l'un pour la déflexion magnétique horizontale, l'autre pour la déflexion verticale. Ces deux champs sont créés par des bobines situées à l'arrière du tube de l'appareil récepteur (fig. 37).
Les bobines sont soumises à des tensions « en dents de scie » afin que le spot revienne brusquement à gauche (en regardant l'écran) et un peu plus bas sur l'écran avant de balayer de nouveau vers la droite.

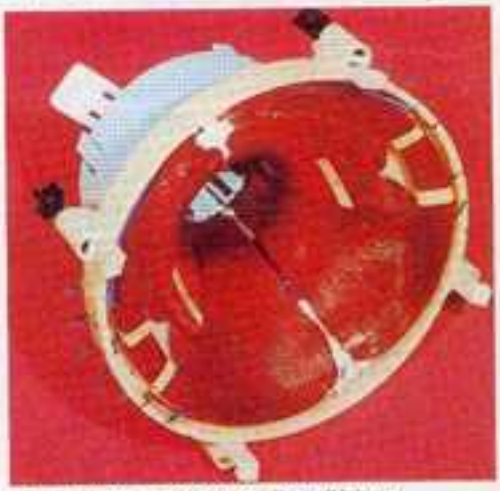


Fig. 37. ***Bobines déflectrices d'un téléviseur.***

b) Interprétation

La figure géométrique matérialisée au voisinage de l'aimant par les lignes de limaille, et suivie plus loin par les aiguilles aimantées est appelée **spectre magnétique** de l'aimant.

Dans le cas présent, il s'agit d'un spectre dans l'espace à trois dimensions. En faisant un léger effort d'abstraction, il est possible d'imaginer ces lignes, même en l'absence de limaille qui les matérialise. Ces courbes sont appelées **lignes de champ magnétique** (fig. 11).

Le vecteur-champ magnétique est tangent à ces lignes de champ.

Par convention **les lignes de champ sont orientées comme le vecteur-champ $\vec{B}$.**

2. Spectres obtenus à partir d'aimants

a) Spectre d'un aimant droit

• *Organisation spatiale des lignes de champ*

La figure 12 *a* schématise quelques lignes de champ magnétique d'un aimant droit. Ces lignes sont les prolongements des files de grains de limaille envisagées à la figure 10.

Elles sortent par l'extrémité nord et entrent par l'extrémité sud de l'aimant.

• *Visualisation expérimentale*

— Des aiguilles aimantées placées à proximité, confirment la direction et le sens du champ.

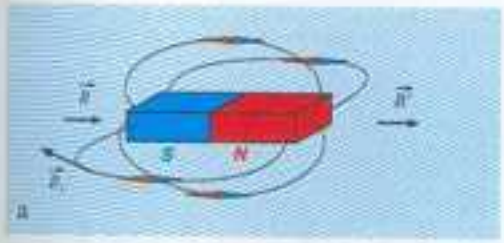




Fig. 12. ***Spectre magnétique d'un aimant droit.***
a) Structure spatiale.
b) Exploration dans un plan.

— En saupoudrant de limaille de fer fine, une feuille de papier posée sur l'aimant, il se forme un spectre. Tout près de l'aimant, les grains de limaille se redressent et prennent la direction des lignes de champ spatiales. Plus loin les grains restent horizontaux, car le champ est plus faible et la pesanteur l'emporte.

L'examen de la figure 12 *b* montre que les lignes de champ se resserrent près de l'aimant, là où les effets magnétiques deviennent intenses. Par suite, **un resserrement des lignes de champ indique qualitativement une augmentation de la valeur du champ.**

b) Spectre d'un aimant en U

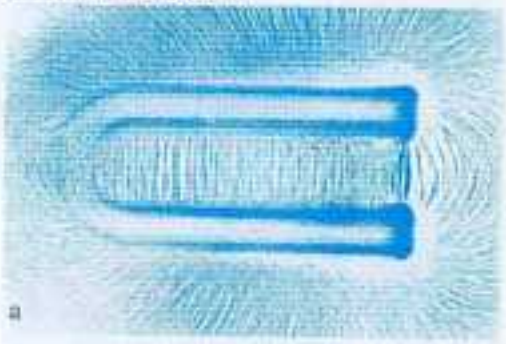
L'aimant droit précédent est remplacé par un aimant en *U*. Le spectre obtenu est indiqué à la figure 13 *a*. Plusieurs petites aiguilles magnétiques, placées à diverses hauteurs à l'intérieur des branches, restent parallèles entre elles, et perpendiculaires aux branches de l'aimant. D'autre part, une exploration du champ par une sonde de teslamètre montre que la valeur du champ reste pratiquement constante. Par suite, le champ magnétique est uniforme entre les deux branches d'un aimant en *U* (fig. 13 *b*).

Plus généralement, des **lignes de champ parallèles indiquent que le champ est uniforme.**

Comme pour l'aimant droit,

les lignes de champ magnétique sortent des régions nord et pénètrent dans les régions sud.

Ce résultat est général.



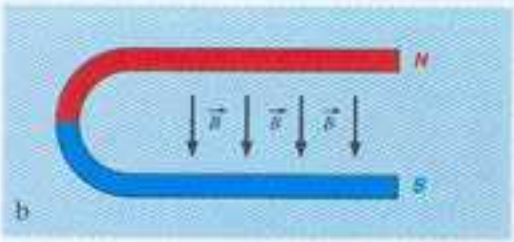


Fig. 13. ***Spectre magnétique d'un aimant en U.***
a) Photographie du spectre.
b) Champ uniforme entre les branches.

3. Spectres obtenus à partir de courants

a) Spectre d'un courant rectiligne

Un fil conducteur rectiligne vertical traverse une plaque horizontale sur laquelle est disposée une feuille de papier saupoudrée de limaille de fer. Lorsqu'un courant passe dans le fil, la limaille matérialise des **lignes de champ circulaires** (fig. 14).

Des petites aiguilles magnétiques disposées autour du fil indiquent le sens du champ.

En inversant le sens du courant, les aiguilles aimantées se retournent bout par bout.

Par suite, **le sens des lignes de champ est lié au sens du courant dans le fil.**

La plaque horizontale ne donne qu'un aspect plan du phénomène. Plusieurs plaques analogues à la précédente, superposées, montreraient la structure spatiale cylindrique du champ autour du fil.

Pour trouver le sens des lignes de champ magnétique en fonction du sens du courant, la figure 15 présente une règle de la main droite, qui met en relation de façon simple le sens des lignes de champ avec celui du courant. D'autres règles équivalentes existent.

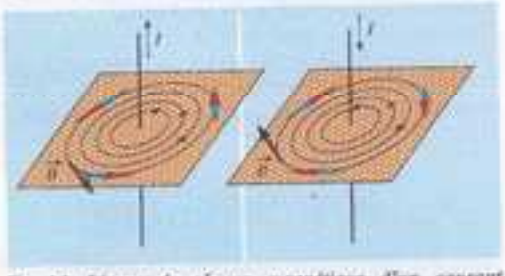


Fig. 14. ***Lignes de champ magnétique d'un courant rectiligne.*** *Elles sont circulaires, centrées sur le fil. Leur sens dépend de celui du courant.*

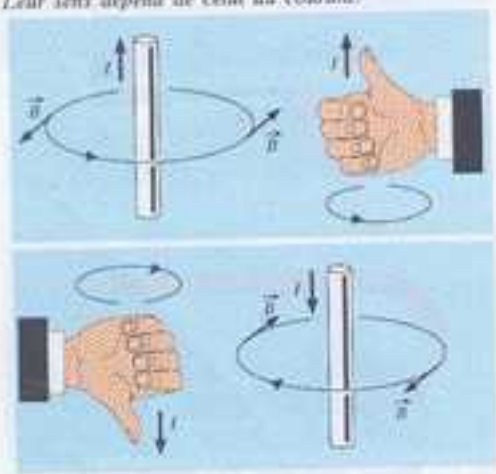


Fig. 15. ***Une règle pratique de la main droite pour trouver le sens des lignes de champ en relation avec le sens du courant dans le fil.***

b) Spectre d'un solénoïde

Un solénoïde est constitué d'un fil conducteur enroulé en spirale. Il peut être assimilé à une succession de spires circulaires parallèles.

A l'intérieur du solénoïde, les lignes de champ sont sensiblement parallèles. Par suite, le champ magnétique est pratiquement **uniforme** à l'intérieur du solénoïde (fig. 16).

A l'extérieur, les lignes de champ s'écartent en s'éloignant des extrémités.

Ainsi, le solénoïde donne accès aux lignes de champ à l'extérieur et à l'intérieur de la source du champ. L'expérience montre que les **lignes de champ magnétique constituent des courbes fermées et qui ne se croisent pas.** Ce résultat est général.

Là encore, une règle de la main droite met en relation de façon simple le sens des lignes de champ avec celui du courant (fig. 17).

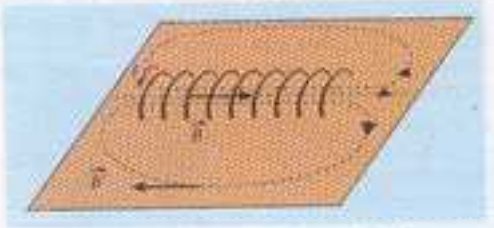


Fig. 16. ***Spectre magnétique d'un solénoïde court.*** *Seules, les demi-spires supérieures du solénoïde sont ici représentées.*

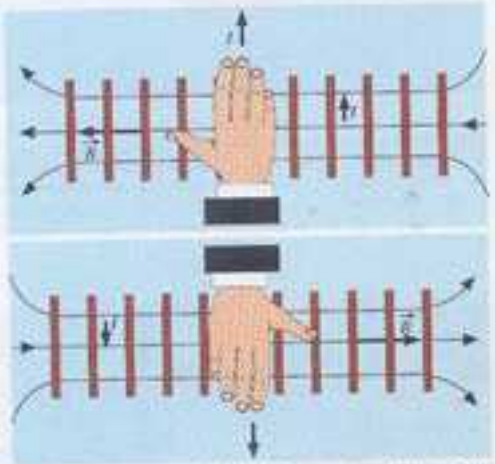


Fig. 17. ***Une autre règle de la main droite,*** *pour déterminer le sens des lignes de champ et celui de $\vec{B}$ à partir du sens du courant.*
Cette règle n'est pas tout à fait analogue à celle de la figure 15. Dans la première, ce sont les doigts qui suivent les lignes de champ, le pouce indiquant le sens du courant. Dans le cas du solénoïde, c'est l'inverse.

c) Spectre d'une bobine plate

Le spectre magnétique d'une bobine plate circulaire est donné à la figure 18.

d) Spectre des bobines de Helmholtz

Deux bobines plates, parallèles, circulaires, de rayon R, distantes de ce rayon R, parcourues dans le même sens par le même courant, constituent un dispositif appelé bobines de Helmholtz (fig. 19).

Les lignes de champ sont quasiment parallèles entre les deux bobines. Il en résulte que **le champ magnétique est uniforme entre les deux bobines.** Ce dispositif simple est souvent utilisé, car il donne un champ uniforme dans une région accessible et relativement étendue.

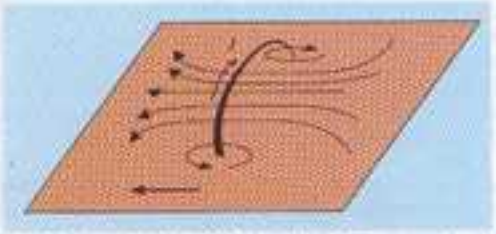


Fig. 18. ***Spectre d'une bobine plate.*** *Le pouce de la main droite, dont les doigts indiquent le sens du courant, donne encore le sens du vecteur-champ magnétique et des lignes de champ.*

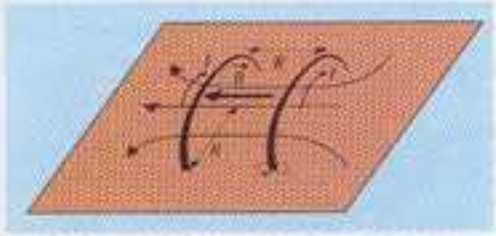


Fig. 19. ***Spectre de bobines de Helmholtz.*** *La distance entre les deux bobines est égale au rayon des bobines. A l'intérieur, le champ est uniforme.*



Fig. 20. *L'une des deux bobines d'Helmoltz qui crée le champ magnétique de la chambre à bulles du C.E.R.N.*

3 LE SOLÉNOÏDE

1. Analogie entre un aimant droit et un solénoïde court

a) Comparaison des spectres

Les spectres des aimants droits et des solénoïdes courts ont même allure à l'extérieur (fig. 21). Par analogie, la face du solénoïde d'où sortent les lignes de champ, est appelée face nord, et celle où elles rentrent est la face sud.

b) Interprétation de l'origine du magnétisme des aimants

L'intérieur d'un aimant peut être considéré comme constitué d'une foule de minuscules boucles microscopiques, parallèles entre elles, où des courants circulent dans le même sens que dans le solénoïde (fig. 22).

Cette interprétation a été proposée par le physicien français Ampère. Les courants qu'il a imaginés à l'intérieur des aimants portent encore le nom de « courants ampériens ».

Ainsi, dans les aimants comme dans les courants, le champ magnétique résulte du mouvement de charges électriques (électrons). Finalement, tous les phénomènes magnétiques sont dus à des actions à distance de **charges électriques en mouvement** sur d'autres **charges électriques en mouvement.**

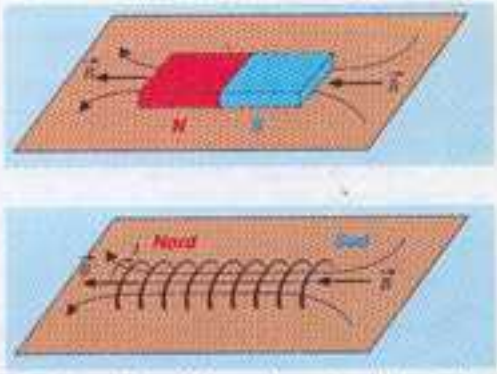


Fig. 21. ***Analogies de forme des spectres d'aimant droit et de solénoïde court.***

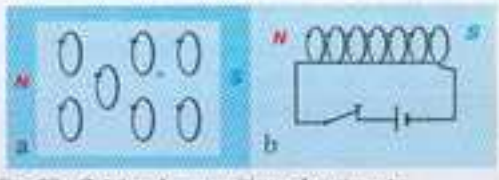


Fig. 22. ***Origine du magnétisme des aimants.***
a) Boucles de courants ampériens dans un aimant.
b) Courant dans un solénoïde.

c) Confirmation : expérience de l'aimant brisé

En cassant en deux, puis en quatre... une longue aiguille d'acier aimantée, il se forme deux, quatre... aimants (fig. 23).

Il est donc impossible d'isoler une région magnétique nord ou une région magnétique sud.

La raison en est que toute spire parcourue par un courant est à la fois face nord (vue d'un côté) et face sud (vue de l'autre côté).

2. Champ magnétique dans un solénoïde

a) Formule du solénoïde

L'étude des spectres magnétiques a montré que le champ magnétique est **uniforme** à l'intérieur du solénoïde.

Des considérations théoriques permettent d'établir que la valeur du champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde infiniment long, placé dans le vide, est donnée par la relation :

$$B = \mu_0 . n_1 . I$$

B en tesla (T);
μ_0 : $4\pi \times 10^{-7}$ SI;
n_1 : nombre de spires par mètre;
I en ampère (A).

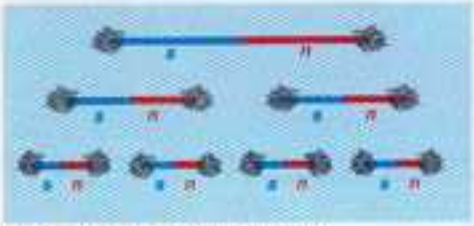


Fig. 23. ***Expérience de l'aimant brisé.***

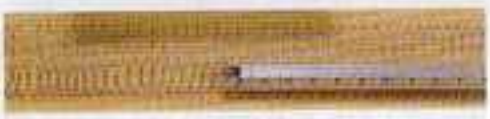


Fig. 24. ***Utilisation d'un long ressort métallique comme solénoïde. Le nombre de spires par mètre est réglable.***

La constante μ_0 est appelée **perméabilité du vide.** Il s'agit d'une constante universelle. Dans le Système International, elle est égale à :

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}.$$

La tendance actuelle pour obtenir des champs intenses, est d'augmenter I au maximum possible, par l'utilisation de bobines supraconductrices, dans lesquels on peut faire passer des courants de plusieurs milliers d'ampères, ce qui conduit à des champs magnétiques de plusieurs teslas.

b) Vérification expérimentale

En pratique, il est évidemment impossible de disposer de solénoïdes infiniment longs et de travailler dans le vide. Les expériences suivantes montrent que la formule précédente est applicable avec une bonne approximation pour la région centrale d'un solénoïde assez long, placé dans l'air. Un solénoïde peut être considéré comme assez long dès que sa longueur dépasse environ 5 fois le diamètre d'une spire.

- Un teslamètre, placé dans la région centrale d'un solénoïde assez long, montre que la valeur du champ magnétique est proportionnelle à l'intensité du courant.

- L'influence du nombre de spires par mètre peut être vérifiée, à intensité constante, en introduisant le teslamètre dans un long ressort métallique compressible ou extensible (fig. 24).

B est bien proportionnel à n_1.

Remarque :
Une aiguille magnétique, placée à l'intérieur d'un solénoïde dont l'axe est perpendiculaire au plan du méridien magnétique du lieu, s'oriente sous l'influence du champ géomagnétique et du champ créé par le solénoïde (fig. 25). Elle prend la direction de la *somme vectorielle* $\vec{B}$, de la composante géomagnétique horizontale $\vec{B}_0$ et du vecteur-champ créé par le solénoïde, $\vec{B}_s$.

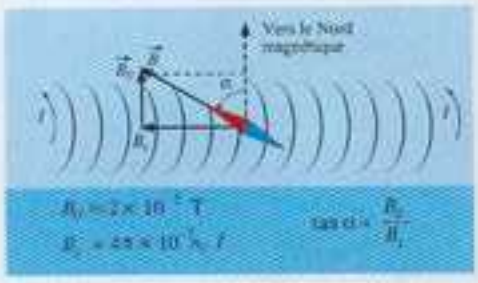


Fig. 25. ***Orientation d'une aiguille aimantée dans un solénoïde sous l'influence conjuguée du champ géomagnétique $\vec{B}_0$ et du champ $\vec{B}_s$ créé par le solénoïde.***

c) Généralisation

D'autres formules donnent les valeurs des champs magnétiques créés par les dispositifs de forme géométrique simple (fil rectiligne, bobines plates ou de Helmholtz...). Elles ne sont pas au programme, et seraient données si besoin est. Dans tous les cas :

la valeur du vecteur-champ magnétique créé en un point de l'espace par un circuit électrique quelconque, est proportionnelle à l'intensité du courant dans le circuit.

Le sens du vecteur-champ change de sens avec celui du courant.



Fig. 26. *Ampoule à pinceau circulaire d'électrons.*



Fig. 27. *Trajectoire circulaire des électrons lancés orthogonalement à $\vec{B}$.*

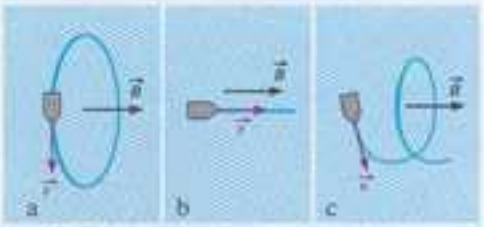


Fig. 28. *Trajectoire des électrons lancés à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$.*

a) $\vec{v} \perp \vec{B}$: trajectoire circulaire.

b) $\vec{v} \nparallel \vec{B}$: trajectoire rectiligne.

c) $\vec{v}$ quelconque : trajectoire hélicoïdale.

4 ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UNE PARTICULE CHARGÉE

1. Étude expérimentale

a) L'ampoule à pinceau circulaire d'électrons

• *Dispositif*

Une grande ampoule, dans laquelle est placé un canon à électrons, renferme un gaz sous faible pression. L'ampoule est placée entre deux bobines de Helmholtz (fig. 26).

— La direction du vecteur-vitesse des électrons à la sortie du « canon » peut être modifiée en tournant l'ampoule horizontalement autour de son support. Les électrons peuvent ainsi être émis dans toutes les directions d'un plan vertical.

— La valeur de la vitesse de sortie des électrons est réglable en jouant sur la tension accélératrice dans le canon.

— La valeur du champ magnétique uniforme entre les bobines est modifiable par réglage de l'intensité du courant dans les bobines de Helmholtz, sources du champ magnétique.

La trajectoire des électrons dans l'ampoule peut être observée par suite des chocs de ces électrons sur les molécules du gaz raréfié intérieur. Les molécules choquées absorbent de l'énergie qu'elles réémettent sous forme lumineuse.

• *Observations*

— Si les électrons sont lancés dans l'ampoule orthogonalement au champ magnétique, leur trajectoire est circulaire (fig. 27 et 28 *a*).

Le fait que la luminosité soit sensiblement la même en tous points de la trajectoire laisse présager que le mouvement circulaire des électrons est uniforme.

— Si les électrons sont lancés dans l'ampoule parallèlement au champ magnétique, leur trajectoire est rectiligne (fig. 28 *b*).

— Si les électrons sont lancés avec une vitesse initiale quelconque, la trajectoire est une hélice (fig. 28 *c*).

• *Modification du rayon de la trajectoire*

Dans le cas où la trajectoire est circulaire, c'est-à-dire quand le vecteur-vitesse initial des électrons est orthogonal au champ magnétique :

— si la vitesse initiale des électrons est augmentée, le rayon du cercle croît;

— si le champ magnétique est augmenté, le rayon du cercle diminue.

c) Généralisation

D'autres formules donnent les valeurs des champs magnétiques créés par les dispositifs de forme géométrique simple (fil rectiligne, bobines plates ou de Helmholtz...). Elles ne sont pas au programme, et seraient données si besoin est. Dans tous les cas :

la valeur du vecteur-champ magnétique créé en un point de l'espace par un circuit électrique quelconque, est proportionnelle à l'intensité du courant dans le circuit.

Le sens du vecteur-champ change de sens avec celui du courant.



Fig. 26. *Ampoule à pinceau circulaire d'électrons.*



Fig. 27. *Trajectoire circulaire des électrons lancés orthogonalement à $\vec{B}$.*

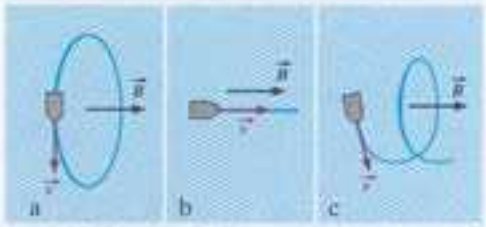


Fig. 28. *Trajectoire des électrons lancés à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$.*

a) $\vec{v} \perp \vec{B}$: trajectoire circulaire.

b) $\vec{v} \neq \vec{B}$: trajectoire rectiligne.

c) $\vec{v}$ quelconque : trajectoire hélicoïdale.

4 ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UNE PARTICULE CHARGÉE

1. Étude expérimentale

a) L'ampoule à pinceau circulaire d'électrons

• *Dispositif*

Une grande ampoule, dans laquelle est placé un canon à électrons, renferme un gaz sous faible pression. L'ampoule est placée entre deux bobines de Helmholtz (fig. 26).

— La direction du vecteur-vitesse des électrons à la sortie du « canon » peut être modifiée en tournant l'ampoule horizontalement autour de son support. Les électrons peuvent ainsi être émis dans toutes les directions d'un plan vertical.

— La valeur de la vitesse de sortie des électrons est réglable en jouant sur la tension accélératrice dans le canon.

— La valeur du champ magnétique uniforme entre les bobines est modifiable par réglage de l'intensité du courant dans les bobines de Helmholtz, sources du champ magnétique.

La trajectoire des électrons dans l'ampoule peut être observée par suite des chocs de ces électrons sur les molécules du gaz raréfié intérieur. Les molécules choquées absorbent de l'énergie qu'elles réémettent sous forme lumineuse.

• *Observations*

— Si les électrons sont lancés dans l'ampoule orthogonalement au champ magnétique, leur trajectoire est circulaire (fig. 27 et 28 *a*).

Le fait que la luminosité soit sensiblement la même en tous points de la trajectoire laisse présager que le mouvement circulaire des électrons est uniforme.

— Si les électrons sont lancés dans l'ampoule parallèlement au champ magnétique, leur trajectoire est rectiligne (fig. 28 *b*).

— Si les électrons sont lancés avec une vitesse initiale quelconque, la trajectoire est une hélice (fig. 28 *c*).

• *Modification du rayon de la trajectoire*

Dans le cas où la trajectoire est circulaire, c'est-à-dire quand le vecteur-vitesse initial des électrons est orthogonal au champ magnétique :

— si la vitesse initiale des électrons est augmentée, le rayon du cercle croît;

— si le champ magnétique est augmenté, le rayon du cercle diminue.

b) Chambres à bulles à hydrogène liquide

Le principe des chambres à bulles sera précisé chapitre 15.

En bref, des particules chargées, lancées dans de l'hydrogène liquide, provoquent par interaction avec les atomes d'hydrogène une avance à l'ébullition qui se manifeste par l'apparition d'une succession de petites bulles qui matérialisent le trajet des particules. Une photographie de ces bulles, prises au flash quand elles viennent de se former, montre les trajectoires des particules chargées.

• La figure 29 est la reproduction d'un tel cliché. Les trajectoires sont incurvées par un champ magnétique uniforme perpendiculaire au plan de la photographie, pointant ici vers l'arrière de la figure. Les particules sont injectées dans la chambre orthogonalement à ce champ.

Les deux grandes spirales du cliché attirent immédiatement l'œil. Ce sera le seul événement étudié ici.

Pour les deux particules qui suivent les spirales, la particule notée e^- est un électron, la particule notée e^+ est un anti-électron, de même masse que l'électron, mais de charge opposée. Alors que l'électron tourne dans un sens, l'anti-électron tourne dans l'autre sens : l'incurvation des trajectoires dépend du signe de la charge des particules.



Fig. 29. ***Traces laissées dans une chambre à bulles par des particules chargées.***

Les trajectoires des particules sont des spirales, et non des cercles comme dans l'ampoule électronique. Elles sont en effet ralenties par leurs interactions avec les molécules de dihydrogène liquide.

• La figure 30 est extraite d'un autre cliché, où la vitesse initiale de l'électron n'est pas orthogonale au champ magnétique. L'hélice qui devrait être la trajectoire de l'électron s'inscrit en réalité sur un cône, par suite des effets de freinage.

2. Force magnétique

a) Expression

Les expériences réalisées avec l'ampoule électronique ou dans une chambre à bulles montrent que les particules chargées lancées dans un champ magnétique peuvent prendre des trajectoires circulaires, ou hélicoïdales. La force responsable de ces incurvations est appelée **force magnétique.** Elle dépend de la charge des particules, de leur vitesse et de la valeur du champ.

L'expression de cette force a été donnée par le physicien hollandais Lorentz : une particule de charge q, évoluant à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$, subit l'action d'une force magnétique donnée par le produit vectoriel :

$$\vec{F} = q\,.\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

F en newton (N);
q en coulomb (C);
v en mètre par seconde ($m.s^{-1}$);
B en tesla (T).

b) Caractéristiques

Les caractéristiques de la force magnétique résultent de son expression par un produit vectoriel (fig. 31) :

• *la direction* de la force est orthogonale au plan défini par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{B}$.



Fig. 30. ***Trajectoire hélicoïdale d'un électron dans une chambre à bulles.***

• *son sens* est tel que le trièdre formé par les vecteurs $q.\vec{v}$, $\vec{B}$ et $\vec{F}$ soit direct. Le sens du vecteur $q.\vec{v}$ dépend évidemment du signe de la charge.

• Si α désigne l'angle inférieur à π formé par les vecteurs $q.\vec{v}$ et $\vec{B}$, la valeur de la force magnétique est :

$$F = |q| . v . B . \sin \alpha \qquad \text{(fig. 32)}$$

Cette force est nulle si $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires ($\alpha = 0$ ou π).
Elle est aussi nulle si la particule est au repos ($v = 0$) : un champ magnétique ne peut pas servir à mettre en mouvement des particules immobiles.
Dans le cas où la vitesse est orthogonale au champ magnétique $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, l'expression de la force magnétique est : $F = q . v . B$.

c) Définition théorique du champ magnétique

La relation $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$ fait intervenir des grandeurs connues (force, charge, vitesse) et une grandeur abstraite : le vecteur-champ magnétique $\vec{B}$. En déterminant la force agissant sur une particule de charge et de vitesse connues, il est possible d'en déduire le champ magnétique agissant sur la particule. C'est pourquoi la relation $\vec{F} = q.\vec{v} . \wedge \vec{B}$ peut être considérée comme une définition du vecteur-champ $\vec{B}$.

Dans le SI, $B = \dfrac{F}{q . v . \sin \alpha}$ s'exprime en $N.C^{-1}.m^{-1}.s$, qui a reçu le nom de tesla (T).

d) Application

Le poids d'un proton, de masse :

$$m_p = 1{,}67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

est :

$$P = m . g = 1{,}67 \times 10^{-27} \times 9{,}8 = 1{,}67 \times 10^{-26} \text{ N},$$

de l'ordre de 10^{-26} N.

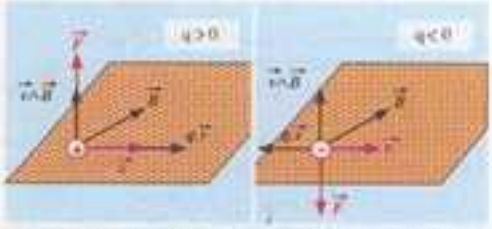


Fig. 31. ***Détermination du vecteur-force magnétique à partir des vecteurs $q.\vec{v}$ et $\vec{B}$. Le trièdre : courant, champ, force est direct.***

Animé d'une vitesse $v = 1\,000 \text{ m.s}^{-1}$ (ce qui est très faible pour ce genre de particules), dans un champ peu intense ($B = 1$ mT) orthogonal à la vitesse, le proton subit l'action d'une force magnétique $F = q . v . B$ puisque $\sin \alpha = 1$:

$$F = 1{,}6 \times 10^{-19} \times 1\,000 \times 10^{-3} = 1{,}6 \times 10^{-16} \text{ N},$$

de l'ordre de 10^{-15} N.
Cette force est 10 millions de fois supérieure au poids! Cet exemple numérique montre qu'en pratique, le poids des particules est négligeable vis-à-vis des forces magnétiques.

3. Étude de la trajectoire circulaire

L'expression $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$ permet de prévoir le mouvement d'une particule de masse m et de charge q. Le seul cas envisagé ici est celui d'une particule lancée dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme avec une vitesse initiale orthogonale à $\vec{B}$.
La charge q est supposée positive.

a) Analyse des actions

Puisque le poids de la particule est négligeable vis-à-vis de la force magnétique, la seule force agissante est $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$.
D'après la relation $\Sigma \vec{f} = m.\vec{a}$, le vecteur-accélération de la particule est :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q}{m} . \vec{v} \wedge \vec{B}.$$

En tant que produit vectoriel, l'accélération $\vec{a}$ est constamment orthogonale au vecteur-vitesse $\vec{v}$ et au vecteur-champ magnétique $\vec{B}$.

b) Choix du repère

Le mouvement de la particule est étudié dans un repère terrestre, supposé galiléen.
L'origine O du repère est le point d'entrée de la particule dans le champ magnétique.
L'axe Ox est choisi colinéaire à la vitesse initiale $\vec{v}_0$ et de même sens. Oy est pris orthogonal à $\vec{B}$ et perpendiculaire à Ox (fig. 33). Le repère est complété par un axe Oz tel que le trièdre $Oxyz$ soit direct (Oz est dans ce cas de sens contraire à $\vec{B}$).

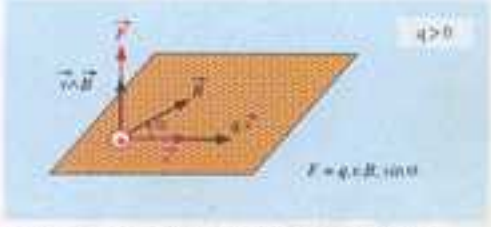


Fig. 32. ***Caractéristiques de la force magnétique.***

c) Caractéristiques du mouvement

• Puisque $\vec{a}$ est orthogonal à $\vec{B}$, donc à $\overrightarrow{Oz}$, sa coordonnée $a_z = \dfrac{d^2z}{dt^2}$ est nulle.

Deux intégrations successives donnent :
$v_z = C^{te} = 0$ comme au départ;
$z = C^{te} = 0$ pour la même raison.
Ainsi, la trajectoire est contenue dans le plan xOy orthogonal à $\vec{B}$. **La trajectoire est donc plane,** orthogonale au champ magnétique.

• Dans le repère mobile de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{n})$, en M (fig. 33) :

— L'accélération tangentielle en M est :

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

Puisque $\vec{a}$ est constamment orthogonal à $\vec{v}$, $a_\tau = 0$: le vecteur-accélération n'a pas de composante tangentielle.
Par intégration : $v = v_0$. La vitesse garde une valeur constante, et le **mouvement est uniforme.**

— L'accélération normale est $a_n = \dfrac{v_0^2}{R}$

R désignant le rayon de courbure de la trajectoire. Puisque la trajectoire est plane, le vecteur-vitesse reste orthogonal à $\vec{B}$. Le vecteur-accélération $\vec{a} = \dfrac{q}{m}.\vec{v} \wedge \vec{B}$ a donc pour valeur :

$$a = \frac{|q|}{m}.v_0.B = \frac{v_0^2}{R}$$

Par suite, le rayon de courbure est constant. La **trajectoire est circulaire,** de rayon :

$$R = \frac{m.v_0}{|q|.B}$$

En résumé, une particule lancée avec une vitesse $\vec{v}$ orthogonale à un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, acquiert une mouvement circulaire uniforme dans un plan orthogonal à $\vec{B}$.

Remarque : Si la charge de la particule est négative, le sens d'incurvation du cercle trajectoire est inversé.

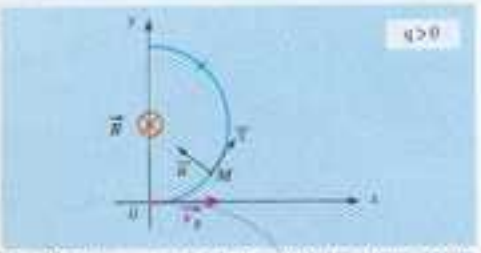


Fig. 33. *Mouvement circulaire uniforme d'une particule chargée (ici positivement) dans un champ magnétique uniforme.*

4. Autres conséquences de la relation $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$

a) La puissance d'une force magnétique est nulle

La puissance d'une force $\vec{F}$ est donnée par le produit scalaire : $P = \vec{F}.\vec{v}$.
La force magnétique qui est orthogonale au vecteur-vitesse, a donc une puissance nulle : elle ne travaille pas. L'application du théorème de l'énergie cinétique montre alors que l'énergie cinétique de la particule ne varie pas.
Par suite, la force magnétique peut incurver les trajectoires d'une particule mais ne peut pas modifier la valeur de sa vitesse.

b) Quantité de mouvement d'une particule évoluant dans un champ magnétique

L'expression du rayon de courbure de la trajectoire a été établie plus haut :

$$R = \frac{m.v_0}{|q|.B}$$

Par suite, la valeur $p = m.v_0$ de la quantité de mouvement d'une particule est reliée au rayon de courbure de sa trajectoire par la relation :

$p = \lvert q \rvert . B . R$
p en kilogramme-mètre par seconde ($kg.m.s^{-1}$) q en coulomb (C) B en tesla (T) R en mètre (m)

c) Vitesse angulaire des particules mobiles

Pour des particules en mouvement circulaire, leur vitesse angulaire $\omega = \dfrac{v_0}{R}$ se déduit de la relation : $m.v_0 = |q|.B.R$: $\omega = \dfrac{|q|.B}{m}$ (voir « Pour en savoir plus »).

Cette vitesse angulaire ne dépend pas de la vitesse v_0.
Les particules effectuent un tour en :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi.m}{|q|.B}$$

d) Particule évoluant dans un champ électrique et dans un champ magnétique

La particule subit dans ce cas l'action d'une force électrique $\vec{F}_1 = q.\vec{E}$ et, simultanément, celle d'une force magnétique $\vec{F}_2 = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$. La force totale $\vec{F}$ agissant sur la particule est donc

$$\vec{F} = q.(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Elle est appelée force de Lorentz.
Contrairement à la force magnétique, la force électrique peut être accélératrice.

Pour en savoir plus

Vecteur vitesse angulaire et champ magnétique

a) Définition du vecteur vitesse angulaire

Pour préciser la notion d'axe de rotation pour un mouvement circulaire, il est commode d'associer à la vitesse angulaire $\omega = \frac{v}{R}$, un *vecteur* $\vec{\omega}$ défini comme suit :

- Sa *direction* est orthogonale au plan du cercle.
- Son *sens* se déduit de celui du vecteur vitesse $\vec{v}$ par une règle de la main droite, comme l'indique la figure 42.
- Sa *valeur* ω est celle de la vitesse angulaire : $\omega = \frac{v}{R}$, exprimée en rad.s^{-1}.

La flèche qui le représente est habituellement dessinée avec son origine au centre du cercle.

b) Exemples d'utilisation

- Lorsque le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ et le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sont connus, le vecteur vitesse linéaire $\vec{v}$ s'en déduit par le produit vectoriel $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$. En effet, ce vecteur a bien comme valeur $v = R.\omega$ et le trièdre construit avec $\vec{\omega}$, $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ est direct lorsque $\vec{v}$ a le sens du mouvement.
- De même, la *force centripète* appliquée à une particule en mouvement circulaire s'exprime par $\vec{F} = \vec{\omega} \wedge \vec{p}$, où $\vec{p}$ désigne le vecteur quantité de mouvement de la particule, comme le lecteur pourra s'en assurer à titre d'exercice de manipulation du produit vectoriel.

Ces résultats sont résumés dans la figure 43.

c) Relation entre $\vec{\omega}$ et $\vec{B}$

Il a été montré dans le cours que des particules chargées, lancées à la vitesse $\vec{v}_0$ orthogonalement à un champ magnétique $\vec{B}$, décrivent un cercle dans un plan orthogonal à $\vec{B}$, avec une vitesse $\vec{v}$ de valeur constante v_0. ***Les vecteurs $\vec{\omega}$ et $\vec{B}$ sont donc colinéaires.*** Par suite, $\vec{\omega} = C.\vec{B}$.

La constante C peut être identifiée comme l'*opposée de la charge massique* des particules. En posant en effet :

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m}.\vec{B}$$

la force centripète $\vec{F} = \vec{\omega} \wedge \vec{p}$ s'écrit :

$$\vec{F} = -\frac{q}{m}.\vec{B} \wedge m.\vec{v} = -q.\vec{B} \wedge \vec{v},$$

qui est bien égal à la force magnétique $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$ d'après l'anti-commutativité du produit vectoriel (fig. 44).

La relation $\vec{\omega} = -\frac{q}{m}.\vec{B}$ inclut en particulier celle qui a été donnée en cours : $\omega = \frac{q}{m}.B$. Elle permet de retrouver aisément le sens de $\vec{B}$ lorsque le signe de la charge q et le sens du vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ sont connus. Ce sens est souvent facile à trouver, sur un cliché de chambre à bulles par exemple, avec une règle de la main droite.

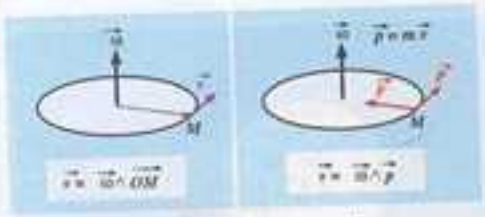


Fig. 43

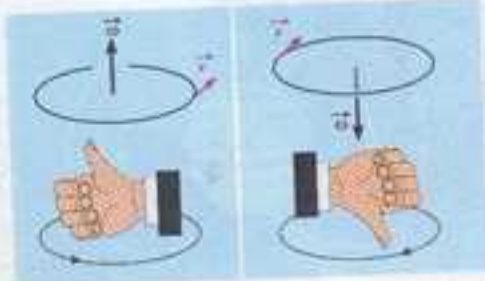


Fig. 42

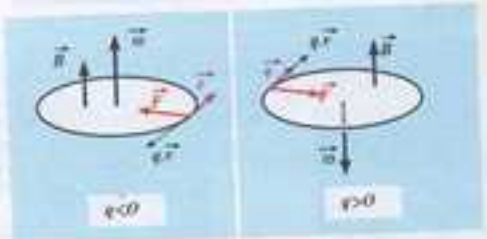


Fig. 44. *$\vec{\omega}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires :*
— de même sens si la charge est négative ;
— de sens contraires si la charge est positive.

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

- Se rappeler qu'une aiguille aimantée sn s'oriente dans un **champ magnétique** $\vec{B}$ de sorte que $\vec{sn} \nearrow \vec{B}$.

- Qu'il règne un champ magnétique sensiblement **uniforme** :
  — entre les branches d'un **aimant** en U ;
  — à l'intérieur d'un **solénoïde** parcouru par un courant ;
  — entre deux **bobines de Helmholtz** parcourues par un courant.

- Pouvoir retrouver le sens du vecteur-champ magnétique créé en un point de l'espace par un courant, par une **règle d'orientation dans l'espace** (règle de la main droite par exemple). Le vecteur $\vec{B}$ sort d'une région ou d'une face nord

- Connaître la formule qui donne la valeur du champ magnétique **uniforme** dans la région centrale d'un solénoïde assez long :

$$B = 4\pi \times 10^{-7} n_l . I.$$

$B = \mu_0 n I$

- Se rappeler que tous les phénomènes magnétiques résultent de l'action de particules chargées **en mouvement** (sources de champ magnétique) sur d'autres particules chargées **en mouvement** (sensibles au champ).

- Connaître l'expression de la force magnétique $\vec{F}$ qui agit sur une particule de charge q évoluant à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$:

$$\vec{F} = q . \vec{v} \wedge \vec{B}.$$

- Que la valeur de la quantité de mouvement d'une particule chargée évoluant circulairement dans un champ magnétique uniforme est donnée par :

$$p = |q| . B . R.$$

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1 Bobines de Helmholtz

En mesurant la valeur du champ magnétique le long de l'axe d'une bobine plate, de rayon $R = 10$ cm, on obtient les résultats suivants :

x (cm)	0	1	2	3	5	7,5	10	15	20	30
B	10	9,9	9,4	8,8	7,2	5,1	3,5	1,7	0,9	0,3

La valeur B du champ magnétique est exprimée en unités arbitraires et x désigne l'abscisse comptée à partir du centre de la bobine.

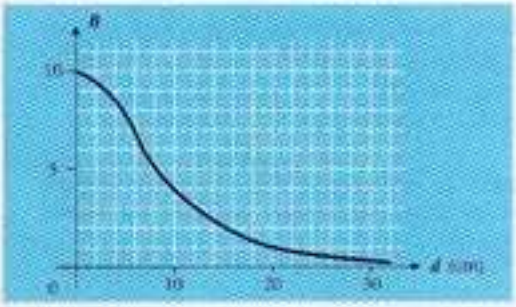
1) Tracer la courbe donnant en fonction de x l'évolution de la valeur du champ.

2) Deux bobines identiques à la précédente, coaxiales, placées à la distance d l'une de l'autre, sont montées en série et parcourues par la même intensité, dans le même sens que précédemment.
Par une addition graphique, tracer la courbe montrant l'évolution de la valeur du champ magnétique le long de l'axe dans les trois cas suivants : $d = 5$ cm, $d = 10$ cm et $d = 20$ cm.
Quel est le dispositif qui assure au mieux l'uniformité du champ entre les bobines?

3) Dans le cas où $d = 10$ cm, on inverserait les connexions reliant les deux bobines afin que les courants qui les traversent soient de sens contraire. Comment varie le champ le long de l'axe?

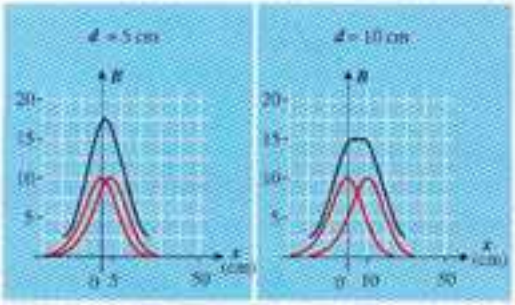
SOLUTION

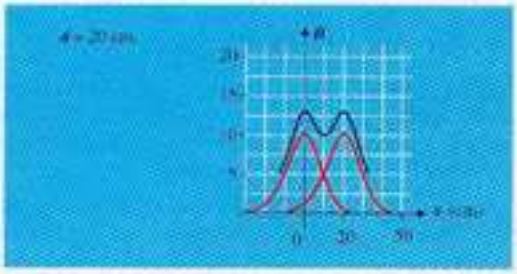
1) La courbe représentant l'évolution de $B(x)$ est la suivante :



Elle serait à compléter par symétrie par rapport à OB.

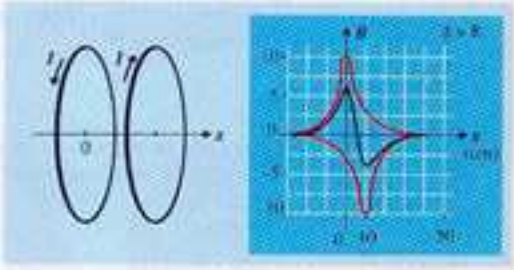
2) Lorsque les bobines sont parcourues par des courants de même sens, les contributions de chacune d'elles au champ s'ajoutent. En traçant les deux courbes, avec des maxima distants de d, la valeur du champ s'obtient en ajoutant en chaque point les valeurs. On obtient ainsi les allures suivantes (à tracer à plus grande échelle) :





La courbe résultante présente un méplat dans le cas où $d = 10$ cm, c'est-à-dire quand la distance entre les deux bobines est égale au rayon. Le champ est alors pratiquement uniforme entre les bobines.

3) Les vecteurs-champ magnétique créés par les bobines sont maintenant de sens inverses, et leurs valeurs se retranchent. On peut partir de la figure précédente et retrancher point par point ou, comme ci-dessous, tracer deux nouvelles courbes en comptant par exemple positivement les champs lorsqu'ils pointent vers la droite.



1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 2 Valeur d'un champ magnétique

Avec le dispositif étudié dans le cours (page 113), on constate que les électrons, soumis à une tension accélératrice de 400 V dans le canon, prennent une trajectoire plane circulaire de diamètre $d = 10$ cm.

1) Quelle est la valeur du champ magnétique existant entre les bobines de Helmholtz?

2) Combien de temps faut-il à un électron pour faire un tour?

La charge massique des électrons, de masse $9{,}1 \times 10^{-31}$ kg vaut $1{,}76 \times 10^{11}$ C.kg^{-1}.

SOLUTION

1) Dans le canon à électrons, la variation de l'énergie cinétique de l'électron $\frac{1}{2} m.v^2 - 0$ est égale au travail $e.U$ de la force électrique. Le poids de l'électron est négligeable vis-à-vis de la force électrique et son travail n'intervient pas. La vitesse des électrons est donc telle que :

$$v^2 = 2\frac{e}{m}.U = 2 \times 1{,}76 \times 10^{11} \times 400,$$

d'où $v = 1{,}2 \times 10^7$ m.s^{-1}.

Sur la trajectoire de rayon $R = 5 \times 10^{-2}$ m, la vitesse angulaire ω vaut :

$$\omega = \frac{v}{R} = 2{,}4 \times 10^8 \text{ rad.s}^{-1}.$$

La valeur du champ magnétique est :

$$B = \frac{\omega}{q}.m = \frac{2{,}4 \times 10^8}{1{,}76 \times 10^{11}}$$

soit $\boldsymbol{B = 1{,}3 \times 10^{-3}}$ **T.**

2) L'électron parcourt la longueur $2\pi.R$ à la vitesse

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} = 1{,}2 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}.$$

La durée d'un tour est $T = \frac{2\pi.R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$,

soit $\boldsymbol{T = 2{,}6 \times 10^{-8}}$ **s.**

EXERCICE 3 Filtre de vitesse

Des particules chargées pénètrent avec diverses vitesses colinéaires, horizontales, entre les armatures d'un condensateur plan. Les armatures horizontales, distantes de d, sont soumises à une tension électrique U. Simultanément, un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, horizontal, orthogonal au champ électrique $\vec{E}$, s'exerce lui aussi entre les armatures.

1) Préciser quelles doivent être les caractéristiques de la tension U, ainsi que celles des bobines de Helmholtz, pour que les champs aient la disposition indiquée par la figure.



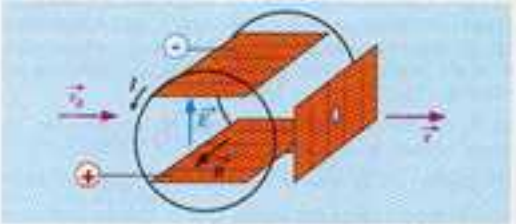
2) Quelle doit être la vitesse des particules pour que, soumises simultanément à $\vec{E}$ et $\vec{B}$, elles ne subissent aucune déviation entre les deux armatures?

3) Qu'arrive-t-il aux particules plus lentes? plus rapides? Le dispositif convient-il aussi bien pour les charges positives que pour les négatives?

Application numérique : $d = 0{,}5$ cm; $U = 50$ V; $B = 0{,}1$ T.

SOLUTION

1) Pour que le champ électrique soit vertical vers le haut, il faut que le potentiel de l'armature du bas soit le plus élevé.
Le champ magnétique est parallèle à l'axe des deux bobines de Helmholtz. Pour qu'il pointe vers nous, il faut voir tourner le courant dans le sens trigonométrique.



2) Les particules ne subissent aucune déviation si elles ne subissent pas d'action. La force de Lorentz doit être nulle (le poids est négligeable vis-à-vis des forces électriques ou magnétiques). Soit $q.\vec{E} + q.\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$.

Cette condition se traduit par $\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$, d'où $v = \frac{E}{B}$ puisque $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux. Le champ électrique entre les armatures a pour valeur $E = \frac{U}{d}$.

1. EXERCICES RESOLUS

La vitesse est alors : $v = \dfrac{U}{B.d}$, soit :

$$v = \frac{50}{5} \times 10^4 = 10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\boldsymbol{v = 100 \text{ km.s}^{-1}.}$$

3) Les particules plus lentes subiront une force magnétique plus faible. La force magnétique est vers le bas pour des particules positives, vers le haut pour les négatives. La force électrique ne change pas. Les charges positives lentes seront donc déviées vers le haut, les négatives lentes vers le bas. Ce sera l'inverse si les particules sont plus rapides, car la force magnétique l'emportera. Seules les particules de vitesse $v = \dfrac{E}{B}$ sortiront par le petit trou (ce qui justifie l'appellation de **filtre de vitesse** donnée à ce dispositif).
Que les particules soient positives ou négatives, la condition $\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$ conduit à une force nulle. Le dispositif filtre aussi bien les charges positives que les charges négatives.

EXERCICE 4 Spectrographe de masse

1) Des ions brome (I) Br^+ (il ne s'agit pas des ions bromure Br^- rencontrés en solution aqueuse) sortent d'une chambre d'ionisation, pratiquement sans vitesse initiale. Ils sont accélérés sous l'influence d'une tension électrique U.
Établir la relation donnant la valeur p de la quantité de mouvement qu'ils acquièrent ainsi en fonction de leur masse m, leur charge q et la tension accélératrice U.

2) Les ions pénètrent dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, orthogonal à la vitesse acquise.

a) Exprimer le rayon de courbure R de la trajectoire en fonction de m, U, q et B.

b) Application : $B = 0{,}12$ T ; $U = 3\,470$ V. Établir la relation numérique donnant m (exprimée en unité de masse atomique u : $1 \text{ u} = 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg) en fonction de R (en m). Calculer m sachant que l'impact des ions sur la plaque photographique du spectromètre est situé à 125,7 cm de la fente d'entrée.

3) A 1,6 cm de la trace précédente, on observe un autre impact, plus lointain de la fente d'entrée.

a) Quelle est la masse de l'isotope correspondant?

b) On trouve dans les tables que la masse atomique moyenne du brome vaut 80 u. En admettant que les deux isotopes précédents soient les seuls à prendre en compte, dans quelles proportions ces isotopes existent-ils dans le brome?

SOLUTION

1) La variation $\dfrac{1}{2}mv^2 - 0$ de l'énergie cinétique résulte seulement du travail de la force électrique (égal à $q.U$), car le poids des particules est négligeable vis-à-vis des forces électrique ou magnétique.
De $m.v^2 = 2q.U$, on déduit $m^2.v^2 = 2q.m.U$, d'où :

$$\boldsymbol{p = \sqrt{2q.m.U}.}$$

2) *a)* La force magnétique ne travaillant pas, il n'y a pas de variation d'énergie cinétique. Dans le champ magnétique, les valeurs des vitesses et de la quantité de mouvement restent inchangées. Par suite, $p = q.B.R$ et $R = \dfrac{p}{q.B}$, ou, tenant compte de la relation précédente :

$$\boldsymbol{R = \frac{\sqrt{2m.U}}{B.\sqrt{q}}.}$$

b) Les ions brome (I) portent une charge élémentaire positive :

$$q = 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Par élévation au carré de l'expression précédente, il vient $m = \dfrac{1}{2}\dfrac{q.B^2.R^2}{U}$. En y remplaçant par les valeurs numériques connues, il vient :

$$\frac{m}{R^2} = \frac{1}{2} \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times \frac{0{,}12^2}{3\,470} \approx 3{,}32 \times 10^{-25} \text{ SI}$$

Dans cette relation m s'exprime en kg et R en m. Comme $1 \text{ kg} = \dfrac{1}{1{,}66 \times 10^{-27}}$ u, on obtient :

$$\frac{m}{R^2} = \frac{3{,}32 \times 10^{-25}}{1{,}66 \times 10^{-27}} = 200 \text{ et finalement } m_{(u)} = 200R^2.$$

Après avoir parcouru un demi-arc de cercle, les impacts sont situés à une distance de la fente égale au diamètre du cercle. Pour $R = \dfrac{1{,}257}{2}$ m, on obtient :

$$\boldsymbol{m = 79{,}0 \text{ u}.}$$

3) *a)* Le second isotope décrit un demi-cercle de rayon plus grand. Pour cet ion, le rayon de la trajectoire est $R' = \dfrac{(125{,}7 + 1{,}6)}{2}$ cm $\approx 0{,}637$ m. Par suite :

$$\boldsymbol{m = 81{,}0 \text{ u}.}$$

b) La masse atomique moyenne du brome étant de 80, les deux isotopes du brome existent dans les **mêmes proportions.**

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATION

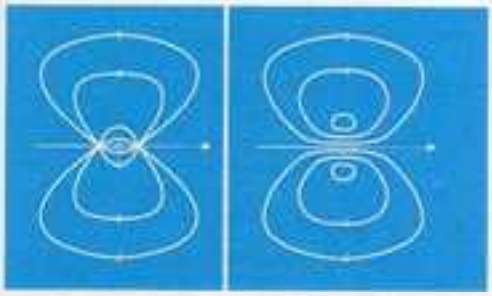
Sans calculs

Exercice 1

Recenser les dispositifs (aimants ou courants) qui donnent, dans des régions à préciser, un champ magnétique uniforme.

Exercice 2

Les deux schémas ci-dessous représentent un spectre magnétique et un spectre électrique.
Loin de la région centrale, ils ont sensiblement la même allure.



Lequel est le spectre magnétique? Quels dispositifs utiliser pour réaliser ces deux spectres?

Exercice 3

Pour quelle raison l'effet de freinage sur des électrons est-il beaucoup plus sensible dans une chambre à bulles que dans une ampoule à pinceau circulaire d'électrons?

Exercice 4

Préciser dans quels cas une particule (chargée ou non) est animée d'un mouvement rectiligne uniforme quand elle pénètre dans un champ magnétique.

* Exercice 5

Dans une ampoule à électrons on observe pour un réglage donné, que des électrons ont une trajectoire circulaire de rayon $R = 5$ cm. Qu'observe-t-on lorsqu'on réalise simultanément les opérations suivantes :

1) Tension accélératrice multipliée par 4 et intensité du courant dans les bobines de Helmholtz multipliée par 2?

2) Tension accélératrice divisée par 2 et intensité du courant dans les bobines multipliée par 1,41... ($\sqrt{2}$)?

3) Rotation de l'ampoule de 180° autour de son support, et inversion du sens du courant dans les bobines?

Exercice 6

Dans les figures ci-dessous, $\vec{v}$ représente le vecteur-vitesse d'une particule chargée située dans une région de l'espace où règnent un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$.



Chercher dans quel(s) cas de figure la particule :

1) Reste immobile.

2) Reste dans le plan de figure.

3) Reste en mouvement rectiligne ou l'acquiert.

Exercice 7

Faire un schéma des lignes de champ magnétique créé par un solénoïde, en les orientant en fonction du sens du courant indiqué sur le solénoïde. Reproduire la figure observée en regardant ce schéma dans un miroir. Le nouveau schéma est-il correct?

Exercice 8

Des particules de même charge, sortent toutes d'un cyclotron donné, avec la même quantité de mouvement $p = q.B.R$. Que représente R? Comment interpréter que cette quantité de mouvement soit indépendante de la tension accélératrice entre les dees?

Exercice 9

Lorsque des particules chargées sont animées, après déflexion magnétique, d'un mouvement rectiligne uniforme, peut-on dire que leur poids est négligeable vis-à-vis de la force magnétique?

Force magnétique

Les données suivantes seront utilisées dans les exercices si besoin est :

Charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

	Electron	Proton	Neutron	Particule α
Masse (kg)	$9{,}1 \times 10^{-31}$	$1{,}672 \times 10^{-27}$	$1{,}675 \times 10^{-27}$	$6{,}65 \times 10^{-27}$
Charge	$-e$	$+e$	0	$2e$

Composante horizontale du champ magnétique terrestre : $B_h \sim 2 \times 10^{-5}$ T.

2. EXERCICES PROPOSES

***Exercice 10**

Des électrons, animés d'un mouvement rectiligne uniforme horizontal, pénètrent avec une vitesse $v = 10\ km.s^{-1}$ dans une région où règne un champ magnétique de vecteur $\vec{B}$ horizontal ($B = 5 \times 10^{-3}$ T). $\vec{B}$ fait avec $\vec{v}$ un angle de 50°.
Quelle est alors la valeur de la force agissant sur les électrons? La comparer à leur poids.

Exercice 11

Un solénoïde horizontal comportant 1 000 spires par mètre, renferme dans sa région centrale une aiguille aimantée placée sur un pivot. Initialement, l'axe horizontal du solénoïde est perpendiculaire au méridien magnétique du lieu où se fait l'expérience.

1) Faire un schéma du dispositif.

2) Exprimer l'angle α dont tourne l'aiguille lorsqu'on fait passer un courant d'intensité I dans le solénoïde.

3) Tracer la courbe montrant l'évolution de α en fonction de I.

***Exercice 12**

Un solénoïde horizontal comportant 1 000 spires par mètre renferme dans sa région centrale une aiguille aimantée placée sur un pivot. Initialement, l'axe horizontal du solénoïde est dans le plan du méridien magnétique du lieu où se fait l'expérience.

1) Calculer l'intensité I_0 du courant qui doit passer dans le solénoïde, pour que le champ magnétique créé dans sa région centrale, ait même valeur que la composante horizontale du champ terrestre.

2) On fait tourner le solénoïde autour d'un axe vertical passant par sa région centrale (le solénoïde reste horizontal). Lorsque le solénoïde a été tourné de α, de quel angle β a tourné l'aiguille?
On envisagera successivement les trois cas suivants :

$$I = I_0 \qquad I = 2I_0 \qquad I = \frac{I_0}{2}$$

3) Préciser dans lequel des cas précédents l'aiguille fait moins d'un tour lorsque le solénoïde en fait un. De quel angle maximal l'aiguille tourne-t-elle alors?

Bobines de Helmholtz

Exercice 13

Une bobine plate circulaire comporte plusieurs spires de rayon moyen $R = 10$ cm. Elle est parcourue par un courant d'intensité $I = 0,5$ A. Un teslamètre indique que le champ magnétique créé au centre de la bobine vaut $B_0 = 2,0 \times 10^{-3}$ T. A 10 cm du centre, sur l'axe de la bobine, ce champ ne vaut plus que $B = 0,7 \times 10^{-3}$ T. Deux bobines identiques à la précédente sont associées afin de réaliser le dispositif de Helmholtz.

1) Faire un schéma du dispositif, en y précisant les sens du courant et du champ magnétique intérieur.

2) Estimer la valeur du champ magnétique au milieu des deux bobines parcourues dans le même sens par un courant de 2 A.

Particules chargées dans un champ magnétique

Exercice 14

Combien de tours par seconde un électron effectue-t-il lorsqu'il évolue dans un champ magnétique de 50 mT orthogonal à sa vitesse initiale? Ce résultat dépend-t-il de la vitesse initiale de l'électron? de la valeur du champ?

Exercice 15

Quelle est la vitesse d'une particule α animée d'un mouvement circulaire uniforme de rayon 1 m dans un champ magnétique de valeur 0,1 T?

***Exercice 16**

Des particules de masse m, porteuses d'une charge élémentaire e positive, sont initialement immobiles.

1) Elles subissent l'influence accélératrice d'une tension électrique U. Exprimer leur énergie cinétique E_c, leur quantité de mouvement p et leur vitesse v en fonction de e, m et U.

2) Elles pénètrent à la vitesse précédente dans un champ magnétique de vecteur $\vec{B}$ orthogonal à leur vitesse $\vec{v}$. Parmi les grandeurs suivantes $(E_c, p, v, \beta, \vec{v})$, lesquelles sont modifiées?

3) Exprimer le rayon de courbure de leur trajectoire en fonction de m, e, U et B.

Spectrographes de masse

Exercice 17

Dans un spectrographe de masse, des ions $^{66}Zn^+$ et $^{70}Zn^+$ initialement immobiles, sont accélérés sous l'influence d'une tension $U = 5$ kV. Ils pénètrent ensuite dans un champ magnétique de valeur $B = 10^{-2}$ T.

1) Faire un schéma du dispositif en y représentant les signes des charges des plaques accélératrices et le sens du vecteur champ magnétique.

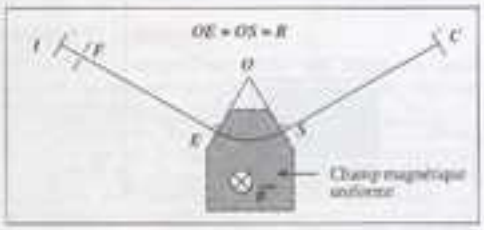
2) Quelle est la vitesse des ions à leur entrée dans le champ magnétique? lors de leur impact sur la plaque photographique après un demi-tour?

3) Quelle est la distance qui sépare, sur la plaque photographique, les impacts des deux types d'ions? Les masses des ions seront prises égales à 66 u et 70 u. ($1\ u = 1,66 \times 10^{-27}$ kg).

2. EXERCICES PROPOSES

* Exercice 18

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les particules étudiées ne sont pas relativistes.
Dans le spectrographe de masse schématisé sur la figure, des ions positifs de masse m, de charge q, sortent en I d'une chambre d'ionisation avec une vitesse négligeable.



Ils sont accélérés entre I et F par une tension $U = V_I - V_F$ continue et réglable. Ils sont ensuite déviés entre E et S par un champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de figure, la valeur B du champ magnétique restant constante pendant toute la durée d'utilisation. Ils sont enfin recueillis à l'entrée C fixe d'un collecteur.
Dans cet appareil, tous les ions que l'on veut recueillir en C doivent suivre la même trajectoire IFESC.
D'autre part, le vide est réalisé dans l'appareil, et l'effet de pesanteur sur les ions est négligeable.
La portion ES est un arc de cercle de centre O et de rayon R.

1) a) Établir en fonction de q, m et U l'expression de la valeur v de la vitesse avec laquelle un ion quelconque du faisceau parvient en E.

b) Établir la relation qui doit exister entre q, v, B, m et R pour que cet ion suive la trajectoire imposée.

c) Déduire des deux questions précédentes la relation entre q, B, R, m et U.

2) On utilise ce spectrographe de masse pour identifier les isotopes du strontium; les atomes de strontium s'ionisent sous la forme d'ions Sr^{2+}.

a) On place d'abord dans la chambre du strontium 88. Calculer la valeur à donner à la tension U pour que les ions du strontium 88 soient collectés en C.
On donne : $R = 0{,}70$ m; $B = 0{,}16$ T;
masse d'un atome de strontium 88 : 87,6 u;
charge électrique élémentaire : $1{,}60 \times 10^{-19}$ C;
unité de masse atomique : $1\ u = 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg.

b) On place maintenant dans la chambre d'ionisation un mélange d'isotopes du strontium. Pour les recueillir successivement en C, il faut donner à U différentes valeurs comprises entre 13 930 V et 14 440 V.
Entre quelles valeurs se situent les nombres de masse de ces isotopes?

Cyclotrons

Exercice 19

On applique une tension accélératrice alternative $u = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$ aux deux dees d'un cyclotron de rayon $R = 0{,}80$ m. Le champ magnétique uniforme a pour valeur $B = 0{,}90$ T. Les particules accélérées sont des protons, de charge massique :

$$\alpha_1 = \frac{q}{m} = 9{,}58 \times 10^7\ C \cdot kg^{-1}.$$

1) Exprimer, en fonction de q et U_m, l'accroissement d'énergie cinétique à chaque passage d'un dee à l'autre. On admettra que, pendant la très courte phase d'accélération entre les dees, la tension appliquée reste pratiquement constante et égale à U_m. Faire l'application numérique.
Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de la particule à chaque tour?

2) Établir les expressions littérales de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique de la particule à sa sortie du cyclotron. Dépendent-elles de U_m?

3) Exprimer, en fonction de q, B, R et U_m, le nombre de tours accomplis dans le cyclotron par la particule.
Applications numériques : $U_m = 1$ kV; $U_m = 100$ kV (valables pour tout l'exercice).

4) Quelles sont la vitesse angulaire des protons dans le cyclotron, et la pulsation ω de la tension appliquée aux dees?

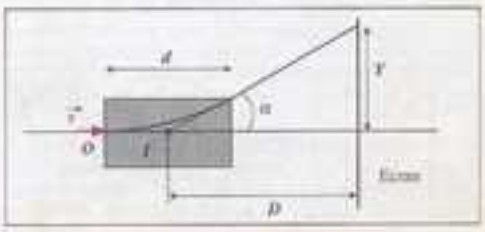
5) Pendant combien de temps les protons sont-ils accélérés dans le cyclotron?

6) Quelle distance le proton parcourt-il dans les dees avant de sortir?

Déflexion magnétique

Exercice 20

Un pinceau homocinétique d'électrons pénètre en O à la vitesse $\vec{v}$ dans une région (en grisé sur la figure) où règne un champ magnétique uniforme, de vecteur $\vec{B}$ orthogonal à $\vec{v}$, qui est nul à l'extérieur de la région grisée.



2. EXERCICES PROPOSES

Pour les applications numériques :

$v = 10^7\ \text{m.s}^{-1}$ $d = 2$ cm $D = 20$ cm $Y = 2{,}5$ cm.

1) Le pinceau est dévié vers le haut. Quel est le sens du vecteur champ $\vec{B}$?

2) Quel est, exprimé en fonction de la charge massique $q_* = \frac{q}{m}$, de v et de B, le rayon de courbure R de la trajectoire?

3) A sa sortie du champ, le pinceau semble provenir d'un point I très proche de la région centrale d'influence du champ. Le champ magnétique s'exerce sur un trajet de longueur très voisine de d.
Exprimer l'angle α de déflexion en fonction de d, q_*, B et v.

4) On observe une distance de déflexion $Y = 2{,}5$ cm. Que vaut le champ magnétique?

EXERCICES D'APRES BACCALAUREATS

* Exercice 21

1) Des électrons sont émis par effet thermo-électronique. Entre le filament F et une plaque P, distants de ℓ, on applique une tension $V_P - V_F > 0$.

$\ell = 2$ cm, $V_P - V_F = 100$ V, $g = 10\ \text{m.s}^{-2}$,

$m_e = 9 \times 10^{-31}$ kg, $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

a) Montrer que le poids de l'électron est négligeable devant la force électrostatique qui s'exerce sur lui.

b) Quelle est la nature du mouvement de l'électron entre F et P? Déterminer sa vitesse $\vec{v}_0$ en P, ainsi que la durée du trajet FP. Les électrons sont émis sans vitesse initiale.

2) On veut vérifier la valeur de la vitesse $\vec{v}_0$. On utilise l'ensemble FP comme canon à électrons, que l'on place dans une ampoule contenant un gaz raréfié. Cette ampoule est placée entre deux bobines de Helmholtz qui créent un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme perpendiculaire à $\vec{v}_0$. On observe un cercle de rayon R = 2,7 cm. On donne : $B = 1{,}25 \times 10^{-3}$ T.

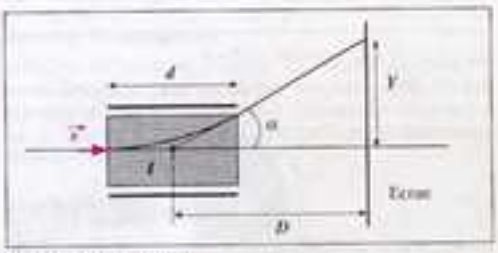
a) Quelle est la force $\vec{f}$ responsable de ce mouvement? Donner les caractéristiques de cette force. Faire un schéma clair sur lequel on placera $\vec{v}_0$, $\vec{B}$, $\vec{f}$ et la trajectoire.

b) Calculer v_0 et la période T du mouvement d'un électron. Cette période dépend-elle de $\vec{v}_0$?



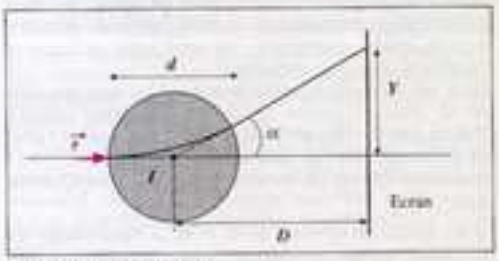
Exercice 22

Un pinceau de particules chargées pénètre horizontalement, à la vitesse $\vec{v}_0$, dans une région de l'espace où l'on peut créer soit un champ électrique $\vec{E}$, soit un champ magnétique $\vec{B}$, soit les deux simultanément. Ce dispositif donne le principe du spectrographe de Thomson (1856-1940).



Déflexion électrique :
Le champ électrique est créé par un condensateur horizontal :

$d = 4$ cm $\quad D = 25$ cm $\quad Y = 2{,}5$ cm



Déflexion magnétique :
Le champ magnétique est obtenu par un dispositif de Helmholtz. Une seule bobine est représentée.

$d = 4$ cm $\quad D = 25$ cm $\quad Y = 2{,}5$ cm

On se place dans les cas où les déflexions électrique et magnétique restent faibles.

1) L'armature supérieure du condensateur étant à un potentiel supérieur à celui de l'armature inférieure, on constate que les particules sont déviées vers le haut. Quel est le signe de leur charge?
On désire que les particules soient déviées aussi vers le haut par un champ magnétique de vecteur $\vec{B}$ horizontal. Quel doit être son sens? Préciser le sens du courant que l'on fera passer dans les bobines de Helmholtz.

2) Établir que les deux trajectoires sont planes et préciser leurs natures. Exprimer les angles de déflexion α_E et α_B en fonction de d, $|q|$, m, v et E ou B. A quelle condition sur E et B les deux angles de déflexion sont-ils égaux?

2. EXERCICES PROPOSES

3) Les données géométriques fournies aux figures précédentes sont obtenues dans le cas où les champs électrique et magnétique valent respectivement :

$E = 17\,600\ V.m^{-1}$ et $B = 5{,}00 \times 10^{-4}\ T$.

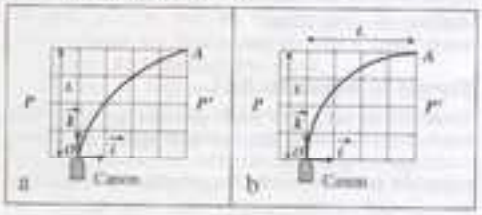
Comment peut-on déterminer ces valeurs expérimentalement? Quelle précaution convient-il de prendre afin que le champ géomagnétique n'intervienne pas?

En déduire la vitesse des particules et leur charge massique. Quelles sont, probablement, ces particules?

Exercice 23

Dans tout l'exercice, le poids des électrons sera négligé devant les autres forces mises en jeu. Le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct.

Dans un tube où règne le vide, on dispose un canon émettant en un point O un pinceau homocinétique d'électrons de vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$. Pour visualiser la trajectoire des particules, un écran fluorescent est placé dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$.



1) A l'intérieur de deux plaques planes P et P', de longueur L, parallèles au plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$, on crée un champ électrique $\vec{E}$ uniforme tel que la trajectoire des électrons, donnée en vraie grandeur figure a, passe exactement par le point A de coordonnées $(L, 0, L)$.

a) Préciser la direction et le sens du vecteur-champ électrique.

b) En prenant pour origine des dates celle de l'émission d'un électron en O, établir les équations paramétriques du mouvement entre O et A.

c) Établir la relation donnant la charge massique $\frac{e}{m}$ de l'électron en fonction de v_0, E, L.

2) Dans une deuxième expérience, on remplace le champ électrique par un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme tel que la trajectoire des électrons émis à la vitesse $\vec{v}_0$ soit un quart de cercle dans le plan de l'écran (fig. b).

a) Préciser le sens de $\vec{B}$.

b) Montrer que la valeur de la vitesse reste constante.

c) Établir la relation donnant la charge massique de l'électron en fonction de v_0, B et L.

3) A l'aide des deux expériences précédentes, déterminer la vitesse v_0 d'émission des électrons, ainsi que leur charge massique.

Application numérique : $L = 4$ cm; $E = 4 \times 10^4\ V.m^{-1}$; $B = 1{,}59 \times 10^{-3}\ T$.

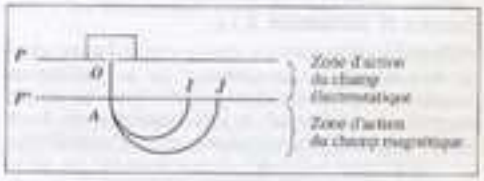
Exercice 24

L'uranium naturel contient essentiellement deux isotopes : l'uranium 235 et l'uranium 238.

L'un des procédés historiques pour séparer ces isotopes, est fondé sur la différence entre les rayons de courbure des trajectoires des atomes ionisés en mouvement dans un champ magnétique uniforme.

D'abord, les atomes neutres sont injectés dans une source d'ions où ils perdent chacun un électron. Les ions ainsi formés portent donc chacun la même charge électrique $q = +e$. Ils sortent de la source d'ions avec une vitesse négligeable, puis ils sont accélérés de O à A par la tension $U_0 = V_P - V_{P'}$ appliquée entre les deux plaques P et P'.

Les ions pénètrent alors en A avec une vitesse de direction perpendiculaire à P' dans une région où règne un champ magnétique uniforme, indépendant du temps, de vecteur $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de figure.



On donne : $B = 0{,}1$ T; $U_0 = 4\,000$ V;
charge électrique élémentaire : $1{,}60 \times 10^{-19}$ C;
unité de masse atomique : $1\ u = 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg;
masse de l'ion uranium 235 : $m_1 = 235$ u;
masse de l'ion uranium 238 : $m_2 = 238$ u.

1) Montrer que l'énergie cinétique est la même pour tous les ions arrivant en A, quel que soit l'isotope ionisé; en déduire que les vitesses acquises par les deux espèces d'ions sont différentes; exprimer les valeurs v_1 et v_2 de leurs vitesses en fonction de la charge, de la masse de l'ion correspondant, et de la tension accélératrice.

2) Au-delà de A, les ions décrivent des trajectoires circulaires dans le plan de figure.

Préciser sur un schéma le sens de $\vec{E}$ (champ électrostatique entre P et P') et de $\vec{B}$ (champ magnétique) pour que les ions puissent parvenir en I et J.

Exprimer littéralement R_1 et R_2 en fonction de la charge, la masse de l'ion correspondant, la tension accélératrice et la valeur du champ magnétique.

Exprimer littéralement la distance entre les deux traces I et J, puis calculer numériquement cette distance. On précisera quel est l'ion qui correspond à chacune des traces.

3) Le courant d'ions issu de la source correspond à une intensité de 10 µA, sachant que l'uranium naturel contient, en nombre d'atomes, 0,7 ‰ d'isotope léger, quelle est, en µg, la masse de cet isotope recueillie en 24 h?

LE CHAMP GÉOMAGNÉTIQUE

1. Rappel de données géographiques

L'axe de rotation de la Terre sur elle-même passe par les pôles géographiques Nord (N_g) et Sud (S) (fig. 38).

Le lecteur qui éprouverait quelques difficultés à voir cette figure dans l'espace aurait intérêt à prendre une vieille balle de tennis ou de ping-pong, à la faire traverser par une aiguille SN_g qui matérialiserait l'axe de rotation. Marquer sur la balle un point L, dessiner le grand cercle passant par L, N_g et S : il représente le **méridien géographique** du lieu L. Marquer le point N_m, figurant le Nord magnétique, à côté de N_g et, diamétralement opposé, le point S_m, figurant le sud magnétique (non représenté sur la figure). Dessiner sur la balle le grand cercle passant par N_m, L et S_m : il représente le **méridien magnétique** du lieu L, dont seule la partie N_mL est dessinée sur la figure. Enfin, piquant en L une épingle pointant vers le centre de la balle, on obtient l'image de la **verticale** du lieu. L'angle désigné par λ sur la figure est la **latitude géographique** du lieu, comptée de 0 à 90° pour les points de l'hémisphère nord.

La figure 39 reprend des données locales : la verticale CL y est redressée; les deux plans verticaux passant par L et contenant les nord géographique et magnétique sont les plans méridiens géographique et magnétique. L'angle D, formé par ces deux plans est appelé **déclinaison magnétique.**



Fig. 38

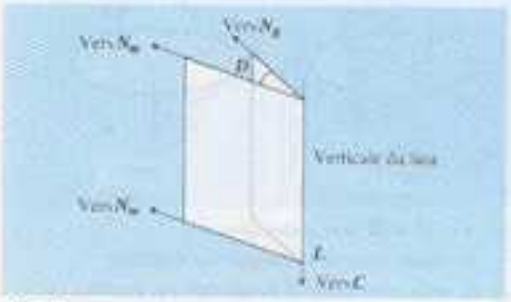


Fig. 39

2. Lignes de champ magnétique terrestre

Une aiguille magnétique, suspendue dans un étrier attaché à un fil sans torsion par un axe qui passe par son centre de gravité, s'oriente dans le plan méridien magnétique, mais **non horizontalement.** Elle forme avec l'horizontale un écart angulaire I appelé **inclinaison magnétique** (fig. 40).

Les lignes de champ géomagnétique ne sont donc pas horizontales.

La déclinaison et l'inclinaison magnétiques dépendent de l'endroit où l'on se trouve sur la Terre, et varient légèrement au cours du temps. En France, $D \approx 5°$ vers l'ouest et $I \approx 65°$ (en 1988).

La figure 41 montre un aspect global des lignes du champ géomagnétique, qui est susceptible de nombreuses variations locales. Il est à remarquer que ce que l'on appelle pôle nord magnétique est en fait une extrémité magnétique sud, qui attire les extrémités nord des aiguilles.

Sur cette figure sont représentés l'**équateur magnétique** et la **latitude magnétique** du lieu L. L'aimant droit équivalent aurait son extrémité nord au pôle magnétique Sud. Cet aimant droit est fictif. L'origine du géomagnétisme réside dans les roches qui se seraient solidifiées en figeant leurs ampériens orientés sous l'influence du magnétisme solaire ou, selon d'autres théories, résiderait dans les courants existant dans le noyau central terrestre conducteur à l'état fondu.

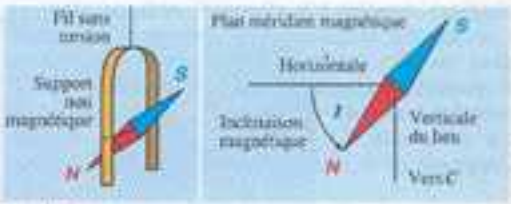


Fig. 40

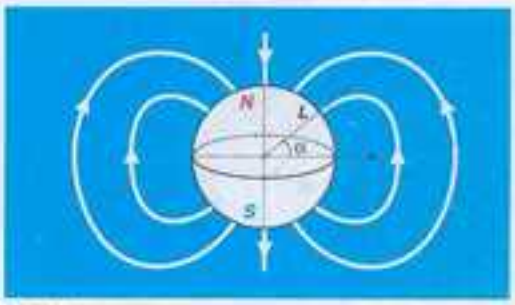


Fig. 41

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

Intensité d'un courant

La masse volumique du cuivre est $\rho = 8\,920\ kg.m^{-3}$. Sa masse molaire vaut $M(Cu) = 0{,}063\,6\ kg.mol^{-1}$.

1) Combien y a-t-il d'atomes de cuivre dans un fil de longueur $\ell = 0{,}50$ m et de section $s = 1{,}00\ mm^2$?

2) Si l'on suppose que chaque atome de cuivre libère un électron de conduction, quelle est la vitesse moyenne d'entraînement des électrons, si le fil est parcouru par un courant d'intensité $I = 1$ A?

3) Combien de temps faut-il, en moyenne, à un électron pour parcourir les 50 cm de fil, dans les conditions précédentes?

4) Comparer la vitesse d'entraînement des électrons à leur vitesse d'agitation thermique, qui est de l'ordre de $100\ km.s^{-1}$. Cette vitesse thermique est-elle négligeable vis-à-vis de la précédente? Comment justifier que l'on n'en tient pas compte?

La constante d'Avogrado vaut $N_a = 6{,}02 \times 10^{23}\ mol^{-1}$; $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

SOLUTION

1) Le volume du fil de cuivre est :

$$V = s.\ell = 5{,}00 \times 10^{-7}\ m^3$$

Sa masse est :

$$m = \rho.v = 5 \times 10^{-7} \times 8\,920 = 4{,}46 \times 10^{-3}\ kg$$

1 kg de cuivre renferme $\dfrac{1}{0{,}063\,6} = 15{,}7$ mol de cuivre.

La quantité de matière du fil considéré vaut donc : $4{,}46 \times 10^{-3} \times 15{,}7 = 7{,}01 \times 10^{-2}$ mol d'atomes de cuivre.

Il y a donc :

$N = 7{,}01 \times 10^{-2} \times 6{,}02 \times 10^{23} = \mathbf{4{,}22 \times 10^{22}}$ **atomes de cuivre** dans le fil.

2) Chaque atome libérant un électron de conduction, il y en a $N = 4{,}22 \times 10^{22}$ dans $V = 5 \times 10^{-7}\ m^3$, soit $N_v = \dfrac{4{,}22 \times 10^{22}}{5 \times 10^{-7}} = 8{,}45 \times 10^{28}$ par m^3.

La vitesse :

$$v = \frac{I}{N_v.s.e} = \frac{1}{8{,}45 \times 10^{28} \times 10^{-6} \times 1{,}60 \times 10^{-19}}$$

$$= \mathbf{7{,}4 \times 10^{-5}\ m.s^{-1}}.$$

Cette vitesse est très faible.

3) Pour parcourir la distance $\ell = v.t$ à la vitesse précédente, les électrons mettent environ :

$$t = \frac{\ell}{v} = \frac{0{,}5}{7{,}4 \times 10^{-5}} = 6{,}8 \times 10^3\ s,$$

soit **près de deux heures!**

4) La vitesse d'agitation thermique est loin d'être négligeable vis-à-vis de la vitesse globale d'entraînement, puisqu'elle est environ mille millions de fois plus grande qu'elle! Cependant, cette vitesse d'agitation est statistiquement nulle et elle ne contribue pas à la conduction.

Qualitativement, on peut retenir qu'un nombre énorme d'électrons, avançant globalement très lentement en portant chacun une toute petite charge, réussissent à faire passer 1 A dans le fil.

Remarque :
Cette lente vitesse de progression des électrons ne doit pas être confondue avec la célérité du signal, égale à celle de la lumière, qui donne l'ordre aux électrons de se mettre en mouvement dans le fil.

EXERCICE 2

Force de Laplace

Une fine tige cylindrique LM, de poids $P = 10$ mN, parcourue de L vers M par un courant d'intensité $I = 10$ A, repose sur deux rails initialement horizontaux. Un aimant en U crée un champ uniforme de valeur $B = 40$ mT qui s'exerce sur une longueur $\ell = 5$ cm de tige.

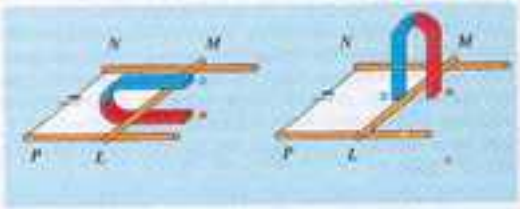
1) L'aimant est disposé comme l'indique la première figure ci-dessous (branche nord en dessous).

a) Préciser les caractéristiques de la force de Laplace, supposée appliquée au milieu de LM, agissant sur la tige. Quelle serait l'accélération initiale de la tige en l'absence de frottements?

b) De quel angle α par rapport à l'horizontal faut-il incliner les deux rails Pt et NM pour que la tige LM reste immobile :

- quand les branches de l'aimant restent horizontales?
- quand elles restent parallèles aux rails?

2) Que se produit-il si l'on adopte la disposition indiquée par la seconde figure?



SOLUTION

1) *a)* Le champ $\vec{B}$ est vertical vers le haut (il sort des régions N). Le courant va de L vers M.

Selon les règles d'orientation du produit vectoriel, la force $\vec{F} = I.\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ est donc horizontale et pointe vers la droite. Elle a pour valeur :

$$F = 10 \times 0{,}05 \times 0{,}04 = 0{,}02\ N = \mathbf{20\ mN}.$$

Cette valeur étant double de celle du poids, l'accélération horizontale de la tige aurait pour valeur $\boldsymbol{a = 2g}$ en l'absence de frottements.

b) • Si les branches de l'aimant restent horizontales, le champ magnétique est vertical vers le haut et la force de Laplace est encore horizontale vers la droite. La tige reste en équilibre si l'action $\vec{R}$ qu'elle subit de la part des rails est orthogonale aux rails (pas de frottements). La première figure ci-dessous représente la situation vue en coupe ($\vec{\ell}$ pointe vers l'arrière de la figure).

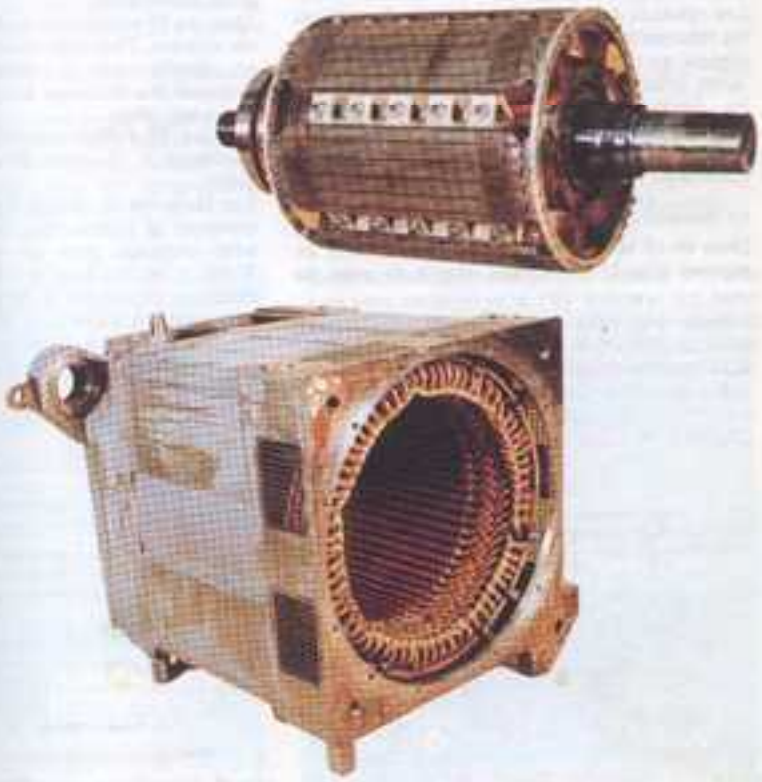
7 Action d'un champ magnétique sur un courant

1 Action d'un champ magnétique sur un élément de circuit.

2 Actions magnétiques sur un circuit entier.

3 Flux magnétique.

4 Applications.



Moteur électrique à courant continu du T.G.V. Atlantique.

Par son action sur les charges mobiles d'un circuit électrique, un champ magnétique est capable d'engendrer des déplacements de conducteurs. Cela mène à de nombreuses applications pratiques, telles que les moteurs, les haut-parleurs et certains appareils de mesures électriques.

1 ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UN ÉLÉMENT DE CIRCUIT

1. Conduction électrique dans un métal

a) Électrons libres à l'intérieur d'un métal

Tous les métaux sont conducteurs de l'électricité, ainsi que de la chaleur. Un métal est constitué d'ions positifs fixes disposés d'une manière régulière en réseau, et d'électrons de valence quasi-libres (fig. 1).

En réalité, l'immobilité des ions n'est que statistique : ils sont animés dans le métal d'incessants mouvements désordonnés d'agitation thermique (fig. 2).

Les rebonds des électrons se font au hasard sur les nuages électroniques des ions qui, eux, vibrent en restant pratiquement sur place.

Si un champ électrique est créé dans le métal, les électrons prennent un mouvement d'ensemble ordonné qui se superpose au mouvement d'agitation thermique : c'est le courant électrique.

b) Intensité d'un courant

Dans un fil conducteur, **le sens conventionnel du courant** (fig. 3) **est le sens inverse de celui du mouvement d'ensemble des électrons.** Le mouvement d'ensemble des électrons, négatifs, équivaut à un mouvement, dans le sens conventionnel, de charges positives.

L'intensité I, d'un courant électrique continu, représente la quantité d'électricité Q, qui traverse en une seconde, la section du circuit parcouru :

$$I = \frac{Q}{t}.$$

L'unité du SI d'intensité est le coulomb par seconde appelé ampère (A).

Le courant est dit **continu** si son intensité demeure constante au cours du temps. Lorsque le courant n'est pas continu, il faut considérer des intervalles de temps dt très courts pendant lesquels l'intensité ne varie pratiquement pas. Si dq désigne la quantité d'électricité qui parcourt le circuit pendant la durée dt, l'**intensité instantanée** i, est définie par :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Quels que soient les appareils mis en série dans un circuit, **l'intensité est la même en tout point d'un circuit-série.**

Dans un fil conducteur cylindrique parcouru par un courant, l'intensité étant partout la même, il en résulte que le mouvement d'ensemble ordonné des électrons est uniforme (voir Pour en savoir plus).

Soit un fil cylindrique (fig. 4) de section s, contenant N_1 électrons libres par mètre cube de métal.

Les électrons de vitesse d'ensemble $\vec{v}$, qui vont traverser la section dans la seconde qui vient, sont contenus dans un cylindre de volume $V = s \cdot v$, où il y en a $N = N_1 \cdot V = N_1 \cdot s \cdot v$. Ces électrons équivalent à N particules de charge élémentaire positive e, se déplaçant dans le sens conventionnel. La charge qui traverse la section du fil à chaque seconde, c'est-à-dire l'intensité, vaut donc :

$$I = N \cdot e = N_1 \cdot s \cdot v \cdot e.$$



Fig. 1. ***Image statique d'un conducteur métallique.*** *Des ions positifs fixes baignent dans « une mer » d'électrons libres.*

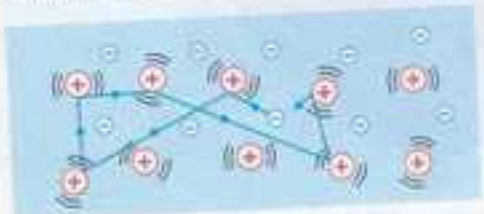


Fig. 2

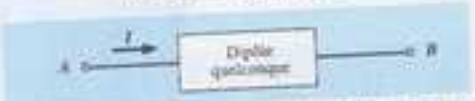


Fig. 3. ***Indication du sens conventionnel d'un courant.*** *La flèche, placée à côté du conducteur, indique par convention le sens connu du courant.*



Fig. 4. ***Interprétation de l'intensité dans un fil conducteur.***

2. Loi de Laplace

a) Champ magnétique agissant sur des électrons dans le vide ou dans un fil métallique

• *Expériences*

Un pinceau d'électrons subit une déviation sous l'influence d'un champ magnétique (fig. 5 *a*). Chaque électron subit l'action de la force magnétique $\vec{f} = q\,.\,\vec{v} \wedge \vec{B} = -e\,.\,\vec{v} \wedge \vec{B}$.

La trajectoire est circulaire si le champ est uniforme.

De même, un fil métallique mobile parcouru par un courant électrique se déplace sous l'influence d'un champ magnétique (fig. 5 *b*).

• *Interprétation.* Les deux expériences précédentes sont analogues : dans les deux cas, les particules mobiles sont des électrons en mouvement initialement vertical vers le bas.

Mais la seconde expérience apporte une information supplémentaire : la **force magnétique s'exerce sur la matière,** et pas seulement sur les électrons.

Pourtant, les ions positifs fixes du réseau cristallin ne subissent aucune force magnétique puisqu'ils restent (statistiquement) immobiles. Quelle est donc l'origine de cette force agissant sur la matière?

Les N électrons de la portion du fil subissent une force magnétique totale $\vec{F} = \Sigma \vec{f}$ qui les déplace vers la droite dans le cas étudié.

Par suite, les ions positifs sont attirés par les électrons déplacés, et toute la matière suit. Ainsi, la force magnétique est intégralement transmise au conducteur.

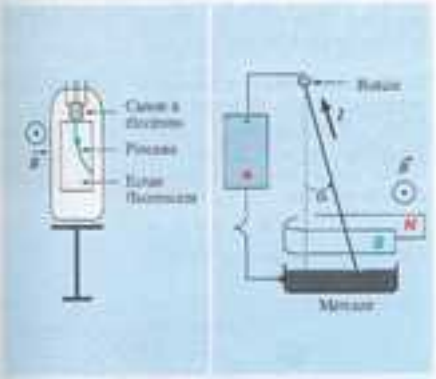


Fig. 5 *a.* ***Action d'un champ magnétique sur un pinceau d'électrons.***

Fig. 5 *b.* ***Action d'un champ magnétique sur un courant dans un fil conducteur.***

Dans les deux montages, compte tenu des sens de $\vec{B}$, des électrons et du courant, la déviation est vers la droite.

b) Expression macroscopique de la force magnétique

Il est possible d'obtenir une expression macroscopique traduisant l'effet global du champ magnétique sur le fil conducteur.

La figure 6 représente un fil vertical parcouru par un courant ascendant d'intensité I. La région bleutée du fil, de longueur ℓ et de section s, est une portion de fil qui baigne dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ pointant vers l'œil du lecteur.

Désignant toujours par N_1 le nombre de particules libres par unité de volume, la partie ombrée du fil, de volume $V = \ell\,.\,s$, en contient :

$$N = N_1\,.\,V, \quad \text{soit :} \quad N = N_1\,.\,\ell\,.\,s.$$

Chaque particule est soumise à la force magnétique $\vec{f} = q\,.\,\vec{v} \wedge \vec{B}$. Le vecteur $q\,.\,\vec{v}$ pointe vers le haut, que les particules envisagées soient des électrons ($q = -e$) de vitesse $\vec{v}$ vers le bas ou des particules positives ($q = e$) de vitesse opposée vers le haut. D'après les propriétés du produit vectoriel, la force magnétique $\vec{f}$ pointe ici vers la droite.

La force totale subie par les particules est :

$$\vec{F} = N\,.\,\vec{f}, \quad \text{soit :} \quad \vec{F} = N_1\,.\,\ell\,.\,s\,.\,q\,.\,\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

La première composante $N_1\,.\,\ell\,.\,s\,.\,q\,.\,\vec{v}$, du produit vectoriel précédent, contient l'expression établie plus haut pour l'intensité :

$$I = N_1\,.\,s\,.\,v\,.\,q.$$

Cette composante a donc pour valeur $I\,.\,\ell$. Son caractère vectoriel peut être conservé en orientant le conducteur dans le sens conventionnel du courant. Le produit $I\,.\,\vec{\ell}$ définit alors un vecteur dont le sens est celui du courant.

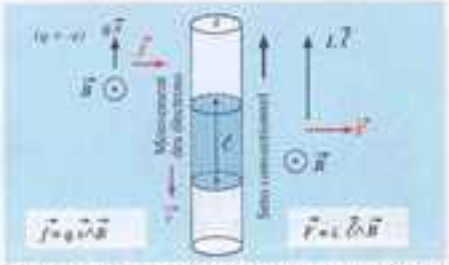


Fig. 6. ***Passage de l'échelle atomique à l'échelle macroscopique.***

L'expression de la force magnétique $\vec{F}$ agissant sur la portion de fil conducteur de longueur ℓ parcouru par un courant d'intensité I est donc :

$$\vec{F} = I . \vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

Dans les applications numériques :

F est en newton (N);
I en ampère (A);
ℓ en mètre (m);
B en tesla (T).

Elle est appelée **force de Laplace.** Il s'agit d'une force répartie qui a le même effet que si elle s'appliquait au milieu de la portion de conducteur baignant dans le champ uniforme.

c) *Caractéristiques de la force de Laplace*

En tant que produit vectoriel, la force de Laplace agissant sur un brin rectiligne de fil, possède les caractéristiques suivantes :

- sa *direction* est orthogonale au plan défini par le fil et le vecteur-champ $\vec{B}$;
- son *sens* est tel que le trièdre défini par les vecteurs $I . \vec{\ell}$, $\vec{B}$, $\vec{F}$ soit direct. ($\vec{\ell}$ est orienté dans le sens du courant);
- sa *valeur* est : $F = I . \ell . B . \sin \alpha$,

α désignant l'angle (inférieur à π) formé par le fil et le vecteur-champ magnétique.

En particulier, la force de Laplace est nulle si $I . \vec{\ell}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires ($\alpha = 0$).

La figure 7 résume quelques cas. Le plan dessiné est déterminé par $I . \vec{\ell}$ et $\vec{B}$. Quand elle existe, la force de Laplace lui est orthogonale.

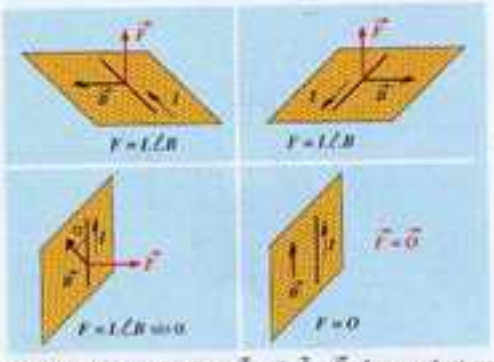


Fig. 7. ***Force de Laplace*** $\vec{F} = I . \vec{\ell} \wedge \vec{B}$. *Le conducteur est orienté dans le sens du courant. Le trièdre* $I . \vec{\ell}$, $\vec{B}$, $\vec{F}$ *est direct.*

d) *Applications*

— *Moteur linéaire*

Une tige conductrice cylindrique est posée sur deux rails conducteurs horizontaux. Un générateur entretient le passage d'un courant continu dans le circuit. Un champ magnétique vertical est appliqué sur tout ou partie de la tige mobile.

La force de Laplace $\vec{F}$, la met en mouvement (fig. 8).

La longueur du circuit qui intervient dans la formule de Laplace est celle de la portion de tige soumise au champ magnétique.

— *Balance de Cotton*

La balance de Cotton (fig. 9) est un appareil destiné à mesurer des champs magnétiques relativement intenses, ou à comparer deux champs entre eux. Elle n'est pratiquement plus utilisée maintenant, mais son principe est simple.

L'un des fléaux (OA) de la balance supporte un plateau. L'autre fléau est entouré d'un ruban plat conducteur $OLMNPO$ appliqué sur un support léger (non représenté sur la figure). Les portions LM et NP sont des arcs de cercles centrés sur l'axe O de rotation de la balance.

Un courant d'intensité I, réglable par rhéostat, parcourt le ruban. Son sens est choisi pour que le brin $MN = \ell$ subisse, sous l'influence du champ magnétique à mesurer, une force de Laplace $\vec{F}$, verticale vers le bas.

Tandis que sur les arcs de cercle toutes les lignes d'action des forces de Laplace élémentaires (telles que $d\vec{f}$ et $d\vec{f}'$), de sens opposés, passent par l'axe O de rotation : elles ne contribuent pas à faire tourner la balance.

Les constructeurs s'arrangent habituellement pour que les bras de levier soient égaux : $D = D'$. Dans ces conditions, l'équilibre de la balance est obtenu lorsque la force de Laplace a même valeur que le poids des masselottes m ajoutées dans le plateau :

$$I . \ell . B = m . g,$$

d'où résulte la mesure de B.



Fig. 8. ***Réalisation pratique d'un moteur linéaire.*** *Le champ magnétique ne baigne pas le circuit entier.*

2 ACTIONS MAGNÉTIQUES SUR UN CIRCUIT ENTIER

1. Circuit dans un champ magnétique uniforme

a) Étude théorique

Un circuit fermé plan de forme quelconque, parcouru par un courant, est constitué d'une succession de brins rectilignes.
Il baigne dans un champ magnétique uniforme orthogonal à son plan (fig. 10).
Chaque brin du circuit, de longueur $d\ell$, orienté dans le sens du courant, subit l'action d'une force de Laplace :

$$d\vec{f} = I.d\vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

La somme vectorielle de toutes ces forces élémentaires est :

$$\Sigma d\vec{f} = \Sigma (I.d\vec{\ell} \wedge \vec{B}).$$

Dans cette somme, tous les termes ont en commun I et $\vec{B}$. Elle s'écrit donc :

$$\Sigma d\vec{f} = I.(\Sigma d\vec{\ell}) \wedge \vec{B}.$$

Mais, le circuit étant fermé, la somme vectorielle $\Sigma d\vec{\ell}$ est nulle. Les forces de Laplace agissant sur le circuit fermé ont donc une somme vectorielle nulle : $\Sigma\vec{f} = \vec{0}$.

Plus généralement, la démonstration précédente reste valable pour un circuit fermé de forme quelconque, non nécessairement plan, placé dans un champ magnétique uniforme de direction quelconque. Ce circuit peut en effet encore être considéré comme une succession de petits brins rectilignes infinitésimaux $d\vec{\ell}$ et comme le circuit est fermé $\Sigma d\vec{\ell} = \vec{0}$.

Lorsqu'un circuit fermé parcouru par un courant continu est placé dans un champ magnétique uniforme, la somme vectorielle de toutes les forces de Laplace qu'il subit est nulle.



Fig. 9. *Schéma de principe d'une balance de Cotton.*

b) Exemples

• *Circuit rectangulaire vertical indéformable dans un champ uniforme horizontal* (fig. 11).
— Quand le champ magnétique $\vec{B}$ est orthogonal au plan du cadre, le cadre est soumis à quatre forces de Laplace deux à deux opposées et de même ligne d'action. Leurs effets s'annulent. Le cadre reste en équilibre (fig. 11 *a*).
— Lorsque le vecteur-champ magnétique $\vec{B}$ est parallèle au plan du cadre (fig. 11 *b*), aucune force ne s'exerce plus sur les brins horizontaux (I, $\vec{\ell}$ et $\vec{B}$ colinéaires). Les deux forces opposées $\vec{F}_1$ et $-\vec{F}_1$, appliquées aux brins verticaux, n'ont pas la même ligne d'action. Elles constituent un **couple** qui fait tourner le cadre.
Dans le cas où le champ magnétique horizontal n'est ni orthogonal, ni parallèle au plan du cadre, il peut être considéré comme constitué de deux composantes, l'une perpendiculaire au plan du cadre, qui ne provoque aucun effet et l'autre orthogonale au plan du cadre, qui le fait tourner.

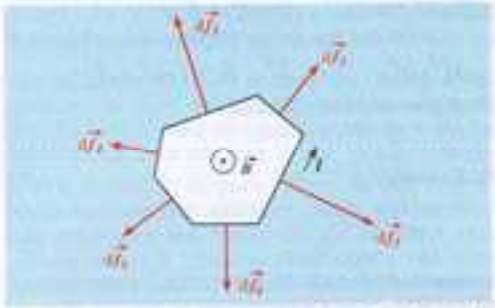


Fig. 10. ***Forces élémentaires de Laplace.*** *Un circuit de forme quelconque peut être considéré comme une succession de petits brins rectilignes.*

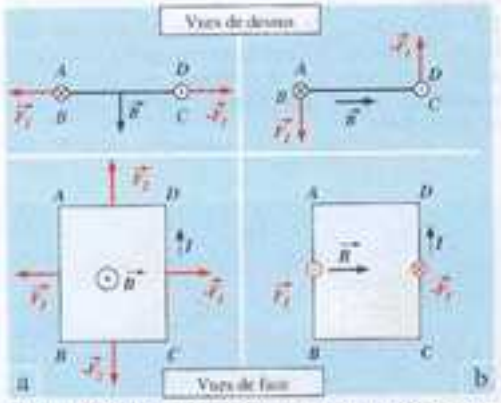


Fig. 11. ***Forces de Laplace agissant sur un cadre plan rectangulaire.***
a) Le cadre est en équilibre.
b) Le cadre va tourner sous l'action des deux forces.

• *Circuit rectangulaire déformable dans un champ magnétique uniforme vertical.*

Dans l'exemple du moteur linéaire, si maintenant le champ magnétique règne sur l'ensemble du circuit électrique, la somme des forces de Laplace est nulle. Seule, la force qui s'exerce sur la tige mobile est active, les autres n'ont aucun effet par suite des réactions du support et de la rigidité des circuits. Dans le cas indiqué, la force fait augmenter l'aire du circuit (fig. 12).

2. Circuit dans un champ magnétique quelconque

a) Étude théorique

Un circuit fermé de forme quelconque, peut toujours être considéré comme une succession de brins orientés $d\vec{\ell}_1$, $d\vec{\ell}_2$, ... chacun subissant la force élémentaire $d\vec{f}_i = I\,.\,d\vec{\ell}_i \wedge \vec{B}_i$. Dans le calcul de la somme des forces, le champ magnétique ne peut plus être mis en facteur car il n'est plus uniforme : $\vec{B}_1 \neq \vec{B}_2 \neq \ldots$

La somme des forces de Laplace élémentaires :

$$d\vec{f}_1 + d\vec{f}_2 + \ldots = I\,.\,d\vec{\ell}_1 \wedge \vec{B}_1 + I\,.\,d\vec{\ell}_2 \wedge \vec{B}_2 + \ldots$$

n'est plus nulle en général.

b) Exemple

Une bobine plate circulaire, comportant quelques tours de fils en cuivre, est suspendue par deux fils conducteurs souples. Elle est placée devant un aimant droit, source d'un champ magnétique non uniforme (fig. 13).

Si la bobine est parcourue par un courant, avec la disposition de l'aimant et le sens du courant indiqués sur la figure, elle vient s'embrocher sur l'aimant.

Elle s'est donc déplacée d'une région où les lignes de champ étaient écartées, pour se diriger vers la région où les lignes de champ se resserrent, donc des champs faibles vers les champs forts.

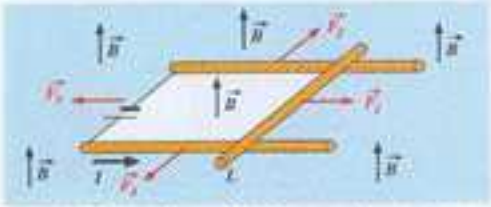


Fig. 12. *Circuit déformable dans un champ uniforme. La somme des forces est nulle. $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sont opposées. $\vec{F}_1$ déplace la tige LM et $\vec{F}_3$ est appliquée à une portion fixe du circuit.*

Ce résultat peut être retrouvé en remarquant que la bobine, assimilée à un solénoïde plat, présente à l'extrémité sud de l'aimant une face nord qui se trouve attirée.

Dans cette expérience, l'existence du mouvement de translation montre qu'**un circuit fermé parcouru par un courant, placé dans un champ magnétique non uniforme, subit l'action d'un ensemble de forces magnétiques dont la somme vectorielle n'est pas nulle.**

3 FLUX MAGNÉTIQUE

Lors des déplacements provoqués par des forces magnétiques, il peut se produire des **variations de l'aire** des circuits électriques (tige se déplaçant sur les rails, fig. 12), des **variations du champ magnétique** à travers les bobines (bobine s'embrochant sur un aimant, fig. 13), ou des modifications de l'orientation des **surfaces** dans les **champs** (rotation d'un cadre dans un champ uniforme, fig. 11 *b*).

Ces résultats peuvent être retrouvés en appliquant au circuit entier, une règle qui va être étudiée dans ce paragraphe.

1. Définition du flux magnétique

a) Vecteur-aire

Il est commode d'associer à un circuit fermé plan, un vecteur $\vec{S}$, de même valeur que son aire S et de même sens que le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à son plan (fig. 14) :

$$\vec{S} = S\,.\,\vec{n}.$$

La figure 15 donne une règle de la main droite qui permet de retrouver le sens du vecteur unitaire normal $\vec{n}$.

Il dépend du sens du courant dans le circuit.

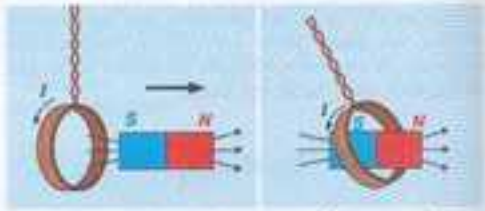


Fig. 13. *Action d'un champ magnétique non uniforme sur une bobine plate.*



Fig. 14. *Vecteur-aire. Son sens dépend de l'orientation choisie sur le conducteur.*

b) Flux magnétique

Si le champ magnétique est uniforme, par définition :

le flux Φ, du champ magnétique à travers un circuit est le produit scalaire du vecteur-champ $\vec{B}$ par le vecteur-aire $\vec{S}$.

L'unité du SI de flux magnétique est le weber (Wb).

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

Dans les applications numériques :

Φ s'exprime en weber (Wb);
B en tesla (T);
S en mètre carré (m^2).

• En tant que **produit scalaire**, le flux est une **grandeur algébrique** (fig. 16) :

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha,$$

où α désigne l'angle inférieur ou égal à π formé par $\vec{B}$ et $\vec{S}$.

• Le flux est maximal pour $\alpha = 0$. Dans ce cas $\vec{B}$ et $\vec{S}$ sont colinéaires et de même sens : $\Phi = B \cdot S$.

• Le flux est nul si $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas le champ $\vec{B}$ est parallèle au plan du circuit.

• Le flux est positif pour $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$ et négatif pour $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$.

Si une bobine traversée par un champ uniforme comporte N spires, le flux magnétique est :

$$\Phi = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S}.$$

Remarque :
Si le champ n'est pas uniforme à travers le circuit, il convient de décomposer la surface à travers laquelle le flux est calculé, en éléments d'aires dS suffisamment petits, pour que le champ puisse être considéré comme uniforme à travers chaque surface élémentaire. Le flux cherché est la somme de tous les flux élémentaires :

$$\Phi = \Sigma \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

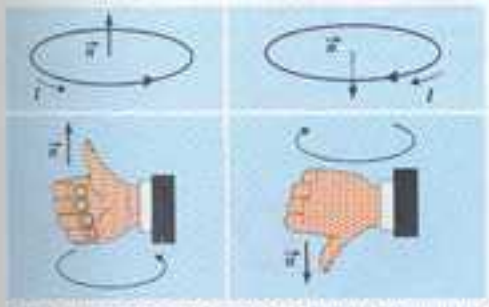


Fig. 15. Une règle de la main droite pour retrouver le sens du vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à une spire orientée.

2. Diverses circonstances de variations du flux

Les déplacements des conducteurs sous l'action des forces de Laplace étudiées précédemment s'accompagnent tous de **variations du flux magnétique** à travers les circuits. Il se produit en effet des variations d'aire (fig. 12), d'angle (fig. 11 *b*) ou de champ magnétique (fig. 13). Quand le sens du courant est connu, comme c'est le cas ici, **les circuits sont orientés dans le sens du courant.**

a) Variations de la valeur de l'aire

Le déplacement d'une tige sur rails horizontaux a été présenté à la figure 12. Le circuit entier est supposé baigner dans un champ magnétique uniforme orthogonal à son plan (fig. 17).

Sur la figure 17 *a*, le flux est positif car les vecteurs $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$ et $\vec{B}$ sont de même sens. La force de Laplace $\vec{F}$ tire la tige vers la droite. L'aire du circuit augmente. Ainsi, le flux augmente et sa variation $\Delta\Phi$ est positive.

Sur la figure 17 *b*, où le sens du champ a été inversé, le flux est négatif car les vecteurs $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$ et $\vec{B}$ sont de sens opposés ($\alpha = \pi$). La force de Laplace entraîne la tige vers la gauche. L'aire du circuit diminue. Ainsi, le flux négatif diminue en valeur absolue, donc, sa variation $\Delta\Phi$ est encore positive.

Le déplacement spontané de la tige s'effectue dans un sens tel que le flux magnétique à travers le circuit augmente.



Fig. 16. Flux magnétique. C'est une grandeur algébrique.

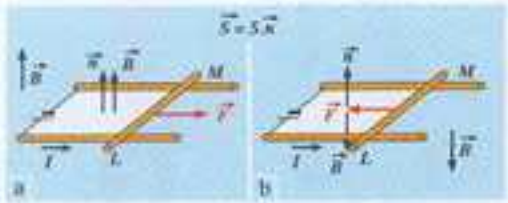


Fig. 17. Circuit déformable dans un champ uniforme. L'aire apparaît en blanc.
a) Flux positif croissant. b) Flux négatif décroissant en valeur absolue.
$\Delta\Phi > 0$ $\Delta\Phi > 0$

b) Variations de champ magnétique

La bobine parcourue par un courant qui vient « s'embrocher » sur l'aimant (fig. 13) se trouve, en position finale, dans une région où le champ est plus intense qu'au départ. L'aire de la bobine n'a pas varié. Le flux final, positif comme le flux initial dans ce cas, est devenu plus grand par suite de l'augmentation de la valeur B du champ.

c) Variations de l'angle α entre $\vec{B}$ et $\vec{S}$

Une bobine plate de N spires pouvant tourner autour d'un fil vertical de suspension (fig. 18), baigne dans un champ magnétique uniforme horizontal $\vec{B}$ engendré par des bobines de Helmholtz (non représentées).

Initialement, l'axe de la bobine est orthogonal au champ $\vec{B}$ (fig. 18 *a*). Le flux à travers chaque spire est alors nul $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$. Quand le courant est établi, la bobine tourne autour de la verticale.

Elle atteint, après quelques oscillations éventuelles, une position d'équilibre telle que son vecteur $\vec{S}$ soit parallèle au vecteur $\vec{B}$ ($\alpha = 0$) (fig. 18 *b*).

Le flux final est donc $\Phi = N.B.S$. Le même phénomène de rotation est observable en remplaçant la bobine par un solénoïde.

Ainsi, **la rotation spontanée d'un circuit dans un champ magnétique uniforme a lieu dans un sens tel que le flux magnétique à travers le circuit augmente.**

Remarque :
Le solénoïde s'oriente dans le champ magnétique comme le ferait un aimant droit. Les faces extrêmes du solénoïde peuvent être appelées l'une nord (celle d'où sort le vecteur unitaire $\vec{n}$ orienté en relation avec le sens du courant) et l'autre la face sud. Cela confirme l'**analogie entre les solénoïdes et les aimants droits.** Le solénoïde peut être considéré comme une juxtaposition de bobines plates et un aimant comme un ensemble de bobines équivalentes aux boucles microscopiques des courants ampériens.

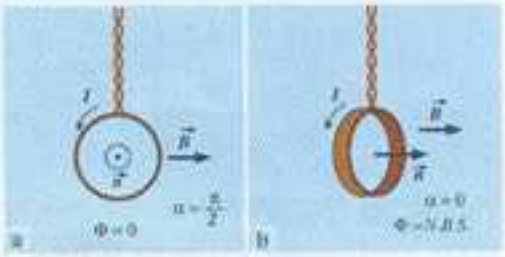


Fig. 18. ***Rotation d'une bobine plate dans un champ magnétique uniforme.***

3. Règle du flux maximal

a) Déplacements spontanés des circuits dans un champ magnétique

Les déplacements spontanés des circuits orientés dans le sens du courant s'effectuent de telle sorte que le flux magnétique à travers ces circuits augmente.
Cette évolution cesse lorsque le flux ne peut plus augmenter. En d'autres termes :

> La position d'équilibre stable finale d'un circuit parcouru par un courant placé dans un champ magnétique, est telle que le flux qui traverse le circuit soit maximal.

Cette règle, générale, est connue sous le nom de « **loi du flux maximal** ».
En pratique, des contraintes interviennent : zone d'intervention du champ d'étendue limitée, pesanteur, réactions d'axe...
Dans ces conditions, le circuit se déplace de telle sorte que le flux magnétique final qui le traverse prenne la valeur la plus grande possible compatible avec les contraintes du montage.
La position finale est une position d'équilibre stable.

b) Exemple

Une bobine plate circulaire suspendue verticalement est embrochée autour de la région centrale d'un aimant droit (fig. 19). Un courant est alors établi de telle sorte que le flux initial à travers la bobine soit négatif :

$$\alpha = \pi, \quad \Phi = -N.B.S.$$

La bobine est repoussée, sort de l'aimant ($B = 0$) et se retourne : le flux devient positif : $\alpha = 0$.
La bobine retournée revient s'embrocher autour de la région centrale de l'aimant où le flux magnétique positif qui la traverse est *maximal* :

$$\Phi = N.B.S.$$

La variation de flux au cours de cette opération est :

$$\Delta\Phi = (N.B.S) - (-N.B.S) = 2N.B.S.$$

L'analyse d'un tel mouvement par les forces de Laplace élémentaires, est nettement moins simple.

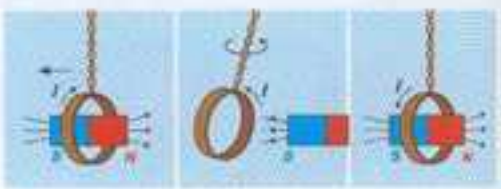


Fig. 19. ***Action d'un champ magnétique non uniforme sur une bobine plate.***

4 APPLICATIONS

Du fait de la mise en mouvement des circuits parcourus par les courants, les actions magnétiques sont riches d'applications pratiques.

1. Moteurs

a) *L'ancêtre*

La **roue de Barlow** (1822) est probablement le plus ancien des moteurs électriques rotatifs, mais sans doute le plus médiocre... (fig. 20). Un disque en cuivre, d'axe horizontal, trempe tout juste, à sa partie inférieure, dans un bain de mercure qui assure les contacts électriques sans empêcher la rotation du disque. Un aimant en U crée un champ magnétique perpendiculaire au disque dans la région radiale qui joint l'axe de rotation au bain de mercure. Quand le courant passe, les forces de Laplace, qui s'appliquent à la matière, font tourner la roue.

b) *Moteurs à courant continu*

La faible puissance de la roue de Barlow, vient de ce qu'une toute petite portion de la roue (pratiquement un rayon vertical) est sollicitée par les forces magnétiques. Les moteurs modernes ne présentent pas cet inconvénient.

• *Constitution*

La partie tournante, appelée **rotor**, d'un moteur est constituée de cadres rectangulaires en cuivre fixés autour d'un bâti cylindrique (fig. 21). Ils sont parcourus par un courant électrique continu.

Un champ magnétique est créé soit par un aimant pour les petits moteurs, soit par un électro-aimant pour les plus puissants.

Les pièces polaires sont cylindriques afin d'entourer le rotor et de créer un champ magnétique radial. Cette partie, immobile est le **stator**.

Ainsi, les fils du rotor subissent toujours des forces de Laplace tangentes au rotor, ce qui leur confère une efficacité rotative maximale.

Les figures 21 et 22 représentent schématiquement un moteur, en perspective et de profil, avec l'astucieux système de **collecteur** qui permet d'inverser le sens du courant dans les fils lors de la rotation.



Fig. 20 ***Roue de Barlow.***

• *Tension aux bornes*

En régime permanent, l'énergie électrique $U.q$ reçue par un moteur est convertie en chaleur $r.i^2.t = r.i.q$ et en énergie mécanique E_M. Par suite :

$$U.q = r.i.q + E_M,$$

ou :

$$U = r.i + \frac{E_M}{q}.$$

$E' = \frac{E_M}{q}$ est appelée **f.c.é.m.** du moteur.

La tension aux bornes d'un moteur s'exprime donc par :

$$U = r.i + E'.$$

Et l'énergie mécanique qu'il fournit est :

$$E_M = E'.i.t.$$

Si U est la tension aux bornes d'un moteur, et qu'il circule le courant i pendant la durée t :
— le moteur absorbe l'énergie électrique $U.i.t$;
— une partie $R.i^2.t$ est perdue sous forme de chaleur;
— le moteur restitue l'énergie mécanique $E'.i.t$ (voir Pour en savoir plus).

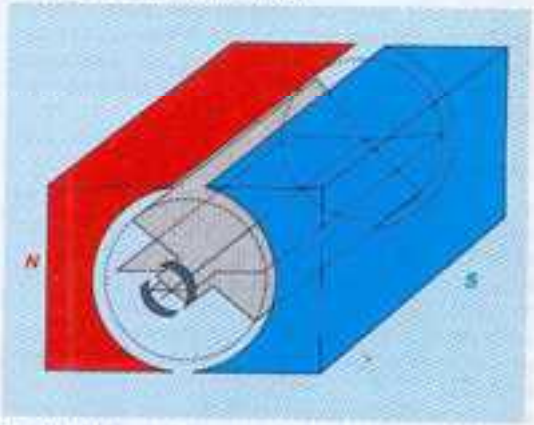


Fig. 21 ***Moteur à courant continu.***

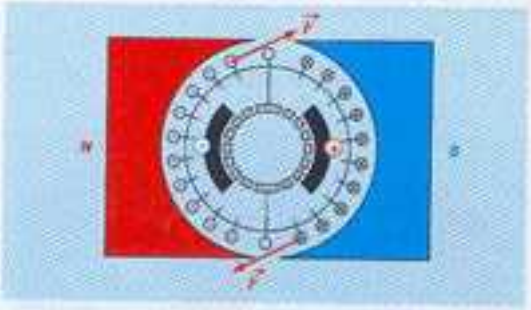


Fig. 22 ***Moteur vu de face.*** *Des balais reliés aux pôles + et − d'un générateur frottent sur le « collecteur ». Les diverses parties du collecteur sont reliées aux spires de telle sorte que le courant passe toujours dans le même sens quand elles sont à gauche, et dans l'autre sens à droite.*

Les moteurs électriques à courant continu sont très utilisés comme petits esclaves énergétiques : démarreur, essuie-glace, ventilateur de voiture... et pour la traction de grande puissance telles les motrices des T.G.V.

2. Appareils magnéto-électriques

a) Galvanomètre à cadre mobile

Un cadre rectangulaire sur lequel sont enroulées N spires de fil conducteur enduit d'un vernis isolant est placé dans un champ magnétique radial créé par un aimant permanent (fig. 23). Ce cadre est suspendu à un fil qui joue un triple rôle : soutenir le cadre, l'alimenter en courant à mesurer, servir de fil de torsion.

Lorsque le cadre tourne, le fil de suspension exerce un couple de rappel. L'angle de rotation à l'équilibre, est proportionnel à l'intensité du courant dans le fil.

Cet appareil, très sensible, permet de déceler de très faibles intensités, inférieures au nA (10^{-9} A), mais est d'une utilisation délicate.

b) Ampèremètres et voltmètres

• Les ampèremètres sont basés sur le même principe. Ils sont de construction plus robuste (le fil de torsion est remplacé par un ressort spiral). L'utilisation d'un shunt en dérivation permet d'adapter le calibre de l'appareil aux intensités à mesurer (fig. 24 *a*).

Ils sont montés en série dans les circuits afin de mesurer l'intensité qui les parcourt.

• Les ampèremètres sont transformés en voltmètres, en plaçant une forte résistance en série (fig. 24 *b*).

Ils sont montés en dérivation sur les dipôles dont on veut mesurer la tension aux bornes.

Leur résistance série, doit être grande sous peine de capturer le courant qui ne passerait plus dans le dipôle.

Ces appareils à cadre mobile sont maintenant remplacés par des ampèremètres ou des voltmètres **électroniques** moins fragiles, plus performants et d'emploi plus commode.



Fig. 23. *Galvanomètre à cadre mobile. Le champ magnétique est radial. Un ressort spiral rappelle le cadre vers sa position initiale.*

3. Haut-parleurs

Les haut-parleurs transforment des vibrations électriques en vibrations sonores. La figure 25 donne une représentation schématique d'un haut-parleur électrodynamique.

Un aimant, généralement en ferrite, crée un champ magnétique radial. Sa forme est étudiée pour qu'une petite bobine suspendue puisse coulisser autour de sa région centrale. Cette bobine reçoit les signaux électriques amplifiés fournis par un récepteur de radio, télévision ou autre.

La bobine est solidaire d'une membrane souple en carton plissé.

Lorsque le courant variable passe dans la bobine, elle subit l'action de forces de Laplace et y répond par des déplacements latéraux qui entraînent la membrane. Les tranches d'air voisines de la membrane sont ainsi mises en vibrations qui, de proche en proche, sont transmises à l'oreille des auditeurs. Voir la Fiche expérimentale.

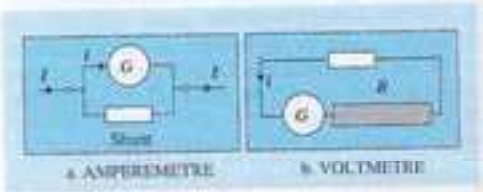


Fig. 24. *Transformation d'un galvanomètre à cadre mobile en ampèremètre ou en voltmètre.*

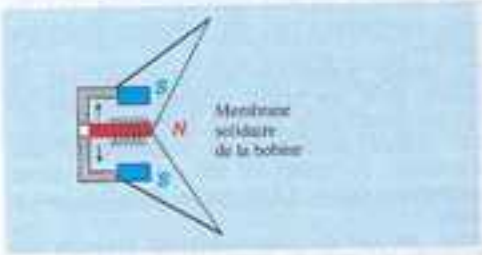


Fig. 25. *Coupe d'un haut-parleur électrodynamique.*



Fig. 26

Fiche expérimentale

MESURE DU CHAMP MAGNÉTIQUE PRODUIT PAR L'AIMANT PERMANENT D'UN HAUT-PARLEUR

1) DISPOSITIF

Cette mesure nécessite deux haut-parleurs identiques :
— l'un est totalement démonté pour mesurer le nombre de spires N de la bobine ainsi que le rayon r de ses spires;
— le deuxième sert à la mesure de B. Pour cela on découpe la membrane pour faciliter les mouvements verticaux de la bobine, qui est maintenu en place élastiquement par le *spider*.
Pour repérer la position d'équilibre de la bobine on colle sur le côté de la membrane un petit miroir, sur lequel on envoie un faisceau laser qui s'y réfléchit, et dont l'image est recueilli en A sur un écran voisin (fig. 27).

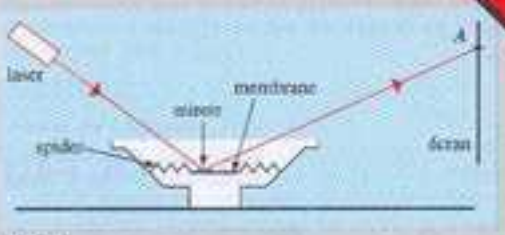


Fig. 27

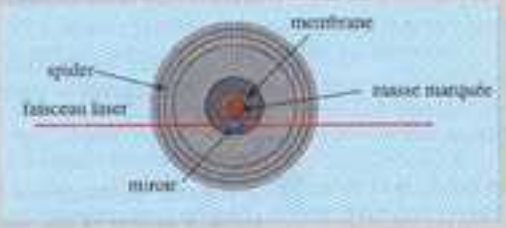


Fig. 28

2) EXPÉRIENCE

On place une masse marquée m, au centre de la membrane (fig. 28) : celle-ci descend sous l'action du poids $\vec{P} = m.\vec{g}$ et atteint une nouvelle position d'équilibre lorsque la force élastique de rappel du spider est égale au poids.

On envoie un courant d'intensité I, de façon que les forces de Laplace $d\vec{F}$ ramènent la membrane à sa position initiale (fig. 29), repérée en A sur l'écran, grâce au faisceau laser (attention au sens du courant!).
La résultante $\vec{F} = \Sigma\, d\vec{F}$ des forces de Laplace compense l'action du poids $\vec{P}$:

$$\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$$

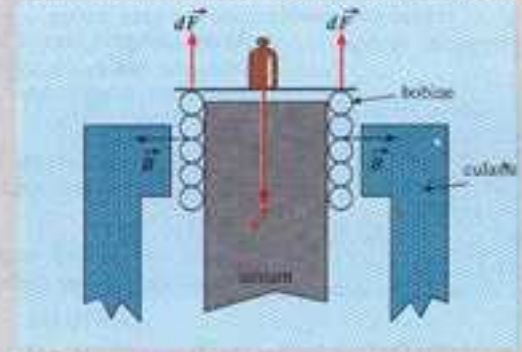


Fig. 29

3) CALCUL DU CHAMP MAGNÉTIQUE

Les N spires de la bobine sont placées dans un champ magnétique radial, d'intensité uniforme B, car les lignes de ce champ rentrent radialement dans l'aimant après avoir circulées dans la culasse (fig. 30).
Donc : $F = B.I.\ell = m.g = P$.
Or $\ell = 2\pi.r.N$, d'où :

$$B = \frac{m.g}{I.2\pi.r.N}$$

Exemple de résultats :
Pour un haut-parleur tel que : $r = 1{,}1$ cm et $N = 50$. En plaçant une masse de 100 g, l'équilibre est rétabli par un courant d'intensité $I = 0{,}53$ A, ce qui conduit à B calculé de 0,55 T.
Pour un haut-parleur usuel, son champ magnétique est de 0,5 à 0,8 T.

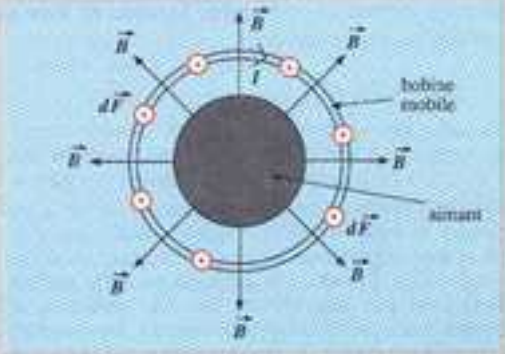


Fig. 30

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

- Se rappeler que les électrons circulent dans un circuit dans le sens inverse du sens conventionnel.

- Retrouver toutes les caractéristiques (sens, direction, valeur) de la **force de Laplace** à partir de son expression :

$$\vec{F} = I . \vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

- Retenir qu'un **circuit fermé**, placé dans un **champ magnétique uniforme**, subit l'action d'un ensemble de forces de Laplace dont la **somme vectorielle** est **nulle.**

- Avoir compris que si la somme vectorielle des forces agissant sur un circuit est nulle, le circuit peut tourner autour de certains axes de rotation, ou se déformer.

- Retenir que pour un circuit placé dans un champ magnétique **non uniforme,** la somme vectorielle des forces de Laplace est **non nulle.**

- Savoir que le flux magnétique à travers une surface d'aire S est une **grandeur algébrique** définie par :

$$\Phi = N . \vec{B} . \vec{S}.$$

- Savoir qu'un circuit soumis à des forces magnétiques est en **équilibre stable** lorsque le **flux** magnétique qui le traverse est **maximal.**

• *Courants sources de champ magnétique :* une aiguille magnétique dévie au voisinage d'un courant électrique (fig. 5). Cet effet a été découvert par le physicien danois Œrsted en 1819. Les courants électriques sont donc producteurs de champ magnétique, dans leur voisinage.

Les expériences précédentes montrent que **les aimants et les courants électriques sont des sources de champs magnétiques.**

b) Vecteur champ magnétique

L'orientation prise par l'aiguille aimantée, montre qu'elle est sensible à une grandeur orientée, qui est appelée vecteur-champ magnétique, désigné traditionnellement par $\vec{B}$.

• *Direction*

La direction du vecteur-champ est, tout naturellement, celle que prend l'aiguille aimantée qui le détecte.

• *Sens*

Par convention, le sens de $\vec{B}$ est choisi selon le sens $\vec{sn}$ (sud-nord) de l'aiguille aimantée détectrice.

• *Valeur*

La valeur du champ magnétique se mesure à l'aide d'un **teslamètre** (fig. 6). Le nom de cet appareil vient de ce que l'unité du SI de champ magnétique est le **tesla** (T), dont la définition sera précisée ultérieurement.

Il est utile de retenir qu'un champ magnétique de valeur 1 T est un champ intense. Par exemple, la composante horizontale du champ géomagnétique ne vaut que $B_h \approx 2 \times 10^{-5}$ T.

Les aimants supraconducteurs industriels permettent d'obtenir des champs beaucoup plus intenses, jusqu'à 10 T.

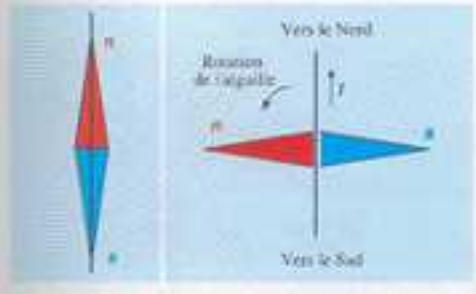


*Fig. 5. **Action d'un courant sur une aiguille aimantée.** L'aiguille dévie pratiquement de 90° si le courant est suffisamment intense.*

3. Interactions d'origine magnétique

a) Interactions aimant-aimant

L'expérience réalisée avec deux barreaux aimantés (fig. 7), dont la nature des extrémités est connue met en évidence les résultats suivants : chaque aimant est sensible au champ magnétique créé par l'autre.

• **Deux extrémités de même nature** (toutes deux *N*, ou *S*) **se repoussent.**

• **Deux extrémités de nature différente s'attirent.**

Cette propriété est parfois utilisée pour déterminer la nature nord ou sud des extrémités d'un aimant inconnu, par référence à un autre bien connu : boussole par exemple.

b) Interactions aimant-courant

• *Les courants agissent sur les aimants*

Cet effet a déjà été signalé à propos de l'expérience d'Œrsted (fig. 5). Le passage d'un courant à proximité d'un aimant tend à l'orienter ou à le déplacer, car l'aimant est sensible au champ magnétique créé par le courant.



*Fig. 6. **Teslamètre.***

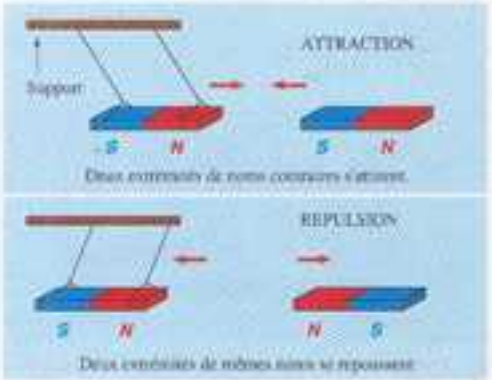


*Fig. 7. **Interactions attractives ou répulsives entre aimants.***

• *Les aimants agissent sur les courants*

La figure 8 *a* montre l'action d'un aimant sur un fil parcouru par un courant et la figure 8 *b*, l'action d'un aimant sur un pinceau d'électrons, qui constitue un courant électrique encore plus simple. Le fil conducteur se déplace, et le pinceau d'électrons est dévié. Ainsi, un courant agit sur un aimant et un aimant agit sur un courant. Il s'agit d'*actions réciproques*.

Le principe des moteurs électriques est basé sur cette mise en mouvement, dans un champ magnétique, des conducteurs parcourus par un courant.

c) Interactions courant-courant

Chaque fil parcouru par un courant est sensible au champ magnétique dont l'autre est la source. Selon les sens relatifs des courants, les interactions sont attractives ou répulsives (fig. 9).

Ces expériences, qui unissent la mécanique et l'électricité, sont à la base de la définition légale de l'ampère.

L'étude des interactions entre les courants et les aimants constitue l'électromagnétisme.

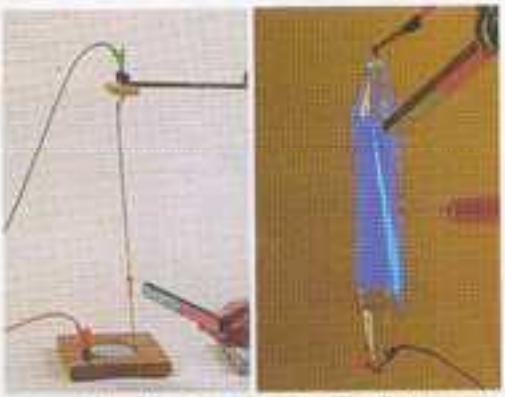


Fig. 8. ***Action d'un aimant sur un courant dans un fil (a) ou sur un pinceau d'électrons (b).***

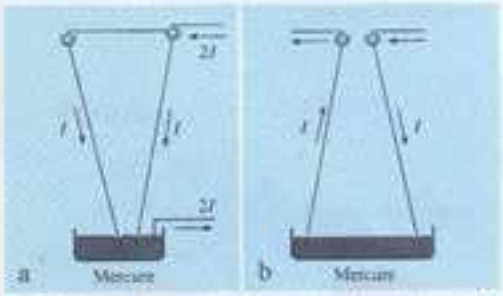


Fig. 9. ***Interactions attractives ou répulsives entre courants.***

a) Attraction entre fils parcourus par des courants de même sens.

b) Répulsion si les courants sont de sens contraires.

2 TOPOGRAPHIE D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE

La topographie d'un champ magnétique est une description de la structure spatiale du champ.

1. Spectre magnétique

a) Expérience

L'extrémité d'un aimant droit plongée dans de la limaille de fer se recouvre d'une houppe de limaille. Celle-ci est constituée de files de grains de fer attachés les uns aux autres (fig. 10 *a*), et qui dessinent une figure géométrique.

L'organisation de la limaille en files peut s'interpréter comme suit : placé dans un champ magnétique, chaque grain de limaille de fer devient un minuscule aimant qui agit comme une aiguille aimantée (fig. 10 *b*).



a) *b)*

Fig. 10. ***Un aimant,*** *introduit dans de la limaille de fer, s'entoure à ses extrémités d'une houppe de limaille qui matérialise les «lignes de champ magnétique». Il est commode d'entourer l'aimant d'une feuille de papier afin de se débarrasser plus facilement de la limaille.*



Fig. 11. ***Matérialisation des lignes de champ magnétique par de la limaille de fer.***

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATION

Sans calculs

Exercice 1

Un pendule élastique est écarté de sa position d'équilibre. Son élongation initiale est X_m. Il est lâché sans vitesse initiale. Parmi les grandeurs suivantes : {pulsation, vitesse au passage par la position d'équilibre, énergie mécanique}, quelles sont celles qui ne dépendent pas de X_m ?

Exercice 2

Un pendule élastique (masse m, raideur k) a pour période T_0, fréquence N_0, pulsation ω_0, amplitude X_m, énergie cinétique maximale $E_{c\,max}$.
Parmi ces grandeurs, quelles sont celles :

- qui augmentent avec la masse de l'oscillateur?
- qui diminuent si la masse est augmentée?
- qui ne dépendent pas de la masse?

Exercice 3

Un ressort à spires jointives peut-il être utilisé pour réaliser un pendule élastique vertical?

Exercice 4

Une force de valeur algébrique du type $F_x = -k.x^2$ peut-elle être une force de rappel? Même question pour $F_x = -k.x^3$.

Exercice 5

Un(e) élève de Terminale se laisse osciller sur une balançoire.

- Quelle est la cause principale d'amortissement?
- Comment procéder pour éviter cet amortissement?

Exercice 6

Une bille lâchée dans un bol évolue-t-elle dans une cuvette de potentiel?

Exercice 7

Deux bateaux flottent sur l'eau, moteurs arrêtés. La houle les fait osciller. La distance entre deux crêtes des vagues est désignée par λ. Quelles peuvent être, exprimées en fonction de λ, les distances entre les bateaux, pour qu'ils aient la même phase? Qu'ils soient en quadrature? Qu'ils soient en opposition?

Lois horaires

*** Exercice 8**

La loi horaire du mouvement d'un oscillateur est donnée (unités du SI) par

$$x = 0{,}05 \cos\left(25t - \frac{\pi}{3}\right).$$

1) Déterminer l'amplitude et la période du mouvement.

2) Quelles sont, à la date $t = 0$, l'abscisse, la vitesse et l'accélération du mobile?

Exercice 9

Établir la loi horaire donnant l'abscisse $x(t)$ d'un pendule élastique (masse $m = 0{,}10$ kg, raideur $k = 25$ N.m^{-1}) qui passe par sa position d'équilibre à la date $t = 1$ s avec une vitesse v égale à -2 m.s^{-1}.

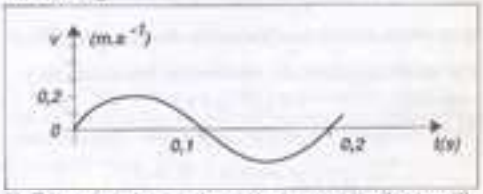
Exercice 10

Un pendule élastique vertical oscille de part et d'autre de sa position d'équilibre avec une amplitude $X_m = 5$ cm. Il passe par sa position la plus haute à la date $t = 0$.
Quelles sont les lois horaires des position, vitesse et accélération de ce pendule?

$m = 0{,}05$ kg; $k = 20$ N.m^{-1}.

*** Exercice 11**

La figure ci-dessous donne le diagramme temporel de la vitesse d'un pendule élastique horizontal de masse $m = 0{,}04$ kg.

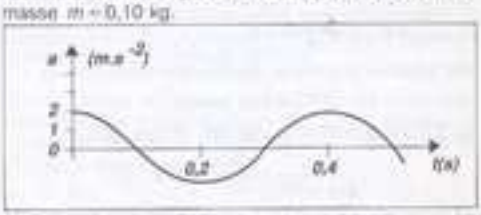


1) Déterminer les lois horaires donnant la vitesse $v(t)$, l'abscisse $x(t)$ et l'accélération $a(t)$.

2) Quelle est la raideur du ressort constituant le pendule?

Exercice 12

La figure ci-dessous donne le diagramme temporel de l'accélération d'un pendule élastique horizontal de masse $m = 0{,}10$ kg.



1) Déterminer les lois horaires donnant la vitesse $v(t)$ et l'abscisse $x(t)$ de l'oscillateur.

2) Quelle est l'expression de la force de rappel $F(x)$?

*** Exercice 13**

L'élongation d'un mobile de masse $m = 0{,}20$ kg est donnée en fonction du temps par

$$x = 0{,}05 \cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Déterminer les expressions de la valeur algébrique de la force de rappel $F_x(t)$ en fonction du temps et $F_x(x)$ en fonction de l'élongation.

2. EXERCICES PROPOSÉS

Énergie

Exercice 23

Un objet de masse $m = 0,50$ kg est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'amplitude $X_m = 0,10$ m et de période $T_0 = 2$ s.
Représenter graphiquement les courbes indiquant l'évolution des énergies cinétique, potentielle et mécanique :

1) En fonction de la position.

2) En fonction du temps.

Exercice 24

Un ressort, de masse négligeable vis-à-vis de celle des objets supposés ponctuels que l'on peut attacher à son extrémité inférieure, pend verticalement.

1) Quelles sont les expressions des énergies potentielles de pesanteur et élastique de cet oscillateur lorsqu'un objet de masse m est suspendu au ressort. Ces deux énergies potentielles seront choisies nulles lorsque le ressort n'est pas déformé.

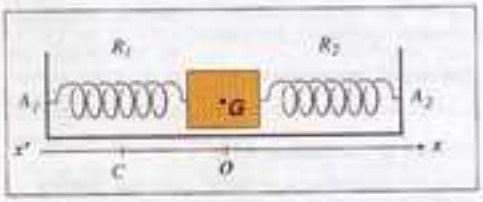
2) Indiquer l'allure de la courbe qui représente l'évolution en fonction de la cote z de l'objet, mesurée à partir de l'extrémité inférieure du ressort non chargé, de l'énergie potentielle (élastique et de pesanteur) du système.

3) Que devient l'expression de l'énergie potentielle du système lorsque les axes de la parabole précédente sont placés à son sommet? La cote de l'objet, mesurée à partir de la position d'équilibre de l'objet, sera désignée par z. Quelles peuvent être alors les conventions choisies pour les zéros des énergies potentielles?

EXERCICES D'APRÈS BACCALAURÉATS

Exercice 25

Un palet à coussin d'air, de masse $m = 700$ g, mobile sur une table horizontale, est accroché à deux ressorts identiques R_1 et R_2, de masse négligeable, tendus entre deux points A_1 et A_2.



Ces ressorts, de constantes de raideur :

$$k_1 = k_2 = 20\ \text{N.m}^{-1}$$

et de longueur à vide $\ell_{0_1} = \ell_{0_2} = 18$ cm, ont pour longueurs $\ell_1 = \ell_2 = 25$ cm, lorsque le palet est en équilibre.

1) Les frottements sont supposés négligeables. On écarte le palet de sa position d'équilibre de telle sorte que son centre d'inertie G se déplace dans la direction A_1A_2 vers A_1, de $\overline{OC} = -2$ cm, puis on l'abandonne sans vitesse initiale, à un instant qui sera choisi comme origine des dates.

a) Donner, à une date t quelconque, l'expression de l'allongement de chacun des ressorts en fonction de l'abscisse x de G.

b) Établir l'équation différentielle du mouvement de G.

c) Exprimer et calculer la pulsation propre et la période propre du mouvement.

d) Écrire l'équation horaire du mouvement de G.

2) En réalité, il existe des frottements. On admettra qu'ils peuvent être représentés par un vecteur force $\vec{f} = -\lambda.\vec{v}$, où λ est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur-vitesse de G.

a) Établir l'équation différentielle du mouvement de G.

b) Donner, en conservant les mêmes conditions initiales, l'allure des courbes représentant l'abscisse x de G en fonction du temps suivant l'importance des frottements.

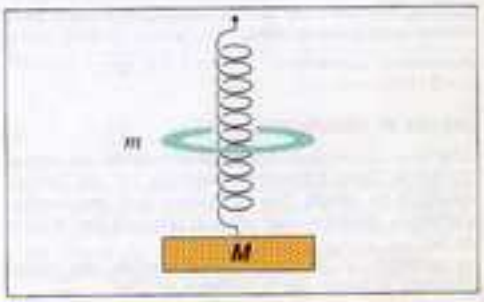
Exercice 26

Un objet de masse $M = 0,40$ kg est attaché à un ressort de raideur $k = 20\ \text{N.m}^{-1}$.

1) L'objet est lâché sans vitesse initiale, le ressort ayant sa longueur à vide. Déterminer l'amplitude des oscillations et leur période.

2) Le mobile s'immobilise après quelques oscillations. Quelle est la perte d'énergie mécanique du système? Qu'est devenue l'énergie perdue?

3) Un anneau de masse $m = 0,10$ kg est lâché sans vitesse initiale d'une hauteur $h = 0,20$ m au-dessus de l'objet. Il entoure le ressort et vient au contact de l'objet, auquel il reste collé.



2. EXERCICES PROPOSES

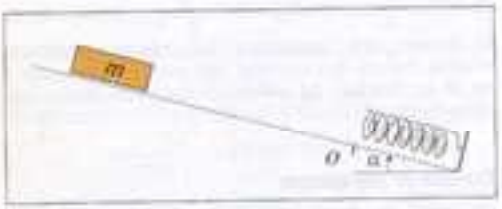
Quelle est la vitesse de l'anneau à l'instant du contact? Justifier la conservation de la quantité de mouvement du système lors du choc. Déterminer, en fonction de m, M, g et h, l'énergie cinétique du système juste après le choc.

4) Les énergies potentielles élastique et de pesanteur sont choisies nulles dans la position d'équilibre en charge (l'anneau n'ayant pas encore atteint le mobile M). Déterminer l'expression de l'énergie potentielle totale lorsque le mobile se trouve écarté de x à partir de la position d'équilibre précédente.

5) Déterminer l'amplitude des oscillations et leur période.

Exercice 27

Un mobile de masse m se déplace d'un mouvement rectiligne le long d'un banc à coussin d'air incliné d'un angle α sur l'horizontale. Un ressort à spires non jointives, de raideur k, est placé à l'extrémité inférieure du banc.



1) Lorsque le mobile est posé au contact du ressort, celui-ci se raccourcit de $\Delta\ell_0$ pour atteindre la position d'équilibre. Exprimer la raideur du ressort en fonction des données.

Application numérique : $m = 0{,}200$ kg; $\alpha = 10°$; $\Delta\ell_0 = 0{,}06$ m.

2) Le mobile est posé au contact du ressort non comprimé, puis lâché sans vitesse initiale. Déterminer l'amplitude et la période des oscillations.

Application numérique : $m = 0{,}200$ kg; $\alpha_1 = 10°$; $\alpha_2 = 30°$; $\alpha_3 = 60°$.

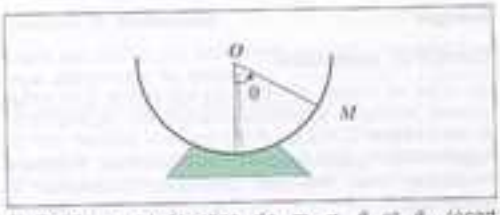
3) Le mobile est lâché sans vitesse initiale et parcourt une distance d sur le banc à air, avant de toucher le ressort. Déterminer le raccourcissement maximal du ressort. Combien de temps faut-il au mobile pour revenir à sa position initiale?

Application numérique : $m = 0{,}200$ kg; $\alpha = 10°$; $d = 0{,}10$ m.

Exercice 28

Une bille, assimilable à un point matériel de masse m, glisse sans frottement dans un bol de section circulaire de centre O et de rayon r. Son mouvement s'effectue dans un plan vertical passant par le fond du bol.

La position M de la bille est repérée par l'écart angulaire θ formé par la verticale et OM.



1) Exprimer, en fonction de m, g, θ et θ_0 (écart angulaire initial) la valeur R de l'action du bol sur la bille. Que devient la relation précédente

a) pour $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = 0°$

b) lorsque θ_0 peut être considéré comme un petit angle?

2) Dans le cas où θ_0 est un petit angle, le mouvement de la bille est pratiquement rectiligne au fond du bol. Quelle est l'expression de la valeur F de la force de rappel qu'elle subit? En déduire, en fonction de R et g, l'expression de la période des petites oscillations de la bille.

*** Exercice 29**

Un cube en bois de côté $a = 0{,}10$ m flotte sur l'eau, l'une de ses faces étant horizontale. La masse volumique du bois vaut $\rho = 750$ kg.m^{-3}.

a) Quelle est la hauteur de cube émergeant de l'eau?

b) Le cube est enfoncé de sorte que sa face supérieure affleure au niveau du liquide, puis lâché sans vitesse initiale. Calculer l'amplitude et la fréquence des oscillations verticales du cube.

c) Même question si le cube flotte sur de l'alcool, de masse volumique $\rho' = 790$ kg.m^{-3}.

Rappel : la valeur de la poussée d'Archimède est égale à celle du poids du fluide déplacé.

EXERCICES DESTINÉS A TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 30 A.1.a.

Définir les termes suivants : période, fréquence, pulsation, amplitude, élongation.

Exercice 31 A.1.a.

Quelles sont les unités de fréquence et de pulsation?

Exercice 32 A.1.b.

Pour les expériences réalisées avec des ressorts en travaux pratiques, quels étaient les ordres de grandeur des fréquences, des pulsations, et des énergies des oscillateurs?

Exercice 33 A.1.c.

Dans quel cas l'énergie mécanique d'un oscillateur se conserve-t-elle?

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 34 — A.1.c.

En attachant des masses marquées à l'extrémité inférieure d'un ressort, à prend les longueurs suivantes :

Masse (g)	0	50	100	150	200	250
Longueur (cm)	20,0	23,1	26,3	29,4	32,5	35,6

Masse (g)	300	350	400	450	500
Longueur (cm)	38,8	41,7	44,3	46,4	48,1

Ce ressort peut-il être modélisé comme étant à réponse linéaire?

Exercice 35 — A.2.a.

Attacher un fil de caoutchouc entre deux chaises afin qu'il soit horizontal. Dans la région centrale, attacher différents objets (par exemple des cuillers à soupe...) et mesurez la période des oscillations verticales pour 1, 2, 3... objets identiques accrochés. Tracer la courbe d'étalonnage de votre dispositif. Suspendre ensuite votre trousse et déterminer sa masse (en prenant pour unité de masse celle d'une cuiller). Si possible, vérifier vos résultats avec une balance de cuisine.

Exercice 36 — A.2.b.

Établir l'équation différentielle qui régit le mouvement d'un pendule élastique vertical.

*** Exercice 37** — A.2.b.

Exprimer l'énergie mécanique d'un oscillateur horizontal (m, k) en fonction

— de l'amplitude X_m,

— de la vitesse maximale V_m,

— de la fréquence propre N_0 et de l'amplitude X_m.

Exercice 38 — B.1.

Chercher des documents relatifs aux nuisances supportées par le corps humain aux très basses fréquences (genre mal de mer...) ou à fréquences plus élevées (tracteurs, perforeuses...). L'enquête peut être collective.

Exercice 39 — B.2.

Faire un résumé (100 mots = 10 %) du paragraphe I.1. du chapitre. Le résumé ne doit pas être rédigé en « style télégraphique ».

Exercice 40 — B.3.

Écrire l'équation différentielle du premier ordre qui traduit la conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur non amorti. Dériver cette relation par rapport au temps. Quelle relation est ainsi retrouvée?

Exercice 41 — B.3.

Écrire, en utilisant les variables x et $v_x = \dot{x}$, l'équation différentielle non linéaire du premier ordre qui traduit la conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur horizontal. Chercher directement à quelle(s) condition(s) cette équation admet une solution du type

$$x = X_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

Exercice 42 — B.3.

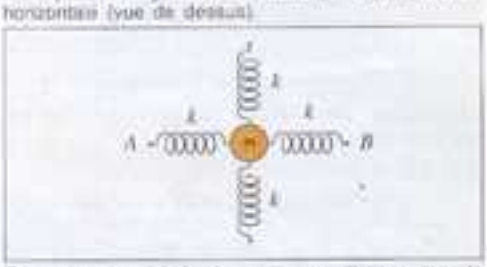
Écrire l'équation différentielle du second ordre qui régit le mouvement d'un oscillateur amorti (m, k, λ).
Chercher à quelle condition une solution du type $x = A \cdot e^{-\lambda/2m} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$, où A et φ sont déterminés par les conditions initiales, convient. Exprimer la constante C en fonction de k et m, et la pulsation ω en fonction de k, m et λ.

Exercice 43 — B.4.

Représenter graphiquement les courbes qui montrent l'évolution de l'énergie cinétique d'un mobile :
— en fonction du temps;
— en fonction de l'abscisse;
— en fonction du carré de la vitesse.

*** Exercice 44** — C.1.b.

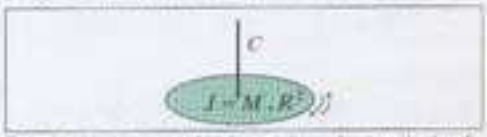
La figure ci-dessous représente un petit de masse m en équilibre sous l'action de quatre ressorts identiques, orthogonaux, sur une table à coussin d'air horizontale (vue de dessus).



Déterminer la période des petites oscillations dans la direction AB.

Exercice 45 — C.2.b.

La figure ci-dessous représente un disque susceptible d'effectuer des oscillations de rotation horizontales autour d'un fil vertical de constante de torsion C.



Pour ces mouvements de rotation, la constante de torsion C joue le rôle de la raideur k d'un ressort, et la masse doit être remplacée par le moment d'inertie J du disque par rapport à son axe de rotation.
Exprimer la période des oscillations en fonction de M, R et C.

Pour en savoir plus

OSCILLATIONS HORIZONTALES D'UN MOBILE ATTACHÉ A DEUX RESSORTS

1) *Dispositif*

Il est possible de faire osciller, sur une table à coussin d'air horizontale, un mobile autoporté attaché à deux ressorts de raideurs éventuellement différentes k_1 et k_2 (fig. 17), et de longueurs à vide sont ℓ_1 et ℓ_2.

2) *Analyse des actions*

• Le poids de l'objet et la réaction de la table, qui sont verticaux et opposés, annulent leurs effets (ils ne sont pas représentés sur la figure).

• Pour accrocher les ressorts, il faut les allonger de $\Delta\ell_1 = O_1N_0$ et $\Delta\ell_2 = O_2P_0$. L'objet prend une position d'équilibre sous l'action des deux tractions opposées $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ exercées par les ressorts, le centre d'inertie se trouvant au niveau du point I sur l'axe $\vec{Ax}$.

$\vec{T}_1 = -k_1.\overrightarrow{O_1N_0}$; $\vec{T}_2 = -k_2.\overrightarrow{O_2P_0}$ et $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$, d'où, en faisant intervenir la position du centre d'inertie :

$$-k_1.(\overrightarrow{O_1I} + \overrightarrow{IN_0}) - k_2.(\overrightarrow{O_2I} + \overrightarrow{IP_0}) = \vec{0}. \quad (1)$$

• Si le mobile est lâché après avoir été écarté de sa position d'équilibre, il effectue des oscillations longitudinales. Pour une position quelconque où le centre d'inertie est au niveau de M sur $\vec{Ax}$, les forces de traction horizontales des ressorts s'expriment par : $\vec{F}_1 = -k_1.\overrightarrow{O_1N}$ et $\vec{F}_2 = -k_2.\overrightarrow{O_2P}$.

3) *Force équivalente associée aux actions*

L'ensemble des forces agissant sur l'objet équivaut donc à :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -k_1.\overrightarrow{O_1N} - k_2.\overrightarrow{O_2P}$$
$$= -k_1.(\overrightarrow{O_1I} + \overrightarrow{IN}) - k_2.(\overrightarrow{O_2I} + \overrightarrow{IP}),$$

Par soustraction de la relation d'équilibre (1) il vient :

$$\vec{F} = = -k_1.(\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IN_0}) - k_2.(\overrightarrow{IP} - \overrightarrow{IP_0})$$
$$= -k_1.(\overrightarrow{N_0N}) - k_2.(\overrightarrow{P_0P}).$$

$\overrightarrow{N_0N}$ et $\overrightarrow{P_0P}$ représentent les vecteurs déplacements des extrémités N et P de l'objet, qui sont aussi égaux au déplacement $\overrightarrow{IM}$ du centre d'inertie du solide.

Finalement : $\vec{F} = -(k_1 + k_2).\overrightarrow{IM}$.

4) *Conclusion*

Un objet autoporté sur une table horizontale, attaché à deux ressorts de même direction, de raideurs k_1 et k_2, subit, lorsqu'il est écarté de sa position d'équilibre I dans la direction des ressorts, un ensemble de forces équivalentes à une force de rappel du type $\vec{F} = -k.\overrightarrow{IM}$.

La constante de rappel k est égale à la somme des raideurs des deux ressorts.

TRAVAIL D'UNE FORCE ÉLASTIQUE

1) *Analyse*

Pour maintenir allongé un ressort dont une extrémité A est fixe, il convient d'exercer à son extrémité une force $\vec{F}$ opposée à la force élastique $\vec{F}_{élas}$ (fig. 18) qui est une *force de rappel*.

Lorsque le ressort est étiré progressivement, la force élastique augmente en valeur absolue. Il en va de même si le ressort est comprimé.

Dans les deux cas, si le ressort est à réponse linéaire, $\vec{F}_{élas} = -k.\overrightarrow{OM}$, ou, en passant aux valeurs algébriques, $F_{x\,élas} = -k.x$.

2) *Calcul du travail*

Le *travail élémentaire* dW est défini par :

$$dW = F_{x\,élas}.dx, \quad \text{soit :} \quad dW = -k.x.dx.$$

Lorsque l'extrémité M du ressort passe d'un point M_1 (abscisse x_1) à un point M_2 (abscisse x_2) le travail total s'obtient en faisant la somme de tous les travaux élémentaires :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} -k.x.dx = \frac{1}{2}k.x_1^2 - \frac{1}{2}k.x_2^2.$$

3) *Interprétation*

L'expression précédente montre que le travail peut être considéré comme la *perte algébrique* (c'est-à-dire l'opposée de la variation) de la fonction $\frac{1}{2}k.x^2$, à laquelle il serait possible d'ajouter une constante. Il s'agit d'une fonction de la *variable de position* x. Cette fonction est appelée ***énergie potentielle*** associée à la force élastique.

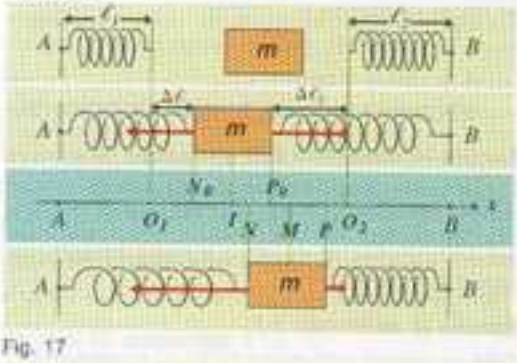


Fig. 17

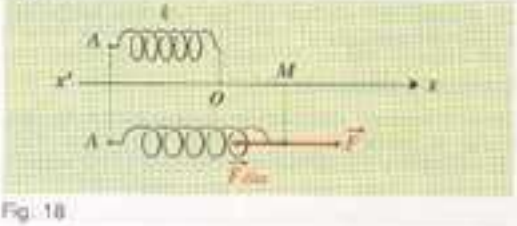
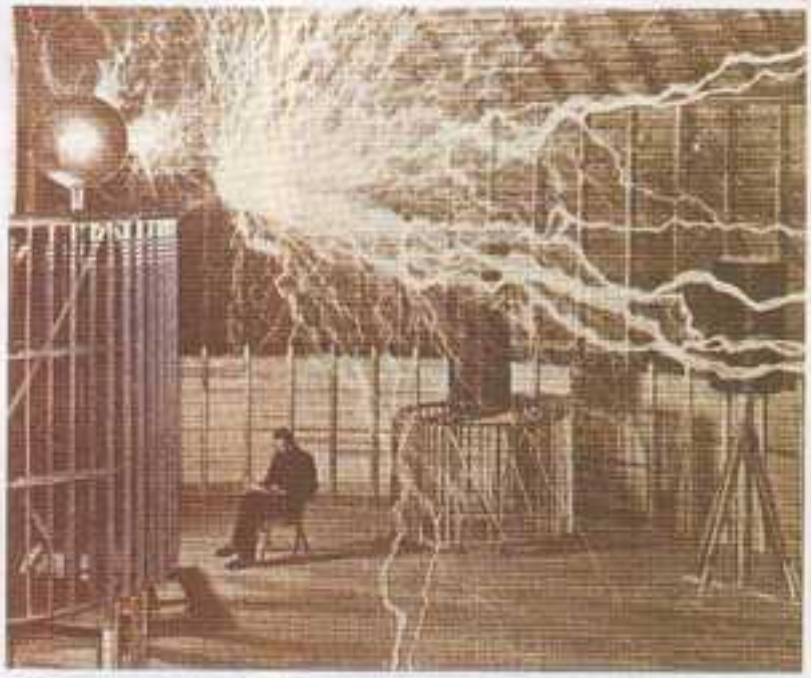


Fig. 18

6 Champ magnétique

1 Phénomènes magnétiques.
2 Topographie d'un champ magnétique.
3 Le solénoïde.
4 Action d'un champ magnétique sur une particule chargée
5 Applications.



Tesla lisant sous les étincelles fournies par ses transformateurs.
Il a envoyé cette photographie au physicien William Crookes avec les mots suivants : « A mon illustre ami sir William Crookes, à qui je pense toujours ainsi qu'à ses aimables lettres auxquelles je ne réponds jamais ! »
(Nikola Tesla, 17 juin 1901.)

Une boussole prend une direction privilégiée dans l'espace : l'une de ses extrémités pointe toujours sensiblement vers le nord. Un aimant permet de ramasser des aiguilles en acier en les attirant à distance... Ces interactions fascinaient déjà les Anciens.
L'étude de ce chapitre devrait rendre ces phénomènes moins mystérieux.

1 PHÉNOMÈNES MAGNÉTIQUES

1. Quelques propriétés des aimants

L'aiguille d'une boussole est habituellement constituée d'une fine tige en acier qui a été frottée contre un aimant. Elle possède une propriété étonnante : placée n'importe où sur la Terre, elle reprend toujours, au même endroit, la même direction.

L'une de ses extrémités pointe sensiblement vers le nord. On l'appelle « extrémité nord ». L'autre est l'« extrémité sud ». Ces extrémités sont encore appelées parfois par tradition « pôle nord » et « pôle sud ».

Un aimant droit, horizontal possède la même propriété d'orientation spontanée (fig. 1), puisqu'une boussole n'est autre qu'un petit aimant. En revanche, une tige en laiton ou en matière plastique ne s'oriente pas naturellement dans l'espace.

Les objets qui ont la propriété de s'orienter de façon privilégiée au voisinage de la Terre sont dits **magnétiques**. Il s'agit là d'une propriété nouvelle, sans relation ni avec les forces de gravitation, ni avec les forces électriques.

La figure 2 donne une représentation schématique d'une aiguille magnétique. Une boussole est l'association d'une aiguille magnétique à une graduation circulaire portant les points cardinaux.



Fig. 1. ***Un aimant droit, s'oriente dans la direction sud-nord.***

2. Champ magnétique

Il règne un champ magnétique dans une région de l'espace, lorsqu'une aiguille aimantée y subit des actions.

a) Sources de champs

• *Champ géomagnétique* : la Terre est la source d'un champ magnétique, appelé **champ géomagnétique**. Ce champ est détecté par les boussoles. Une aiguille aimantée, suspendue par un axe passant par son centre d'inertie, ne s'oriente pas horizontalement dans le champ géomagnétique (fig. 3). Le plan vertical qui contient l'aiguille orientée est appelé plan **méridien magnétique** du lieu. (Voir « Pour en savoir plus ».)

• *Aimants sources de champ magnétique* : un aimant approché latéralement d'une aiguille aimantée la fait dévier (fig. 4).

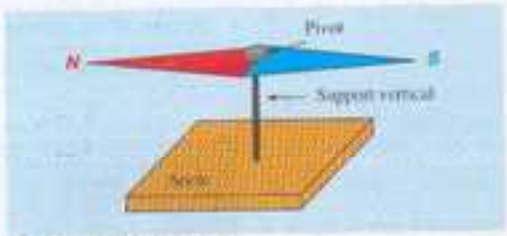


Fig. 2. ***Aiguille aimantée.***

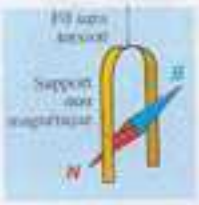


Fig. 3. ***Détection du champ magnétique terrestre.***

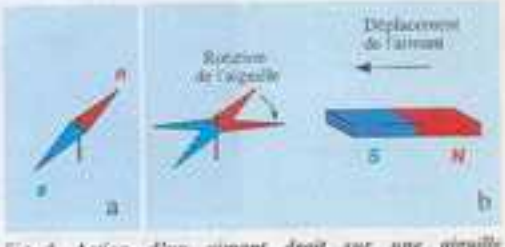


Fig. 4. ***Action d'un aimant droit sur une aiguille aimantée.***
a) Aiguille orientée dans le champ terrestre.
b) Rotation de l'aiguille sous l'influence de l'aimant.

5 APPLICATIONS

1. Spectrographe de masse

La constitution d'un spectrographe de masse est indiquée à la figure 34.
Des ions positifs dont on veut mesurer la masse, sont émis pratiquement sans vitesse initiale, par une source S. Ils acquièrent entre des plaques accélératrices une vitesse v telle que :

$$\frac{1}{2}\, m \,.\, v^2 = q \,.\, U \quad \text{soit} \quad v = \sqrt{\frac{2q \,.\, U}{m}}$$

Ils pénètrent dans un champ magnétique uniforme. Leur trajectoire devient un cercle de rayon R lié à leur quantité de mouvement par :

$$p = m \,.\, v = q \,.\, B \,.\, R.$$

Leur masse, s'exprime par :

$$m = \frac{(m \,.\, v)^2}{m \,.\, v^2} = \frac{(q \,.\, B \,.\, R)^2}{2q \,.\, U},$$

d'où :

$$m = \frac{1}{2}\,\frac{q \,.\, B^2 \,.\, R^2}{U}.$$

Tout ce qui figure au second membre est connu ou mesurable (le rayon de courbure R se déduit de la position de l'impact sur la plaque photographique). Les masses peuvent ainsi être déterminées avec précision.
C'est avec des dispositifs de ce genre que les **isotopes** ont été mis en évidence, en constatant l'existence d'impacts voisins sur les plaques photographiques.
Un petite fente fine de sortie peut remplacer la plaque photographique, à la distance $2R$ de la fente d'entrée. D'après la relation précédente,

$$R^2 = \frac{2m \,.\, U}{q \,.\, B^2}, \text{ d'où : } R = \sqrt{\frac{2m \,.\, U}{q \,.\, B^2}},$$

ou

$$2R = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2m \,.\, U}{q}}.$$

Tous les ions de même rapport $\frac{q}{m}$, appelé « charge massique », sortent par la fente. Ils sont ainsi séparés des autres isotopes et peuvent être recueillis dans un collecteur.

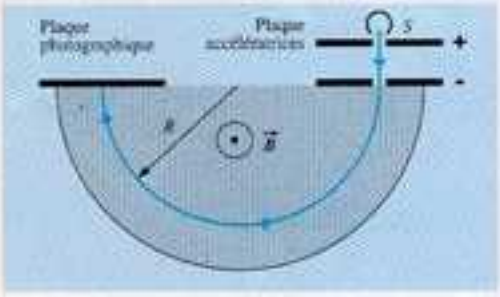


Fig. 34

2. Cyclotron

Les cyclotrons sont des **accélérateurs cycliques de particules chargées.** Leur constitution est indiquée à la figure 35.

La figure est une vue de dessus. Deux boîtes conductrices cylindriques, appelées « dees » (leur forme de lettre D rappelle celle d'une boîte à camembert coupée en deux) baignent dans un champ magnétique uniforme ($B \approx 1$ T). Une source d'ions, positifs dans le cas de figure, est placée dans la région centrale O. L'ensemble est maintenu dans un vide poussé.

Une tension alternative ($U_m \approx 10$ kV) est appliquée aux dees. L'effet de cette tension est d'accélérer rectilignement, pendant une très courte durée, les ions quand ils se trouvent entre les deux cavités. Ils entrent ensuite dans un dee où règne le champ magnétique qui incurve leur trajectoire selon un demi-cercle. Quand les ions sortent d'un dee, l'autre est devenu attracteur.

A chaque demi-tour, ils acquièrent un supplément d'énergie électrique $q \,.\, U_m$.

Les demi-cercles successifs sont décrits à la vitesse angulaire $\omega = \frac{q}{m} \,.\, B$. Comme ω est indépendante de l'énergie des ions, elle demeure constante au cours de l'accélération.

Comme la tension change de signe à chaque demi-tour, sa période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est égale à la durée d'un tour. Par suite, la vitesse angulaire ω des ions est égale à la pulsation de la tension alternative appliquée aux dees.

Quand le rayon de courbure de la trajectoire est devenu pratiquement égal au rayon R des dees, les particules atteignent une région où le champ magnétique est rendu localement nul. Elles ne sont alors plus incurvées et sortent tangentiellement de la cavité avec une quantité de mouvement de valeur :

$$p = q \,.\, B \,.\, R.$$

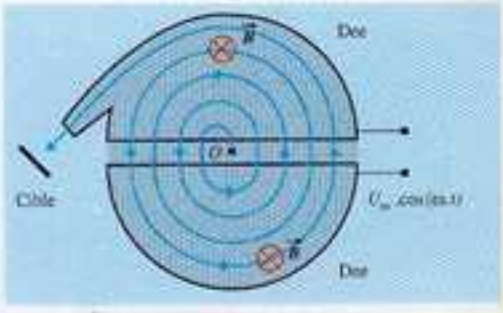


Fig. 35. *Éléments d'un cyclotron.*

Les particules sont envoyées sur des cibles. Leur énergie cinétique est maximale à la sortie et vaut :

$$E_c = \frac{1}{2} m . v^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{q^2 . B^2 . R^2}{m}.$$

Cette énergie se trouve limitée par les caractéristiques de l'appareil (B et R).

Remarque :
Il semblerait, d'après la relation $p = q . B . R$, que la vitesse $v = \frac{p}{m} = \frac{q}{m} . B . R$ ne soit pas limitée supérieurement (en augmentant B et R). Il n'en est rien : **une particule matérielle a toujours une vitesse inférieure à la célérité de la lumière.** Cette importante question sera reprise au chapitre 15.

3. Déflexion magnétique

a) Calcul d'une petite déflexion

Pénétrant en O avec une vitesse $\vec{v}$ orthogonale au champ magnétique uniforme $\vec{B}$ (fig. 36), les particules décrivent à vitesse constante un arc de cercle OS, tant qu'elles sont sous l'influence du champ uniforme. A la sortie en S du champ, elles retrouvent en l'absence d'actions une trajectoire rectiligne ST' qui semble provenir d'un point I situé dans la région centrale de la zone d'influence du champ. Dans ce cas de figure, le champ magnétique pointe vers l'arrière et les particules sont négatives.
La longueur $\ell = OS$ de l'arc de cercle de rayon R est donnée en fonction de la déviation α par $\ell = R . \alpha$, à condition d'exprimer α en radian. La valeur de la quantité de mouvement des particules reste constante :

$$m . v_0 = |q| . B . R.$$

Sur l'écran, placé à la distance L de I, l'impact du pinceau passe de T (en l'absence de champ) à T'. TT' est la distance D de déflexion, que l'on abrège souvent en « déflexion ». Cette distance est telle que $\tan \alpha = \frac{D}{L}$.

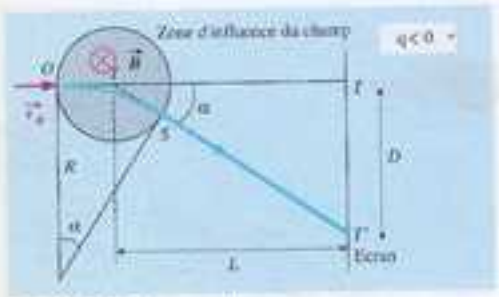


Fig. 36. ***Déflexion magnétique.***

Si la déviation est petite, $\tan \alpha \approx \alpha \approx \frac{D}{L}$ alors, $\alpha \approx \frac{D}{L} = \frac{\ell}{R} = \frac{\ell . |q| . B}{m . v_0}$, d'où :

$$D = L . \ell . \frac{|q|}{m} . \frac{B}{v_0}.$$

Applications

- Connaissant L, ℓ, B, v_0 et mesurant D, cela donne une méthode de détermination du rapport $\frac{|q|}{m}$ des particules (d'où leur masse si leur charge est connue).

- Si ce sont des particules élémentaires ($|q| \approx 1{,}6 \times 10^{-19}$ C) qui sont injectées, leur déviation est inversement proportionnelle à leur quantité de mouvement $m . v_0$.
Toutes les particules de même signe et de même quantité de mouvement arrivent au même point sur l'écran. Une fente, ménagée au point d'impact, ne laisse passer qu'elles : l'appareil est un sélecteur de quantité de mouvement.

b) Déflexions magnétiques dans un téléviseur

Dès sa sortie du canon à électrons, le pinceau électronique pénètre dans deux champs magnétiques orthogonaux, l'un pour la déflexion magnétique horizontale, l'autre pour la déflexion verticale. Ces deux champs sont créés par des bobines situées à l'arrière du tube de l'appareil récepteur (fig. 37).
Les bobines sont soumises à des tensions « en dents de scie » afin que le spot revienne brusquement à gauche (en regardant l'écran) et un peu plus bas sur l'écran avant de balayer de nouveau vers la droite.

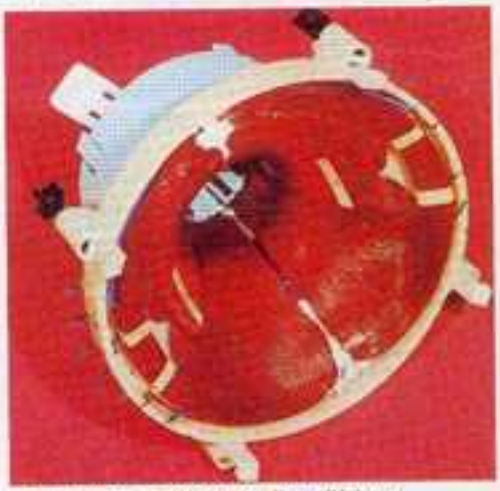


Fig. 37. ***Bobines déflectrices d'un téléviseur.***

b) Interprétation

La figure géométrique matérialisée au voisinage de l'aimant par les lignes de limaille, et suivie plus loin par les aiguilles aimantées est appelée **spectre magnétique** de l'aimant.

Dans le cas présent, il s'agit d'un spectre dans l'espace à trois dimensions. En faisant un léger effort d'abstraction, il est possible d'imaginer ces lignes, même en l'absence de limaille qui les matérialise. Ces courbes sont appelées **lignes de champ magnétique** (fig. 11).

Le vecteur-champ magnétique est tangent à ces lignes de champ.

Par convention **les lignes de champ sont orientées comme le vecteur-champ $\vec{B}$.**

2. Spectres obtenus à partir d'aimants

a) Spectre d'un aimant droit

• *Organisation spatiale des lignes de champ*

La figure 12 *a* schématise quelques lignes de champ magnétique d'un aimant droit. Ces lignes sont les prolongements des files de grains de limaille envisagées à la figure 10.

Elles sortent par l'extrémité nord et entrent par l'extrémité sud de l'aimant.

• *Visualisation expérimentale*

— Des aiguilles aimantées placées à proximité, confirment la direction et le sens du champ.

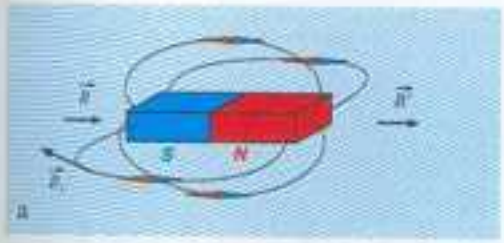




Fig. 12. ***Spectre magnétique d'un aimant droit.***
a) Structure spatiale.
b) Exploration dans un plan.

— En saupoudrant de limaille de fer fine, une feuille de papier posée sur l'aimant, il se forme un spectre. Tout près de l'aimant, les grains de limaille se redressent et prennent la direction des lignes de champ spatiales. Plus loin les grains restent horizontaux, car le champ est plus faible et la pesanteur l'emporte.

L'examen de la figure 12 *b* montre que les lignes de champ se resserrent près de l'aimant, là où les effets magnétiques deviennent intenses. Par suite, **un resserrement des lignes de champ indique qualitativement une augmentation de la valeur du champ.**

b) Spectre d'un aimant en U

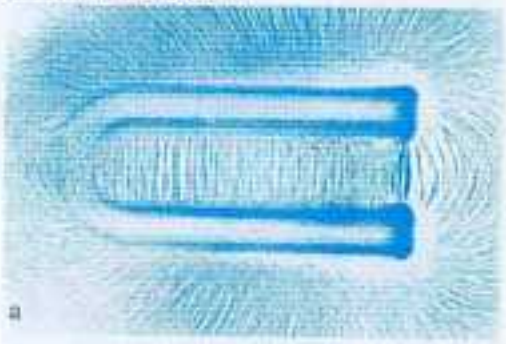
L'aimant droit précédent est remplacé par un aimant en *U*. Le spectre obtenu est indiqué à la figure 13 *a*. Plusieurs petites aiguilles magnétiques, placées à diverses hauteurs à l'intérieur des branches, restent parallèles entre elles, et perpendiculaires aux branches de l'aimant. D'autre part, une exploration du champ par une sonde de teslamètre montre que la valeur du champ reste pratiquement constante. Par suite, le champ magnétique est uniforme entre les deux branches d'un aimant en *U* (fig. 13 *b*).

Plus généralement, des **lignes de champ parallèles indiquent que le champ est uniforme.**

Comme pour l'aimant droit,

les lignes de champ magnétique sortent des régions nord et pénètrent dans les régions sud.

Ce résultat est général.



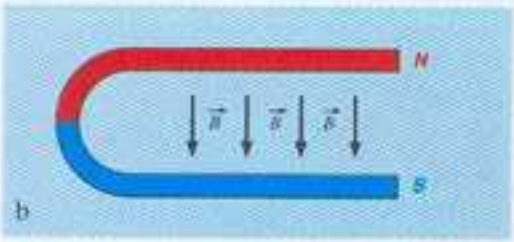


Fig. 13. ***Spectre magnétique d'un aimant en U.***
a) Photographie du spectre.
b) Champ uniforme entre les branches.

3. Spectres obtenus à partir de courants

a) Spectre d'un courant rectiligne

Un fil conducteur rectiligne vertical traverse une plaque horizontale sur laquelle est disposée une feuille de papier saupoudrée de limaille de fer. Lorsqu'un courant passe dans le fil, la limaille matérialise des **lignes de champ circulaires** (fig. 14).

Des petites aiguilles magnétiques disposées autour du fil indiquent le sens du champ.

En inversant le sens du courant, les aiguilles aimantées se retournent bout par bout.

Par suite, **le sens des lignes de champ est lié au sens du courant dans le fil.**

La plaque horizontale ne donne qu'un aspect plan du phénomène. Plusieurs plaques analogues à la précédente, superposées, montreraient la structure spatiale cylindrique du champ autour du fil.

Pour trouver le sens des lignes de champ magnétique en fonction du sens du courant, la figure 15 présente une règle de la main droite, qui met en relation de façon simple le sens des lignes de champ avec celui du courant. D'autres règles équivalentes existent.

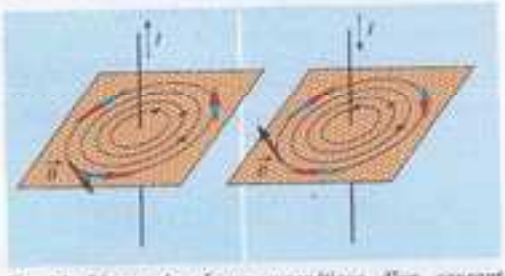


Fig. 14. ***Lignes de champ magnétique d'un courant rectiligne.*** *Elles sont circulaires, centrées sur le fil. Leur sens dépend de celui du courant.*

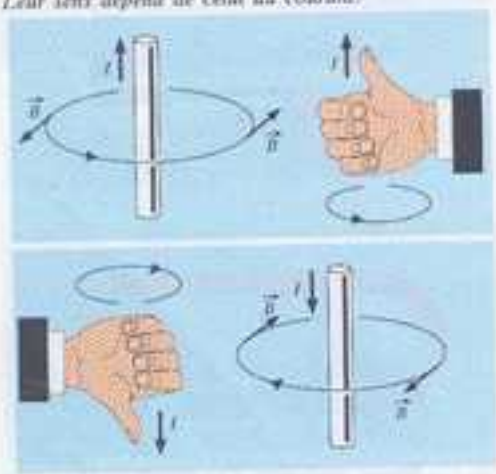


Fig. 15. ***Une règle pratique de la main droite pour trouver le sens des lignes de champ en relation avec le sens du courant dans le fil.***

b) Spectre d'un solénoïde

Un solénoïde est constitué d'un fil conducteur enroulé en spirale. Il peut être assimilé à une succession de spires circulaires parallèles.

A l'intérieur du solénoïde, les lignes de champ sont sensiblement parallèles. Par suite, le champ magnétique est pratiquement **uniforme** à l'intérieur du solénoïde (fig. 16).

A l'extérieur, les lignes de champ s'écartent en s'éloignant des extrémités.

Ainsi, le solénoïde donne accès aux lignes de champ à l'extérieur et à l'intérieur de la source du champ. L'expérience montre que les **lignes de champ magnétique constituent des courbes fermées et qui ne se croisent pas.** Ce résultat est général.

Là encore, une règle de la main droite met en relation de façon simple le sens des lignes de champ avec celui du courant (fig. 17).

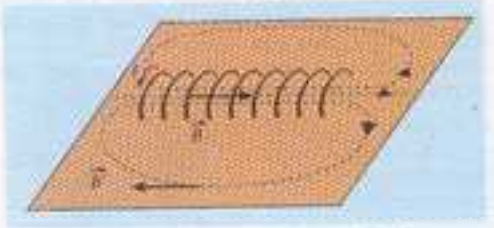


Fig. 16. ***Spectre magnétique d'un solénoïde court.*** *Seules, les demi-spires supérieures du solénoïde sont ici représentées.*

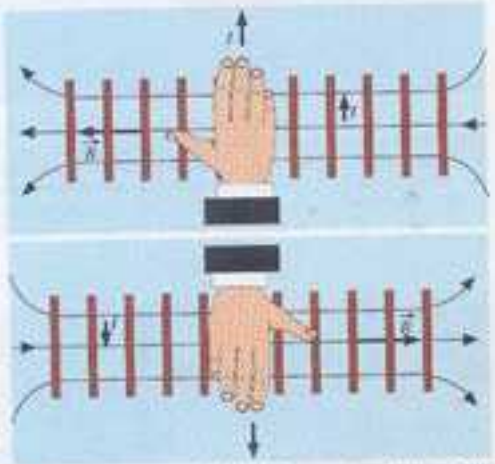


Fig. 17. ***Une autre règle de la main droite,*** *pour déterminer le sens des lignes de champ et celui de $\vec{B}$ à partir du sens du courant.*
Cette règle n'est pas tout à fait analogue à celle de la figure 15. Dans la première, ce sont les doigts qui suivent les lignes de champ, le pouce indiquant le sens du courant. Dans le cas du solénoïde, c'est l'inverse.

c) Spectre d'une bobine plate

Le spectre magnétique d'une bobine plate circulaire est donné à la figure 18.

d) Spectre des bobines de Helmholtz

Deux bobines plates, parallèles, circulaires, de rayon R, distantes de ce rayon R, parcourues dans le même sens par le même courant, constituent un dispositif appelé bobines de Helmholtz (fig. 19).

Les lignes de champ sont quasiment parallèles entre les deux bobines. Il en résulte que **le champ magnétique est uniforme entre les deux bobines.** Ce dispositif simple est souvent utilisé, car il donne un champ uniforme dans une région accessible et relativement étendue.

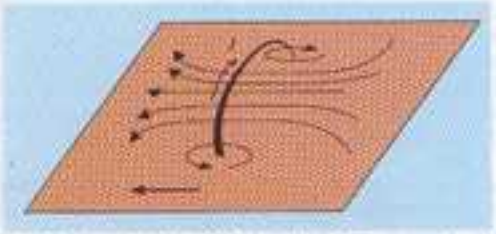


Fig. 18. ***Spectre d'une bobine plate.*** *Le pouce de la main droite, dont les doigts indiquent le sens du courant, donne encore le sens du vecteur-champ magnétique et des lignes de champ.*

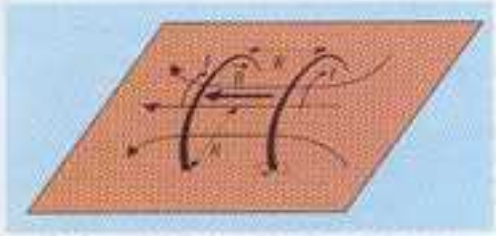


Fig. 19. ***Spectre de bobines de Helmholtz.*** *La distance entre les deux bobines est égale au rayon des bobines. A l'intérieur, le champ est uniforme.*



Fig. 20. *L'une des deux bobines d'Helmoltz qui crée le champ magnétique de la chambre à bulles du C.E.R.N.*

3 LE SOLÉNOÏDE

1. Analogie entre un aimant droit et un solénoïde court

a) Comparaison des spectres

Les spectres des aimants droits et des solénoïdes courts ont même allure à l'extérieur (fig. 21). Par analogie, la face du solénoïde d'où sortent les lignes de champ, est appelée face nord, et celle où elles rentrent est la face sud.

b) Interprétation de l'origine du magnétisme des aimants

L'intérieur d'un aimant peut être considéré comme constitué d'une foule de minuscules boucles microscopiques, parallèles entre elles, où des courants circulent dans le même sens que dans le solénoïde (fig. 22).

Cette interprétation a été proposée par le physicien français Ampère. Les courants qu'il a imaginés à l'intérieur des aimants portent encore le nom de « courants ampériens ».

Ainsi, dans les aimants comme dans les courants, le champ magnétique résulte du mouvement de charges électriques (électrons). Finalement, tous les phénomènes magnétiques sont dus à des actions à distance de **charges électriques en mouvement** sur d'autres **charges électriques en mouvement.**

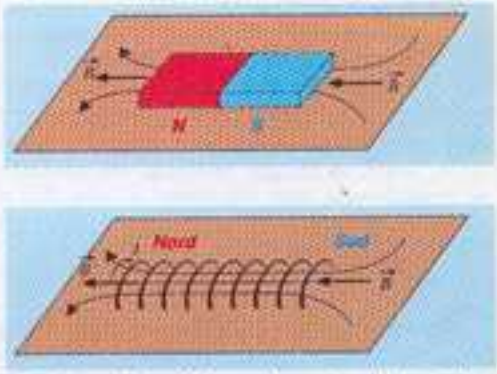


Fig. 21. ***Analogies de forme des spectres d'aimant droit et de solénoïde court.***

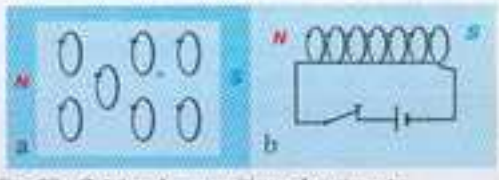


Fig. 22. ***Origine du magnétisme des aimants.***
a) Boucles de courants ampériens dans un aimant.
b) Courant dans un solénoïde.

c) Confirmation : expérience de l'aimant brisé

En cassant en deux, puis en quatre... une longue aiguille d'acier aimantée, il se forme deux, quatre... aimants (fig. 23).

Il est donc impossible d'isoler une région magnétique nord ou une région magnétique sud.

La raison en est que toute spire parcourue par un courant est à la fois face nord (vue d'un côté) et face sud (vue de l'autre côté).

2. Champ magnétique dans un solénoïde

a) Formule du solénoïde

L'étude des spectres magnétiques a montré que le champ magnétique est **uniforme** à l'intérieur du solénoïde.

Des considérations théoriques permettent d'établir que la valeur du champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde infiniment long, placé dans le vide, est donnée par la relation :

$$B = \mu_0 . n_1 . I$$

B en tesla (T);
μ_0 : $4\pi \times 10^{-7}$ SI;
n_1 : nombre de spires par mètre;
I en ampère (A).

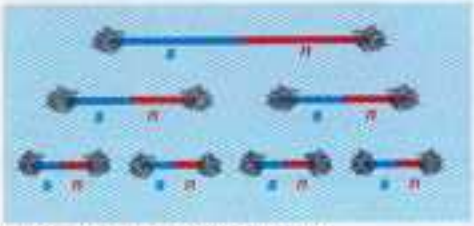


Fig. 23. ***Expérience de l'aimant brisé.***

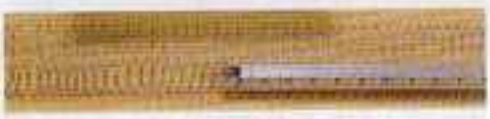


Fig. 24. ***Utilisation d'un long ressort métallique comme solénoïde. Le nombre de spires par mètre est réglable.***

La constante μ_0 est appelée **perméabilité du vide.** Il s'agit d'une constante universelle. Dans le Système International, elle est égale à :

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}.$$

La tendance actuelle pour obtenir des champs intenses, est d'augmenter I au maximum possible, par l'utilisation de bobines supraconductrices, dans lesquels on peut faire passer des courants de plusieurs milliers d'ampères, ce qui conduit à des champs magnétiques de plusieurs teslas.

b) Vérification expérimentale

En pratique, il est évidemment impossible de disposer de solénoïdes infiniment longs et de travailler dans le vide. Les expériences suivantes montrent que la formule précédente est applicable avec une bonne approximation pour la région centrale d'un solénoïde assez long, placé dans l'air. Un solénoïde peut être considéré comme assez long dès que sa longueur dépasse environ 5 fois le diamètre d'une spire.

- Un teslamètre, placé dans la région centrale d'un solénoïde assez long, montre que la valeur du champ magnétique est proportionnelle à l'intensité du courant.

- L'influence du nombre de spires par mètre peut être vérifiée, à intensité constante, en introduisant le teslamètre dans un long ressort métallique compressible ou extensible (fig. 24).

B est bien proportionnel à n_1.

Remarque :
Une aiguille magnétique, placée à l'intérieur d'un solénoïde dont l'axe est perpendiculaire au plan du méridien magnétique du lieu, s'oriente sous l'influence du champ géomagnétique et du champ créé par le solénoïde (fig. 25). Elle prend la direction de la *somme vectorielle* $\vec{B}$, de la composante géomagnétique horizontale $\vec{B}_0$ et du vecteur-champ créé par le solénoïde, $\vec{B}_s$.

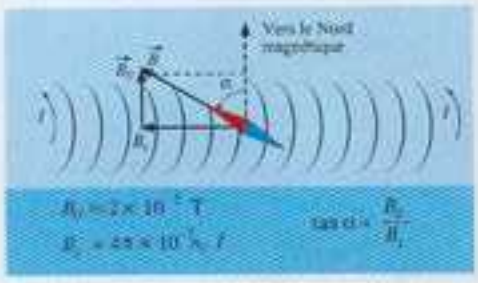


Fig. 25. ***Orientation d'une aiguille aimantée dans un solénoïde sous l'influence conjuguée du champ géomagnétique $\vec{B}_0$ et du champ $\vec{B}_s$ créé par le solénoïde.***

c) Généralisation

D'autres formules donnent les valeurs des champs magnétiques créés par les dispositifs de forme géométrique simple (fil rectiligne, bobines plates ou de Helmholtz...). Elles ne sont pas au programme, et seraient données si besoin est. Dans tous les cas :

la valeur du vecteur-champ magnétique créé en un point de l'espace par un circuit électrique quelconque, est proportionnelle à l'intensité du courant dans le circuit.

Le sens du vecteur-champ change de sens avec celui du courant.



Fig. 26. *Ampoule à pinceau circulaire d'électrons.*



Fig. 27. *Trajectoire circulaire des électrons lancés orthogonalement à $\vec{B}$.*

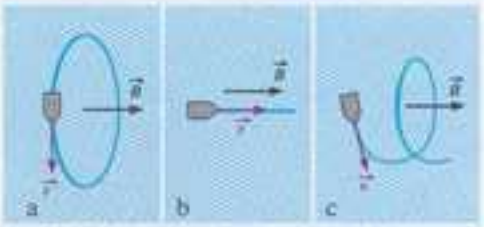


Fig. 28. *Trajectoire des électrons lancés à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$.*

a) $\vec{v} \perp \vec{B}$: trajectoire circulaire.

b) $\vec{v} \nparallel \vec{B}$: trajectoire rectiligne.

c) $\vec{v}$ quelconque : trajectoire hélicoïdale.

4 ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UNE PARTICULE CHARGÉE

1. Étude expérimentale

a) L'ampoule à pinceau circulaire d'électrons

• *Dispositif*

Une grande ampoule, dans laquelle est placé un canon à électrons, renferme un gaz sous faible pression. L'ampoule est placée entre deux bobines de Helmholtz (fig. 26).

— La direction du vecteur-vitesse des électrons à la sortie du « canon » peut être modifiée en tournant l'ampoule horizontalement autour de son support. Les électrons peuvent ainsi être émis dans toutes les directions d'un plan vertical.

— La valeur de la vitesse de sortie des électrons est réglable en jouant sur la tension accélératrice dans le canon.

— La valeur du champ magnétique uniforme entre les bobines est modifiable par réglage de l'intensité du courant dans les bobines de Helmholtz, sources du champ magnétique.

La trajectoire des électrons dans l'ampoule peut être observée par suite des chocs de ces électrons sur les molécules du gaz raréfié intérieur. Les molécules choquées absorbent de l'énergie qu'elles réémettent sous forme lumineuse.

• *Observations*

— Si les électrons sont lancés dans l'ampoule orthogonalement au champ magnétique, leur trajectoire est circulaire (fig. 27 et 28 *a*).

Le fait que la luminosité soit sensiblement la même en tous points de la trajectoire laisse présager que le mouvement circulaire des électrons est uniforme.

— Si les électrons sont lancés dans l'ampoule parallèlement au champ magnétique, leur trajectoire est rectiligne (fig. 28 *b*).

— Si les électrons sont lancés avec une vitesse initiale quelconque, la trajectoire est une hélice (fig. 28 *c*).

• *Modification du rayon de la trajectoire*

Dans le cas où la trajectoire est circulaire, c'est-à-dire quand le vecteur-vitesse initial des électrons est orthogonal au champ magnétique :

— si la vitesse initiale des électrons est augmentée, le rayon du cercle croît;

— si le champ magnétique est augmenté, le rayon du cercle diminue.

c) Généralisation

D'autres formules donnent les valeurs des champs magnétiques créés par les dispositifs de forme géométrique simple (fil rectiligne, bobines plates ou de Helmholtz...). Elles ne sont pas au programme, et seraient données si besoin est. Dans tous les cas :

la valeur du vecteur-champ magnétique créé en un point de l'espace par un circuit électrique quelconque, est proportionnelle à l'intensité du courant dans le circuit.

Le sens du vecteur-champ change de sens avec celui du courant.



Fig. 26. *Ampoule à pinceau circulaire d'électrons.*



Fig. 27. *Trajectoire circulaire des électrons lancés orthogonalement à $\vec{B}$.*

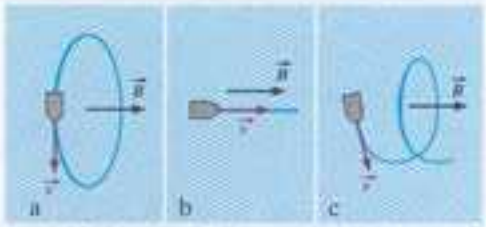


Fig. 28. *Trajectoire des électrons lancés à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$.*

a) $\vec{v} \perp \vec{B}$: trajectoire circulaire.

b) $\vec{v} \neq \vec{B}$: trajectoire rectiligne.

c) $\vec{v}$ quelconque : trajectoire hélicoïdale.

4 ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UNE PARTICULE CHARGÉE

1. Étude expérimentale

a) L'ampoule à pinceau circulaire d'électrons

• *Dispositif*

Une grande ampoule, dans laquelle est placé un canon à électrons, renferme un gaz sous faible pression. L'ampoule est placée entre deux bobines de Helmholtz (fig. 26).

— La direction du vecteur-vitesse des électrons à la sortie du « canon » peut être modifiée en tournant l'ampoule horizontalement autour de son support. Les électrons peuvent ainsi être émis dans toutes les directions d'un plan vertical.

— La valeur de la vitesse de sortie des électrons est réglable en jouant sur la tension accélératrice dans le canon.

— La valeur du champ magnétique uniforme entre les bobines est modifiable par réglage de l'intensité du courant dans les bobines de Helmholtz, sources du champ magnétique.

La trajectoire des électrons dans l'ampoule peut être observée par suite des chocs de ces électrons sur les molécules du gaz raréfié intérieur. Les molécules choquées absorbent de l'énergie qu'elles réémettent sous forme lumineuse.

• *Observations*

— Si les électrons sont lancés dans l'ampoule orthogonalement au champ magnétique, leur trajectoire est circulaire (fig. 27 et 28 *a*).

Le fait que la luminosité soit sensiblement la même en tous points de la trajectoire laisse présager que le mouvement circulaire des électrons est uniforme.

— Si les électrons sont lancés dans l'ampoule parallèlement au champ magnétique, leur trajectoire est rectiligne (fig. 28 *b*).

— Si les électrons sont lancés avec une vitesse initiale quelconque, la trajectoire est une hélice (fig. 28 *c*).

• *Modification du rayon de la trajectoire*

Dans le cas où la trajectoire est circulaire, c'est-à-dire quand le vecteur-vitesse initial des électrons est orthogonal au champ magnétique :

— si la vitesse initiale des électrons est augmentée, le rayon du cercle croît;

— si le champ magnétique est augmenté, le rayon du cercle diminue.

b) Chambres à bulles à hydrogène liquide

Le principe des chambres à bulles sera précisé chapitre 15.

En bref, des particules chargées, lancées dans de l'hydrogène liquide, provoquent par interaction avec les atomes d'hydrogène une avance à l'ébullition qui se manifeste par l'apparition d'une succession de petites bulles qui matérialisent le trajet des particules. Une photographie de ces bulles, prises au flash quand elles viennent de se former, montre les trajectoires des particules chargées.

• La figure 29 est la reproduction d'un tel cliché. Les trajectoires sont incurvées par un champ magnétique uniforme perpendiculaire au plan de la photographie, pointant ici vers l'arrière de la figure. Les particules sont injectées dans la chambre orthogonalement à ce champ.

Les deux grandes spirales du cliché attirent immédiatement l'œil. Ce sera le seul événement étudié ici.

Pour les deux particules qui suivent les spirales, la particule notée e^- est un électron, la particule notée e^+ est un anti-électron, de même masse que l'électron, mais de charge opposée. Alors que l'électron tourne dans un sens, l'anti-électron tourne dans l'autre sens : l'incurvation des trajectoires dépend du signe de la charge des particules.



Fig. 29. ***Traces laissées dans une chambre à bulles par des particules chargées.***

Les trajectoires des particules sont des spirales, et non des cercles comme dans l'ampoule électronique. Elles sont en effet ralenties par leurs interactions avec les molécules de dihydrogène liquide.

• La figure 30 est extraite d'un autre cliché, où la vitesse initiale de l'électron n'est pas orthogonale au champ magnétique. L'hélice qui devrait être la trajectoire de l'électron s'inscrit en réalité sur un cône, par suite des effets de freinage.

2. Force magnétique

a) Expression

Les expériences réalisées avec l'ampoule électronique ou dans une chambre à bulles montrent que les particules chargées lancées dans un champ magnétique peuvent prendre des trajectoires circulaires, ou hélicoïdales. La force responsable de ces incurvations est appelée **force magnétique.** Elle dépend de la charge des particules, de leur vitesse et de la valeur du champ.

L'expression de cette force a été donnée par le physicien hollandais Lorentz : une particule de charge q, évoluant à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$, subit l'action d'une force magnétique donnée par le produit vectoriel :

$$\vec{F} = q\,.\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

F en newton (N);
q en coulomb (C);
v en mètre par seconde ($m.s^{-1}$);
B en tesla (T).

b) Caractéristiques

Les caractéristiques de la force magnétique résultent de son expression par un produit vectoriel (fig. 31) :

• *la direction* de la force est orthogonale au plan défini par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{B}$.



Fig. 30. ***Trajectoire hélicoïdale d'un électron dans une chambre à bulles.***

• *son sens* est tel que le trièdre formé par les vecteurs $q.\vec{v}$, $\vec{B}$ et $\vec{F}$ soit direct. Le sens du vecteur $q.\vec{v}$ dépend évidemment du signe de la charge.

• Si α désigne l'angle inférieur à π formé par les vecteurs $q.\vec{v}$ et $\vec{B}$, la valeur de la force magnétique est :

$$F = |q| . v . B . \sin \alpha \qquad \text{(fig. 32)}$$

Cette force est nulle si $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires ($\alpha = 0$ ou π).
Elle est aussi nulle si la particule est au repos ($v = 0$) : un champ magnétique ne peut pas servir à mettre en mouvement des particules immobiles.
Dans le cas où la vitesse est orthogonale au champ magnétique $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, l'expression de la force magnétique est : $F = q . v . B$.

c) Définition théorique du champ magnétique

La relation $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$ fait intervenir des grandeurs connues (force, charge, vitesse) et une grandeur abstraite : le vecteur-champ magnétique $\vec{B}$. En déterminant la force agissant sur une particule de charge et de vitesse connues, il est possible d'en déduire le champ magnétique agissant sur la particule. C'est pourquoi la relation $\vec{F} = q.\vec{v} . \wedge \vec{B}$ peut être considérée comme une définition du vecteur-champ $\vec{B}$.

Dans le SI, $B = \dfrac{F}{q . v . \sin \alpha}$ s'exprime en $N.C^{-1}.m^{-1}.s$, qui a reçu le nom de tesla (T).

d) Application

Le poids d'un proton, de masse :

$$m_p = 1{,}67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

est :

$$P = m . g = 1{,}67 \times 10^{-27} \times 9{,}8 = 1{,}67 \times 10^{-26} \text{ N},$$

de l'ordre de 10^{-26} N.

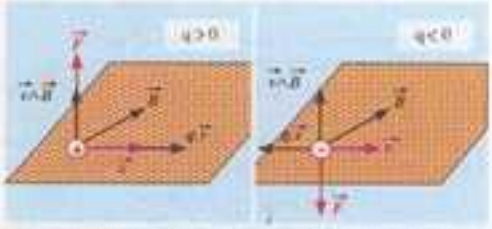


Fig. 31. ***Détermination du vecteur-force magnétique à partir des vecteurs $q.\vec{v}$ et $\vec{B}$. Le trièdre : courant, champ, force est direct.***

Animé d'une vitesse $v = 1\,000 \text{ m.s}^{-1}$ (ce qui est très faible pour ce genre de particules), dans un champ peu intense ($B = 1$ mT) orthogonal à la vitesse, le proton subit l'action d'une force magnétique $F = q . v . B$ puisque $\sin \alpha = 1$:

$$F = 1{,}6 \times 10^{-19} \times 1\,000 \times 10^{-3} = 1{,}6 \times 10^{-16} \text{ N},$$

de l'ordre de 10^{-15} N.
Cette force est 10 millions de fois supérieure au poids! Cet exemple numérique montre qu'en pratique, le poids des particules est négligeable vis-à-vis des forces magnétiques.

3. Étude de la trajectoire circulaire

L'expression $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$ permet de prévoir le mouvement d'une particule de masse m et de charge q. Le seul cas envisagé ici est celui d'une particule lancée dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme avec une vitesse initiale orthogonale à $\vec{B}$.
La charge q est supposée positive.

a) Analyse des actions

Puisque le poids de la particule est négligeable vis-à-vis de la force magnétique, la seule force agissante est $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$.
D'après la relation $\Sigma \vec{f} = m.\vec{a}$, le vecteur-accélération de la particule est :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q}{m} . \vec{v} \wedge \vec{B}.$$

En tant que produit vectoriel, l'accélération $\vec{a}$ est constamment orthogonale au vecteur-vitesse $\vec{v}$ et au vecteur-champ magnétique $\vec{B}$.

b) Choix du repère

Le mouvement de la particule est étudié dans un repère terrestre, supposé galiléen.
L'origine O du repère est le point d'entrée de la particule dans le champ magnétique.
L'axe Ox est choisi colinéaire à la vitesse initiale $\vec{v}_0$ et de même sens. Oy est pris orthogonal à $\vec{B}$ et perpendiculaire à Ox (fig. 33). Le repère est complété par un axe Oz tel que le trièdre $Oxyz$ soit direct (Oz est dans ce cas de sens contraire à $\vec{B}$).

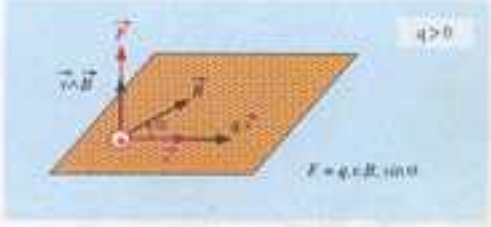


Fig. 32. ***Caractéristiques de la force magnétique.***

c) Caractéristiques du mouvement

• Puisque $\vec{a}$ est orthogonal à $\vec{B}$, donc à $\overrightarrow{Oz}$, sa coordonnée $a_z = \dfrac{d^2z}{dt^2}$ est nulle.

Deux intégrations successives donnent :
$v_z = C^{te} = 0$ comme au départ;
$z = C^{te} = 0$ pour la même raison.
Ainsi, la trajectoire est contenue dans le plan xOy orthogonal à $\vec{B}$. **La trajectoire est donc plane,** orthogonale au champ magnétique.

• Dans le repère mobile de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{n})$, en M (fig. 33) :

— L'accélération tangentielle en M est :

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

Puisque $\vec{a}$ est constamment orthogonal à $\vec{v}$, $a_\tau = 0$: le vecteur-accélération n'a pas de composante tangentielle.
Par intégration : $v = v_0$. La vitesse garde une valeur constante, et le **mouvement est uniforme.**

— L'accélération normale est $a_n = \dfrac{v_0^2}{R}$

R désignant le rayon de courbure de la trajectoire. Puisque la trajectoire est plane, le vecteur-vitesse reste orthogonal à $\vec{B}$. Le vecteur-accélération $\vec{a} = \dfrac{q}{m}.\vec{v} \wedge \vec{B}$ a donc pour valeur :

$$a = \frac{|q|}{m}.v_0.B = \frac{v_0^2}{R}$$

Par suite, le rayon de courbure est constant. La **trajectoire est circulaire,** de rayon :

$$R = \frac{m.v_0}{|q|.B}$$

En résumé, une particule lancée avec une vitesse $\vec{v}$ orthogonale à un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, acquiert une mouvement circulaire uniforme dans un plan orthogonal à $\vec{B}$.

Remarque : Si la charge de la particule est négative, le sens d'incurvation du cercle trajectoire est inversé.

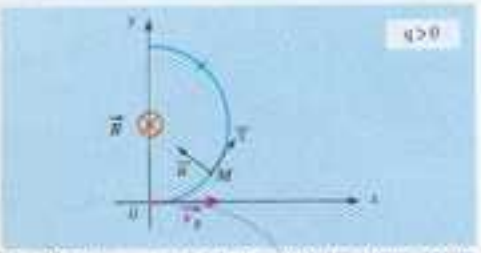


Fig. 33. *Mouvement circulaire uniforme d'une particule chargée (ici positivement) dans un champ magnétique uniforme.*

4. Autres conséquences de la relation $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$

a) La puissance d'une force magnétique est nulle

La puissance d'une force $\vec{F}$ est donnée par le produit scalaire : $P = \vec{F}.\vec{v}$.
La force magnétique qui est orthogonale au vecteur-vitesse, a donc une puissance nulle : elle ne travaille pas. L'application du théorème de l'énergie cinétique montre alors que l'énergie cinétique de la particule ne varie pas.
Par suite, la force magnétique peut incurver les trajectoires d'une particule mais ne peut pas modifier la valeur de sa vitesse.

b) Quantité de mouvement d'une particule évoluant dans un champ magnétique

L'expression du rayon de courbure de la trajectoire a été établie plus haut :

$$R = \frac{m.v_0}{|q|.B}$$

Par suite, la valeur $p = m.v_0$ de la quantité de mouvement d'une particule est reliée au rayon de courbure de sa trajectoire par la relation :

$p = \lvert q \rvert . B . R$
p en kilogramme-mètre par seconde ($kg.m.s^{-1}$) q en coulomb (C) B en tesla (T) R en mètre (m)

c) Vitesse angulaire des particules mobiles

Pour des particules en mouvement circulaire, leur vitesse angulaire $\omega = \dfrac{v_0}{R}$ se déduit de la relation : $m.v_0 = |q|.B.R$: $\omega = \dfrac{|q|.B}{m}$ (voir « Pour en savoir plus »).

Cette vitesse angulaire ne dépend pas de la vitesse v_0.
Les particules effectuent un tour en :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi.m}{|q|.B}$$

d) Particule évoluant dans un champ électrique et dans un champ magnétique

La particule subit dans ce cas l'action d'une force électrique $\vec{F}_1 = q.\vec{E}$ et, simultanément, celle d'une force magnétique $\vec{F}_2 = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$. La force totale $\vec{F}$ agissant sur la particule est donc

$$\vec{F} = q.(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Elle est appelée force de Lorentz.
Contrairement à la force magnétique, la force électrique peut être accélératrice.

Pour en savoir plus

Vecteur vitesse angulaire et champ magnétique

a) Définition du vecteur vitesse angulaire

Pour préciser la notion d'axe de rotation pour un mouvement circulaire, il est commode d'associer à la vitesse angulaire $\omega = \frac{v}{R}$, un *vecteur* $\vec{\omega}$ défini comme suit :

- Sa *direction* est orthogonale au plan du cercle.
- Son *sens* se déduit de celui du vecteur vitesse $\vec{v}$ par une règle de la main droite, comme l'indique la figure 42.
- Sa *valeur* ω est celle de la vitesse angulaire : $\omega = \frac{v}{R}$, exprimée en rad.s^{-1}.

La flèche qui le représente est habituellement dessinée avec son origine au centre du cercle.

b) Exemples d'utilisation

- Lorsque le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ et le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sont connus, le vecteur vitesse linéaire $\vec{v}$ s'en déduit par le produit vectoriel $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$. En effet, ce vecteur a bien comme valeur $v = R.\omega$ et le trièdre construit avec $\vec{\omega}$, $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ est direct lorsque $\vec{v}$ a le sens du mouvement.
- De même, la *force centripète* appliquée à une particule en mouvement circulaire s'exprime par $\vec{F} = \vec{\omega} \wedge \vec{p}$, où $\vec{p}$ désigne le vecteur quantité de mouvement de la particule, comme le lecteur pourra s'en assurer à titre d'exercice de manipulation du produit vectoriel.

Ces résultats sont résumés dans la figure 43.

c) Relation entre $\vec{\omega}$ et $\vec{B}$

Il a été montré dans le cours que des particules chargées, lancées à la vitesse $\vec{v}_0$ orthogonalement à un champ magnétique $\vec{B}$, décrivent un cercle dans un plan orthogonal à $\vec{B}$, avec une vitesse $\vec{v}$ de valeur constante v_0. ***Les vecteurs $\vec{\omega}$ et $\vec{B}$ sont donc colinéaires.*** Par suite, $\vec{\omega} = C.\vec{B}$.

La constante C peut être identifiée comme l'*opposée de la charge massique* des particules. En posant en effet :

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m}.\vec{B}$$

la force centripète $\vec{F} = \vec{\omega} \wedge \vec{p}$ s'écrit :

$$\vec{F} = -\frac{q}{m}.\vec{B} \wedge m.\vec{v} = -q.\vec{B} \wedge \vec{v},$$

qui est bien égal à la force magnétique $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$ d'après l'anti-commutativité du produit vectoriel (fig. 44).

La relation $\vec{\omega} = -\frac{q}{m}.\vec{B}$ inclut en particulier celle qui a été donnée en cours : $\omega = \frac{q}{m}.B$. Elle permet de retrouver aisément le sens de $\vec{B}$ lorsque le signe de la charge q et le sens du vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ sont connus. Ce sens est souvent facile à trouver, sur un cliché de chambre à bulles par exemple, avec une règle de la main droite.

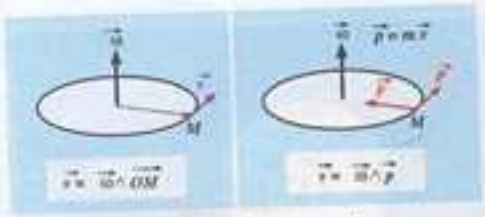


Fig. 43

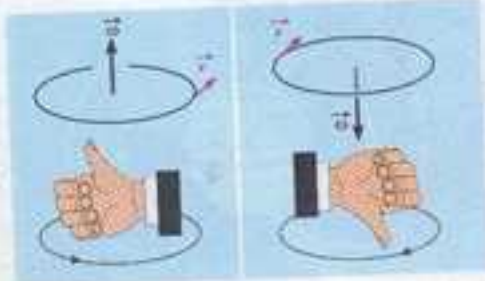


Fig. 42

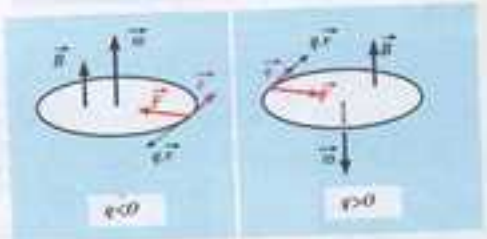


Fig. 44. *$\vec{\omega}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires :*
— de même sens si la charge est négative ;
— de sens contraires si la charge est positive.

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

- Se rappeler qu'une aiguille aimantée sn s'oriente dans un **champ magnétique** $\vec{B}$ de sorte que $\vec{sn} \nearrow \vec{B}$.

- Qu'il règne un champ magnétique sensiblement **uniforme** :
  — entre les branches d'un **aimant** en U ;
  — à l'intérieur d'un **solénoïde** parcouru par un courant ;
  — entre deux **bobines de Helmholtz** parcourues par un courant.

- Pouvoir retrouver le sens du vecteur-champ magnétique créé en un point de l'espace par un courant, par une **règle d'orientation dans l'espace** (règle de la main droite par exemple). Le vecteur $\vec{B}$ sort d'une région ou d'une face nord

- Connaître la formule qui donne la valeur du champ magnétique **uniforme** dans la région centrale d'un solénoïde assez long :

$$B = 4\pi \times 10^{-7} n_l . I.$$

$B = \mu_0 n I$

- Se rappeler que tous les phénomènes magnétiques résultent de l'action de particules chargées **en mouvement** (sources de champ magnétique) sur d'autres particules chargées **en mouvement** (sensibles au champ).

- Connaître l'expression de la force magnétique $\vec{F}$ qui agit sur une particule de charge q évoluant à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$:

$$\vec{F} = q . \vec{v} \wedge \vec{B}.$$

- Que la valeur de la quantité de mouvement d'une particule chargée évoluant circulairement dans un champ magnétique uniforme est donnée par :

$$p = |q| . B . R.$$

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1 Bobines de Helmholtz

En mesurant la valeur du champ magnétique le long de l'axe d'une bobine plate, de rayon $R = 10$ cm, on obtient les résultats suivants :

x (cm)	0	1	2	3	5	7,5	10	15	20	30
B	10	9,9	9,4	8,8	7,2	5,1	3,5	1,7	0,9	0,3

La valeur B du champ magnétique est exprimée en unités arbitraires et x désigne l'abscisse comptée à partir du centre de la bobine.

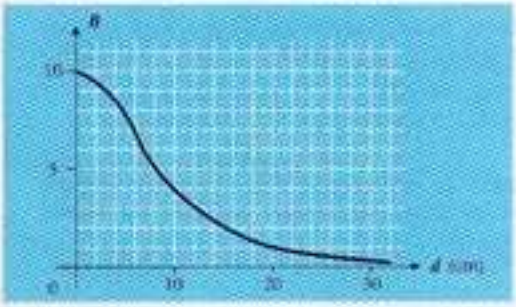
1) Tracer la courbe donnant en fonction de x l'évolution de la valeur du champ.

2) Deux bobines identiques à la précédente, coaxiales, placées à la distance d l'une de l'autre, sont montées en série et parcourues par la même intensité, dans le même sens que précédemment.
Par une addition graphique, tracer la courbe montrant l'évolution de la valeur du champ magnétique le long de l'axe dans les trois cas suivants : $d = 5$ cm, $d = 10$ cm et $d = 20$ cm.
Quel est le dispositif qui assure au mieux l'uniformité du champ entre les bobines?

3) Dans le cas où $d = 10$ cm, on inverserait les connexions reliant les deux bobines afin que les courants qui les traversent soient de sens contraire. Comment varie le champ le long de l'axe?

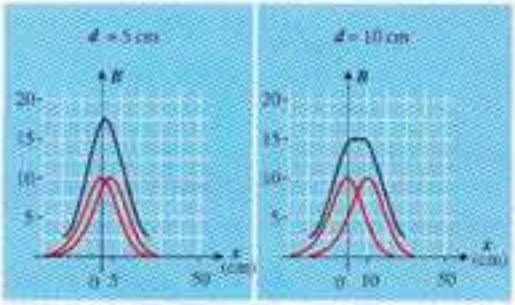
SOLUTION

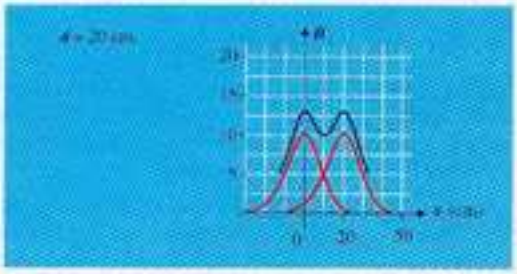
1) La courbe représentant l'évolution de $B(x)$ est la suivante :



Elle serait à compléter par symétrie par rapport à OB.

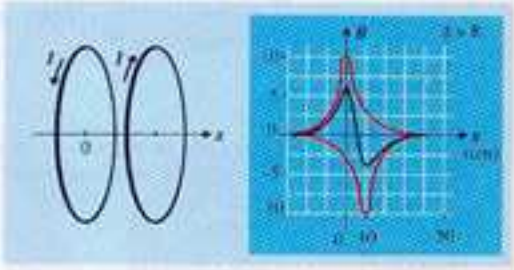
2) Lorsque les bobines sont parcourues par des courants de même sens, les contributions de chacune d'elles au champ s'ajoutent. En traçant les deux courbes, avec des maxima distants de d, la valeur du champ s'obtient en ajoutant en chaque point les valeurs. On obtient ainsi les allures suivantes (à tracer à plus grande échelle) :





La courbe résultante présente un méplat dans le cas où $d = 10$ cm, c'est-à-dire quand la distance entre les deux bobines est égale au rayon. Le champ est alors pratiquement uniforme entre les bobines.

3) Les vecteurs-champ magnétique créés par les bobines sont maintenant de sens inverses, et leurs valeurs se retranchent. On peut partir de la figure précédente et retrancher point par point ou, comme ci-dessous, tracer deux nouvelles courbes en comptant par exemple positivement les champs lorsqu'ils pointent vers la droite.



1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 2 Valeur d'un champ magnétique

Avec le dispositif étudié dans le cours (page 113), on constate que les électrons, soumis à une tension accélératrice de 400 V dans le canon, prennent une trajectoire plane circulaire de diamètre $d = 10$ cm.

1) Quelle est la valeur du champ magnétique existant entre les bobines de Helmholtz?

2) Combien de temps faut-il à un électron pour faire un tour?

La charge massique des électrons, de masse $9{,}1 \times 10^{-31}$ kg vaut $1{,}76 \times 10^{11}$ C.kg^{-1}.

SOLUTION

1) Dans le canon à électrons, la variation de l'énergie cinétique de l'électron $\frac{1}{2} m.v^2 - 0$ est égale au travail $e.U$ de la force électrique. Le poids de l'électron est négligeable vis-à-vis de la force électrique et son travail n'intervient pas. La vitesse des électrons est donc telle que :

$$v^2 = 2\frac{e}{m}.U = 2 \times 1{,}76 \times 10^{11} \times 400,$$

d'où $v = 1{,}2 \times 10^7$ m.s^{-1}.

Sur la trajectoire de rayon $R = 5 \times 10^{-2}$ m, la vitesse angulaire ω vaut :

$$\omega = \frac{v}{R} = 2{,}4 \times 10^8 \text{ rad.s}^{-1}.$$

La valeur du champ magnétique est :

$$B = \frac{\omega}{q}.m = \frac{2{,}4 \times 10^8}{1{,}76 \times 10^{11}}$$

soit $\boldsymbol{B = 1{,}3 \times 10^{-3}}$ **T.**

2) L'électron parcourt la longueur $2\pi.R$ à la vitesse

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} = 1{,}2 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}.$$

La durée d'un tour est $T = \frac{2\pi.R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$,

soit $\boldsymbol{T = 2{,}6 \times 10^{-8}}$ **s.**

EXERCICE 3 Filtre de vitesse

Des particules chargées pénètrent avec diverses vitesses colinéaires, horizontales, entre les armatures d'un condensateur plan. Les armatures horizontales, distantes de d, sont soumises à une tension électrique U. Simultanément, un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, horizontal, orthogonal au champ électrique $\vec{E}$, s'exerce lui aussi entre les armatures.

1) Préciser quelles doivent être les caractéristiques de la tension U, ainsi que celles des bobines de Helmholtz, pour que les champs aient la disposition indiquée par la figure.



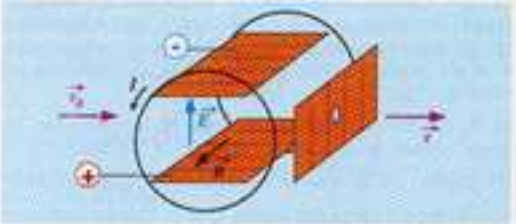
2) Quelle doit être la vitesse des particules pour que, soumises simultanément à $\vec{E}$ et $\vec{B}$, elles ne subissent aucune déviation entre les deux armatures?

3) Qu'arrive-t-il aux particules plus lentes? plus rapides? Le dispositif convient-il aussi bien pour les charges positives que pour les négatives?

Application numérique : $d = 0{,}5$ cm; $U = 50$ V; $B = 0{,}1$ T.

SOLUTION

1) Pour que le champ électrique soit vertical vers le haut, il faut que le potentiel de l'armature du bas soit le plus élevé.
Le champ magnétique est parallèle à l'axe des deux bobines de Helmholtz. Pour qu'il pointe vers nous, il faut voir tourner le courant dans le sens trigonométrique.



2) Les particules ne subissent aucune déviation si elles ne subissent pas d'action. La force de Lorentz doit être nulle (le poids est négligeable vis-à-vis des forces électriques ou magnétiques). Soit $q.\vec{E} + q.\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$.

Cette condition se traduit par $\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$, d'où $v = \frac{E}{B}$ puisque $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux. Le champ électrique entre les armatures a pour valeur $E = \frac{U}{d}$.

1. EXERCICES RESOLUS

La vitesse est alors : $v = \dfrac{U}{B.d}$, soit :

$$v = \frac{50}{5} \times 10^4 = 10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\boldsymbol{v = 100 \text{ km.s}^{-1}.}$$

3) Les particules plus lentes subiront une force magnétique plus faible. La force magnétique est vers le bas pour des particules positives, vers le haut pour les négatives. La force électrique ne change pas. Les charges positives lentes seront donc déviées vers le haut, les négatives lentes vers le bas. Ce sera l'inverse si les particules sont plus rapides, car la force magnétique l'emportera. Seules les particules de vitesse $v = \dfrac{E}{B}$ sortiront par le petit trou (ce qui justifie l'appellation de **filtre de vitesse** donnée à ce dispositif).
Que les particules soient positives ou négatives, la condition $\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$ conduit à une force nulle. Le dispositif filtre aussi bien les charges positives que les charges négatives.

EXERCICE 4 Spectrographe de masse

1) Des ions brome (I) Br^+ (il ne s'agit pas des ions bromure Br^- rencontrés en solution aqueuse) sortent d'une chambre d'ionisation, pratiquement sans vitesse initiale. Ils sont accélérés sous l'influence d'une tension électrique U.
Établir la relation donnant la valeur p de la quantité de mouvement qu'ils acquièrent ainsi en fonction de leur masse m, leur charge q et la tension accélératrice U.

2) Les ions pénètrent dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, orthogonal à la vitesse acquise.

a) Exprimer le rayon de courbure R de la trajectoire en fonction de m, U, q et B.

b) Application : $B = 0{,}12$ T ; $U = 3\,470$ V. Établir la relation numérique donnant m (exprimée en unité de masse atomique u : $1 \text{ u} = 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg) en fonction de R (en m). Calculer m sachant que l'impact des ions sur la plaque photographique du spectromètre est situé à 125,7 cm de la fente d'entrée.

3) A 1,6 cm de la trace précédente, on observe un autre impact, plus lointain de la fente d'entrée.

a) Quelle est la masse de l'isotope correspondant?

b) On trouve dans les tables que la masse atomique moyenne du brome vaut 80 u. En admettant que les deux isotopes précédents soient les seuls à prendre en compte, dans quelles proportions ces isotopes existent-ils dans le brome?

SOLUTION

1) La variation $\dfrac{1}{2}mv^2 - 0$ de l'énergie cinétique résulte seulement du travail de la force électrique (égal à $q.U$), car le poids des particules est négligeable vis-à-vis des forces électrique ou magnétique.
De $m.v^2 = 2q.U$, on déduit $m^2.v^2 = 2q.m.U$, d'où :

$$\boldsymbol{p = \sqrt{2q.m.U}.}$$

2) *a)* La force magnétique ne travaillant pas, il n'y a pas de variation d'énergie cinétique. Dans le champ magnétique, les valeurs des vitesses et de la quantité de mouvement restent inchangées. Par suite, $p = q.B.R$ et $R = \dfrac{p}{q.B}$, ou, tenant compte de la relation précédente :

$$\boldsymbol{R = \frac{\sqrt{2m.U}}{B.\sqrt{q}}.}$$

b) Les ions brome (I) portent une charge élémentaire positive :

$$q = 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Par élévation au carré de l'expression précédente, il vient $m = \dfrac{1}{2}\dfrac{q.B^2.R^2}{U}$. En y remplaçant par les valeurs numériques connues, il vient :

$$\frac{m}{R^2} = \frac{1}{2} \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times \frac{0{,}12^2}{3\,470} \approx 3{,}32 \times 10^{-25} \text{ SI}$$

Dans cette relation m s'exprime en kg et R en m. Comme $1 \text{ kg} = \dfrac{1}{1{,}66 \times 10^{-27}}$ u, on obtient :

$$\frac{m}{R^2} = \frac{3{,}32 \times 10^{-25}}{1{,}66 \times 10^{-27}} = 200 \text{ et finalement } m_{(u)} = 200R^2.$$

Après avoir parcouru un demi-arc de cercle, les impacts sont situés à une distance de la fente égale au diamètre du cercle. Pour $R = \dfrac{1{,}257}{2}$ m, on obtient :

$$\boldsymbol{m = 79{,}0 \text{ u}.}$$

3) *a)* Le second isotope décrit un demi-cercle de rayon plus grand. Pour cet ion, le rayon de la trajectoire est $R' = \dfrac{(125{,}7 + 1{,}6)}{2}$ cm $\approx 0{,}637$ m. Par suite :

$$\boldsymbol{m = 81{,}0 \text{ u}.}$$

b) La masse atomique moyenne du brome étant de 80, les deux isotopes du brome existent dans les **mêmes proportions.**

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATION

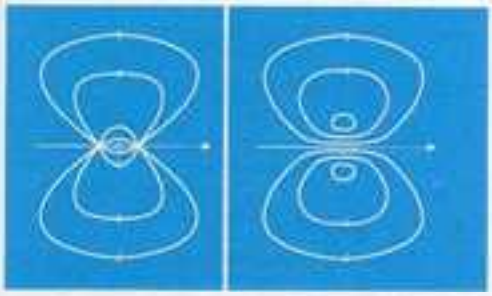
Sans calculs

Exercice 1

Recenser les dispositifs (aimants ou courants) qui donnent, dans des régions à préciser, un champ magnétique uniforme.

Exercice 2

Les deux schémas ci-dessous représentent un spectre magnétique et un spectre électrique.
Loin de la région centrale, ils ont sensiblement la même allure.



Lequel est le spectre magnétique? Quels dispositifs utiliser pour réaliser ces deux spectres?

Exercice 3

Pour quelle raison l'effet de freinage sur des électrons est-il beaucoup plus sensible dans une chambre à bulles que dans une ampoule à pinceau circulaire d'électrons?

Exercice 4

Préciser dans quels cas une particule (chargée ou non) est animée d'un mouvement rectiligne uniforme quand elle pénètre dans un champ magnétique.

* Exercice 5

Dans une ampoule à électrons on observe pour un réglage donné, que des électrons ont une trajectoire circulaire de rayon $R = 5$ cm. Qu'observe-t-on lorsqu'on réalise simultanément les opérations suivantes :

1) Tension accélératrice multipliée par 4 et intensité du courant dans les bobines de Helmholtz multipliée par 2?

2) Tension accélératrice divisée par 2 et intensité du courant dans les bobines multipliée par 1,41... ($\sqrt{2}$)?

3) Rotation de l'ampoule de 180° autour de son support, et inversion du sens du courant dans les bobines?

Exercice 6

Dans les figures ci-dessous, $\vec{v}$ représente le vecteur-vitesse d'une particule chargée située dans une région de l'espace où règnent un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$.



Chercher dans quel(s) cas de figure la particule :

1) Reste immobile.

2) Reste dans le plan de figure.

3) Reste en mouvement rectiligne ou l'acquiert.

Exercice 7

Faire un schéma des lignes de champ magnétique créé par un solénoïde, en les orientant en fonction du sens du courant indiqué sur le solénoïde. Reproduire la figure observée en regardant ce schéma dans un miroir. Le nouveau schéma est-il correct?

Exercice 8

Des particules de même charge, sortent toutes d'un cyclotron donné, avec la même quantité de mouvement $p = q.B.R$. Que représente R? Comment interpréter que cette quantité de mouvement soit indépendante de la tension accélératrice entre les dees?

Exercice 9

Lorsque des particules chargées sont animées, après déflexion magnétique, d'un mouvement rectiligne uniforme, peut-on dire que leur poids est négligeable vis-à-vis de la force magnétique?

Force magnétique

Les données suivantes seront utilisées dans les exercices si besoin est :

Charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

	Electron	Proton	Neutron	Particule α
Masse (kg)	$9{,}1 \times 10^{-31}$	$1{,}672 \times 10^{-27}$	$1{,}675 \times 10^{-27}$	$6{,}65 \times 10^{-27}$
Charge	$-e$	$+e$	0	$2e$

Composante horizontale du champ magnétique terrestre : $B_h \sim 2 \times 10^{-5}$ T.

2. EXERCICES PROPOSES

***Exercice 10**

Des électrons, animés d'un mouvement rectiligne uniforme horizontal, pénètrent avec une vitesse $v = 10\ km.s^{-1}$ dans une région où règne un champ magnétique de vecteur $\vec{B}$ horizontal ($B = 5 \times 10^{-3}$ T). $\vec{B}$ fait avec $\vec{v}$ un angle de 50°.
Quelle est alors la valeur de la force agissant sur les électrons? La comparer à leur poids.

Exercice 11

Un solénoïde horizontal comportant 1 000 spires par mètre, renferme dans sa région centrale une aiguille aimantée placée sur un pivot. Initialement, l'axe horizontal du solénoïde est perpendiculaire au méridien magnétique du lieu où se fait l'expérience.

1) Faire un schéma du dispositif.

2) Exprimer l'angle α dont tourne l'aiguille lorsqu'on fait passer un courant d'intensité I dans le solénoïde.

3) Tracer la courbe montrant l'évolution de α en fonction de I.

***Exercice 12**

Un solénoïde horizontal comportant 1 000 spires par mètre renferme dans sa région centrale une aiguille aimantée placée sur un pivot. Initialement, l'axe horizontal du solénoïde est dans le plan du méridien magnétique du lieu où se fait l'expérience.

1) Calculer l'intensité I_0 du courant qui doit passer dans le solénoïde, pour que le champ magnétique créé dans sa région centrale, ait même valeur que la composante horizontale du champ terrestre.

2) On fait tourner le solénoïde autour d'un axe vertical passant par sa région centrale (le solénoïde reste horizontal). Lorsque le solénoïde a été tourné de α, de quel angle β a tourné l'aiguille?
On envisagera successivement les trois cas suivants :

$$I = I_0 \qquad I = 2I_0 \qquad I = \frac{I_0}{2}$$

3) Préciser dans lequel des cas précédents l'aiguille fait moins d'un tour lorsque le solénoïde en fait un. De quel angle maximal l'aiguille tourne-t-elle alors?

Bobines de Helmholtz

Exercice 13

Une bobine plate circulaire comporte plusieurs spires de rayon moyen $R = 10$ cm. Elle est parcourue par un courant d'intensité $I = 0,5$ A. Un teslamètre indique que le champ magnétique créé au centre de la bobine vaut $B_0 = 2,0 \times 10^{-3}$ T. A 10 cm du centre, sur l'axe de la bobine, ce champ ne vaut plus que $B = 0,7 \times 10^{-3}$ T. Deux bobines identiques à la précédente sont associées afin de réaliser le dispositif de Helmholtz.

1) Faire un schéma du dispositif, en y précisant les sens du courant et du champ magnétique intérieur.

2) Estimer la valeur du champ magnétique au milieu des deux bobines parcourues dans le même sens par un courant de 2 A.

Particules chargées dans un champ magnétique

Exercice 14

Combien de tours par seconde un électron effectue-t-il lorsqu'il évolue dans un champ magnétique de 50 mT orthogonal à sa vitesse initiale? Ce résultat dépend-t-il de la vitesse initiale de l'électron? de la valeur du champ?

Exercice 15

Quelle est la vitesse d'une particule α animée d'un mouvement circulaire uniforme de rayon 1 m dans un champ magnétique de valeur 0,1 T?

***Exercice 16**

Des particules de masse m, porteuses d'une charge élémentaire e positive, sont initialement immobiles.

1) Elles subissent l'influence accélératrice d'une tension électrique U. Exprimer leur énergie cinétique E_c, leur quantité de mouvement p et leur vitesse v en fonction de e, m et U.

2) Elles pénètrent à la vitesse précédente dans un champ magnétique de vecteur $\vec{B}$ orthogonal à leur vitesse $\vec{v}$. Parmi les grandeurs suivantes $(E_c, p, v, \beta, \vec{v})$, lesquelles sont modifiées?

3) Exprimer le rayon de courbure de leur trajectoire en fonction de m, e, U et B.

Spectrographes de masse

Exercice 17

Dans un spectrographe de masse, des ions $^{66}Zn^+$ et $^{70}Zn^+$ initialement immobiles, sont accélérés sous l'influence d'une tension $U = 5$ kV. Ils pénètrent ensuite dans un champ magnétique de valeur $B = 10^{-2}$ T.

1) Faire un schéma du dispositif en y représentant les signes des charges des plaques accélératrices et le sens du vecteur champ magnétique.

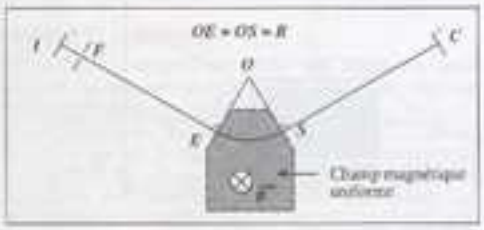
2) Quelle est la vitesse des ions à leur entrée dans le champ magnétique? lors de leur impact sur la plaque photographique après un demi-tour?

3) Quelle est la distance qui sépare, sur la plaque photographique, les impacts des deux types d'ions? Les masses des ions seront prises égales à 66 u et 70 u. ($1\ u = 1,66 \times 10^{-27}$ kg).

2. EXERCICES PROPOSES

* Exercice 18

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les particules étudiées ne sont pas relativistes.
Dans le spectrographe de masse schématisé sur la figure, des ions positifs de masse m, de charge q, sortent en I d'une chambre d'ionisation avec une vitesse négligeable.



Ils sont accélérés entre I et F par une tension $U = V_I - V_F$ continue et réglable. Ils sont ensuite déviés entre E et S par un champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de figure, la valeur B du champ magnétique restant constante pendant toute la durée d'utilisation. Ils sont enfin recueillis à l'entrée C fixe d'un collecteur.
Dans cet appareil, tous les ions que l'on veut recueillir en C doivent suivre la même trajectoire IFESC.
D'autre part, le vide est réalisé dans l'appareil, et l'effet de pesanteur sur les ions est négligeable.
La portion ES est un arc de cercle de centre O et de rayon R.

1) a) Établir en fonction de q, m et U l'expression de la valeur v de la vitesse avec laquelle un ion quelconque du faisceau parvient en E.

b) Établir la relation qui doit exister entre q, v, B, m et R pour que cet ion suive la trajectoire imposée.

c) Déduire des deux questions précédentes la relation entre q, B, R, m et U.

2) On utilise ce spectrographe de masse pour identifier les isotopes du strontium; les atomes de strontium s'ionisent sous la forme d'ions Sr^{2+}.

a) On place d'abord dans la chambre du strontium 88. Calculer la valeur à donner à la tension U pour que les ions du strontium 88 soient collectés en C.
On donne : $R = 0{,}70$ m; $B = 0{,}16$ T;
masse d'un atome de strontium 88 : 87,6 u;
charge électrique élémentaire : $1{,}60 \times 10^{-19}$ C;
unité de masse atomique : $1\ u = 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg.

b) On place maintenant dans la chambre d'ionisation un mélange d'isotopes du strontium. Pour les recueillir successivement en C, il faut donner à U différentes valeurs comprises entre 13 930 V et 14 440 V.
Entre quelles valeurs se situent les nombres de masse de ces isotopes?

Cyclotrons

Exercice 19

On applique une tension accélératrice alternative $u = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$ aux deux dees d'un cyclotron de rayon $R = 0{,}80$ m. Le champ magnétique uniforme a pour valeur $B = 0{,}90$ T. Les particules accélérées sont des protons, de charge massique :

$$\alpha_1 = \frac{q}{m} = 9{,}58 \times 10^7\ C \cdot kg^{-1}.$$

1) Exprimer, en fonction de q et U_m, l'accroissement d'énergie cinétique à chaque passage d'un dee à l'autre. On admettra que, pendant la très courte phase d'accélération entre les dees, la tension appliquée reste pratiquement constante et égale à U_m. Faire l'application numérique.
Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de la particule à chaque tour?

2) Établir les expressions littérales de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique de la particule à sa sortie du cyclotron. Dépendent-elles de U_m?

3) Exprimer, en fonction de q, B, R et U_m, le nombre de tours accomplis dans le cyclotron par la particule.
Applications numériques : $U_m = 1$ kV; $U_m = 100$ kV (valables pour tout l'exercice).

4) Quelles sont la vitesse angulaire des protons dans le cyclotron, et la pulsation ω de la tension appliquée aux dees?

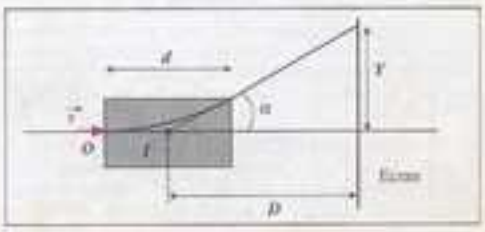
5) Pendant combien de temps les protons sont-ils accélérés dans le cyclotron?

6) Quelle distance le proton parcourt-il dans les dees avant de sortir?

Déflexion magnétique

Exercice 20

Un pinceau homocinétique d'électrons pénètre en O à la vitesse $\vec{v}$ dans une région (en grisé sur la figure) où règne un champ magnétique uniforme, de vecteur $\vec{B}$ orthogonal à $\vec{v}$, qui est nul à l'extérieur de la région grisée.



2. EXERCICES PROPOSES

Pour les applications numériques :

$v = 10^7\ \text{m.s}^{-1}$ $d = 2$ cm $D = 20$ cm $Y = 2{,}5$ cm.

1) Le pinceau est dévié vers le haut. Quel est le sens du vecteur champ $\vec{B}$?

2) Quel est, exprimé en fonction de la charge massique $q_* = \frac{q}{m}$, de v et de B, le rayon de courbure R de la trajectoire?

3) A sa sortie du champ, le pinceau semble provenir d'un point I très proche de la région centrale d'influence du champ. Le champ magnétique s'exerce sur un trajet de longueur très voisine de d.
Exprimer l'angle α de déflexion en fonction de d, q_*, B et v.

4) On observe une distance de déflexion $Y = 2{,}5$ cm. Que vaut le champ magnétique?

EXERCICES D'APRES BACCALAUREATS

* Exercice 21

1) Des électrons sont émis par effet thermo-électronique. Entre le filament F et une plaque P, distants de ℓ, on applique une tension $V_P - V_F > 0$.

$\ell = 2$ cm, $V_P - V_F = 100$ V, $g = 10\ \text{m.s}^{-2}$,

$m_e = 9 \times 10^{-31}$ kg, $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

a) Montrer que le poids de l'électron est négligeable devant la force électrostatique qui s'exerce sur lui.

b) Quelle est la nature du mouvement de l'électron entre F et P? Déterminer sa vitesse $\vec{v}_0$ en P, ainsi que la durée du trajet FP. Les électrons sont émis sans vitesse initiale.

2) On veut vérifier la valeur de la vitesse $\vec{v}_0$. On utilise l'ensemble FP comme canon à électrons, que l'on place dans une ampoule contenant un gaz raréfié. Cette ampoule est placée entre deux bobines de Helmholtz qui créent un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme perpendiculaire à $\vec{v}_0$. On observe un cercle de rayon R = 2,7 cm. On donne : $B = 1{,}25 \times 10^{-3}$ T.

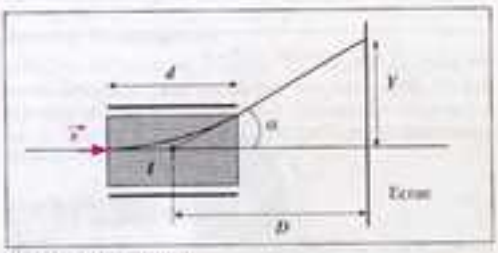
a) Quelle est la force $\vec{f}$ responsable de ce mouvement? Donner les caractéristiques de cette force. Faire un schéma clair sur lequel on placera $\vec{v}_0$, $\vec{B}$, $\vec{f}$ et la trajectoire.

b) Calculer v_0 et la période T du mouvement d'un électron. Cette période dépend-elle de $\vec{v}_0$?



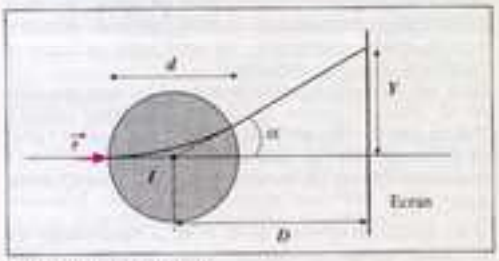
Exercice 22

Un pinceau de particules chargées pénètre horizontalement, à la vitesse $\vec{v}_0$, dans une région de l'espace où l'on peut créer soit un champ électrique $\vec{E}$, soit un champ magnétique $\vec{B}$, soit les deux simultanément. Ce dispositif donne le principe du spectrographe de Thomson (1856-1940).



Déflexion électrique :
Le champ électrique est créé par un condensateur horizontal :

$d = 4$ cm $\quad D = 25$ cm $\quad Y = 2{,}5$ cm



Déflexion magnétique :
Le champ magnétique est obtenu par un dispositif de Helmholtz. Une seule bobine est représentée.

$d = 4$ cm $\quad D = 25$ cm $\quad Y = 2{,}5$ cm

On se place dans les cas où les déflexions électrique et magnétique restent faibles.

1) L'armature supérieure du condensateur étant à un potentiel supérieur à celui de l'armature inférieure, on constate que les particules sont déviées vers le haut. Quel est le signe de leur charge?
On désire que les particules soient déviées aussi vers le haut par un champ magnétique de vecteur $\vec{B}$ horizontal. Quel doit être son sens? Préciser le sens du courant que l'on fera passer dans les bobines de Helmholtz.

2) Établir que les deux trajectoires sont planes et préciser leurs natures. Exprimer les angles de déflexion α_E et α_B en fonction de d, $|q|$, m, v et E ou B. A quelle condition sur E et B les deux angles de déflexion sont-ils égaux?

2. EXERCICES PROPOSES

3) Les données géométriques fournies aux figures précédentes sont obtenues dans le cas où les champs électrique et magnétique valent respectivement :

$E = 17\,600\ V.m^{-1}$ et $B = 5{,}00 \times 10^{-4}\ T$.

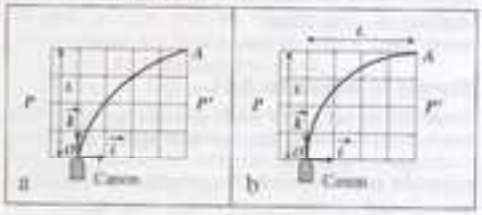
Comment peut-on déterminer ces valeurs expérimentalement? Quelle précaution convient-il de prendre afin que le champ géomagnétique n'intervienne pas?

En déduire la vitesse des particules et leur charge massique. Quelles sont, probablement, ces particules?

Exercice 23

Dans tout l'exercice, le poids des électrons sera négligé devant les autres forces mises en jeu. Le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct.

Dans un tube où règne le vide, on dispose un canon émettant en un point O un pinceau homocinétique d'électrons de vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$. Pour visualiser la trajectoire des particules, un écran fluorescent est placé dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$.



1) A l'intérieur de deux plaques planes P et P', de longueur L, parallèles au plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$, on crée un champ électrique $\vec{E}$ uniforme tel que la trajectoire des électrons, donnée en vraie grandeur figure a, passe exactement par le point A de coordonnées $(L, 0, L)$.

a) Préciser la direction et le sens du vecteur-champ électrique.

b) En prenant pour origine des dates celle de l'émission d'un électron en O, établir les équations paramétriques du mouvement entre O et A.

c) Établir la relation donnant la charge massique $\frac{e}{m}$ de l'électron en fonction de v_0, E, L.

2) Dans une deuxième expérience, on remplace le champ électrique par un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme tel que la trajectoire des électrons émis à la vitesse $\vec{v}_0$ soit un quart de cercle dans le plan de l'écran (fig. b).

a) Préciser le sens de $\vec{B}$.

b) Montrer que la valeur de la vitesse reste constante.

c) Établir la relation donnant la charge massique de l'électron en fonction de v_0, B et L.

3) A l'aide des deux expériences précédentes, déterminer la vitesse v_0 d'émission des électrons, ainsi que leur charge massique.

Application numérique : $L = 4$ cm; $E = 4 \times 10^4\ V.m^{-1}$; $B = 1{,}59 \times 10^{-3}\ T$.

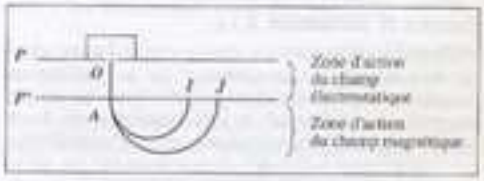
Exercice 24

L'uranium naturel contient essentiellement deux isotopes : l'uranium 235 et l'uranium 238.

L'un des procédés historiques pour séparer ces isotopes, est fondé sur la différence entre les rayons de courbure des trajectoires des atomes ionisés en mouvement dans un champ magnétique uniforme.

D'abord, les atomes neutres sont injectés dans une source d'ions où ils perdent chacun un électron. Les ions ainsi formés portent donc chacun la même charge électrique $q = +e$. Ils sortent de la source d'ions avec une vitesse négligeable, puis ils sont accélérés de O à A par la tension $U_0 = V_P - V_{P'}$ appliquée entre les deux plaques P et P'.

Les ions pénètrent alors en A avec une vitesse de direction perpendiculaire à P' dans une région où règne un champ magnétique uniforme, indépendant du temps, de vecteur $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de figure.



On donne : $B = 0{,}1$ T; $U_0 = 4\,000$ V;
charge électrique élémentaire : $1{,}60 \times 10^{-19}$ C;
unité de masse atomique : $1\ u = 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg;
masse de l'ion uranium 235 : $m_1 = 235$ u;
masse de l'ion uranium 238 : $m_2 = 238$ u.

1) Montrer que l'énergie cinétique est la même pour tous les ions arrivant en A, quel que soit l'isotope ionisé; en déduire que les vitesses acquises par les deux espèces d'ions sont différentes; exprimer les valeurs v_1 et v_2 de leurs vitesses en fonction de la charge, de la masse de l'ion correspondant, et de la tension accélératrice.

2) Au-delà de A, les ions décrivent des trajectoires circulaires dans le plan de figure.

Préciser sur un schéma le sens de $\vec{E}$ (champ électrostatique entre P et P') et de $\vec{B}$ (champ magnétique) pour que les ions puissent parvenir en I et J.

Exprimer littéralement R_1 et R_2 en fonction de la charge, la masse de l'ion correspondant, la tension accélératrice et la valeur du champ magnétique.

Exprimer littéralement la distance entre les deux traces I et J, puis calculer numériquement cette distance. On précisera quel est l'ion qui correspond à chacune des traces.

3) Le courant d'ions issu de la source correspond à une intensité de 10 µA, sachant que l'uranium naturel contient, en nombre d'atomes, 0,7 ‰ d'isotope léger, quelle est, en µg, la masse de cet isotope recueillie en 24 h?

LE CHAMP GÉOMAGNÉTIQUE

1. Rappel de données géographiques

L'axe de rotation de la Terre sur elle-même passe par les pôles géographiques Nord (N_g) et Sud (S) (fig. 38).

Le lecteur qui éprouverait quelques difficultés à voir cette figure dans l'espace aurait intérêt à prendre une vieille balle de tennis ou de ping-pong, à la faire traverser par une aiguille SN_g qui matérialiserait l'axe de rotation. Marquer sur la balle un point L, dessiner le grand cercle passant par L, N_g et S : il représente le **méridien géographique** du lieu L. Marquer le point N_m, figurant le Nord magnétique, à côté de N_g et, diamétralement opposé, le point S_m, figurant le sud magnétique (non représenté sur la figure). Dessiner sur la balle le grand cercle passant par N_m, L et S_m : il représente le **méridien magnétique** du lieu L, dont seule la partie N_mL est dessinée sur la figure. Enfin, piquant en L une épingle pointant vers le centre de la balle, on obtient l'image de la **verticale** du lieu. L'angle désigné par λ sur la figure est la **latitude géographique** du lieu, comptée de 0 à 90° pour les points de l'hémisphère nord.

La figure 39 reprend des données locales : la verticale CL y est redressée; les deux plans verticaux passant par L et contenant les nord géographique et magnétique sont les plans méridiens géographique et magnétique. L'angle D, formé par ces deux plans est appelé **déclinaison magnétique.**



Fig. 38

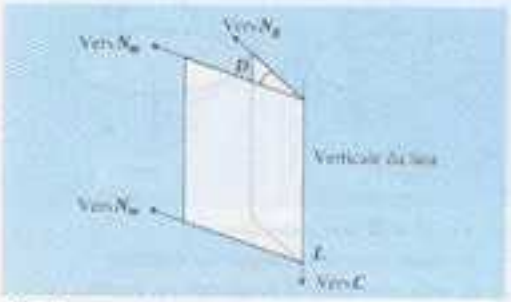


Fig. 39

2. Lignes de champ magnétique terrestre

Une aiguille magnétique, suspendue dans un étrier attaché à un fil sans torsion par un axe qui passe par son centre de gravité, s'oriente dans le plan méridien magnétique, mais **non horizontalement.** Elle forme avec l'horizontale un écart angulaire I appelé **inclinaison magnétique** (fig. 40).

Les lignes de champ géomagnétique ne sont donc pas horizontales.

La déclinaison et l'inclinaison magnétiques dépendent de l'endroit où l'on se trouve sur la Terre, et varient légèrement au cours du temps. En France, $D \approx 5°$ vers l'ouest et $I \approx 65°$ (en 1988).

La figure 41 montre un aspect global des lignes du champ géomagnétique, qui est susceptible de nombreuses variations locales. Il est à remarquer que ce que l'on appelle pôle nord magnétique est en fait une extrémité magnétique sud, qui attire les extrémités nord des aiguilles.

Sur cette figure sont représentés l'**équateur magnétique** et la **latitude magnétique** du lieu L. L'aimant droit équivalent aurait son extrémité nord au pôle magnétique Sud. Cet aimant droit est fictif. L'origine du géomagnétisme réside dans les roches qui se seraient solidifiées en figeant leurs ampériens orientés sous l'influence du magnétisme solaire ou, selon d'autres théories, résiderait dans les courants existant dans le noyau central terrestre conducteur à l'état fondu.

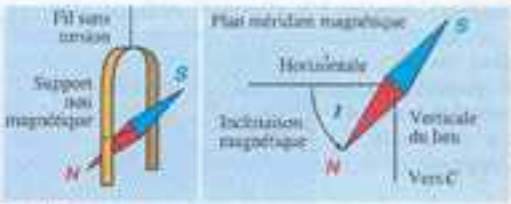


Fig. 40

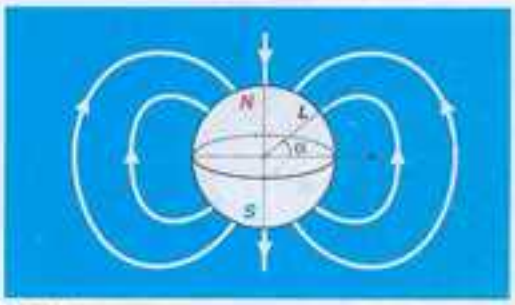


Fig. 41

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

Intensité d'un courant

La masse volumique du cuivre est $\rho = 8\,920\ kg.m^{-3}$. Sa masse molaire vaut $M(Cu) = 0{,}063\,6\ kg.mol^{-1}$.

1) Combien y a-t-il d'atomes de cuivre dans un fil de longueur $\ell = 0{,}50$ m et de section $s = 1{,}00\ mm^2$?

2) Si l'on suppose que chaque atome de cuivre libère un électron de conduction, quelle est la vitesse moyenne d'entraînement des électrons, si le fil est parcouru par un courant d'intensité $I = 1$ A?

3) Combien de temps faut-il, en moyenne, à un électron pour parcourir les 50 cm de fil, dans les conditions précédentes?

4) Comparer la vitesse d'entraînement des électrons à leur vitesse d'agitation thermique, qui est de l'ordre de $100\ km.s^{-1}$. Cette vitesse thermique est-elle négligeable vis-à-vis de la précédente? Comment justifier que l'on n'en tient pas compte?

La constante d'Avogrado vaut $N_a = 6{,}02 \times 10^{23}\ mol^{-1}$; $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

SOLUTION

1) Le volume du fil de cuivre est :

$$V = s.\ell = 5{,}00 \times 10^{-7}\ m^3$$

Sa masse est :

$$m = \rho.v = 5 \times 10^{-7} \times 8\,920 = 4{,}46 \times 10^{-3}\ kg$$

1 kg de cuivre renferme $\dfrac{1}{0{,}063\,6} = 15{,}7$ mol de cuivre.

La quantité de matière du fil considéré vaut donc : $4{,}46 \times 10^{-3} \times 15{,}7 = 7{,}01 \times 10^{-2}$ mol d'atomes de cuivre.

Il y a donc :

$N = 7{,}01 \times 10^{-2} \times 6{,}02 \times 10^{23} = \mathbf{4{,}22 \times 10^{22}}$ **atomes de cuivre** dans le fil.

2) Chaque atome libérant un électron de conduction, il y en a $N = 4{,}22 \times 10^{22}$ dans $V = 5 \times 10^{-7}\ m^3$, soit $N_v = \dfrac{4{,}22 \times 10^{22}}{5 \times 10^{-7}} = 8{,}45 \times 10^{28}$ par m^3.

La vitesse :

$$v = \frac{I}{N_v.s.e} = \frac{1}{8{,}45 \times 10^{28} \times 10^{-6} \times 1{,}60 \times 10^{-19}}$$

$$= \mathbf{7{,}4 \times 10^{-5}\ m.s^{-1}}.$$

Cette vitesse est très faible.

3) Pour parcourir la distance $\ell = v.t$ à la vitesse précédente, les électrons mettent environ :

$$t = \frac{\ell}{v} = \frac{0{,}5}{7{,}4 \times 10^{-5}} = 6{,}8 \times 10^3\ s,$$

soit **près de deux heures!**

4) La vitesse d'agitation thermique est loin d'être négligeable vis-à-vis de la vitesse globale d'entraînement, puisqu'elle est environ mille millions de fois plus grande qu'elle! Cependant, cette vitesse d'agitation est statistiquement nulle et elle ne contribue pas à la conduction.

Qualitativement, on peut retenir qu'un nombre énorme d'électrons, avançant globalement très lentement en portant chacun une toute petite charge, réussissent à faire passer 1 A dans le fil.

Remarque :
Cette lente vitesse de progression des électrons ne doit pas être confondue avec la célérité du signal, égale à celle de la lumière, qui donne l'ordre aux électrons de se mettre en mouvement dans le fil.

EXERCICE 2

Force de Laplace

Une fine tige cylindrique LM, de poids $P = 10$ mN, parcourue de L vers M par un courant d'intensité $I = 10$ A, repose sur deux rails initialement horizontaux. Un aimant en U crée un champ uniforme de valeur $B = 40$ mT qui s'exerce sur une longueur $\ell = 5$ cm de tige.

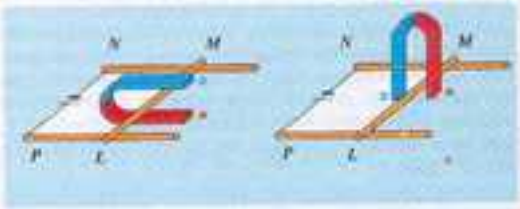
1) L'aimant est disposé comme l'indique la première figure ci-dessous (branche nord en dessous).

a) Préciser les caractéristiques de la force de Laplace, supposée appliquée au milieu de LM, agissant sur la tige. Quelle serait l'accélération initiale de la tige en l'absence de frottements?

b) De quel angle α par rapport à l'horizontal faut-il incliner les deux rails Pt et NM pour que la tige LM reste immobile :

- quand les branches de l'aimant restent horizontales?
- quand elles restent parallèles aux rails?

2) Que se produit-il si l'on adopte la disposition indiquée par la seconde figure?



SOLUTION

1) *a)* Le champ $\vec{B}$ est vertical vers le haut (il sort des régions N). Le courant va de L vers M.

Selon les règles d'orientation du produit vectoriel, la force $\vec{F} = I.\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ est donc horizontale et pointe vers la droite. Elle a pour valeur :

$$F = 10 \times 0{,}05 \times 0{,}04 = 0{,}02\ N = \mathbf{20\ mN}.$$

Cette valeur étant double de celle du poids, l'accélération horizontale de la tige aurait pour valeur $\boldsymbol{a = 2g}$ en l'absence de frottements.

b) • Si les branches de l'aimant restent horizontales, le champ magnétique est vertical vers le haut et la force de Laplace est encore horizontale vers la droite. La tige reste en équilibre si l'action $\vec{R}$ qu'elle subit de la part des rails est orthogonale aux rails (pas de frottements). La première figure ci-dessous représente la situation vue en coupe ($\vec{\ell}$ pointe vers l'arrière de la figure).

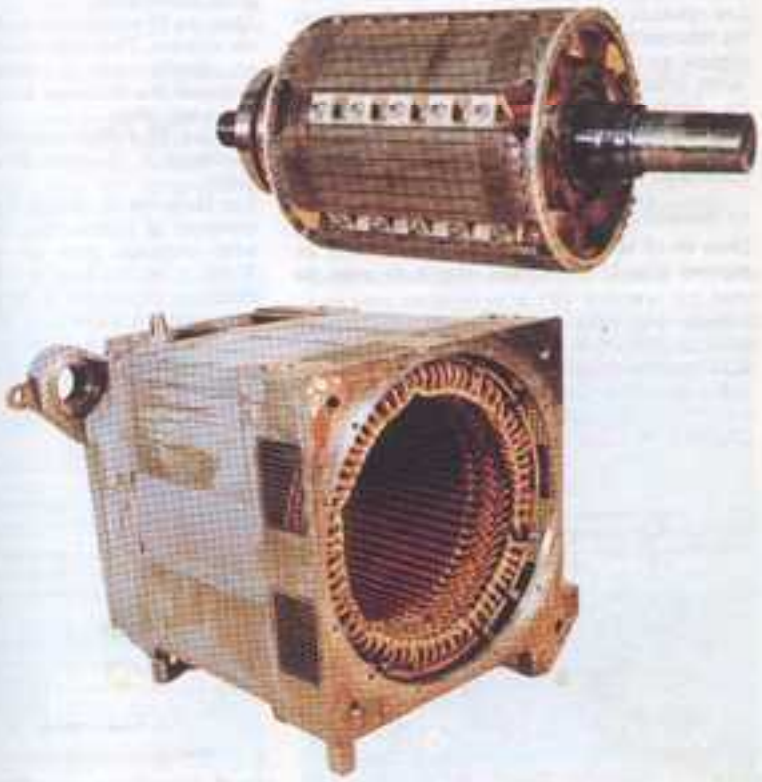
7 Action d'un champ magnétique sur un courant

1 Action d'un champ magnétique sur un élément de circuit.

2 Actions magnétiques sur un circuit entier.

3 Flux magnétique.

4 Applications.



Moteur électrique à courant continu du T.G.V. Atlantique.

Par son action sur les charges mobiles d'un circuit électrique, un champ magnétique est capable d'engendrer des déplacements de conducteurs. Cela mène à de nombreuses applications pratiques, telles que les moteurs, les haut-parleurs et certains appareils de mesures électriques.

1 ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UN ÉLÉMENT DE CIRCUIT

1. Conduction électrique dans un métal

a) Électrons libres à l'intérieur d'un métal

Tous les métaux sont conducteurs de l'électricité, ainsi que de la chaleur. Un métal est constitué d'ions positifs fixes disposés d'une manière régulière en réseau, et d'électrons de valence quasi-libres (fig. 1).

En réalité, l'immobilité des ions n'est que statistique : ils sont animés dans le métal d'incessants mouvements désordonnés d'agitation thermique (fig. 2).

Les rebonds des électrons se font au hasard sur les nuages électroniques des ions qui, eux, vibrent en restant pratiquement sur place.

Si un champ électrique est créé dans le métal, les électrons prennent un mouvement d'ensemble ordonné qui se superpose au mouvement d'agitation thermique : c'est le courant électrique.

b) Intensité d'un courant

Dans un fil conducteur, **le sens conventionnel du courant** (fig. 3) **est le sens inverse de celui du mouvement d'ensemble des électrons.** Le mouvement d'ensemble des électrons, négatifs, équivaut à un mouvement, dans le sens conventionnel, de charges positives.

L'intensité I, d'un courant électrique continu, représente la quantité d'électricité Q, qui traverse en une seconde, la section du circuit parcouru :

$$I = \frac{Q}{t}.$$

L'unité du SI d'intensité est le coulomb par seconde appelé ampère (A).

Le courant est dit **continu** si son intensité demeure constante au cours du temps. Lorsque le courant n'est pas continu, il faut considérer des intervalles de temps dt très courts pendant lesquels l'intensité ne varie pratiquement pas. Si dq désigne la quantité d'électricité qui parcourt le circuit pendant la durée dt, l'**intensité instantanée** i, est définie par :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Quels que soient les appareils mis en série dans un circuit, **l'intensité est la même en tout point d'un circuit-série.**

Dans un fil conducteur cylindrique parcouru par un courant, l'intensité étant partout la même, il en résulte que le mouvement d'ensemble ordonné des électrons est uniforme (voir Pour en savoir plus).

Soit un fil cylindrique (fig. 4) de section s, contenant N_1 électrons libres par mètre cube de métal.

Les électrons de vitesse d'ensemble $\vec{v}$, qui vont traverser la section dans la seconde qui vient, sont contenus dans un cylindre de volume $V = s \cdot v$, où il y en a $N = N_1 \cdot V = N_1 \cdot s \cdot v$. Ces électrons équivalent à N particules de charge élémentaire positive e, se déplaçant dans le sens conventionnel. La charge qui traverse la section du fil à chaque seconde, c'est-à-dire l'intensité, vaut donc :

$$I = N \cdot e = N_1 \cdot s \cdot v \cdot e.$$



Fig. 1. ***Image statique d'un conducteur métallique.*** *Des ions positifs fixes baignent dans « une mer » d'électrons libres.*

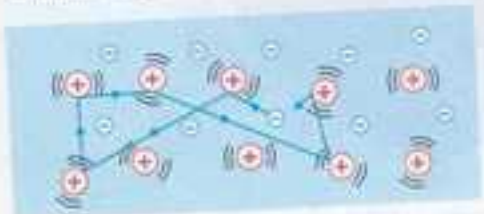


Fig. 2

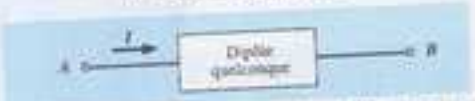


Fig. 3. ***Indication du sens conventionnel d'un courant.*** *La flèche, placée à côté du conducteur, indique par convention le sens connu du courant.*



Fig. 4. ***Interprétation de l'intensité dans un fil conducteur.***

2. Loi de Laplace

a) Champ magnétique agissant sur des électrons dans le vide ou dans un fil métallique

• *Expériences*

Un pinceau d'électrons subit une déviation sous l'influence d'un champ magnétique (fig. 5 *a*). Chaque électron subit l'action de la force magnétique $\vec{f} = q\,.\,\vec{v} \wedge \vec{B} = -e\,.\,\vec{v} \wedge \vec{B}$.

La trajectoire est circulaire si le champ est uniforme.

De même, un fil métallique mobile parcouru par un courant électrique se déplace sous l'influence d'un champ magnétique (fig. 5 *b*).

• *Interprétation.* Les deux expériences précédentes sont analogues : dans les deux cas, les particules mobiles sont des électrons en mouvement initialement vertical vers le bas.

Mais la seconde expérience apporte une information supplémentaire : la **force magnétique s'exerce sur la matière,** et pas seulement sur les électrons.

Pourtant, les ions positifs fixes du réseau cristallin ne subissent aucune force magnétique puisqu'ils restent (statistiquement) immobiles. Quelle est donc l'origine de cette force agissant sur la matière?

Les N électrons de la portion du fil subissent une force magnétique totale $\vec{F} = \Sigma \vec{f}$ qui les déplace vers la droite dans le cas étudié.

Par suite, les ions positifs sont attirés par les électrons déplacés, et toute la matière suit. Ainsi, la force magnétique est intégralement transmise au conducteur.

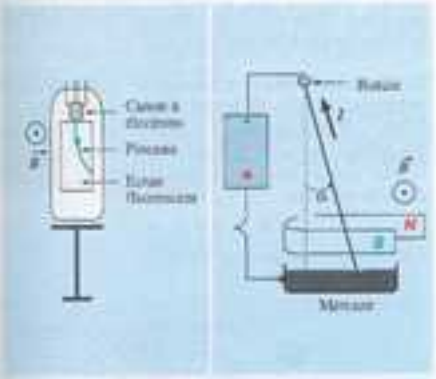


Fig. 5 *a.* ***Action d'un champ magnétique sur un pinceau d'électrons.***

Fig. 5 *b.* ***Action d'un champ magnétique sur un courant dans un fil conducteur.***

Dans les deux montages, compte tenu des sens de $\vec{B}$, des électrons et du courant, la déviation est vers la droite.

b) Expression macroscopique de la force magnétique

Il est possible d'obtenir une expression macroscopique traduisant l'effet global du champ magnétique sur le fil conducteur.

La figure 6 représente un fil vertical parcouru par un courant ascendant d'intensité I. La région bleutée du fil, de longueur ℓ et de section s, est une portion de fil qui baigne dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ pointant vers l'œil du lecteur.

Désignant toujours par N_1 le nombre de particules libres par unité de volume, la partie ombrée du fil, de volume $V = \ell\,.\,s$, en contient :

$$N = N_1\,.\,V, \quad \text{soit :} \quad N = N_1\,.\,\ell\,.\,s.$$

Chaque particule est soumise à la force magnétique $\vec{f} = q\,.\,\vec{v} \wedge \vec{B}$. Le vecteur $q\,.\,\vec{v}$ pointe vers le haut, que les particules envisagées soient des électrons ($q = -e$) de vitesse $\vec{v}$ vers le bas ou des particules positives ($q = e$) de vitesse opposée vers le haut. D'après les propriétés du produit vectoriel, la force magnétique $\vec{f}$ pointe ici vers la droite.

La force totale subie par les particules est :

$$\vec{F} = N\,.\,\vec{f}, \quad \text{soit :} \quad \vec{F} = N_1\,.\,\ell\,.\,s\,.\,q\,.\,\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

La première composante $N_1\,.\,\ell\,.\,s\,.\,q\,.\,\vec{v}$, du produit vectoriel précédent, contient l'expression établie plus haut pour l'intensité :

$$I = N_1\,.\,s\,.\,v\,.\,q.$$

Cette composante a donc pour valeur $I\,.\,\ell$. Son caractère vectoriel peut être conservé en orientant le conducteur dans le sens conventionnel du courant. Le produit $I\,.\,\vec{\ell}$ définit alors un vecteur dont le sens est celui du courant.

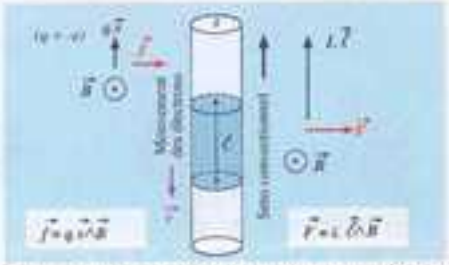


Fig. 6. ***Passage de l'échelle atomique à l'échelle macroscopique.***

L'expression de la force magnétique $\vec{F}$ agissant sur la portion de fil conducteur de longueur ℓ parcouru par un courant d'intensité I est donc :

$$\vec{F} = I . \vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

Dans les applications numériques :

F est en newton (N);
I en ampère (A);
ℓ en mètre (m);
B en tesla (T).

Elle est appelée **force de Laplace.** Il s'agit d'une force répartie qui a le même effet que si elle s'appliquait au milieu de la portion de conducteur baignant dans le champ uniforme.

c) *Caractéristiques de la force de Laplace*

En tant que produit vectoriel, la force de Laplace agissant sur un brin rectiligne de fil, possède les caractéristiques suivantes :

- sa *direction* est orthogonale au plan défini par le fil et le vecteur-champ $\vec{B}$;
- son *sens* est tel que le trièdre défini par les vecteurs $I . \vec{\ell}$, $\vec{B}$, $\vec{F}$ soit direct. ($\vec{\ell}$ est orienté dans le sens du courant);
- sa *valeur* est : $F = I . \ell . B . \sin \alpha$,

α désignant l'angle (inférieur à π) formé par le fil et le vecteur-champ magnétique.

En particulier, la force de Laplace est nulle si $I . \vec{\ell}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires ($\alpha = 0$).

La figure 7 résume quelques cas. Le plan dessiné est déterminé par $I . \vec{\ell}$ et $\vec{B}$. Quand elle existe, la force de Laplace lui est orthogonale.

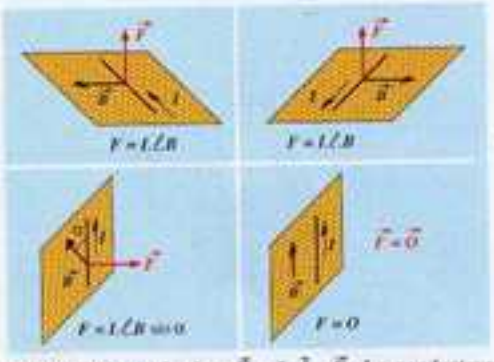


Fig. 7. ***Force de Laplace*** $\vec{F} = I . \vec{\ell} \wedge \vec{B}$. *Le conducteur est orienté dans le sens du courant. Le trièdre* $I . \vec{\ell}$, $\vec{B}$, $\vec{F}$ *est direct.*

d) *Applications*

— *Moteur linéaire*

Une tige conductrice cylindrique est posée sur deux rails conducteurs horizontaux. Un générateur entretient le passage d'un courant continu dans le circuit. Un champ magnétique vertical est appliqué sur tout ou partie de la tige mobile.

La force de Laplace $\vec{F}$, la met en mouvement (fig. 8).

La longueur du circuit qui intervient dans la formule de Laplace est celle de la portion de tige soumise au champ magnétique.

— *Balance de Cotton*

La balance de Cotton (fig. 9) est un appareil destiné à mesurer des champs magnétiques relativement intenses, ou à comparer deux champs entre eux. Elle n'est pratiquement plus utilisée maintenant, mais son principe est simple.

L'un des fléaux (OA) de la balance supporte un plateau. L'autre fléau est entouré d'un ruban plat conducteur $OLMNPO$ appliqué sur un support léger (non représenté sur la figure). Les portions LM et NP sont des arcs de cercles centrés sur l'axe O de rotation de la balance.

Un courant d'intensité I, réglable par rhéostat, parcourt le ruban. Son sens est choisi pour que le brin $MN = \ell$ subisse, sous l'influence du champ magnétique à mesurer, une force de Laplace $\vec{F}$, verticale vers le bas.

Tandis que sur les arcs de cercle toutes les lignes d'action des forces de Laplace élémentaires (telles que $d\vec{f}$ et $d\vec{f}'$), de sens opposés, passent par l'axe O de rotation : elles ne contribuent pas à faire tourner la balance.

Les constructeurs s'arrangent habituellement pour que les bras de levier soient égaux : $D = D'$. Dans ces conditions, l'équilibre de la balance est obtenu lorsque la force de Laplace a même valeur que le poids des masselottes m ajoutées dans le plateau :

$$I . \ell . B = m . g,$$

d'où résulte la mesure de B.



Fig. 8. ***Réalisation pratique d'un moteur linéaire.*** *Le champ magnétique ne baigne pas le circuit entier.*

2 ACTIONS MAGNÉTIQUES SUR UN CIRCUIT ENTIER

1. Circuit dans un champ magnétique uniforme

a) Étude théorique

Un circuit fermé plan de forme quelconque, parcouru par un courant, est constitué d'une succession de brins rectilignes.
Il baigne dans un champ magnétique uniforme orthogonal à son plan (fig. 10).
Chaque brin du circuit, de longueur $d\ell$, orienté dans le sens du courant, subit l'action d'une force de Laplace :

$$d\vec{f} = I.d\vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

La somme vectorielle de toutes ces forces élémentaires est :

$$\Sigma d\vec{f} = \Sigma (I.d\vec{\ell} \wedge \vec{B}).$$

Dans cette somme, tous les termes ont en commun I et $\vec{B}$. Elle s'écrit donc :

$$\Sigma d\vec{f} = I.(\Sigma d\vec{\ell}) \wedge \vec{B}.$$

Mais, le circuit étant fermé, la somme vectorielle $\Sigma d\vec{\ell}$ est nulle. Les forces de Laplace agissant sur le circuit fermé ont donc une somme vectorielle nulle : $\Sigma\vec{f} = \vec{0}$.

Plus généralement, la démonstration précédente reste valable pour un circuit fermé de forme quelconque, non nécessairement plan, placé dans un champ magnétique uniforme de direction quelconque. Ce circuit peut en effet encore être considéré comme une succession de petits brins rectilignes infinitésimaux $d\vec{\ell}$ et comme le circuit est fermé $\Sigma d\vec{\ell} = \vec{0}$.

Lorsqu'un circuit fermé parcouru par un courant continu est placé dans un champ magnétique uniforme, la somme vectorielle de toutes les forces de Laplace qu'il subit est nulle.



Fig. 9. *Schéma de principe d'une balance de Cotton.*

b) Exemples

• *Circuit rectangulaire vertical indéformable dans un champ uniforme horizontal* (fig. 11).
— Quand le champ magnétique $\vec{B}$ est orthogonal au plan du cadre, le cadre est soumis à quatre forces de Laplace deux à deux opposées et de même ligne d'action. Leurs effets s'annulent. Le cadre reste en équilibre (fig. 11 *a*).
— Lorsque le vecteur-champ magnétique $\vec{B}$ est parallèle au plan du cadre (fig. 11 *b*), aucune force ne s'exerce plus sur les brins horizontaux (I, $\vec{\ell}$ et $\vec{B}$ colinéaires). Les deux forces opposées $\vec{F}_1$ et $-\vec{F}_1$, appliquées aux brins verticaux, n'ont pas la même ligne d'action. Elles constituent un **couple** qui fait tourner le cadre.
Dans le cas où le champ magnétique horizontal n'est ni orthogonal, ni parallèle au plan du cadre, il peut être considéré comme constitué de deux composantes, l'une perpendiculaire au plan du cadre, qui ne provoque aucun effet et l'autre orthogonale au plan du cadre, qui le fait tourner.

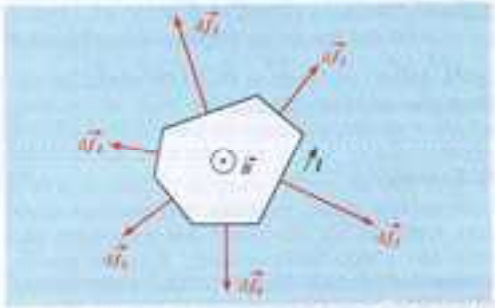


Fig. 10. ***Forces élémentaires de Laplace.*** *Un circuit de forme quelconque peut être considéré comme une succession de petits brins rectilignes.*

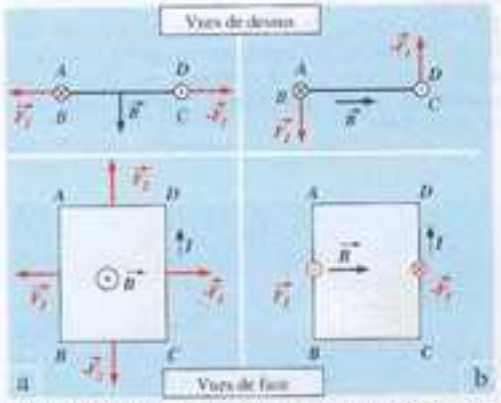


Fig. 11. ***Forces de Laplace agissant sur un cadre plan rectangulaire.***
a) Le cadre est en équilibre.
b) Le cadre va tourner sous l'action des deux forces.

• *Circuit rectangulaire déformable dans un champ magnétique uniforme vertical.*

Dans l'exemple du moteur linéaire, si maintenant le champ magnétique règne sur l'ensemble du circuit électrique, la somme des forces de Laplace est nulle. Seule, la force qui s'exerce sur la tige mobile est active, les autres n'ont aucun effet par suite des réactions du support et de la rigidité des circuits. Dans le cas indiqué, la force fait augmenter l'aire du circuit (fig. 12).

2. Circuit dans un champ magnétique quelconque

a) Étude théorique

Un circuit fermé de forme quelconque, peut toujours être considéré comme une succession de brins orientés $d\vec{\ell}_1$, $d\vec{\ell}_2$, ... chacun subissant la force élémentaire $d\vec{f}_i = I\,.\,d\vec{\ell}_i \wedge \vec{B}_i$. Dans le calcul de la somme des forces, le champ magnétique ne peut plus être mis en facteur car il n'est plus uniforme : $\vec{B}_1 \neq \vec{B}_2 \neq \ldots$

La somme des forces de Laplace élémentaires :

$$d\vec{f}_1 + d\vec{f}_2 + \ldots = I\,.\,d\vec{\ell}_1 \wedge \vec{B}_1 + I\,.\,d\vec{\ell}_2 \wedge \vec{B}_2 + \ldots$$

n'est plus nulle en général.

b) Exemple

Une bobine plate circulaire, comportant quelques tours de fils en cuivre, est suspendue par deux fils conducteurs souples. Elle est placée devant un aimant droit, source d'un champ magnétique non uniforme (fig. 13).

Si la bobine est parcourue par un courant, avec la disposition de l'aimant et le sens du courant indiqués sur la figure, elle vient s'embrocher sur l'aimant.

Elle s'est donc déplacée d'une région où les lignes de champ étaient écartées, pour se diriger vers la région où les lignes de champ se resserrent, donc des champs faibles vers les champs forts.

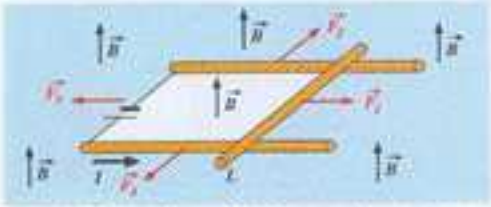


Fig. 12. *Circuit déformable dans un champ uniforme. La somme des forces est nulle. $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sont opposées. $\vec{F}_1$ déplace la tige LM et $\vec{F}_3$ est appliquée à une portion fixe du circuit.*

Ce résultat peut être retrouvé en remarquant que la bobine, assimilée à un solénoïde plat, présente à l'extrémité sud de l'aimant une face nord qui se trouve attirée.

Dans cette expérience, l'existence du mouvement de translation montre qu'**un circuit fermé parcouru par un courant, placé dans un champ magnétique non uniforme, subit l'action d'un ensemble de forces magnétiques dont la somme vectorielle n'est pas nulle.**

3 FLUX MAGNÉTIQUE

Lors des déplacements provoqués par des forces magnétiques, il peut se produire des **variations de l'aire** des circuits électriques (tige se déplaçant sur les rails, fig. 12), des **variations du champ magnétique** à travers les bobines (bobine s'embrochant sur un aimant, fig. 13), ou des modifications de l'orientation des **surfaces** dans les **champs** (rotation d'un cadre dans un champ uniforme, fig. 11 *b*).

Ces résultats peuvent être retrouvés en appliquant au circuit entier, une règle qui va être étudiée dans ce paragraphe.

1. Définition du flux magnétique

a) Vecteur-aire

Il est commode d'associer à un circuit fermé plan, un vecteur $\vec{S}$, de même valeur que son aire S et de même sens que le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à son plan (fig. 14) :

$$\vec{S} = S\,.\,\vec{n}.$$

La figure 15 donne une règle de la main droite qui permet de retrouver le sens du vecteur unitaire normal $\vec{n}$.

Il dépend du sens du courant dans le circuit.

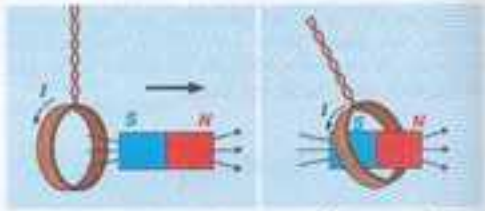


Fig. 13. *Action d'un champ magnétique non uniforme sur une bobine plate.*



Fig. 14. *Vecteur-aire. Son sens dépend de l'orientation choisie sur le conducteur.*

b) Flux magnétique

Si le champ magnétique est uniforme, par définition :

le flux Φ, du champ magnétique à travers un circuit est le produit scalaire du vecteur-champ $\vec{B}$ par le vecteur-aire $\vec{S}$.

L'unité du SI de flux magnétique est le weber (Wb).

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

Dans les applications numériques :

Φ s'exprime en weber (Wb);
B en tesla (T);
S en mètre carré (m^2).

• En tant que **produit scalaire**, le flux est une **grandeur algébrique** (fig. 16) :

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha,$$

où α désigne l'angle inférieur ou égal à π formé par $\vec{B}$ et $\vec{S}$.

• Le flux est maximal pour $\alpha = 0$. Dans ce cas $\vec{B}$ et $\vec{S}$ sont colinéaires et de même sens : $\Phi = B \cdot S$.

• Le flux est nul si $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas le champ $\vec{B}$ est parallèle au plan du circuit.

• Le flux est positif pour $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$ et négatif pour $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$.

Si une bobine traversée par un champ uniforme comporte N spires, le flux magnétique est :

$$\Phi = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S}.$$

Remarque :
Si le champ n'est pas uniforme à travers le circuit, il convient de décomposer la surface à travers laquelle le flux est calculé, en éléments d'aires dS suffisamment petits, pour que le champ puisse être considéré comme uniforme à travers chaque surface élémentaire. Le flux cherché est la somme de tous les flux élémentaires :

$$\Phi = \Sigma \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

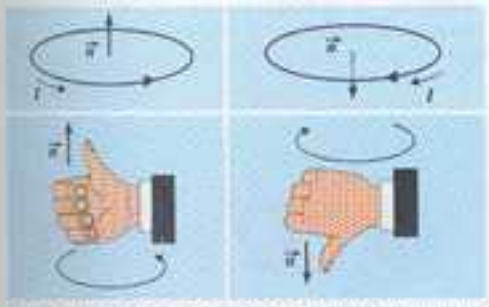


Fig. 15. Une règle de la main droite pour retrouver le sens du vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à une spire orientée.

2. Diverses circonstances de variations du flux

Les déplacements des conducteurs sous l'action des forces de Laplace étudiées précédemment s'accompagnent tous de **variations du flux magnétique** à travers les circuits. Il se produit en effet des variations d'aire (fig. 12), d'angle (fig. 11 *b*) ou de champ magnétique (fig. 13). Quand le sens du courant est connu, comme c'est le cas ici, **les circuits sont orientés dans le sens du courant.**

a) Variations de la valeur de l'aire

Le déplacement d'une tige sur rails horizontaux a été présenté à la figure 12. Le circuit entier est supposé baigner dans un champ magnétique uniforme orthogonal à son plan (fig. 17).

Sur la figure 17 *a*, le flux est positif car les vecteurs $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$ et $\vec{B}$ sont de même sens. La force de Laplace $\vec{F}$ tire la tige vers la droite. L'aire du circuit augmente. Ainsi, le flux augmente et sa variation $\Delta\Phi$ est positive.

Sur la figure 17 *b*, où le sens du champ a été inversé, le flux est négatif car les vecteurs $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$ et $\vec{B}$ sont de sens opposés ($\alpha = \pi$). La force de Laplace entraîne la tige vers la gauche. L'aire du circuit diminue. Ainsi, le flux négatif diminue en valeur absolue, donc, sa variation $\Delta\Phi$ est encore positive.

Le déplacement spontané de la tige s'effectue dans un sens tel que le flux magnétique à travers le circuit augmente.



Fig. 16. Flux magnétique. C'est une grandeur algébrique.

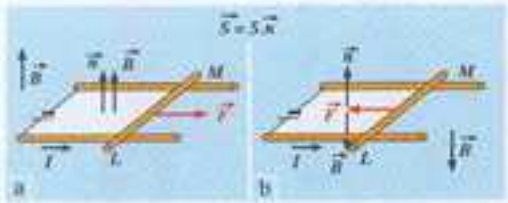


Fig. 17. Circuit déformable dans un champ uniforme. L'aire apparaît en blanc.
a) Flux positif croissant. b) Flux négatif décroissant en valeur absolue.
$\Delta\Phi > 0$ $\Delta\Phi > 0$

b) Variations de champ magnétique

La bobine parcourue par un courant qui vient « s'embrocher » sur l'aimant (fig. 13) se trouve, en position finale, dans une région où le champ est plus intense qu'au départ. L'aire de la bobine n'a pas varié. Le flux final, positif comme le flux initial dans ce cas, est devenu plus grand par suite de l'augmentation de la valeur B du champ.

c) Variations de l'angle α entre $\vec{B}$ et $\vec{S}$

Une bobine plate de N spires pouvant tourner autour d'un fil vertical de suspension (fig. 18), baigne dans un champ magnétique uniforme horizontal $\vec{B}$ engendré par des bobines de Helmholtz (non représentées).

Initialement, l'axe de la bobine est orthogonal au champ $\vec{B}$ (fig. 18 *a*). Le flux à travers chaque spire est alors nul $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$. Quand le courant est établi, la bobine tourne autour de la verticale.

Elle atteint, après quelques oscillations éventuelles, une position d'équilibre telle que son vecteur $\vec{S}$ soit parallèle au vecteur $\vec{B}$ ($\alpha = 0$) (fig. 18 *b*).

Le flux final est donc $\Phi = N.B.S$. Le même phénomène de rotation est observable en remplaçant la bobine par un solénoïde.

Ainsi, **la rotation spontanée d'un circuit dans un champ magnétique uniforme a lieu dans un sens tel que le flux magnétique à travers le circuit augmente.**

Remarque :
Le solénoïde s'oriente dans le champ magnétique comme le ferait un aimant droit. Les faces extrêmes du solénoïde peuvent être appelées l'une nord (celle d'où sort le vecteur unitaire $\vec{n}$ orienté en relation avec le sens du courant) et l'autre la face sud. Cela confirme l'**analogie entre les solénoïdes et les aimants droits.** Le solénoïde peut être considéré comme une juxtaposition de bobines plates et un aimant comme un ensemble de bobines équivalentes aux boucles microscopiques des courants ampériens.

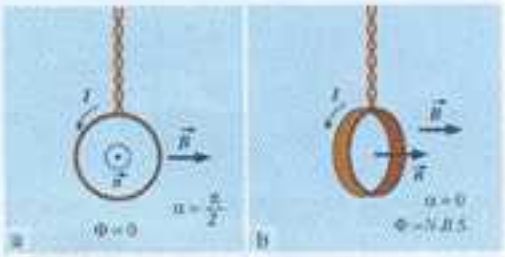


Fig. 18. ***Rotation d'une bobine plate dans un champ magnétique uniforme.***

3. Règle du flux maximal

a) Déplacements spontanés des circuits dans un champ magnétique

Les déplacements spontanés des circuits orientés dans le sens du courant s'effectuent de telle sorte que le flux magnétique à travers ces circuits augmente.
Cette évolution cesse lorsque le flux ne peut plus augmenter. En d'autres termes :

> La position d'équilibre stable finale d'un circuit parcouru par un courant placé dans un champ magnétique, est telle que le flux qui traverse le circuit soit maximal.

Cette règle, générale, est connue sous le nom de « **loi du flux maximal** ».
En pratique, des contraintes interviennent : zone d'intervention du champ d'étendue limitée, pesanteur, réactions d'axe...
Dans ces conditions, le circuit se déplace de telle sorte que le flux magnétique final qui le traverse prenne la valeur la plus grande possible compatible avec les contraintes du montage.
La position finale est une position d'équilibre stable.

b) Exemple

Une bobine plate circulaire suspendue verticalement est embrochée autour de la région centrale d'un aimant droit (fig. 19). Un courant est alors établi de telle sorte que le flux initial à travers la bobine soit négatif :

$$\alpha = \pi, \quad \Phi = -N.B.S.$$

La bobine est repoussée, sort de l'aimant ($B = 0$) et se retourne : le flux devient positif : $\alpha = 0$.
La bobine retournée revient s'embrocher autour de la région centrale de l'aimant où le flux magnétique positif qui la traverse est *maximal* :

$$\Phi = N.B.S.$$

La variation de flux au cours de cette opération est :

$$\Delta\Phi = (N.B.S) - (-N.B.S) = 2N.B.S.$$

L'analyse d'un tel mouvement par les forces de Laplace élémentaires, est nettement moins simple.

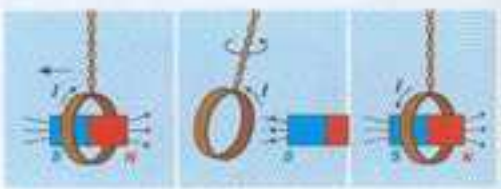


Fig. 19. ***Action d'un champ magnétique non uniforme sur une bobine plate.***

4 APPLICATIONS

Du fait de la mise en mouvement des circuits parcourus par les courants, les actions magnétiques sont riches d'applications pratiques.

1. Moteurs

a) *L'ancêtre*

La **roue de Barlow** (1822) est probablement le plus ancien des moteurs électriques rotatifs, mais sans doute le plus médiocre... (fig. 20). Un disque en cuivre, d'axe horizontal, trempe tout juste, à sa partie inférieure, dans un bain de mercure qui assure les contacts électriques sans empêcher la rotation du disque. Un aimant en U crée un champ magnétique perpendiculaire au disque dans la région radiale qui joint l'axe de rotation au bain de mercure. Quand le courant passe, les forces de Laplace, qui s'appliquent à la matière, font tourner la roue.

b) *Moteurs à courant continu*

La faible puissance de la roue de Barlow, vient de ce qu'une toute petite portion de la roue (pratiquement un rayon vertical) est sollicitée par les forces magnétiques. Les moteurs modernes ne présentent pas cet inconvénient.

• *Constitution*

La partie tournante, appelée **rotor**, d'un moteur est constituée de cadres rectangulaires en cuivre fixés autour d'un bâti cylindrique (fig. 21). Ils sont parcourus par un courant électrique continu.

Un champ magnétique est créé soit par un aimant pour les petits moteurs, soit par un électro-aimant pour les plus puissants.

Les pièces polaires sont cylindriques afin d'entourer le rotor et de créer un champ magnétique radial. Cette partie, immobile est le **stator**.

Ainsi, les fils du rotor subissent toujours des forces de Laplace tangentes au rotor, ce qui leur confère une efficacité rotative maximale.

Les figures 21 et 22 représentent schématiquement un moteur, en perspective et de profil, avec l'astucieux système de **collecteur** qui permet d'inverser le sens du courant dans les fils lors de la rotation.



Fig. 20 ***Roue de Barlow.***

• *Tension aux bornes*

En régime permanent, l'énergie électrique $U.q$ reçue par un moteur est convertie en chaleur $r.i^2.t = r.i.q$ et en énergie mécanique E_M. Par suite :

$$U.q = r.i.q + E_M,$$

ou :

$$U = r.i + \frac{E_M}{q}.$$

$E' = \frac{E_M}{q}$ est appelée **f.c.é.m.** du moteur.

La tension aux bornes d'un moteur s'exprime donc par :

$$U = r.i + E'.$$

Et l'énergie mécanique qu'il fournit est :

$$E_M = E'.i.t.$$

Si U est la tension aux bornes d'un moteur, et qu'il circule le courant i pendant la durée t :
— le moteur absorbe l'énergie électrique $U.i.t$;
— une partie $R.i^2.t$ est perdue sous forme de chaleur;
— le moteur restitue l'énergie mécanique $E'.i.t$ (voir Pour en savoir plus).

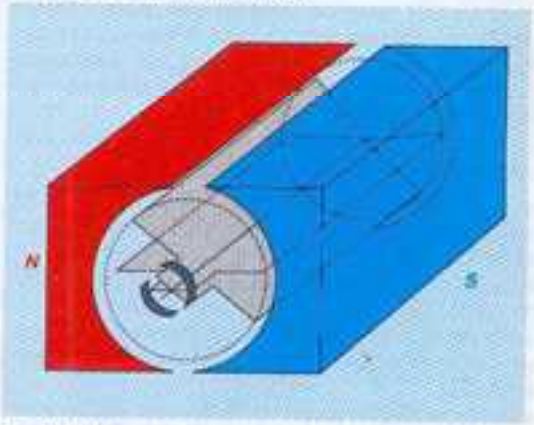


Fig. 21 ***Moteur à courant continu.***

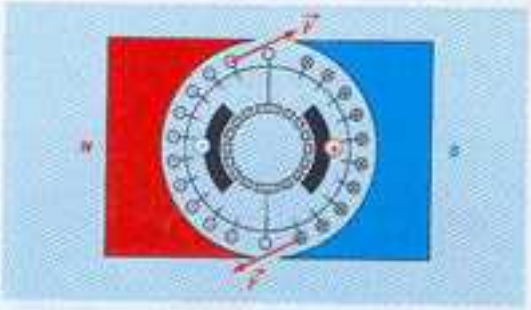


Fig. 22 ***Moteur vu de face.*** *Des balais reliés aux pôles + et − d'un générateur frottent sur le « collecteur ». Les diverses parties du collecteur sont reliées aux spires de telle sorte que le courant passe toujours dans le même sens quand elles sont à gauche, et dans l'autre sens à droite.*

Les moteurs électriques à courant continu sont très utilisés comme petits esclaves énergétiques : démarreur, essuie-glace, ventilateur de voiture... et pour la traction de grande puissance telles les motrices des T.G.V.

2. Appareils magnéto-électriques

a) Galvanomètre à cadre mobile

Un cadre rectangulaire sur lequel sont enroulées N spires de fil conducteur enduit d'un vernis isolant est placé dans un champ magnétique radial créé par un aimant permanent (fig. 23). Ce cadre est suspendu à un fil qui joue un triple rôle : soutenir le cadre, l'alimenter en courant à mesurer, servir de fil de torsion.

Lorsque le cadre tourne, le fil de suspension exerce un couple de rappel. L'angle de rotation à l'équilibre, est proportionnel à l'intensité du courant dans le fil.

Cet appareil, très sensible, permet de déceler de très faibles intensités, inférieures au nA (10^{-9} A), mais est d'une utilisation délicate.

b) Ampèremètres et voltmètres

• Les ampèremètres sont basés sur le même principe. Ils sont de construction plus robuste (le fil de torsion est remplacé par un ressort spiral). L'utilisation d'un shunt en dérivation permet d'adapter le calibre de l'appareil aux intensités à mesurer (fig. 24 *a*).

Ils sont montés en série dans les circuits afin de mesurer l'intensité qui les parcourt.

• Les ampèremètres sont transformés en voltmètres, en plaçant une forte résistance en série (fig. 24 *b*).

Ils sont montés en dérivation sur les dipôles dont on veut mesurer la tension aux bornes.

Leur résistance série, doit être grande sous peine de capturer le courant qui ne passerait plus dans le dipôle.

Ces appareils à cadre mobile sont maintenant remplacés par des ampèremètres ou des voltmètres **électroniques** moins fragiles, plus performants et d'emploi plus commode.



Fig. 23. *Galvanomètre à cadre mobile. Le champ magnétique est radial. Un ressort spiral rappelle le cadre vers sa position initiale.*

3. Haut-parleurs

Les haut-parleurs transforment des vibrations électriques en vibrations sonores. La figure 25 donne une représentation schématique d'un haut-parleur électrodynamique.

Un aimant, généralement en ferrite, crée un champ magnétique radial. Sa forme est étudiée pour qu'une petite bobine suspendue puisse coulisser autour de sa région centrale. Cette bobine reçoit les signaux électriques amplifiés fournis par un récepteur de radio, télévision ou autre.

La bobine est solidaire d'une membrane souple en carton plissé.

Lorsque le courant variable passe dans la bobine, elle subit l'action de forces de Laplace et y répond par des déplacements latéraux qui entraînent la membrane. Les tranches d'air voisines de la membrane sont ainsi mises en vibrations qui, de proche en proche, sont transmises à l'oreille des auditeurs. Voir la Fiche expérimentale.

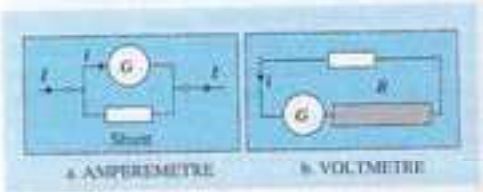


Fig. 24. *Transformation d'un galvanomètre à cadre mobile en ampèremètre ou en voltmètre.*

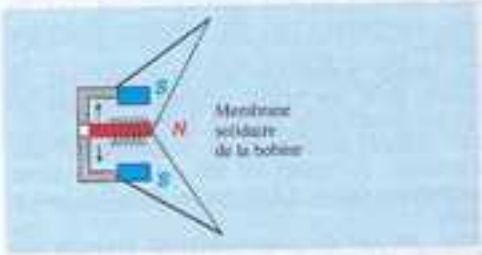


Fig. 25. *Coupe d'un haut-parleur électrodynamique.*



Fig. 26

Fiche expérimentale

MESURE DU CHAMP MAGNÉTIQUE PRODUIT PAR L'AIMANT PERMANENT D'UN HAUT-PARLEUR

1) DISPOSITIF

Cette mesure nécessite deux haut-parleurs identiques :
— l'un est totalement démonté pour mesurer le nombre de spires N de la bobine ainsi que le rayon r de ses spires;
— le deuxième sert à la mesure de B. Pour cela on découpe la membrane pour faciliter les mouvements verticaux de la bobine, qui est maintenu en place élastiquement par le *spider*.
Pour repérer la position d'équilibre de la bobine on colle sur le côté de la membrane un petit miroir, sur lequel on envoie un faisceau laser qui s'y réfléchit, et dont l'image est recueilli en A sur un écran voisin (fig. 27).

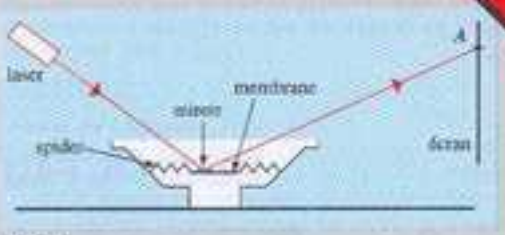


Fig. 27

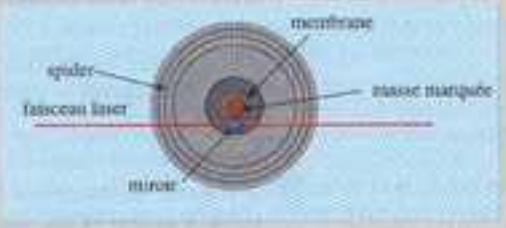


Fig. 28

2) EXPÉRIENCE

On place une masse marquée m, au centre de la membrane (fig. 28) : celle-ci descend sous l'action du poids $\vec{P} = m.\vec{g}$ et atteint une nouvelle position d'équilibre lorsque la force élastique de rappel du spider est égale au poids.

On envoie un courant d'intensité I, de façon que les forces de Laplace $d\vec{F}$ ramènent la membrane à sa position initiale (fig. 29), repérée en A sur l'écran, grâce au faisceau laser (attention au sens du courant!).
La résultante $\vec{F} = \Sigma\, d\vec{F}$ des forces de Laplace compense l'action du poids $\vec{P}$:

$$\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$$

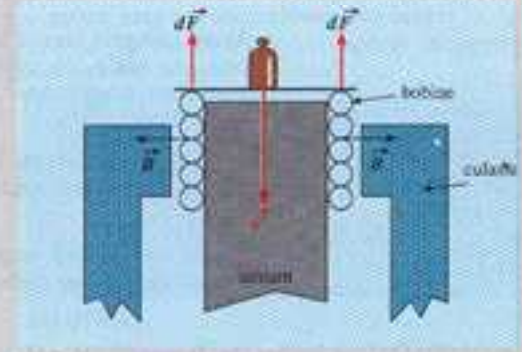


Fig. 29

3) CALCUL DU CHAMP MAGNÉTIQUE

Les N spires de la bobine sont placées dans un champ magnétique radial, d'intensité uniforme B, car les lignes de ce champ rentrent radialement dans l'aimant après avoir circulées dans la culasse (fig. 30).
Donc : $F = B.I.\ell = m.g = P$.
Or $\ell = 2\pi.r.N$, d'où :

$$B = \frac{m.g}{I.2\pi.r.N}$$

Exemple de résultats :
Pour un haut-parleur tel que : $r = 1{,}1$ cm et $N = 50$. En plaçant une masse de 100 g, l'équilibre est rétabli par un courant d'intensité $I = 0{,}53$ A, ce qui conduit à B calculé de 0,55 T.
Pour un haut-parleur usuel, son champ magnétique est de 0,5 à 0,8 T.

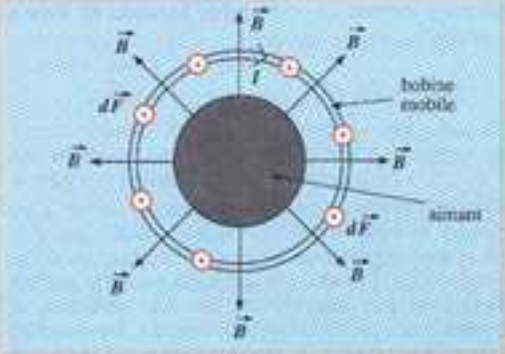


Fig. 30

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

- Se rappeler que les électrons circulent dans un circuit dans le sens inverse du sens conventionnel.

- Retrouver toutes les caractéristiques (sens, direction, valeur) de la **force de Laplace** à partir de son expression :

$$\vec{F} = I . \vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

- Retenir qu'un **circuit fermé**, placé dans un **champ magnétique uniforme**, subit l'action d'un ensemble de forces de Laplace dont la **somme vectorielle** est **nulle.**

- Avoir compris que si la somme vectorielle des forces agissant sur un circuit est nulle, le circuit peut tourner autour de certains axes de rotation, ou se déformer.

- Retenir que pour un circuit placé dans un champ magnétique **non uniforme,** la somme vectorielle des forces de Laplace est **non nulle.**

- Savoir que le flux magnétique à travers une surface d'aire S est une **grandeur algébrique** définie par :

$$\Phi = N . \vec{B} . \vec{S}.$$

- Savoir qu'un circuit soumis à des forces magnétiques est en **équilibre stable** lorsque le **flux** magnétique qui le traverse est **maximal.**

2 F.É.M. D'INDUCTION

Un courant induit prend naissance dans un circuit fermé bien qu'il ne contienne aucun générateur. De nombreux générateurs pourraient faire passer dans le circuit un courant de même intensité que celle du courant induit : il suffirait d'ajuster leur f.é.m. et leur résistance interne. Le plus simple est d'envisager celui dont la résistance interne est nulle. Par définition :

La f.é.m. d'induction est égale à celle d'un générateur sans résistance interne, qui créerait dans le circuit, un courant de même intensité que le courant induit.

1. Déplacement d'une tige dans un champ uniforme

a) Sens du courant induit

La figure 11 reprend un dispositif déjà utilisé pour étudier la force de Laplace : deux rails parallèles conducteurs horizontaux supportent une tige conductrice. Mais il n'y a plus de générateur, remplacé ici par un galvanomètre sensible.

Le circuit fermé est orienté de sorte que le flux inducteur soit positif. Lorsque la tige est déplacée vers la droite, l'aire du circuit augmente, le flux inducteur aussi. Sa variation $\Delta\Phi$ est positive. Par suite, le flux induit φ, et le courant induit i, sont négatifs. Dans la tige, le courant induit va donc de M vers L.

Remarque :
Le sens du courant induit peut être déterminé d'une autre façon : la cause de sa naissance est le déplacement de la tige vers la droite. Le sens du courant induit est tel que la force de Laplace $\vec{F}' = i\,\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ agissant sur LM tente de s'opposer au mouvement. $\vec{F}'$ doit donc pointer vers la gauche, ce qui nécessite un courant dans le sens de $\overrightarrow{ML}$.

b) La tige considérée comme un générateur

Le tableau ci-contre rappelle les conventions de signes qui vont être utilisées dans la suite.

• *Signe de la f.é.m.*
Lorsqu'elle est déplacée la tige engendre un courant.

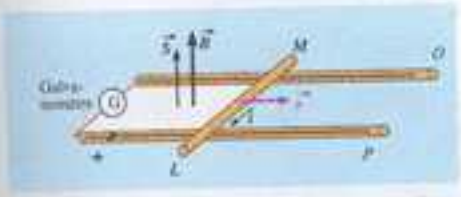
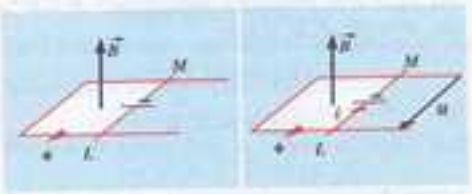


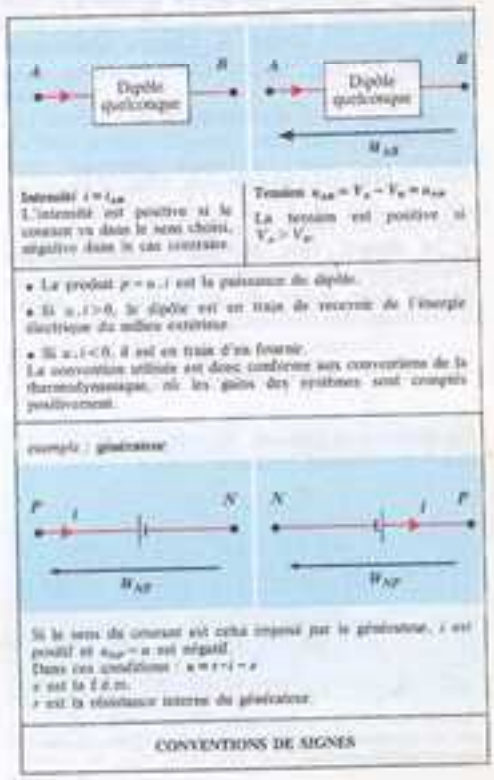
Fig. 11. *Tige déplacée orthogonalement à un champ magnétique uniforme. Le courant induit qui prend naissance dans le circuit est tel que la force de Laplace $\vec{F}$, agissant sur le brin LM le ralentisse.*

Le générateur qui, placé entre L et M, fournirait un courant dans le même sens devrait avoir la disposition suivante :



Par convention, **la f.é.m. e, d'un générateur a le même signe que le courant qu'il tend à débiter.** Avec les orientations choisies, lorsque la tige est déplacée vers la droite, $\Delta\Phi$ est positif et i est négatif. La **f.é.m. induite e, est négative.**

• *Valeur de la f.é.m. induite*
D'après le principe de l'inertie, la force F qu'il convient d'appliquer à la tige pour la maintenir en mouvement uniforme vers la droite est, en l'absence de frottements, juste opposée à la force de Laplace F', qui résulte de l'apparition du courant induit dans ML. Il faut donc fournir de l'énergie mécanique à la tige pour que son mouvement reste uniforme. Cette énergie est intégralement convertie en énergie électrique.



A tout instant la puissance électrique :

$$P = |e| . |i|$$

est égale à la puissance mécanique : $P' = F' . v$.
Or, $F' = |i| . \ell . B$, d'où :

$$|e| . |i| = |i| . \ell . B . v$$

et :

$$|e| = B . \ell . v.$$

• *Générateur en circuit ouvert*
Si les rails sont retirés et si la tige est déplacée comme précédemment dans le champ magnétique, il n'y a plus de courant induit car le circuit est ouvert (fig. 12). La tige joue alors le rôle de générateur débranché qui, comme une pile qui ne débite pas, possède une f.é.m., dont la valeur absolue reste :

$$|e| = B . \ell . v.$$

Son signe dépend de l'orientation donnée à la tige. Dans le cas de la figure 12 *a* elle est négative.

Le signe de cette f.é.m. peut se retrouver par une autre méthode. Quand la barre est déplacée vers la droite (par exemple) à la vitesse $\vec{v}$, tous ses électrons libres ont un mouvement d'ensemble de vitesse $\vec{v}$. Chacun d'eux subit l'action d'une force magnétique :

$$\vec{F} = (-e) . \vec{v} \wedge \vec{B}$$

dont le sens est celui de $\overrightarrow{LM}$ (fig. 12 *b*).

Les électrons libres de la tige ont donc tendance à se diriger vers M, qui devient chargée négativement. Corrélativement, l'extrémité L devient pôle positif du générateur par défaut d'électrons. La tension :

$$u = u_{LM} = V_L - V_M,$$

est positive et comme $V_L - V_M = r . 0 - e = -e$, la f.é.m. est bien négative.

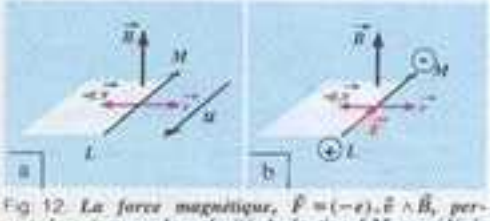


Fig. 12. ***La force magnétique, $\vec{F} = (-e) . \vec{v} \wedge \vec{B}$, permet de retrouver la polarité de la tige LM considérée comme un générateur.***

2. Loi de Faraday

a) Expression de la f.é.m. induite

L'intensité du courant induit, et, par suite, la valeur de la f.é.m. induite, augmentent (en valeur absolue) avec la vitesse de variation du flux magnétique inducteur. Par exemple, le courant induit devient nettement plus intense quand un aimant est approché ou éloigné rapidement d'une bobine que lorsqu'il est mis lentement en mouvement (fig. 13). Ainsi, une variation donnée $d\Phi$ de flux inducteur conduit à une f.é.m. importante si elle a lieu pendant un intervalle de temps dt, très court.
L'expression qui rend compte de ces faits expérimentaux, en reliant la f.é.m. induite e, à la variation du flux inducteur Φ, est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

e en volt (V)
Φ en weber (Wb)
t en seconde (s)

Le signe − résulte de la loi de Lenz, selon laquelle e (de même signe que le courant induit) est de signe opposé à celui de $d\Phi$.
Cette relation donne la définition générale de la f.é.m. induite e. Elle présente l'intérêt d'établir un lien entre une cause (variation de flux inducteur) et un effet (apparition d'une f.é.m.). Son énoncé est connu sous le nom de **loi de Faraday.**

La f.é.m. d'induction est l'opposée de la dérivée par rapport au temps du flux inducteur à travers le circuit.

b) Confirmation

Dans l'expression $|e| = B . \ell . v$ établie plus haut pour la tige qui se déplace orthogonalement au champ uniforme, $\ell . v$ représente l'aire balayée par la tige en 1 s, c'est-à-dire $\frac{\Delta S}{\Delta t}$.

$|e| = B . \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ représente la vitesse de variation du flux inducteur, ce qui démontre la relation de Faraday dans un cas particulier.

c) Vérification

Voir fiche expérimentale.



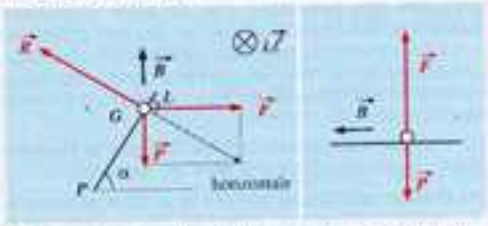
Fig. 13. ***Variation plus ou moins rapide de flux magnétique.***

1. EXERCICES RESOLUS

La condition d'équilibre des forces $\vec{R} + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$ donne, en projection sur les rails orientés vers le haut : $0 - P.\sin\alpha + F.\cos\alpha = 0$, d'où il vient :

$$\tan\alpha = \frac{F}{P} = 2; \quad \alpha = 63°.$$

• Si les branches restent parallèles aux rails, il en est de même de la force de Laplace. Sa valeur étant double du poids, la tige montera même si les rails sont verticaux et il n'y a pas d'équilibre possible pour la tige intérieure à l'aimant (à moins de placer les rails au-dessus de la tige).

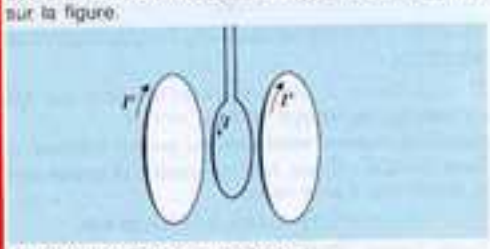


2) Selon la disposition indiquée, la force de Laplace est maintenant vers le haut, comme l'indique la seconde figure ci-dessus. La tige se soulève, ce qui interrompt le passage du courant et supprime la force de Laplace : la tige retombe aussitôt, ce qui rétablit le courant : **la tige sautille.**

EXERCICE 3

Flux maximal

Une bobine plate circulaire, suspendue par deux fils conducteurs souples, est située dans un plan vertical. Ses caractéristiques sont indiquées ci-dessous. Elle est parallèle au plan de deux bobines de Helmholtz sources d'un champ magnétique de valeur $B = 0{,}12$ T. Les sens des courants dans les bobines sont indiqués sur la figure.



Pour les applications numériques :
Bobine plate : $N = 25$ spires ; Rayon $r = 5$ cm ;
Intensité $I = 0{,}40$ A.

Bobines de Helmholtz :
Rayon $R = 10$ cm ; Intensité $I' = 0{,}60$ A.

1) Reproduire la figure en y indiquant le sens du vecteur-champ magnétique $\vec{B}$ et le sens du vecteur-aire $\vec{S}$ associé à la bobine plate, en relation avec le sens du courant d'intensité I. Représenter la situation sur un schéma où la bobine est vue de face. Représenter le sens des forces de Laplace agissant sur deux brins de fil élémentaires diamétralement opposés sur la bobine.

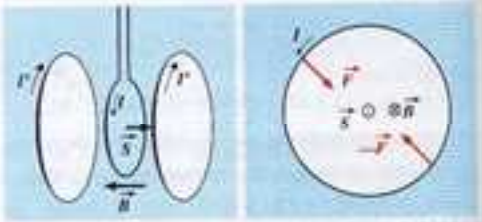
2) Calculer le flux initial Φ_1 à travers la bobine plate. Montrer qu'elle est en équilibre instable dans sa position initiale.

3) Déterminer le flux Φ_2 à travers la surface de la bobine plate lorsqu'elle atteint sa position finale d'équilibre stable, que l'on précisera.

4) Quelle est la variation de flux à travers la bobine lors de son passage de sa position initiale à sa position finale ? Cette variation de flux est-elle la même si les intensités I et I' sont simultanément divisées par 2 ?

SOLUTION

1) Le sens du vecteur-champ $\vec{B}$ créé par les bobines de Helmholtz et le sens du vecteur-aire $\vec{S}$ s'obtiennent en utilisant une règle de la main droite (par exemple). La bobine plate étant orientée dans le sens du courant, $\vec{S}$ pointe vers la droite alors que $\vec{B}$ pointe vers la gauche dans le cas de figure fourni par l'énoncé.



Pour deux brins diamétralement opposés sur la bobine, les forces de Laplace sont opposées et pointent vers le centre du cercle ($\vec{F}$ et $-\vec{F}$ par exemple). La somme de toutes ces paires de forces appliquées en des points diamétralement opposés est nulle (elles ont toutes la même valeur si le cercle est décomposé en brins infinitésimaux de mêmes longueurs). La bobine reste donc en équilibre. Cet équilibre est instable car, à la moindre rotation autour de l'axe vertical, les lignes d'action des forces ne sont plus confondues : elles entraînent la rotation de la bobine.

2) L'aire de la spire vaut :

$$S = \pi.r^2 = 3{,}14 \times (5 \times 10^{-2})^2 \approx 7{,}85 \times 10^{-3}\ \text{m}^2.$$

En valeur absolue, le flux vaut :

$$N.B.S = 25 \times 0{,}12 \times 7{,}85 \times 10^{-3} \approx 2{,}36 \times 10^{-2}\ \text{Wb}.$$

Mais, $\vec{B}$ et $\vec{S}$ étant de sens opposés, le flux initial est négatif, d'où :

$$\Phi_1 \approx -2{,}4 \times 10^{-2}\ \text{Wb}.$$

3) La bobine se retourne face pour face afin que le flux final soit maximal, positif, il a même valeur absolue que le précédent (le vecteur-aire $\vec{S}$ a tourné de π) :

$$\Phi_2 \approx 2{,}4 \times 10^{-2}\ \text{Wb}.$$

4) La variation de flux vaut $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$:

$$\Delta\Phi \approx 4{,}8 \times 10^{-2}\ \text{Wb}.$$

1. EXERCICES RESOLUS

Si les intensités sont toutes divisées par 2, il en va de même pour le champ magnétique créé par les bobines de Helmholtz (quel que soit le montage, la valeur du champ magnétique est proportionnelle à l'intensité du courant). B est la seule variable qui intervienne sur la variation de flux, qui est donc **moitié de la précédente.** Le fait que l'intensité dans la bobine plate soit divisée par 2 n'intervient pas.

Remarque :
Les données fournies pour les bobines de Helmholtz, ainsi que l'intensité du courant dans la bobine plate, n'étaient pas nécessaires.

EXERCICE 4

Moteur à courant continu

Un générateur de f.é.m. $E = 220$ V, de très faible résistance interne, alimente un moteur par l'intermédiaire d'un rhéostat de résistance maximale $R = 21{,}5\ \Omega$. Un ampèremètre très peu résistant est inséré dans le circuit.

1) Le moteur est bloqué et le rhéostat réglé à sa résistance maximale. L'intensité dans le moteur vaut alors $I = 10$ A. Débloqué, le moteur se met à tourner de plus en plus vite et la résistance du rhéostat est réduite progressivement à 0. Quand le moteur tourne à raison de 1 500 tours par minute, l'intensité vaut encore $I = 10$ A.

a) Déterminer la résistance interne r, du moteur et sa f.c.é.m. E' quand le régime de rotation est atteint.

b) Expliquer le rôle du « rhéostat de démarrage » utilisé.

2) Le rotor du moteur comporte $n = 548$ brins constituant 274 spires enroulées sur un cylindre de longueur $\ell = 0{,}10$ m et de rayon $R = 0{,}05$ m. Le champ magnétique radial entre les pièces polaires a pour valeur $B = 0{,}5$ T.
Calculer, lorsque l'intensité qui passe dans les cadres vaut $I = 10$ A :

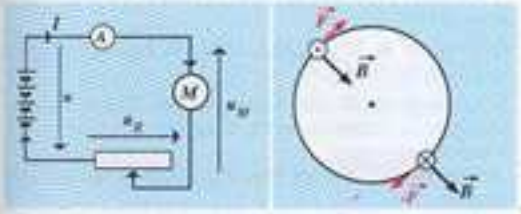
a) la force de Laplace appliquée à chacun des fils;

b) le moment du couple total par rapport à l'axe de rotation du moteur;

c) la puissance mécanique du moteur.

SOLUTION

1) *a)* Orientons le circuit dans le sens du courant. Le sens des flèches associées aux tensions est indiqué sur le schéma ci-dessous.



• Le générateur, de résistance interne nulle, tend à débiter un courant d'intensité positive : $E > 0$,

$$U = 0 . I - E \quad \text{donne} \quad U = -E$$

• Le rhéostat n'a pas de f.é.m. :

$$u_R = R . I$$

• La tension aux bornes du moteur est :

$$u_M = r . I + E'$$

La loi des mailles appliquée au circuit donne :

$$U + u_R + u_M = 0$$

Par suite, $(r + R) . I + E' = -U = E$.
Si le moteur est bloqué, $E' = 0$; $R = 21{,}5\ \Omega$; $I = 10$ A;
$r = \dfrac{E}{I} - R = 22 - 21{,}5\ \Omega$ et : $\boldsymbol{r = 0{,}5\ \Omega}$.

Si le moteur tourne,

$$R = 0 \quad \text{et} \quad E' = E - r . I = 220 - 0{,}5 \times 10 = 215 \text{ V};$$

$$\boldsymbol{E' = 215 \text{ V}}.$$

b) Au moment du démarrage, la f.c.é.m. du moteur est encore nulle et, en l'absence de rhéostat, l'intensité serait $I = \dfrac{E}{r} = \dfrac{220}{0{,}5} = 440$ A, ce qui pourrait détruire les enroulements. Le rhéostat évite cet inconvénient.

2) *a)* La force de Laplace sur un brin de fil a pour valeur

$$F = I . \ell . B . \sin\frac{\pi}{2} = 10 \times 0{,}1 \times 0{,}5 \times 1; \quad \boldsymbol{F = 0{,}5 \text{ N}}.$$

b) Sur le brin symétrique du précédent par rapport à l'axe de rotation, la force a même valeur, mais est de sens opposé (seconde figure). Le moment de ces deux forces par rapport à l'axe vaut :

$$M_1 = F . 2R = 0{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}05 \text{ N.m}.$$

Il y a $\dfrac{n}{2} = 274$ paires de brins actifs. Le moment du couple total vaut donc, sans tenir compte du petit nombre de brins inactifs pendant qu'ils passent d'une pièce polaire à l'autre :

$$M = \frac{n}{2} . M_1 = 274 \times 0{,}05 = 13{,}7 \text{ N.m}; \quad \boldsymbol{M = 13{,}7 \text{ N.m}}.$$

c) Pour un tour de moteur, le travail de la force appliqué à un brin vaut $W_1 = F . 2\pi . R$ et, comme il y a n brins, le travail total par tour est :

$$W_1 = n . F . 2\pi . R = 548 \times 0{,}5 \times 2 \times 3{,}14 \times 0{,}05 = 86 \text{ J}.$$

Le moteur tourne à raison de $\dfrac{1\,500}{60} = 25$ tours par seconde. $W = 25 W_1 = 2\,150 \text{ J.s}^{-1}$.
La puissance mécanique est donc $\boldsymbol{P = 2\,150 \text{ W}}$.

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATION

Sans calculs

Exercice 1

Un brin de fil conducteur rectiligne parcouru par un courant baigne dans un champ magnétique uniforme orthogonal au fil. Quelles sont les actions réciproques des actions suivantes :

1) Action des forces magnétiques sur les électrons mobiles du conducteur?

2) Action des électrons sur les ions positifs statistiquement immobiles dans le conducteur?

Exercice 2

Y a-t-il flux magnétique à travers un solénoïde :

1) Lorsqu'un aimant droit lui fait face alors qu'il n'y passe aucun courant?

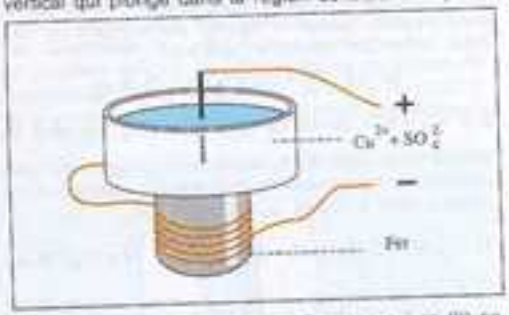
2) Lorsqu'il est parcouru par un courant sans qu'il existe de sources de champ magnétique dans son voisinage?

3) Lorsqu'un aimant droit lui fait face et qu'il y passe du courant?

Ne pas tenir compte du champ géomagnétique.

Exercice 3

Un récipient cylindrique en fer, en forme de cristallisoir, à fond isolant, contient une solution de sulfate de cuivre (II). Il est posé sur un cylindre de fer autour duquel est entouré un fil conducteur afin de constituer un électro-aimant. Ce fil est soudé en A au récipient. Le courant dans l'électrolyte est amené par un fil vertical qui plonge dans la région centrale du liquide.



1) Comment les ions sulfate et les ions cuivre (II) se déplaceraient-ils dans le récipient en l'absence d'électro-aimant?

2) Quelles sont les caractéristiques de la force de Lorentz agissant sur ces ions lorsque l'électro-aimant fonctionne?

3) Dans quel sens le liquide se met-il à tourner dans le récipient?

4) Cette « roue de Barlow liquide » fonctionne-t-elle exactement selon le même principe que la roue de Barlow décrite dans le cours?
Pour une réalisation expérimentale éventuelle, prévoir la possibilité d'intensités assez grandes.

Conduction

• Exercice 4

Utiliser les résultats de l'exercice résolu N° 1 (fil de longueur 0,5 m et de section 1 mm²) pour déterminer la vitesse des électrons, toujours pour une intensité de 1 A, dans des fils :

1) De longueur double et de même section.

2) De longueur moitié et de section double.

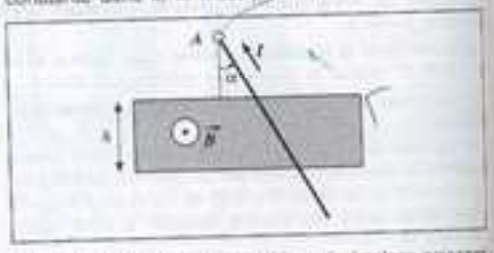
Exercice 5

On réalise l'électrolyse d'une solution de chlorure de sodium à 0,1 mol.L^{-1}, entre deux électrodes de platine planes, verticales, assimilables à un condensateur plan. Le champ électrique horizontal est pratiquement uniforme. Les ions sodium Na^+ se déplacent deux fois plus vite que les ions chlorure Cl^-. L'intensité du courant vaut 0,5 A. Quelle est la vitesse des ions?

Force de Laplace sur un élément de circuit

• Exercice 6

Un fil conducteur initialement vertical est mobile autour d'une rotule A. Il baigne dans un champ magnétique horizontal qui s'exerce dans une région parallélépipédique de hauteur h représentée en coupe sur la figure. Le dispositif qui fait passer un courant d'intensité constante dans le fil n'est pas représenté.



Exprimer la valeur F_{ab} de la force de Laplace agissant sur la portion de fil qui baigne dans le champ, en fonction de F_0 (valeur de la force quand le fil est vertical) et de l'écart angulaire α, que fait le fil avec la verticale.

Exercice 7

Un conducteur rectiligne de longueur $\ell = 0,50$ m est parcouru par un courant d'intensité $I = 10$ A. Les composantes horizontale et verticale du champ magnétique terrestre ont pour valeurs $B_h = 20\ \mu T$ et $B_v = 42,5\ \mu T$ ($\vec{B}_v$ pointe vers le sol).
Préciser les caractéristiques de la force de Laplace agissant sur le fil.

1) Lorsque le fil est vertical parcouru par un courant descendant.

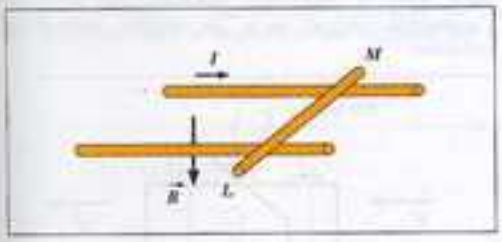
2) Lorsque le fil est horizontal, le courant allant du sud vers le nord.

3) Lorsque le fil est horizontal et forme un écart angulaire α (compris entre 0 et 2π) avec la position précédente.
Les réponses seront accompagnées de schémas soignés.

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 8

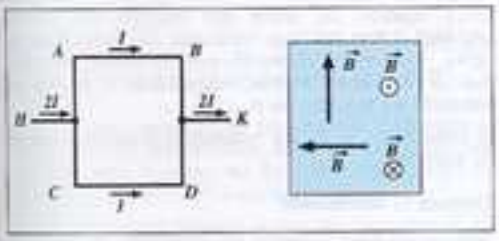
Une barre LM de longueur $\ell = 0{,}08$ m peut glisser sans frottement sur deux rails horizontaux distants de $d = 0{,}05$ m. La valeur du champ magnétique est $B = 0{,}2$ T. L'intensité du courant vaut $I = 2$ A.



Déterminer les caractéristiques de la force de Laplace agissant sur la tige LM.

Exercice 9

Un cadre rectangulaire $ABDC$, vertical, est parcouru par un courant indiqué par la figure ci-dessous.

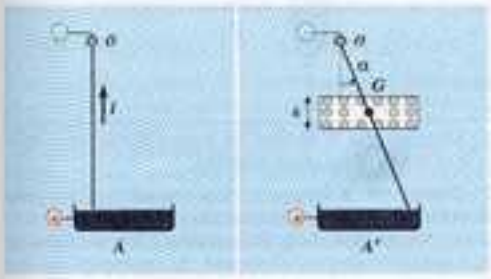


1) Déterminer le sens des forces de Laplace agissant sur les différents brins du cadre $ABDC$, dans les quatre cas de champ magnétique uniforme indiqués sur la figure.

2) Le cadre ne peut tourner qu'autour de l'horizontale HK. Y a-t-il, dans les quatre situations précédentes, rotation spontanée du cadre?

Exercice 10

Une tige rectiligne conductrice de longueur $L = OA$ est attachée en O à une rotule autour de laquelle elle peut tourner pratiquement sans frottements. Son extrémité inférieure A plonge dans le mercure. La tige est parcourue par un courant de A vers O, d'intensité I.



Données numériques :

$OA = 0{,}30$ m; $h = 0{,}05$ m; $B = 0{,}020$ T; $mg = 0{,}10$ N.

1) La tige est verticale et plonge de $d = 1$ cm dans le mercure. De quel angle θ peut-on écarter la tige sans qu'elle perde le contact avec le mercure?

2) Un champ magnétique dont la zone d'influence est parallélépipédique, de hauteur h, est appliqué de telle sorte que la force de Laplace puisse être considérée comme appliquée au centre d'inertie de la tige. Quelle doit être l'intensité du courant pour que la tige s'écarte de $\alpha = 10°$ par rapport à la verticale lorsqu'elle a pris sa position d'équilibre?

Forces de Laplace sur un circuit entier

Exercice 11

Un cadre rectangulaire vertical $MNPQ$, de côtés horizontaux $MN = PQ = a = 2{,}0$ cm et verticaux $MQ = NP = b = 3{,}0$ cm, comporte $N = 25$ spires de fil fin. Il est mobile autour d'un axe vertical passant par son centre d'inertie. Les fils de suspension servent aussi à faire passer le courant dans le cadre; ils sont suffisamment souples pour ne pas s'opposer par torsion à la rotation du cadre.

Le cadre est placé entre les branches d'un aimant en U et, en l'absence de courant, son plan est parallèle au vecteur-champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et horizontal ($B = 0{,}030$ T). Lorsque le courant passe dans le cadre, son intensité vaut $I = 200$ mA.

1) Faire un schéma représentant le cadre (vu de face) et un aimant en U créant un champ pointant vers la droite sur la figure. Déterminer les caractéristiques des forces de Laplace agissant sur le cadre dans cette position lorsqu'on y lance le courant.

2) Faire un schéma vu de dessus lorsque le plan du cadre a tourné de 30° autour de la verticale. Calculer les forces de Laplace agissant alors sur les côtés du cadre; les représenter sur le schéma.

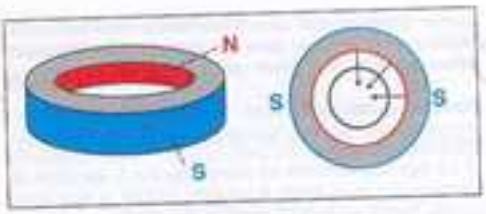
3) Faire un schéma vu en perspective du cadre lorsqu'il a tourné de 90° à partir de la position initiale. Calculer les forces de Laplace et les représenter.

4) Les forces de Laplace restent-elles constantes pendant la rotation? Que peut-on dire de leur somme vectorielle en n'importe quelle position?

Exercice 12

Un aimant en ferrite à la forme d'un cylindre creux dont l'extérieur constitue une région sud et l'intérieur une région nord. Une bobine plate circulaire de 20 spires, coaxiale à l'aimant, de poids 0,10 N, est placée à l'intérieur.

2. EXERCICES PROPOSES



Est-il possible que la bobine plate se soulève si l'on y fait passer un courant? Si oui, préciser ses caractéristiques.

• Exercice 13

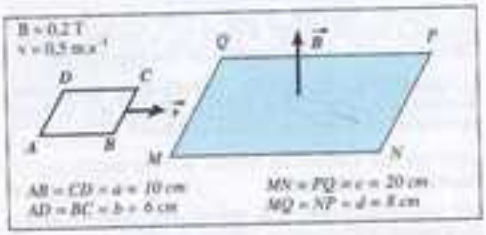
Une spire circulaire, de rayon $R = 8$ cm, tourne autour d'un axe vertical passant par son centre d'inertie, avec une vitesse angulaire $\omega = 100$ rad.s^{-1}. Elle évolue dans un champ magnétique uniforme horizontal de valeur $B = 0,30$ T. A la date $t = 0$, le vecteur-aire associé à la spire est colinéaire au vecteur-champ magnétique, et de même sens.
Déterminer l'expression donnant en fonction du temps le flux magnétique à travers la spire.

Exercice 14

Calculer le flux magnétique à travers un solénoïde de longueur 50 cm, comportant 250 spires, chacune d'aire 8 cm^2, parcouru par un courant d'intensité $I = 0,40$ A. Le champ magnétique sera supposé uniforme dans tout le solénoïde. Le résultat du calcul donne-t-il une valeur par excès, par défaut, ou exacte?

Exercice 15

Un cadre rectangulaire plan horizontal $ABCD$ se déplace avec une vitesse horizontale $\vec{v}$. Il pénètre dans une région où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ délimité dans le même plan que celui du cadre par un rectangle $MNPQ$. A la date $t = 0$, le côté BC du cadre coïncide avec MQ. Le cadre est orienté comme l'indique la figure.

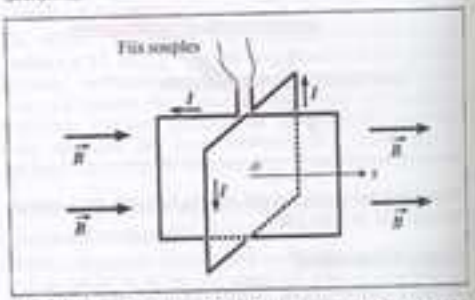


Représenter la courbe montrant l'évolution en fonction du temps du flux magnétique à travers le cadre.

Flux maximal

• Exercice 16

Le dispositif ci-dessous, constitué de deux cadres conducteurs carrés orthogonaux de côtés a, peut tourner autour d'un axe vertical. Il se trouve initialement dans la disposition indiquée sur la figure. L'ensemble baigne dans un champ magnétique uniforme.



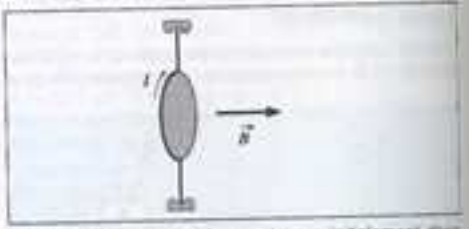
1) Calculer le flux magnétique à travers le dispositif dans sa position initiale.

2) La rotation du cadre est repérée par l'écart angulaire θ que fait l'axe horizontal $\overrightarrow{Ox}$ indiqué sur la figure, solidaire du dispositif, avec le champ magnétique $\vec{B}$. Exprimer le flux magnétique à travers le dispositif en fonction de θ.

3) Déterminer la ou les position(s) d'équilibre stable du système.

Exercice 17

Une bobine plate circulaire est constituée de 50 spires de rayon moyen $R = 6$ cm (une seule de ces spires est représentée sur la figure ci-dessous). La bobine peut tourner sans frottement autour de son diamètre vertical. Initialement, la bobine est placée entre deux bobines de Helmholtz (non représentées sur la figure) qui créent le champ magnétique $\vec{B}$ indiqué, orthogonal au plan de la bobine. Un courant d'intensité $I = 0,5$ A traverse la bobine, dans le sens précisé sur la figure.



1) Montrer que la bobine se trouve initialement dans une position d'équilibre instable.

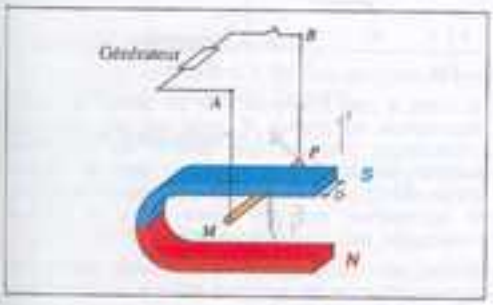
2) Calculer la variation du flux magnétique à travers la bobine lorsque, quittant la position précédente, elle atteint sa position d'équilibre stable. Cette variation de flux dépend-t-elle de l'intensité du courant?

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APRÈS BACCALAURÉATS

• Exercice 18

Une tige en cuivre MP, de poids $P = 0{,}05$ N, de longueur $\ell = 8{,}0$ cm est suspendue à deux conducteurs très souples AM et BP de longueur $L = 50$ cm. Elle baigne dans un champ magnétique créé par un aimant en U dont la disposition est indiquée sur la figure.



$AM = BP = L = 0{,}50$ m; $MP = 8$ cm.
Largeur de l'aimant : $D = 0{,}5$ cm; $B = 0{,}15$ T.

1) Dans quel sens doit-on faire passer le courant, et quelle doit être son intensité, pour que la tige MP soit déplacée vers la droite, les fils AM et BP formant un écart angulaire $\alpha = 20°$ avec la verticale?

2) On fait tourner l'aimant autour de l'horizontale MP de telle sorte que le champ $\vec{B}$ créé par l'aimant reste orthogonal à MP ($\vec{B}$ reste dans un plan vertical).
L'angle formé par $\vec{B}$ et la verticale est désigné par β. Établir la relation entre α (écart entre les fils AM et BP avec la verticale) et β.

3) Représenter graphiquement, pour β variant de 0 à 2π, la courbe montrant l'évolution de α en fonction de β.

Exercice 19

Deux rails parallèles en cuivre, équidistants de ℓ, sont inclinés d'un angle α sur l'horizontale $\left(0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.
Une tige LM, de poids $\vec{P}$, peut glisser sans frottement sur ces rails. Deux butées situées à la base des rails empêchent la tige de quitter le circuit.
Un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, orthogonal aux rails et vers le haut, créé par un aimant, s'exerce entre les deux rails sur une zone de longueur d. Un générateur G impose un courant d'intensité I, constante dans le circuit GLM, indépendante de la position de la tige LM sur les rails.



Pour les applications numériques :
distance entre les rails : $\ell = 5$ cm;
$d = 5$ cm pour la zone d'action du champ;
$B = 0{,}02$ T; $\alpha = 10°$;
Poids de la tige LM : $P = 0{,}05$ N;
Longueur des rails : $OA = 1$ m.

1) La tige est posée sans vitesse initiale sur les rails dans la zone d'action du champ magnétique. A quelles conditions reste-t-elle en équilibre?
Dans la suite de cet exercice, on suppose que le courant va de L vers M.

2) La tige, lâchée sans vitesse initiale à l'extrémité supérieure des rails, commence à subir l'effet du champ magnétique après avoir glissé sur une distance D réglable par déplacement de l'aimant source du champ. L'intensité du courant vaut maintenant $I = 15$ A.

a) Exprimer sa vitesse v_0 lorsqu'elle pénètre dans le champ.

b) A quelles conditions peut-elle traverser toute la zone d'action du champ?

3) Où faut-il poser la tige pour qu'elle reste en équilibre entre O et A?

4) On se place dans le cas où la distance D (définie à la question 2) vaut 5 cm. La tige est lâchée en O sans vitesse initiale. Quel est le flux du champ magnétique à travers le circuit? le flux final? La règle du flux maximal est-elle respectée?

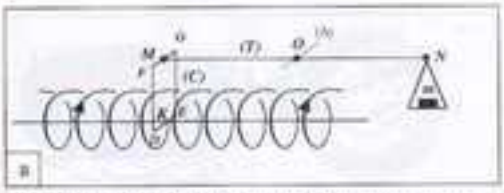
• Exercice 20

Dans tout cet exercice, on négligera le champ magnétique terrestre.

1) Avec un fil de diamètre $d = 0{,}60$ mm, on veut construire un solénoïde (S) dont le rayon d'une spire est $R = 4$ cm et comportant $N = 180$ spires; l'espace laissé libre entre deux spires consécutives est 1 mm.
Calculer la longueur L de ce solénoïde.
Le fil est parcouru par un courant d'intensité $I = 9$ A; quelle est la valeur B_0 du champ magnétique au centre du solénoïde, si l'on admet valable la formule relative au solénoïde infiniment long?

2) On mesure le champ magnétique au centre de ce solénoïde à l'aide d'un dispositif semblable à la balance de Cotton.

2. EXERCICES PROPOSES



a

Une tige (T) perpendiculaire en O à un axe horizontal (Δ) est mobile autour de cet axe; (T) porte un plateau à son extrémité N; un cadre (C), $DEGF$, rectangulaire, indéformable, dont le plan est perpendiculaire à (T), est fixé par le milieu de son côté horizontal supérieur à l'autre extrémité M de (T).

Ce cadre (C) est parcouru par un courant d'intensité I'; si $I' = 0$ la tige (T) et les côtés DE et FG sont horizontaux; l'axe du solénoïde (S) est parallèle à (T), dans le même plan vertical et le milieu K du côté DE est au centre du solénoïde.

Maintenant, l'intensité du courant I' est différente de zéro.

a) Indiquer sur un schéma et en les justifiant le sens du courant I' pour que la force qui s'exerce sur DE soit dirigée vers le bas (le sens de l'intensité du courant dans le solénoïde est indiqué sur le schéma).

b) La tige (T) est de nouveau horizontale si l'on ajoute sur le plateau une masse $m = 0{,}226$ g. On a

$DE = \ell = 2$ cm; $MO = d = 25$ cm; $NO = d' = 10$ cm;

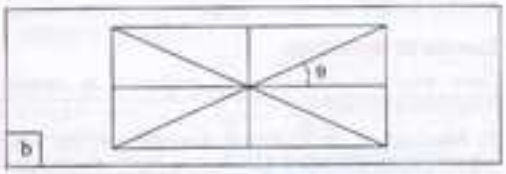
l'intensité de la pesanteur est $g = 9{,}8\ \text{m.s}^{-2}$.

Montrer que les forces qui s'exercent sur FD et GE n'interviennent pas dans l'étude de l'équilibre.

Trouver à l'aide de cette expérience la valeur B_2 du champ magnétique au centre du solénoïde pour $I = 9$ A et $I' = 6{,}5$ A.

3) La formule $B_3 = 4\pi \times 10^{-7} \times \dfrac{N.I}{L}.\cos\theta$ permet aussi de calculer la valeur du champ magnétique au centre du solénoïde (S). θ est le demi-angle au sommet des cônes ayant pour base les extrémités du solénoïde et pour sommet le centre du solénoïde.

Calculer B_3 pour $I = 9$ A.

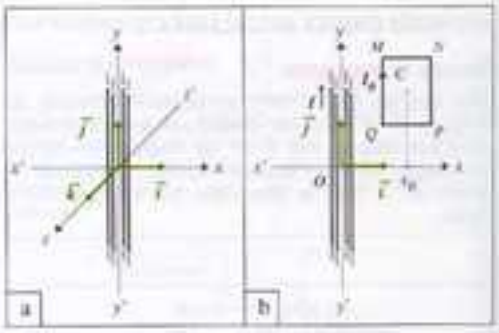


b

4) Connaissant la valeur de B_1, B_2 et B_3, que peut-on en conclure quant à la validité des formules proposées?

Exercice 21

Quatre fils conducteurs, rectilignes et infiniment longs, sont disposés le long de l'axe $y'y$ d'un système d'axes orthonormées $(Oxyz)$, de vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Chaque fil est parcouru par un courant continu I circulant dans le sens du vecteur $\vec{j}$ (fig. a).



a b

Fig. a Fig. b

1) Dans le plan horizontal xOz on réalise le spectre magnétique du champ $\vec{B}$ créé par les quatre fils conducteurs. Sachant que ceux-ci se comportent comme un fil unique parcouru par un courant d'intensité $4I$, dire comment on peut obtenir le spectre, le représenter sur une figure claire et préciser l'orientation des lignes de champ.

2) Un cadre rectangulaire indéformable $MNPQ$ de largeur $MN = 2a$, de longueur $MQ = b$, est placé dans le plan vertical xOy, à proximité de l'axe $y'y$; ses côtés MQ et NP sont parallèles à $y'y$, son centre de symétrie C se trouve à une distance $x_0 > a$ de l'axe $y'y$. Un courant I_0 circule dans le cadre, dans le sens $MNPQM$ (fig. b).

a) Sachant que la valeur du champ magnétique $\vec{B}$ créé par n fils, en un point quelconque A du plan xOy est donné par la relation $B = \dfrac{\mu_0.n.I}{2\pi.x}$, calculer la valeur de $\vec{B}$ aux points M, N, P, Q; représenter sur une figure le vecteur $\vec{B}$ en ces points.

b) On supposera que le champ magnétique créé par le courant I_0 est négligeable.

1. Montrer que la somme vectorielle des forces qui s'exercent sur les côtés MN et PQ est nulle.

2. Déterminer les forces qui s'exercent sur chacun des côtés QM et NP. Calculer leurs valeurs puis les représenter sur une figure claire.

3. Trouver la somme vectorielle des forces appliquées au cadre. Calculer sa valeur et la représenter sur la figure précédente.

Application numérique : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ SI; $n = 4$; $I = 15$ A; $I_0 = 5$ A.

$x_0 = 3$ cm; $a = 2$ cm; $b = 8$ cm.

3) Exprimer en fonction de x_0, a, b et I le flux Φ du champ magnétique créé par le courant I passant dans chacun des fils, à travers le cadre $MNPQ$. On établira le flux élémentaire $d\Phi$ créé par le courant à travers une bande parallèle aux côtés QM et PN, de largeur dx et située à une distance x du fil; puis on intégrera l'expression obtenue.

Au cours de cet exercice on négligera l'influence du champ magnétique terrestre.

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES DESTINÉS A TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 22 A.1.a.

Faire un tableau à deux colonnes, la première indiquant les formules de définition, la seconde les unités utilisées, pour les grandeurs suivantes : intensité d'un courant; champ magnétique; flux magnétique.

Exercice 23 A.1.a.

Le flux est-il une grandeur algébrique? une grandeur orientée?

Exercice 24 A.1.a.

Le weber par mètre carré a été une unité du SI avant de recevoir un nom spécial. Lequel?

Exercice 25 A.1.b.

Quelle est la grandeur physique qui pourrait s'exprimer en newton-mètre par ampère?

Exercice 26 A.1.b.

Quel est dans nos régions l'ordre de grandeur (exprimé par une puissance de 10) du flux géomagnétique à travers une spire plate d'aire 1 m² dont le plan est perpendiculaire au plan méridien magnétique.

Exercice 27 A.1.c.

Énoncer la loi du flux maximal.

Exercice 28 A.1.c.

Comment définit-on le flux magnétique à travers une surface :

1) dans le cas du champ magnétique uniforme?

2) dans le cas où le champ n'est pas uniforme?

Exercice 29 A.2.b.

Que peut-on dire de la somme vectorielle de toutes les forces de Laplace agissant sur un circuit fermé parcouru par un courant plongé dans un champ magnétique uniforme? Démontrer cette propriété.

Exercice 30 A.2.b.

Une spire fixe, d'aire $S = 0{,}1\ m^2$, dont le plan est parallèle à ceux de deux bobines de Helmholtz, est parcourue par un courant qui a initialement le même sens que celui qui passe dans les bobines. Le champ magnétique entre les bobines vaut $B = 0{,}05$ T. Calculer le flux du champ magnétique à travers la spire. Que devient ce flux si le sens du courant dans les bobines de Helmholtz est inversé (mais pas celui dans la spire)? Quelle est la variation du flux magnétique à travers la spire?

Exercice 31 B.1.

Chercher dans un annuaire l'adresse d'un fabricant de moteurs électriques. Lui écrire pour lui demander de la documentation.

Exercice 32 B.2.

Rédiger un texte visant à expliquer à quelqu'un qui n'y connaît rien en physique (le pauvre!) ce qu'est une force de Laplace.

*** Exercice 33** B.3.

Un trièdre $Oxyz$, associé à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ contient dans le plan xOy une spire carrée $OABC$ de côté a. Les composantes du champ magnétique sont les suivantes :

$$\vec{B}_x = \vec{0}, \quad \vec{B}_y = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B}_z = \left(B_0 . \sin \frac{\pi . x}{a}\right) . \vec{k}$$

Calculer le flux du champ magnétique à travers la spire carrée.

Exercice 34 B.3.

Reprendre l'exercice n° 10 et y ajouter la question n° 3 :

3) *Question difficile.* Sans modifier l'intensité, l'aimant est maintenant placé au niveau de la cuve à mercure, juste au-dessus. La tige conserve-t-elle la même position d'équilibre? Si elle tourne, dans quel sens et de combien? Quel sera dans ce cas le phénomène observé?

Exercice 35 B.4.

Représenter par des flèches les forces de Laplace agissant sur un cadre rectangulaire vertical (faire dans chaque cas une vue de face où le courant tournera dans le sens direct, une vue de profil et une vue de dessus) lorsque :

1) Le champ magnétique uniforme est orthogonal au plan du cadre et le flux à travers le cadre est négatif.

2) Le champ magnétique uniforme est parallèle au plan du cadre, pointant vers la droite lorsque le cadre est vu de face.

3) Le champ magnétique pointe vers le sol; il fait un angle de 30° avec la verticale.

Exercice 36 C.1.b.

Un circuit fermé parcouru par un courant tombe dans un champ magnétique uniforme. Que peut-on dire de la somme vectorielle des forces de Laplace et des forces de pesanteur agissant sur tous les brins du circuit.

Exercice 37 C.2.b.

Une spire de 1 m de diamètre est parcourue par un courant d'intensité 2 A. Un escargot avance sur la spire avec une vitesse égale à la vitesse moyenne de progression des électrons, qui sont donc pour lui statistiquement immobiles. Y a-t-il, pour l'escargot, courant électrique dans la spire? Si oui, dans quel sens?

Pour en savoir plus

CONDUCTION ÉLECTRIQUE

Conducteurs ohmiques

Les électrons dans un fil conducteur sont mis en mouvement par un champ électrique crée par un générateur (fig. 31).
Les électrons se présentent en B avec une énergie potentielle $E_{pB} = -e.V_B$. Arrivés en A, ils n'ont plus que l'énergie potentielle :

$$E_{pA} = -e.V_A.$$

Chacun d'eux a perdu :

$$E_{pB} - E_{pA} = +e.(V_A - V_B),$$

en allant de B en A. C'est le réseau d'ions positifs qui absorbe cette énergie : les ions, choqués par les électrons en mouvement, vibrent. Ceci se traduit par une élévation de température du fil.
D'autre part, la perte d'énergie potentielle est par définition égale au travail de la force électrique (statistiquement) constante. Elle peut donc se calculer par :

$$W = \vec{F}_m . \overrightarrow{BA} = -e.\vec{E}.\overrightarrow{BA} = e.E.\ell,$$

en désignant par ℓ la longueur du fil AB.
De : $e.E.\ell = e.(V_A - V_B)$, nous tirons $E.\ell = U$, avec $U = V_A - V_B$.

• Puisque les électrons sont en mouvement uniforme, il faut admettre qu'une force retardatrice $\vec{F}_r$, opposée à la force motrice $\vec{F}_m$, agit sur eux.
L'hypothèse la plus simple est de supposer que $\vec{F}_r = -\lambda.\vec{v}$, du même type que celle du frottement visqueux citée chapitre 5.
La mécanique du mouvement de l'électron se décrit donc par $\vec{F}_m + \vec{F}_r = \vec{0}$, soit $e.\vec{E} = \lambda.\vec{v}$.
D'où : $v = \dfrac{I}{N_1.s.e}$

Par suite, $e.E = \lambda.v = \lambda.\dfrac{I}{N_1.s.e}$. En remplaçant E dans l'expression $U = E.\ell$, il vient :

$$U = \lambda.\frac{I.\ell}{N_1.s.e^2} = \frac{\lambda}{N_1.e^2}.\frac{I.\ell}{s}.$$

• Le terme $\rho = \dfrac{\lambda}{N_1.e^2}$ est appelé **résistivité** du matériau. Il dépend de sa nature : le cuivre est plus conducteur que le fer.

Posant ensuite $R = \dfrac{\rho.\ell}{s}$, on reconnaît la **résistance** du fil. Finalement, on aboutit à $U = R.I$ qui n'est autre que la **loi d'Ohm.**

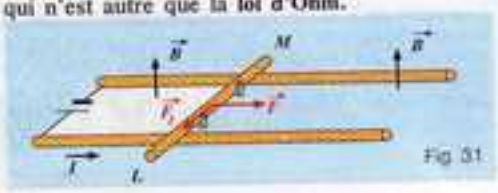


Fig. 31

F.c.é.m. d'un moteur

Son origine

L'existence de la f.c.é.m. peut se comprendre à partir du moteur linéaire (fig. 32).

• Si deux butées empêchent la tige LM de démarrer : le moteur est bloqué. Une intensité I passe dans le circuit et une force de Laplace $\vec{F}$, sans effet, agit sur LM.

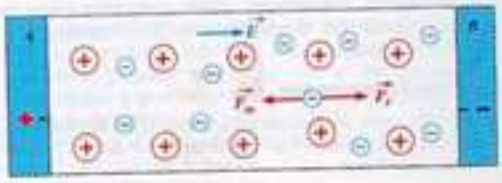
• Les butées étant ôtées, la tige démarre et prend un mouvement accéléré. A la date t, la vitesse des électrons dans la tige LM a deux composantes : l'une, de M vers L, très petite, due à la présence du générateur, est responsable de la force de Laplace précédente; l'autre, est la vitesse de la tige, vers la droite dans le cas de figure.
Du fait de cette vitesse $\vec{v}$ de la tige, chaque électron subit une force $\vec{F}_1 = -e.\vec{v} \wedge \vec{B}$, qui, d'après les règles du produit vectoriel, est horizontale, de sens $\overrightarrow{LM}$. Or, les électrons sont incités par le générateur à passer dans l'autre sens dans la tige, de M vers L. Ce mouvement imposé aux électrons par le générateur se trouve donc ralenti. Par suite l'intensité diminue, ainsi corrélativement, que la force de Laplace appliquée au conducteur LM.
S'il n'y avait pas de frottements, la tige atteindrait un mouvement uniforme quand l'intensité deviendrait nulle. En réalité, il y a toujours des frottements et la tige est en mouvement uniforme quand la force de Laplace diminuant devient opposée à la force de frottement. Le mouvement est encore plus lent si l'on demande à la tige de travailler, par exemple de soulever un objet par l'intermédiaire d'une poulie.
Comme dans l'exemple précédent du conducteur ohmique, les électrons se présentent en M avec une énergie potentielle $-e.V_M$. A leur sortie en L, il leur reste une énergie potentielle $-e.V_L$.
Chacun a perdu :

$$-e.V_M - (-e.V_L) = e.(V_L - V_M).$$

Si q est la quantité d'électricité transporté par ces électrons, l'énergie perdue est :

$$q.(V_L - V_M),$$

que l'on note $q.E'$.
E' est appelée la f.c.é.m. du moteur.


Fig. 32

8 Induction électromagnétique

1 Variation de flux à travers un circuit fermé.

2 F.é.m. d'induction.

3 Auto-induction.

4 Applications.



Stator d'un alternateur de 900 MW.

Le chapitre précédent a montré que les circuits parcourus par un courant peuvent être mis en mouvement dans un champ magnétique. Mais comment ***créer un courant*** *en utilisant les phénomènes magnétiques? La méthode à utiliser fait l'objet de ce chapitre.*

1 VARIATION DE FLUX A TRAVERS UN CIRCUIT FERMÉ

Le **flux** d'un champ magnétique uniforme à travers une surface est défini par :

$$\Phi = \vec{B} \,.\, \vec{S}.$$

Si le sens du courant dans la spire n'est pas connu, la spire peut être orientée de deux façons. Le sens du vecteur-aire $\vec{S}$, résulte de ce choix (fig. 1), et par suite le signe du flux magnétique.

Une **variation de flux magnétique** à travers un circuit peut résulter d'une variation du vecteur-champ (en grandeur ou direction), d'une variation du vecteur-aire (en grandeur ou direction), ou encore des variations simultanées de ces deux grandeurs vectorielles.

1. Obtention d'un courant induit

a) Variations du vecteur-champ magnétique

• *Variations de la valeur du champ*

Lorsqu'une bobine reliée à un galvanomètre est traversée par un champ magnétique de valeur **variable**, le galvanomètre décèle le passage d'un courant. Ce courant, créé dans la bobine bien qu'elle ne soit reliée à aucun générateur, est appelé **courant induit**.

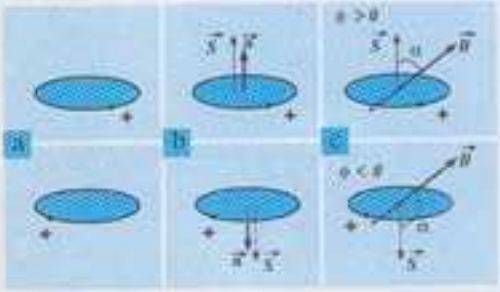


Fig. 1. ***Flux du champ magnétique à travers la surface délimitée par une spire plane.***

a) La spire est orientée.

b) Le sens du vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à la spire s'en déduit. Celui du vecteur-aire $\vec{S} = S\,.\,\vec{n}$ est le même.

c) Le flux magnétique est le produit scalaire : $\Phi = \vec{B}\,.\,\vec{S}$, de valeur algébrique $B\,.\,S\,.\cos\alpha$. Son signe dépend de l'orientation choisie.

— Dans l'expérience de la figure 2 la variation de la valeur du champ, résulte du déplacement d'un aimant ou d'un solénoïde vers une bobine fixe. Une fois de plus, l'analogie de comportement entre aimants et les courants se manifeste. Un courant induit prend aussi naissance dans la bobine si c'est elle qui est rapprochée ou éloignée de l'aimant ou du solénoïde fixes.

— Dans l'expérience de la figure 3 *a*, il y a variation du champ magnétique créé par le solénoïde intérieur à la bobine, par modification de l'intensité qui le parcourt.

— Dans l'expérience de la figure 3 *b*, un barreau de fer doux est introduit à l'intérieur d'un solénoïde entouré par la bobine. Les boucles microscopiques de courants ampériens intérieures au fer s'orientent sous l'influence du champ magnétique engendré par le solénoïde. Cela provoque une augmentation du champ.

Dans toutes les expériences précédentes, l'observation du galvanomètre montre que **le courant induit n'existe que pendant la durée de la variation de la valeur du champ magnétique.**

Remarque :
Le courant induit ne peut prendre naissance que si le circuit est fermé.

• *Variations du vecteur $\vec{B}$ en valeur et direction*

La figure 4 schématise une expérience où le champ à l'intérieur de la bobine fixe, varie en valeur et direction par suite de la rotation d'un aimant.

Le galvanomètre montre que si l'aimant est maintenu en rotation uniforme, le courant créé dans la bobine est alternatif. Cette expérience donne le principe des générateurs de courants alternatifs, appelés alternateurs à induit fixe.

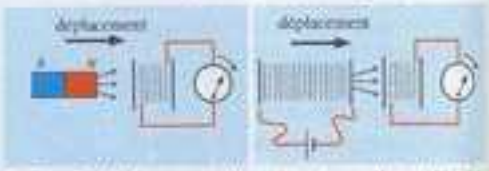


Fig. 2. ***Le déplacement d'un aimant ou d'un solénoïde vers une bobine coaxiale induit un courant dans la bobine. Un galvanomètre sensible décèle le courant induit, qui n'existe que pendant les déplacements.***



Fig. 3. ***Variation du champ magnétique dans une bobine coaxiale à une autre.***

b) Variations du vecteur-aire

• *Modification de la valeur de l'aire*

Un aimant est placé verticalement sur une table. Il est entouré par une bobine plate circulaire souple d'environ 1 m de diamètre (fig. 5).

Lorsque l'aire de la bobine est modifiée, en resserrant ou écartant les spires, le galvanomètre indique le passage d'un courant induit.

• *Modification de la direction du vecteur-aire*

Une bobine plate, constituée de plusieurs spires d'environ 1 m de diamètre, est initialement verticale. Elle est tournée rapidement d'un demi-tour, son axe de rotation horizontal *EW* ayant la direction Est-Ouest (fig. 6).

Un galvanomètre sensible, relié à la bobine, dévie légèrement pendant la rotation.

Le vecteur-aire garde la même valeur, mais il change de direction. Le champ magnétique qui intervient est ici le *champ géomagnétique*, qui pointe obliquement vers le sol.

c) Conclusion

Le flux magnétique, dont les variations provoquent l'apparition d'un courant induit dans le circuit fermé, est appelé **flux inducteur.**

Toute variation du flux inducteur à travers un circuit fermé entraîne l'existence d'un courant induit dans ce circuit. Ce courant n'existe que pendant la variation du flux inducteur.

Ce phénomène est appelé **induction électromagnétique.**

Attention : Aussi important soit-il, un flux ne suffit pas pour créer un courant induit. **Il faut que ce flux varie.**

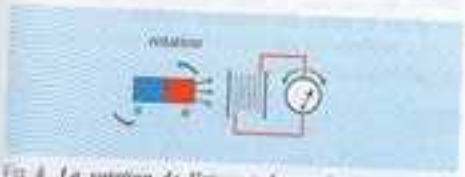


Fig. 4. La rotation de l'aimant devant la bobine y fait naître un courant alternatif.



Fig. 5. Une variation d'aire d'un circuit provoque l'apparition d'un courant induit.

2. Sens du courant induit

a) Étude expérimentale

Le sens du courant induit créé dans une bobine plate, lorsque les extrémités nord ou sud d'un aimant droit en sont approchées ou éloignées, dépend de la nature (*N* ou *S*) de l'extrémité de l'aimant et du sens de son mouvement (fig. 7).

Lorsque l'aimant est approché, il se crée dans la spire un courant induit de sens tel, que la face de la bobine devienne de même nature (nord ou sud) que celle de l'extrémité approchée de l'aimant. Le courant induit change de sens si, au contraire, l'aimant est éloigné :

Le sens du courant induit dans la bobine est celui qui crée une face qui tente de s'opposer au mouvement de l'aimant.

La figure 8 donne un moyen simple pour retrouver la nature nord ou sud de la face d'une spire parcourue par un courant.

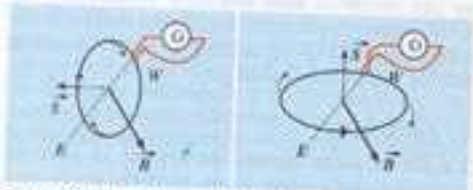


Fig. 6. Rotation d'une bobine dans le champ géomagnétique. Le vecteur-aire tourne dans le plan méridien magnétique (vertical).

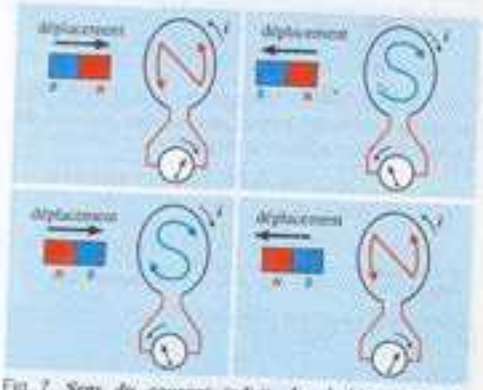


Fig. 7. Sens du courant induit. La bobine tente de s'opposer aux mouvements de l'aimant.



Fig. 8. Les flèches qui prolongent les lettres N ou S indiquent le sens du courant induit.

b) Flux induit par variation de flux inducteur

La règle précédente s'applique aux déplacements relatifs d'un aimant et d'une bobine. Plus généralement, toute variation de flux inducteur à travers un circuit, crée un courant induit, et fait intervenir la séquence :

- variation $\Delta\Phi$ **du flux inducteur;**
- création d'un **courant induit** i;
- ce courant induit crée un champ magnétique $\vec{b}$, appelé **champ induit;**
- ce champ $\vec{b}$, fait apparaître un flux φ, appelé **flux induit** :

$$\Delta\Phi \longrightarrow i \longrightarrow \vec{b} \longrightarrow \varphi$$

Par exemple, si un solénoïde est entouré d'une bobine (fig. 9), une diminution de l'intensité I dans le solénoïde, provoque une diminution du champ $\vec{B}$, donc du flux inducteur à travers la bobine.
Le **courant induit** i, créé dans la bobine est dans ce cas de même sens que I.
Ce courant induit crée un **champ induit** $\vec{b}$ de **même sens que** $\vec{B}$ et le flux de $\vec{b}$ à travers la bobine est le **flux induit** φ.

c) Loi de Lenz

La loi de Lenz permet de prévoir le sens du courant induit, d'une façon générale :

> Le sens du courant induit est tel, que le flux induit créé à travers le circuit fermé où il prend naissance, tende à s'opposer à la variation du flux inducteur.

Comme l'intensité i du courant induit et le flux induit φ sont de même signe, cet énoncé se traduit mathématiquement par :

$$\varphi \cdot \Delta\Phi < 0.$$

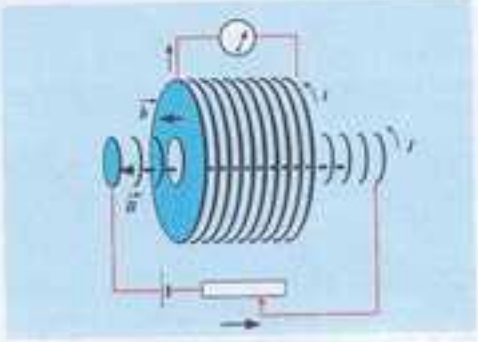


Fig. 9

Il est parfois plus commode d'utiliser la loi de Lenz sous une forme un peu plus générale :

> Le sens du courant induit est tel qu'il tente de s'opposer à la cause qui le produit.

Cet énoncé s'applique par exemple sur la figure 9. Le champ induit $\vec{b}$, modère la diminution de $\vec{B}$.

d) Détermination du sens du courant induit

- *Orientation d'un circuit*

Si, avant toute variation de flux, il n'y a pas de courant dans le circuit, celui-ci peut être orienté d'une manière arbitraire. Selon l'expérience, le courant induit parcourra le circuit dans le sens + choisi, ou dans le sens opposé. Son intensité est donc une grandeur algébrique.
La figure 10 indique une situation physique et son traitement algébrique avec les deux choix possibles pour l'orientation de la spire.
Le signe du flux magnétique dépend du sens choisi pour orienter le conducteur, mais **le flux induit et l'intensité du courant induit ont toujours le même signe.**

- *Méthode générale d'étude théorique*

Pour prévoir le sens d'un courant induit, il est possible de procéder comme suit :
— orienter le circuit;
— chercher le signe du flux inducteur Φ;
— chercher le signe de la variation $\Delta\Phi$ du flux inducteur. (Attention! Un flux inducteur négatif qui augmente, décroît en valeur absolue !);
— en déduire le signe du flux induit φ (qui est opposé à celui de $\Delta\Phi$), et le signe du courant induit i, qui est le même que celui du flux induit φ;
— d'où le sens du courant induit.

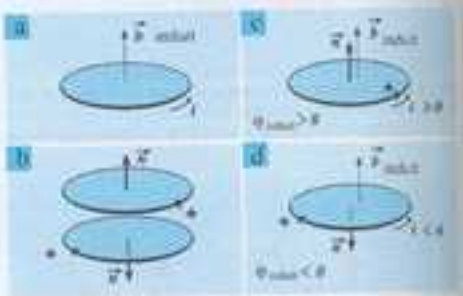
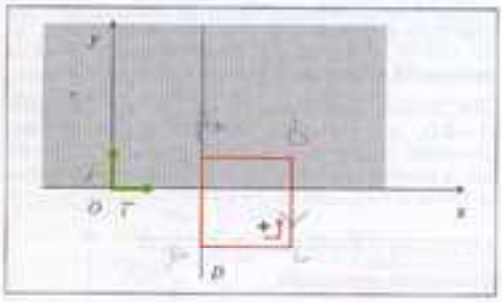


Fig. 10. ***La situation physique :***
a) Un courant induit i crée un champ induit $\vec{b}$.
b) Les deux orientations possibles pour la spire.
c) et d) Les deux traitements algébriques possibles.

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 17

L'espace est rapporté au trièdre direct (Ox, Oy, Oz) de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; le champ magnétique terrestre n'est pas à considérer ici. Un cadre conducteur carré de côté a, comportant N tours de fil, à la résistance R et un coefficient d'auto-induction négligeable. Guidé par un dispositif mécanique M glisse le long de la droite D selon un mouvement de translation uniforme dans le plan horizontal (Ox, Oy). Sa vitesse est $\vec{v} = v_0.\vec{i}$. A la date $t = 0$, le cadre pénètre dans la région hachurée où règne le champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B} = B_0.\vec{k}$. On conviendra de prendre, comme sens positif sur le cadre, le sens inverse des aiguilles d'une montre, comme l'indique la figure ci-dessous.



1) Quelle est, avant la date $t = 0$, la somme des forces qui s'exercent sur le cadre?

2) a) Décrire le phénomène qui se produit dans le cadre et montrer, qu'après la date $t = 0$, il s'exerce des forces électromagnétiques sur les côtés du cadre. Les représenter sur un schéma clair (on envisagera les deux cas $B_0 > 0$ et $B_0 < 0$).

b) Pour que le cadre conserve son mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}$, M devra exercer une force supplémentaire. Exprimer les coordonnées F_x, F_y, F_z de $\vec{F}$ en fonction de N, a, R, v_0 et B_0.

Application numérique : $a = 0{,}2$ m; $N = 100$; $|B_0| = 0{,}1$ T; $v_0 = 0{,}2$ m.s^{-1}; $R = 2\ \Omega$.

Pendant combien de temps M doit-il exercer $\vec{F}$?

Exercice 18

Deux gros conducteurs rectilignes et parallèles MM' et NN' sont placés dans un plan horizontal à une distance $\ell = 0{,}1$ m l'un de l'autre. Les extrémités M et N sont réunies aux bornes d'un générateur de f.é.m. $E_0 = 4$ V, de résistance interne négligeable. Sur les deux rails peut rouler un tube CD qui leur reste perpendiculaire. La résistance du circuit ainsi constitué reste sensiblement constante : $R = 2\ \Omega$, quand CD se déplace. L'ensemble baigne dans un champ magnétique vertical $\vec{B}$, de bas en haut, de valeur $B = 0{,}4$ T.

1) Déterminer la direction, le sens et la valeur de la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur CD.

2) Le générateur est ôté et remplacé par un court-circuit. La résistance reste égale à $2\ \Omega$. CD est déplacé avec une vitesse $v = 5$ m.s^{-1}. Calculer l'intensité i_0 du courant induit. Préciser sur un schéma son sens lorsque C se déplace de M vers M'.

3) Le générateur est à nouveau installé, et CD est déplacé à la vitesse de 5 m.s^{-1}. Quelle est l'intensité du courant dans le circuit? Envisager les deux sens possibles du déplacement.

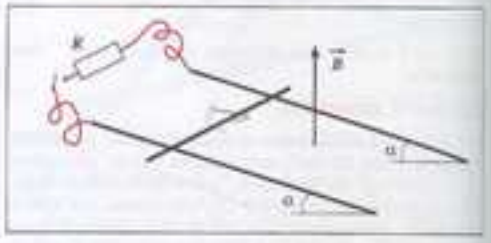
* Exercice 19

On prendra comme accélération de la pesanteur $g = 10$ m.s^{-2}.

Deux rails rectilignes, parallèles, distants de d sont disposés suivant les lignes de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale.

Une tige conductrice homogène, de longueur légèrement supérieure à d, de masse m, peut glisser, sans roulement et sans frottement, sur les rails. Cette tige reste toujours perpendiculaire aux rails, de façon que son milieu soit dans le plan médiateur des rails. Elle est, de plus, supposée parfaitement homogène.

Les extrémités supérieures des rails sont reliées par l'intermédiaire d'un interrupteur K et d'une résistance R. Les résistances des rails, de la tige et des contacts sont supposées négligeables devant R. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, vertical, ascendant.



1) L'interrupteur étant ouvert, on abandonne, sans vitesse initiale, la tige en haut des rails, à la date $t = 0$. Lorsqu'elle a parcouru une distance ℓ, on ferme l'interrupteur.

a) Établir l'expression littérale de la vitesse de translation de la tige à cet instant. Calculer cette vitesse.

b) Établir l'expression littérale de la date t_1 de fermeture de l'interrupteur. Calculer cette date.

2) a) Pour $t > t_1$, montrer que l'accélération de la tige décroît.

b) Établir l'expression littérale de la vitesse limite atteinte par la tige. Calculer cette vitesse limite.

Données numériques :
$d = 10$ cm; $\alpha = 15°$; $m = 15$ g; $R = 1\ \Omega$; $B = 1$ T; $\ell = 10$ cm.

2 F.É.M. D'INDUCTION

Un courant induit prend naissance dans un circuit fermé bien qu'il ne contienne aucun générateur. De nombreux générateurs pourraient faire passer dans le circuit un courant de même intensité que celle du courant induit : il suffirait d'ajuster leur f.é.m. et leur résistance interne. Le plus simple est d'envisager celui dont la résistance interne est nulle. Par définition :

La f.é.m. d'induction est égale à celle d'un générateur sans résistance interne, qui créerait dans le circuit, un courant de même intensité que le courant induit.

1. Déplacement d'une tige dans un champ uniforme

a) Sens du courant induit

La figure 11 reprend un dispositif déjà utilisé pour étudier la force de Laplace : deux rails parallèles conducteurs horizontaux supportent une tige conductrice. Mais il n'y a plus de générateur, remplacé ici par un galvanomètre sensible.

Le circuit fermé est orienté de sorte que le flux inducteur soit positif. Lorsque la tige est déplacée vers la droite, l'aire du circuit augmente, le flux inducteur aussi. Sa variation $\Delta\Phi$ est positive. Par suite, le flux induit φ, et le courant induit i, sont négatifs. Dans la tige, le courant induit va donc de M vers L.

Remarque :
Le sens du courant induit peut être déterminé d'une autre façon : la cause de sa naissance est le déplacement de la tige vers la droite. Le sens du courant induit est tel que la force de Laplace $\vec{F}' = i\,\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ agissant sur LM tente de s'opposer au mouvement. $\vec{F}'$ doit donc pointer vers la gauche, ce qui nécessite un courant dans le sens de $\overrightarrow{ML}$.

b) La tige considérée comme un générateur

Le tableau ci-contre rappelle les conventions de signes qui vont être utilisées dans la suite.

• *Signe de la f.é.m.*
Lorsqu'elle est déplacée la tige engendre un courant.

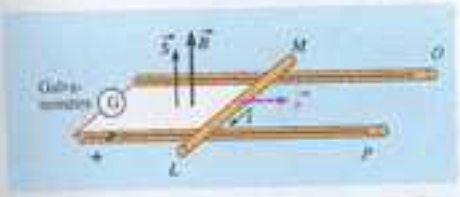
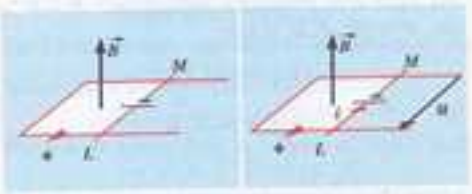


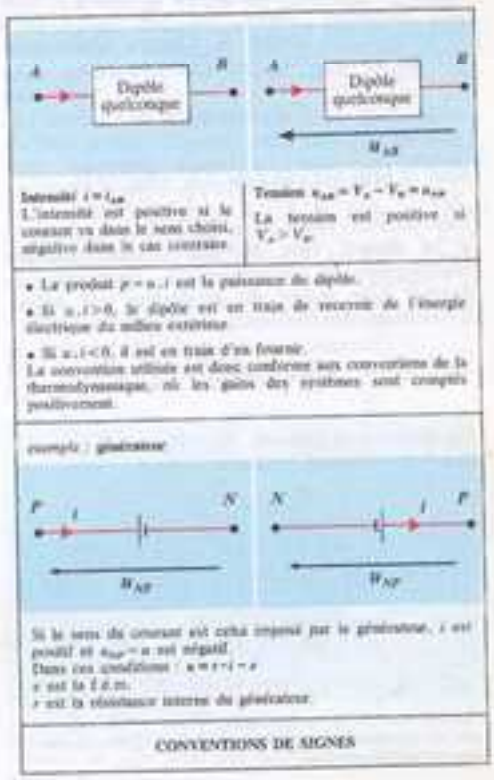
Fig. 11. *Tige déplacée orthogonalement à un champ magnétique uniforme. Le courant induit qui prend naissance dans le circuit est tel que la force de Laplace $\vec{F}$, agissant sur le brin LM le ralentisse.*

Le générateur qui, placé entre L et M, fournirait un courant dans le même sens devrait avoir la disposition suivante :



Par convention, **la f.é.m. e, d'un générateur a le même signe que le courant qu'il tend à débiter.** Avec les orientations choisies, lorsque la tige est déplacée vers la droite, $\Delta\Phi$ est positif et i est négatif. La **f.é.m. induite e, est négative.**

• *Valeur de la f.é.m. induite*
D'après le principe de l'inertie, la force F qu'il convient d'appliquer à la tige pour la maintenir en mouvement uniforme vers la droite est, en l'absence de frottements, juste opposée à la force de Laplace F', qui résulte de l'apparition du courant induit dans ML. Il faut donc fournir de l'énergie mécanique à la tige pour que son mouvement reste uniforme. Cette énergie est intégralement convertie en énergie électrique.



A tout instant la puissance électrique :

$$P = |e| . |i|$$

est égale à la puissance mécanique : $P' = F' . v$.
Or, $F' = |i| . \ell . B$, d'où :

$$|e| . |i| = |i| . \ell . B . v$$

et :

$$|e| = B . \ell . v.$$

• *Générateur en circuit ouvert*
Si les rails sont retirés et si la tige est déplacée comme précédemment dans le champ magnétique, il n'y a plus de courant induit car le circuit est ouvert (fig. 12). La tige joue alors le rôle de générateur débranché qui, comme une pile qui ne débite pas, possède une f.é.m., dont la valeur absolue reste :

$$|e| = B . \ell . v.$$

Son signe dépend de l'orientation donnée à la tige. Dans le cas de la figure 12 *a* elle est négative.

Le signe de cette f.é.m. peut se retrouver par une autre méthode. Quand la barre est déplacée vers la droite (par exemple) à la vitesse $\vec{v}$, tous ses électrons libres ont un mouvement d'ensemble de vitesse $\vec{v}$. Chacun d'eux subit l'action d'une force magnétique :

$$\vec{F} = (-e) . \vec{v} \wedge \vec{B}$$

dont le sens est celui de $\overrightarrow{LM}$ (fig. 12 *b*).

Les électrons libres de la tige ont donc tendance à se diriger vers M, qui devient chargée négativement. Corrélativement, l'extrémité L devient pôle positif du générateur par défaut d'électrons. La tension :

$$u = u_{LM} = V_L - V_M,$$

est positive et comme $V_L - V_M = r . 0 - e = -e$, la f.é.m. est bien négative.

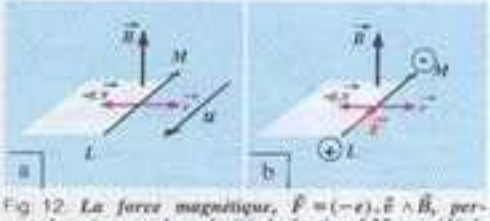


Fig. 12. ***La force magnétique, $\vec{F} = (-e) . \vec{v} \wedge \vec{B}$, permet de retrouver la polarité de la tige LM considérée comme un générateur.***

2. Loi de Faraday

a) Expression de la f.é.m. induite

L'intensité du courant induit, et, par suite, la valeur de la f.é.m. induite, augmentent (en valeur absolue) avec la vitesse de variation du flux magnétique inducteur. Par exemple, le courant induit devient nettement plus intense quand un aimant est approché ou éloigné rapidement d'une bobine que lorsqu'il est mis lentement en mouvement (fig. 13). Ainsi, une variation donnée $d\Phi$ de flux inducteur conduit à une f.é.m. importante si elle a lieu pendant un intervalle de temps dt, très court.
L'expression qui rend compte de ces faits expérimentaux, en reliant la f.é.m. induite e, à la variation du flux inducteur Φ, est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

e en volt (V)
Φ en weber (Wb)
t en seconde (s)

Le signe − résulte de la loi de Lenz, selon laquelle e (de même signe que le courant induit) est de signe opposé à celui de $d\Phi$.
Cette relation donne la définition générale de la f.é.m. induite e. Elle présente l'intérêt d'établir un lien entre une cause (variation de flux inducteur) et un effet (apparition d'une f.é.m.). Son énoncé est connu sous le nom de **loi de Faraday.**

La f.é.m. d'induction est l'opposée de la dérivée par rapport au temps du flux inducteur à travers le circuit.

b) Confirmation

Dans l'expression $|e| = B . \ell . v$ établie plus haut pour la tige qui se déplace orthogonalement au champ uniforme, $\ell . v$ représente l'aire balayée par la tige en 1 s, c'est-à-dire $\frac{\Delta S}{\Delta t}$.

$|e| = B . \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ représente la vitesse de variation du flux inducteur, ce qui démontre la relation de Faraday dans un cas particulier.

c) Vérification

Voir fiche expérimentale.



Fig. 13. ***Variation plus ou moins rapide de flux magnétique.***

3. Intensité d'un courant induit

Un courant induit ne prend naissance que dans les circuits fermés. En imaginant qu'un tel circuit est coupé, ses deux extrémités A et B équivalent aux pôles d'un générateur qui ne débite pas, de résistance interne r égale à celle du circuit, et délivrant une tension :

$$u = u_{AB} = V_A - V_B = r.0 - e.$$

Réunir A et B, équivaut à court-circuiter le générateur, et à lui faire débiter un courant de court-circuit d'intensité égale à celle du courant induit. Sa tension aux bornes étant nulle, $u = r.i - e = 0$, et :

$$i = \frac{e}{r}$$

i en ampère (A)
e en volt (V)
r en ohm (Ω)

Cette relation est en accord avec les conventions adoptées, qui font que **le courant et la f.é.m. induits sont de même signe.**
Cette relation s'écrit aussi :

$$i = -\frac{1}{r}.\frac{d\Phi}{dt}.$$

Remarque :
S'il est utile d'algébriser pour les questions théoriques, il est souvent possible de s'en passer dans les cas pratiques. Il suffit de déterminer les valeurs absolues $|e|$ et $|i|$ et de trouver le sens du courant par une application simple de la loi de Lenz.

4. Rotation d'un cadre dans un champ uniforme

a) Dispositif

Une bobine circulaire tourne autour d'un axe fixe vertical dans un champ magnétique, $\vec{B}$, uniforme (fig. 14).
La position de la bobine est repérée par l'angle $\theta = (\vec{B}, \vec{S})$ que forme à la date t, le vecteur-aire avec le vecteur-champ magnétique. La bobine tourne d'un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire ω tel que : $\theta = \omega.t$ si θ est choisi nul à la date $t = 0$.

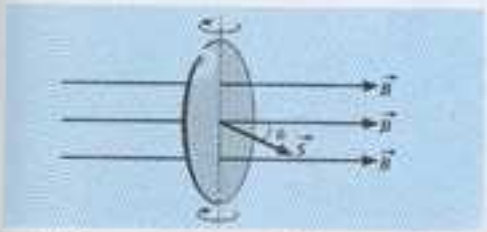


Fig. 14. *La rotation d'une bobine dans un champ magnétique uniforme induit dans la bobine une f.é.m. sinusoïdale.*

b) F.é.m. induite

Le flux inducteur $\Phi = \vec{B}.\vec{S}$ a pour expression $\Phi = B.S.\cos\theta$, soit :

$$\Phi = B.S.\cos(\omega.t).$$

La f.é.m. induite est donnée en fonction du temps par $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, soit :

$$e = B.S.\omega.\sin(\omega.t).$$

S'il y a N spires dans la bobine au lieu d'une,

$$e = N.B.S.\omega.\sin(\omega.t).$$

La f.é.m. est une fonction sinusoïdale du temps. Sa valeur maximale est $E_m = N.S.B.\omega$.
Ce dispositif donne le principe d'un générateur de tension alternative sinusoïdale (ou **alternateur**) à induit mobile.

Remarque :
Au lieu d'envisager la rotation de la spire dans un champ uniforme, il revient au même d'imaginer que la spire reste fixe et que c'est le vecteur-champ $\vec{B}$ qui tourne. Les courants alternatifs permettent de réaliser simplement de tels « champs tournants ».

3 AUTO-INDUCTION

Un circuit parcouru par un courant crée en tous points de l'espace un champ magnétique dont la valeur est proportionnelle à l'intensité du courant. Ce champ existe en particulier à l'intérieur du circuit lui-même. Il en résulte un flux magnétique d'induction, qui, n'étant pas d'origine extérieure, est appelé **flux propre** ou **auto-flux.**
Si l'intensité du courant varie, il en va de même du flux propre. Comme toute variation de flux, cette variation d'auto-flux crée une f.é.m. d'induction qui s'oppose à cette variation.
Le circuit joue donc ici à la fois le rôle d'inducteur et d'induit.
Les phénomènes d'auto-induction résultent d'une variation de flux propre à travers un circuit.

1. Mise en évidence du phénomène

a) Retard à l'établissement d'un courant

Un générateur alimente deux dérivations (fig. 15) :

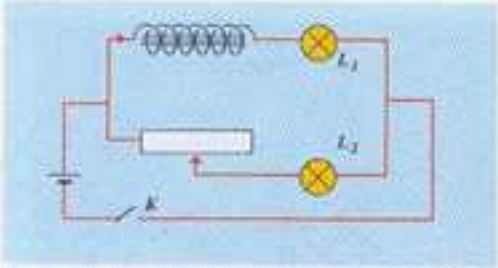


Fig. 15. *Quand on ferme l'interrupteur K, la lampe L_1, brille après la lampe L_2.*
La bobine est réalisée à partir de deux bobines enroulées autour d'une carcasse fermée en fer, montées de telle sorte que leurs effets magnétiques s'ajoutent.

— l'une contient une bobine à noyau de fer doux et une lampe à incandescence L_1;

— l'autre est constituée par un rhéostat et une lampe L_2, identique à la précédente.

La résistance du rhéostat est ajustée pour que les deux lampes brillent du même éclat quand le courant passe en régime permanent, sa résistance est alors sensiblement égale à celle de la bobine.

A la fermeture de l'interrupteur, la lampe L_2 brille instantanément, mais la lampe L_1 ne s'allume que progressivement.

L'interprétation est simple : quand le courant apparaît dans la bobine, un courant auto-induit prend naissance, qui tempère la croissance du courant d'après la loi de Lenz. Le courant finit par s'établir, mais plus lentement que dans l'autre branche où aucun effet d'induction ne se manifeste.

b) Visualisation à l'oscilloscope

Un générateur de tension périodique en créneaux (« tension rectangulaire ») alimente la bobine précédente placée en série avec un rhéostat de résistance R (fig. 16). Cela équivaut à réaliser une succession automatique de fermetures et d'ouvertures du circuit.

L'oscilloscope visualise la tension $u = R.i$, aux bornes du rhéostat, qui représente aussi l'évolution de l'intensité du courant en fonction du temps (au facteur R près) (fig. 17 *a*).

• En présence de fer à l'intérieur de la bobine, l'oscillogramme montre que le courant n'atteint pas immédiatement sa valeur maximale, et qu'il ne s'annule que progressivement (fig. 17 *b*). Les courbes ont des allures d'exponentielles.

• En sortant progressivement le fer de la bobine, les exponentielles se déforment, croissent ou décroissent plus vite, et finissent par prendre une allure de créneaux (fig. 17 *c*). La bobine sans fer joue le rôle d'une résistance pratiquement pure, sans effet auto-inductif sensible.

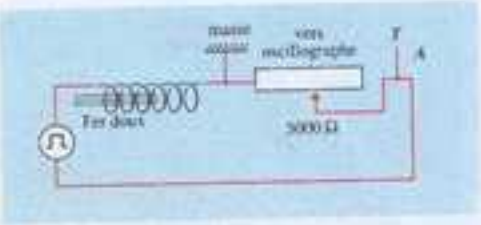


Fig. 16. ***Montage pour visualiser à l'oscilloscope le retard à l'établissement ou à la rupture d'un courant. Avec la bobine double la carcasse de fer peut être plus ou moins ouverte afin de régler les effets magnétiques.***

La présence de fer augmente considérablement la valeur du flux à travers les bobines. Il en résulte des variations de flux propre plus importantes à chaque demi-période de la tension en créneaux. Conformément à la loi de Lenz, la f.é.m. induite tend à s'opposer à l'établissement du courant ou à sa diminution. Cette f.é.m., qui apparaît dans le circuit par suite de la variation de son propre courant, est dite **auto-induite.**

Une f.é.m. induite apparaît donc dans un circuit lorsque le flux qui le traverse varie, soit par suite de causes extérieures (induction), soit parce que le courant varie dans le circuit (auto-induction).

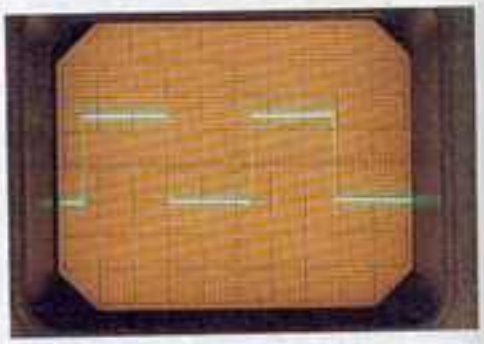


Fig. 17 a

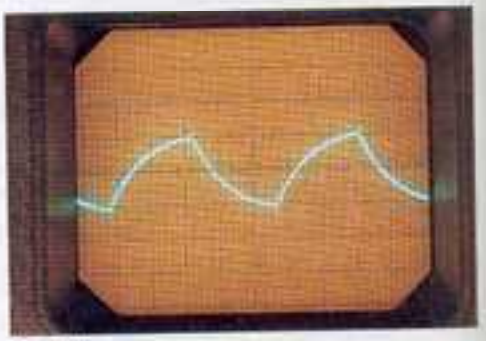


Fig. 17 b

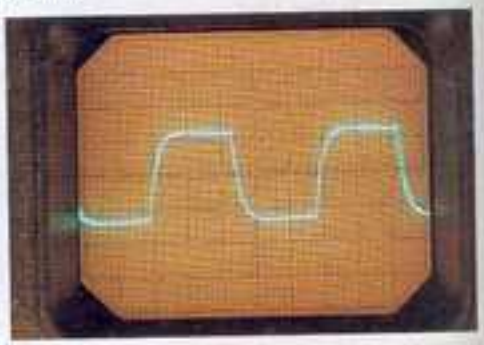


Fig. 17 c

2. Auto-inductance

a) Définition

Le flux propre φ à travers un circuit (c'est-à-dire le flux du champ magnétique $\vec{b}$ créé par le courant qui parcourt le circuit) est, comme le champ magnétique, proportionnel à l'intensité du courant ($\varphi = b\,.S$ et $b = K\,.i$). Il peut s'écrire $\varphi = L\,.i$ où L est une constante.

La figure 18 montre, sur un cas particulier aisément généralisable, que **le flux propre est de même signe que l'intensité.** Ce signe dépend de l'orientation choisie pour le conducteur.

Le coefficient L est donc toujours positif. Il est appelé **auto-inductance** ou, en abrégé, **inductance.** Il dépend de la forme des circuits. Il s'exprime en weber par ampère appelé henry (H).

Pour une spire de 1 m de diamètre :

$$L = 3 \times 10^{-6}\ \text{H};$$

pour une bobine de haut-parleur : $L \approx 10^{-3}$ H; pour un électro-aimant industriel : $L = 100$ H.

Le flux propre à travers un circuit s'exprime par :

$$\varphi = L\,.i$$

φ en weber (Wb)
L en henry (H)
i en ampère (A)

b) Calcul approximatif de l'inductance d'un solénoïde

Le champ magnétique intérieur à un solénoïde, de longueur nettement supérieure au diamètre des spires, est uniforme. S'il possède N spires équidistantes réparties sur sa longueur ℓ, il a $n_1 = \dfrac{N}{\ell}$ spires par mètre et le champ dans la région centrale vaut :

$$B = \mu_0 . n_1 . i = \mu_0 . \frac{N}{\ell} . i.$$

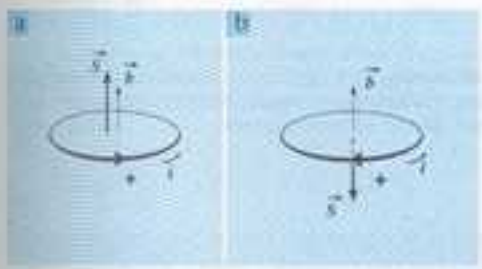


Fig. 18. ***L'intensité du courant et le flux propre sont de même signe.***

a) Premier choix de l'orientation. Le vecteur-aire pointe vers le haut (règle de la main droite). Le flux de $\vec{b}$ et l'intensité i sont positifs.

b) Second choix : flux et intensité négatifs.

Le flux propre à travers une spire de la région centrale s'exprime donc par :

$$\varphi_1 = \vec{B}\,.\vec{S} = \mu_0 . \frac{N}{\ell} . i\,.S.$$

Cette expression n'est qu'approchée pour les spires proches des extrémités du solénoïde, où la valeur du champ magnétique est légèrement inférieure. Cependant, si le solénoïde est très long, elle convient pour la plupart des spires. En l'appliquant un peu abusivement à toutes, le flux propre total s'écrit donc :

$$\varphi = N\,.\varphi_1 = \mu_0 . \frac{N^2}{\ell} . i\,.S.$$

Il se trouve ainsi évalué par excès.

L'expression précédente est bien du type $\varphi = L\,.i$ avec :

$$L = \mu_0 . \frac{N^2 . S}{\ell}$$

c) Bobines à noyaux de fer doux

La relation précédente est valable pour un solénoïde dans l'air (en toute rigueur dans le vide). Pour augmenter le flux propre, des pièces en fer peuvent être introduites dans les bobines.

La valeur calculée plus haut est alors à multiplier par un coefficient μ_r, appelé perméabilité relative, qui peut être de l'ordre de 1000.

Certaines bobines ont une inductance réglable par introduction d'une plus ou moins grande portion d'un barreau de fer doux (fig. 19).



Fig. 19. ***Bobine d'inductance L réglable par introduction de fer doux.***

3. F.é.m. d'auto-induction

a) Expression

Une variation de l'intensité du courant dans un circuit d'inductance constante L entraîne une variation du flux propre $\varphi = L \cdot i$.

Il en résulte qu'une f.é.m., dite auto-induite, ou d'auto-induction, apparaît dans le circuit.
La f.é.m. d'auto-induction, s'exprime comme la f.é.m. d'induction par : $e = -\dfrac{d\varphi}{dt}$, soit en fonction de l'inductance :

$$e = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

e en volt (V)
L en henry (H)
i en ampère (A)
t en seconde (s)

La f.é.m. d'auto-induction est donc d'autant plus importante que les variations de l'intensité sont plus rapides et que l'inductance du circuit est plus élevée.

b) Effets

• *La f.é.m. auto-induite n'intervient pas en régime continu*, car $\dfrac{di}{dt}$ est nul dans ce cas. Une bobine inductive (R, L) se comporte alors comme un conducteur ohmique purement résistant.

• *En régime variable, la f.é.m. auto-induite modère les variations du courant inducteur.* C'est pour cette raison que la lampe L_1 de la figure 15 brille avec retard.

• *Une bobine inductive empêche les discontinuités d'intensité.* Une discontinuité est une variation d'intensité pendant un intervalle de temps très court. D'où l'apparition d'une f.é.m. auto-induite considérable qui s'oppose à cette discontinuité.

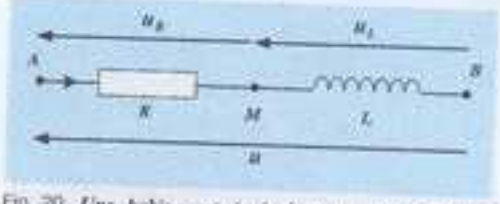


Fig. 20. *Une bobine est équivalente à une résistance pure en série avec une inductance pure :*

$u_R = R \cdot i \qquad u_L = L \cdot \dfrac{di}{dt} \qquad u = u_R + u_L$.

4. Loi d'Ohm pour une bobine inductive

a) Tension aux bornes d'une bobine inductive

La tension aux bornes d'un dipôle linéaire peut s'écrire, avec les conventions habituelles :

$$u = r \cdot i - e.$$

Dans le cas d'une bobine de résistance R et d'inductance L, cette relation devient, en tenant compte de $e = -L \cdot \dfrac{di}{dt}$:

$$u = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$$

Elle exprime la loi d'Ohm pour un dipôle résistant et inductif.

La relation précédente montre qu'une bobine inductive R, L peut être considérée comme une **résistance pure en série avec une inductance pure** (fig. 20).

Cette figure indique entre M et B la représentation conventionnelle d'une inductance pure. Le point M n'a pas d'existence physique réelle : il est impossible de le relier à un oscilloscope par exemple.

La figure 21 revient sur les représentations conventionnelles.

b) Loi d'Ohm vue comme une équation différentielle

La relation $u = R \cdot i + L \cdot \dfrac{di}{dt}$ fait intervenir la variable i et sa dérivée première $\dfrac{di}{dt}$, par rapport au temps. Il s'agit d'une **équation différentielle.** Sa résolution permet de trouver $i(t)$ quand $u(t)$ est donné et inversement.

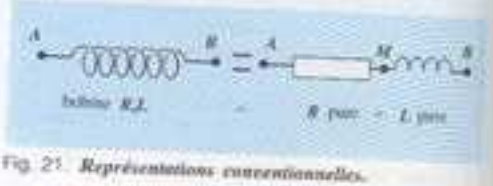


Fig. 21. *Représentations conventionnelles.*

5. Énergie magnétique d'une bobine inductive

a) *Interprétation énergétique de la loi d'Ohm*

Lorsqu'une bobine de résistance R, et d'inductance L, est parcourue par un courant d'intensité i, la tension u à ses bornes est :

$$u = R\,.\,i + L\,.\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

La puissance $P = u\,.\,i$ de la bobine, positive lorsque la bobine est en train de recevoir de l'énergie E, s'exprime donc par :

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = R\,.\,i^2 + L\,.\,i\,.\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Pendant un intervalle de temps suffisamment court pour que l'intensité i puisse être considérée comme constante, la bobine reçoit l'énergie :

$$\mathrm{d}E = P\,.\,\mathrm{d}t = R\,.\,i^2\,.\,\mathrm{d}t + L\,.\,i\,.\,\mathrm{d}i.$$

• Le terme $R\,.\,i^2\,.\,\mathrm{d}t$, positif quel que soit le sens du courant, est donc un gain d'énergie pour la bobine. Il fait intervenir la résistance R, qui traduit le fait que les électrons qui traversent la bobine perdent de l'énergie en interagissant avec les ions du réseau métallique constituant le fil conducteur. Cette énergie perdue par les électrons est récupérée par les ions dont l'agitation thermique augmente. Ainsi, la température du fil s'élève. Le terme $R\,.\,i^2\,.\,\mathrm{d}t$ correspond donc à l'effet Joule.

• Le terme $L\,.\,i\,.\,\mathrm{d}i$ est algébrique. Il représente une petite quantité d'énergie reçue (s'il est positif) ou fournie par la bobine, pendant le court intervalle de temps $\mathrm{d}t$, du fait de l'existence de son inductance L. Cet accroissement algébrique d'énergie de la bobine est appelé **énergie magnétique.**

b) *Énergie magnétique emmagasinée par une bobine*

Lorsque l'intensité du courant passe de la valeur i_1 à la valeur i_2, l'énergie magnétique E_{mgn} qui s'emmagasine dans la bobine est la somme des variations précédentes, calculable par intégration :

$$E_{mgn} = \int_{i_1}^{i_2} L\,.\,i\,.\,\mathrm{d}i = \frac{1}{2}\,L\,.\,i_2^2 - \frac{1}{2}\,L\,.\,i_1^2.$$

En particulier, si l'intensité passe de 0 à une valeur i, l'énergie magnétique qui s'emmagasine dans la bobine s'exprime par :

$$E_{mgn} = \frac{1}{2}\,L\,.\,i^2$$

E en joule (J)
L en henry (H)
i en ampère (A)

c) *Manifestations de l'énergie magnétique emmagasinée*

A l'ouverture d'un circuit inductif, l'énergie magnétique peut être restituée. Par exemple dans le montage de la figure 22, quand l'interrupteur est fermé, le courant d'intensité i ne passe que dans la bobine, à cause de la diode. La bobine emmagasine l'énergie : $\frac{1}{2}\,L\,.\,i^2$.

A l'ouverture du circuit, la bobine restitue cette énergie dans la seconde branche du circuit : le moteur tourne et peut soulever une petite masse (fig. 23).

L'intensité du courant varie de i à 0 en très peu de temps. Il en résulte une tension :

$$u = L\,.\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

qui peut être beaucoup plus importante que la tension d'alimentation.
Cette **surtension** peut être mise en évidence par différents effets spectaculaires.

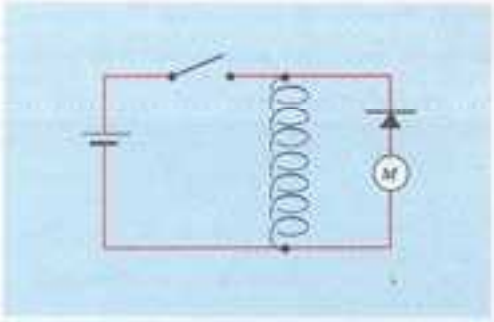


Fig. 22. *La bobine est enroulée autour de la carcasse d'un transformateur légèrement ouvert.*

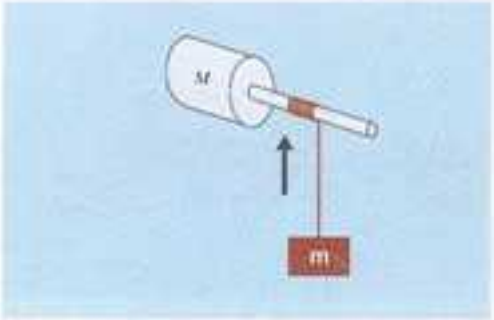


Fig. 23

• *Étincelles de rupture*

En ouvrant un circuit comportant une bobine de grande inductance, il se produit des étincelles au niveau de l'interrupteur (fig. 24).

Ces étincelles sont le plus souvent néfastes. Elles usent les contacts et créent des parasites électromagnétiques dans leur voisinage (crépitements dans les postes de radio). L'un des moyens utilisés pour les faire disparaître, consiste à utiliser un condensateur qui absorbe l'énergie magnétique.

Les échanges d'énergie entre une bobine et un condensateur sont étudiés au chapitre 9.

• *Allumage d'une lampe au néon*

Il existe des lampes au néon dont la tension d'amorçage est d'environ 70 V. Montées en dérivation sur une bobine alimentée par un générateur de 6 V (fig. 25) elles s'illuminent brièvement à chaque rupture du courant. La surtension temporaire dépasse donc 70 V.

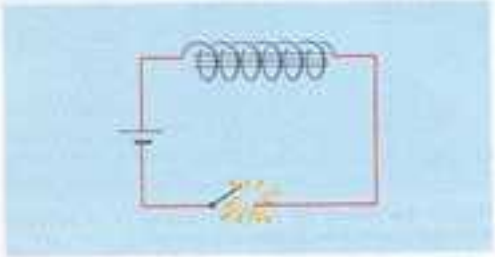


Fig. 24



Fig. 25

4 APPLICATIONS

Les phénomènes d'induction électromagnétique sont mis à profit pour engendrer des courants, faire varier la tension des courants alternatifs, réaliser un freinage électromagnétique, etc.

1. Alternateurs

Les alternateurs sont des générateurs de courants alternatifs. Ils reçoivent de l'énergie mécanique et fournissent de l'énergie électrique.

• *Principe*

En tournant devant des bobines en série, fixées sur le **stator**, des électro-aimants montés sur un **rotor** induisent une f.é.m. alternative dans les bobines de l'induit (fig. 26). Une version simplifiée de ce dispositif a déjà été donnée à la figure 14.

• *Fonctionnement*

Le rotor est mis en mouvement par une chute d'eau (centrales hydrauliques), ou par une turbine qui tourne sous l'effet de vapeur d'eau sous pression (centrales thermiques ou nucléaires).

Le sens des enroulements des bobines en série du rotor sont réalisés pour qu'il se forme des extrémités successivement nord et sud sur les pièces polaires. Ces bobines sont alimentées par un dispositif excitateur à balais frotteurs.

Le sens des enroulements de deux bobines fixes, voisines du stator, sont inversés. Ainsi, toutes les f.é.m. induites dans le stator s'ajoutent.

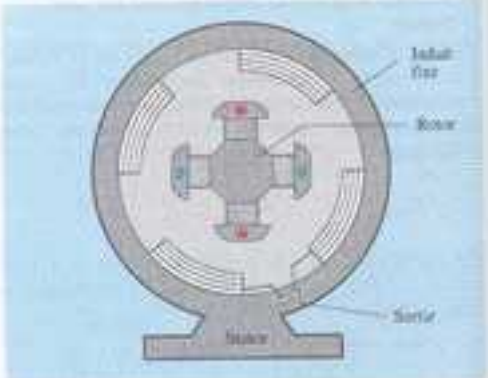


Fig. 26. ***Représentation schématique d'un alternateur à deux paires de pôles.***



Fig. 27. *Rotor d'un alternateur industriel (Gravelines).*

2. Courants de Foucault

Les courants de Foucault sont des courants induits qui apparaissent dans les conducteurs, lors des variations de flux magnétique.

a) Inconvénients

Les courants de Foucault prennent naissance dans les carcasses métalliques des moteurs, des transformateurs, des alternateurs...
L'échauffement par effet Joule qui en résulte constitue une perte d'énergie, ce qui **diminue le rendement** de ces appareils. Les courants de Foucault sont moins intenses dans les empilements en feuillets isolés que dans les masses métalliques compactes.

b) Mise à profit

Les courants de Foucault sont importants quand les variations de flux magnétiques sont rapides. Si c'est un mouvement de rotation qui les provoque, ils donnent lieu, conformément à la loi de Lenz, à des forces de **ralentissement** d'autant plus grandes que les rotations sont plus rapides. Cela est utilisé pour certains véhicules lourds, en faisant pénétrer l'entrefer d'un électro-aimant de part et d'autre d'un disque métallique solidaire des roues. Les forces de ralentissement, très intenses aux grandes vitesses, s'exercent sans que les roues puissent se bloquer puisqu'elles s'amenuisent quand la vitesse décroît.

3. Transformateurs

a) Principe

Deux bobines, sans aucun lien électrique entre elles, sont enroulées autour d'une carcasse ferromagnétique refermée sur elle-même (fig. 28). Elles comportent respectivement n_1 et n_2 spires.
Une tension sinusoïdale u_1, de valeur maximale U_1, est appliquée aux bornes de l'une des bobines, appelée primaire du transformateur. Cela induit un champ magnétique alternatif dans la carcasse de fer, où il se trouve canalisé.
Les variations de flux au niveau de l'autre bobine, appelée secondaire du transformateur, y induisent une f.é.m. sinusoïdale e_2, d'où une tension sinusoïdale u_2 aux bornes du secondaire, de valeur maximale U_2.
Lorsque le transformateur est en fonctionnement, des courants sinusoïdaux d'intensité i_1 et i_2 (valeurs maximales I_1 et I_2) passent dans le primaire et le secondaire. Les grandeurs précédentes sont liées approximativement par les relations suivantes :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Le rapport $\frac{n_2}{n_1}$ des nombres de spires est appelé rapport de transformation (voir Pour en savoir plus).
Le rendement des gros transformateurs est excellent puisqu'ils restituent par le secondaire environ 99 % de l'énergie qu'ils reçoivent au primaire.

b) Utilisation

• *Transformateurs élévateurs*
Les transformateurs élévateurs (de tension) comportent plus de spires au secondaire qu'au primaire. La tension maximale U_2 au secondaire est donc plus élevée que U_1.
Le **transport d'énergie** électrique à distance se fait commodément par des « fils électriques ». La résistance électrique de ces lignes ne peut pas être rendue très petite, car cela nécessiterait des gros câbles lourds et coûteux. Il en résulte des **pertes en lignes**, par effet Joule, lors du transport de l'énergie.

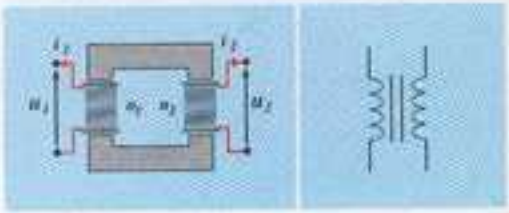
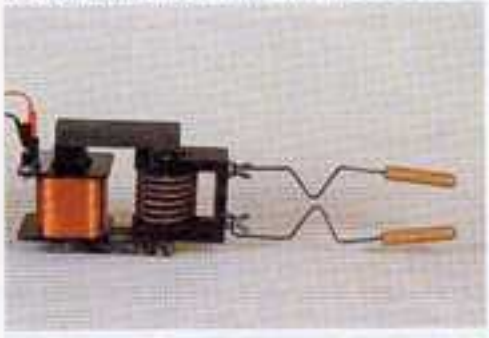


Fig. 28. *Transformateur et sa représentation symbolique.*

En courant continu, ces pertes sont proportionnelles au carré de l'intensité ($W = R.I^2.t$). En courant alternatif, elles sont proportionnelles au carré de l'intensité maximale. Avec un transformateur élévateur dont le rapport de transformation est égal à 30, l'énergie sera transportée avec une intensité 30 fois moindre, et les pertes seront $30^2 = 900$ fois plus faibles.
Pratiquement, E.D.F. utilise une succession de transformateurs élévateurs : l'énergie est transportée sous très haute tension (400 kV).

• *Transformateurs abaisseurs*
Les transformateurs abaisseurs comportent moins de spires au secondaire qu'au primaire. Ils délivrent une tension plus basse que celle qui leur est appliquée, ce qui est utile pour des questions de **sécurité** (220 V pour les usagers; 12 V pour les jouets d'enfants...).
Ces transformateurs présentent aussi l'intérêt de pouvoir fournir de **grandes intensités.** Les figures 29 montrent deux types d'application : la soudure par points et le four à induction.
La grande intensité qui passe dans le petit nombre de grosses spires suffit pour faire fondre les métaux en contact (soudure) ou dans la rigole conductrice constituant le secondaire (four).

• *Transformateurs d'isolement*
Leur rapport de transformation est égal à 1. Les tensions primaire et secondaire sont égales.
Ils permettent d'isoler un circuit, d'un autre.



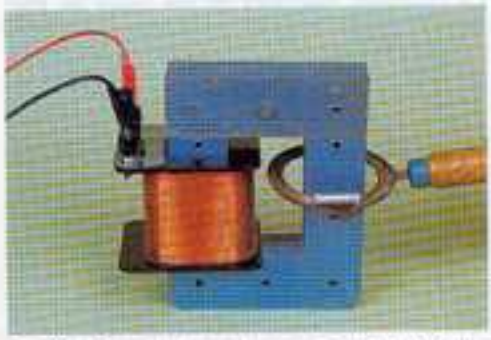


Fig. 29. ***Principe de la soudure en un point et des fours à induction.***

4. Autres applications

a) En radio-télévision

Chaque station envoie dans l'espace une onde électromagnétique « **porteuse** » de fréquence donnée (fig. 30). Cette onde progressive est constituée d'un champ électrique et d'un champ magnétique orthogonaux qui se propagent à la célérité de la lumière. Une telle onde monofréquence ne transporte que l'information de son « existence ». Elle est rendue plus riche d'informations par **modulation,** obtenue en superposant à la porteuse des variations d'amplitude ou de fréquence.
La modulation d'amplitude est réalisée par les caméras vidéo (ou les microphones en radio), par traitements électroniques assez complexes des signaux. La séquence terminale est l'induction dans l'antenne, par un transformateur, d'un courant oscillant qui module la porteuse.
Le champ électromagnétique arrive très affaibli sur l'antenne réceptrice, où il induit un très faible courant qui reproduit le signal modulé.
Les dispositifs électroniques internes aux appareils récepteurs les transforment en informations visibles ou sonores.

b) Bandes magnétiques

Les bandes magnétiques enregistrent les informations dans des zones successives où la bande devient plus ou moins aimantée. Ce sont les têtes d'enregistrement qui réalisent cette opération.
En défilant devant une tête de lecture, la bande y induit un courant par suite des variations du champ magnétique.

Tous ces exemples, dont la liste pourrait être encore allongée, montrent la variété et l'importance pratique des phénomènes d'induction électromagnétique.



Fig. 30

Fiche expérimentale

VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DE LA LOI DE FARADAY

1) Montage

Deux bobines b_1 et b_2 de 500 ou 1 000 spires sont disposées face à face (fig. 31). La bobine b_1 est alimentée par une source de tension triangulaire (fréquence 1 kHz environ) par l'intermédiaire d'un dipôle ohmique de résistance $R = 1$ kΩ.

La tension u_1 aux bornes de R est visualisée sur la voie 1 d'un oscilloscope. La tension u_2 aux bornes de b_2 est visualisée sur la voie 2.

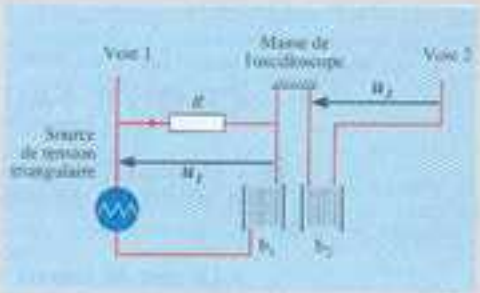


Fig. 31. ***Montage pour la vérification expérimentale de la loi de Faraday.***

2) Oscillogrammes (fig. 32)

La voie 1 montre une tension triangulaire, et la voie 2 une tension en créneaux.



Fig. 32. ***Oscillogrammes obtenus. La tension triangulaire visualise $\Phi(t)$, et la tension en créneaux la f.é.m. induite dans b_2.***

3) Interprétation

La bobine b_1 joue le rôle de circuit inducteur, la bobine b_2 celle de circuit induit.

La tension $u_1 = R \cdot i_1$ est proportionnelle au champ magnétique inducteur $B_1 = K' \cdot i_1$. Comme les aires sont invariables, le flux à travers b_1 est proportionnel à i_1. Ainsi, u_1 visualise le flux inducteur $\Phi(t)$.

La tension u_2 visualise, éventuellement au signe près selon la façon dont les enroulements des spires sont réalisés dans b_2, la f.é.m. induite dans b_2 : $u_2 = r \cdot i - e_2 = -e_2$ car b_2 ne débite pas ($i \approx 0$).

• Le flux inducteur (visualisé par u_1) est donc triangulaire.

• L'allure rectangulaire de u_2, qui visualise la f.é.m. induite, montre bien que cette f.é.m. est proportionnelle à $\frac{d\Phi}{dt}$, puisque la dérivée d'une fonction triangulaire est une fonction rectangulaire.

C'est la loi de Faraday.

Remarque
Une tension en créneaux est obtenue à la sortie d'un montage dérivateur à l'entrée duquel est appliquée u_1 (fig. 33).

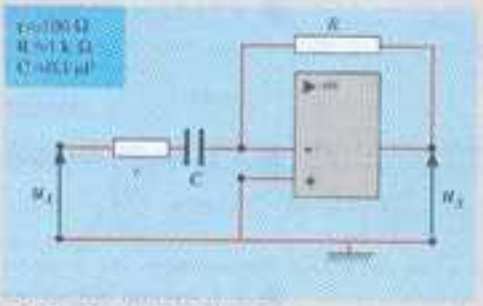


Fig. 33. ***Montage dérivateur :***

$$u_2 = -R \cdot C \cdot \frac{du_1}{dt}.$$

Un oscilloscope permet de visualiser u_1 et u_2.

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

• Un courant induit ne prend naissance dans un **circuit fermé** que s'il se produit des **variations du flux inducteur** à travers le circuit.

• Le **sens du courant induit** se détermine par la loi de Lenz : le **flux induit** et la **variation de flux inducteur** sont de signes opposés.

• La loi de Faraday donne la **f.é.m. d'induction** en fonction de la vitesse de **variation** du flux inducteur :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

• La **f.é.m.** d'induction et le courant induit sont de **même signe.**

• Le **flux propre** à travers un circuit est donné par $\varphi = L.i$, où L désigne **l'inductance** du circuit, qui s'exprime en **henry** (H).
Pour un solénoïde : $L = \mu_0 . \frac{N^2 . S}{\ell}$.

• La **f.é.m.** d'auto-induction est :

$$e = -L.\frac{di}{dt}.$$

• La tension aux bornes d'un dipôle **résistant et inductif** est donnée par :

$$u = R.i + L.\frac{di}{dt}.$$

• L'énergie magnétique emmagasinée dans une bobine est :

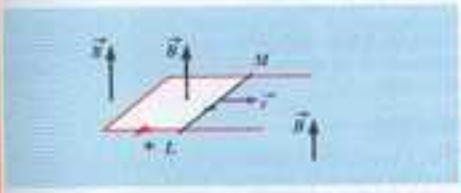
$$E_{mag} = \frac{1}{2} L.i^2.$$

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

Tige déplacée sur des rails horizontaux

Une tige LM de longueur ℓ est déplacée d'un mouvement uniforme de vitesse $\vec{v}$ sur deux rails horizontaux baignant dans un champ magnétique uniforme vertical pointant vers le haut.



1) Dans le cas de figure indiqué (circuit orienté dans le sens $\overrightarrow{LM}$), préciser les signes du flux inducteur, de sa variation, du courant induit et de la f.é.m. induite.

2) Les gains d'énergie de la tige sont comptés positivement.

a) Exprimer, en fonction des vecteurs $i.\vec{\ell}$, $\vec{B}$ et $\vec{v}$, l'énergie mécanique E_m reçue par la tige pendant un intervalle de temps dt.

b) L'énergie électrique E_e fournie par la tige pendant l'intervalle de temps dt s'exprime-t-elle par $E_e = e.i.dt$ ou par $E_e = -e.i.dt$?

c) La tige n'accumulant pas d'énergie, que peut-on dire de la somme $E_m + E_e$? En déduire une expression de la f.é.m., e, en fonction des vecteurs $\vec{\ell}$, $\vec{B}$ et $\vec{v}$.

SOLUTION

1) Avec l'orientation choisie, le vecteur-aire $\vec{S}$ pointe vers le haut. Le flux inducteur $\Phi = \vec{B}.\vec{S}$ est donc positif. L'aire du circuit augmente : la variation $\Delta\Phi$ de flux inducteur est positive. D'après la loi de Lenz, l'intensité du courant induit i est négative : le courant va de M vers L. La f.é.m. induite e, de même signe que i, est donc négative.

2) Pour maintenir la tige en mouvement uniforme, il faut lui appliquer (vers la droite) une force $\vec{F}$ opposée à la force de Laplace $\vec{F}' = i.\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ due au courant induit i (avec $i<0$, cette force pointe bien vers la gauche).

a) L'énergie E_m reçue par la tige est comptée positivement. Pendant l'intervalle de temps dt, la tige se déplace de $\vec{v}.dt$ et le travail de la force appliquée est $W = (-i.\vec{\ell} \wedge \vec{B}).\vec{v}.dt$. D'après les règles du produit vectoriel, $\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ pointe vers la droite, et son produit scalaire avec $\vec{v}$ est positif. Comme i est négatif, l'expression précédente est bien positive. En tenant compte de l'anticommutativité du produit vectoriel, l'énergie mécanique reçue s'écrit :

$$E_m = (i.\vec{B} \wedge \vec{\ell}).\vec{v}.dt$$

b) L'énergie électrique fournie par la tige est à compter négativement. Comme e et i sont négatifs, c'est la seconde expression qui convient :

$$E_e = -e.i.dt$$

c) La tige n'accumulant pas d'énergie, la somme de ce qu'elle reçoit et fournit est nulle : $E_m + E_e = 0$.

Par suite, $(i.\vec{B} \wedge \vec{\ell}).\vec{v}.dt = e.i.dt$, d'où :

$$e = (\vec{B} \wedge \vec{\ell}).\vec{v}$$

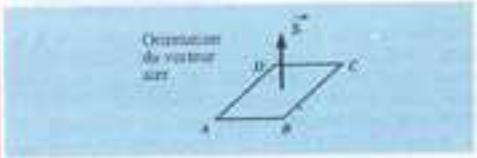
Le vecteur $\vec{B} \wedge \vec{\ell}$ pointe vers la gauche et son produit scalaire par $\vec{v}$ est négatif, comme il se doit.

EXERCICE 2

F.é.m. induite

La valeur du flux inducteur à travers une bobine plate de forme rectangulaire $ABCD$ évolue en fonction du temps comme l'indique le diagramme temporel ci-dessous.





L'orientation choisie pour la bobine est indiquée ci-dessus.

Représenter graphiquement la courbe indiquant l'évolution en fonction du temps de la f.é.m. induite dans la bobine.

SOLUTION

Lorsque le flux est croissant, ses variations sont positives. D'après le diagramme, il croît de 50 mWb en 5 ms : $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 10\ \text{Wb.s}^{-1}$. Or $e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, d'où :

$e = -10$ V.

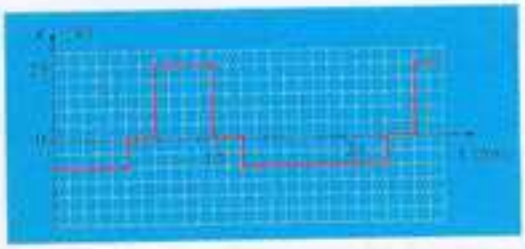
Lorsque le flux reste constant, il n'y a pas de f.é.m. induite : $e = 0$.

Le flux décroît de 100 mWb en 4 ms :

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -25\ \text{Wb.s}^{-1}, \quad \text{d'où} \quad e = 25\ \text{V}.$$

D'où le diagramme :

1. EXERCICES RESOLUS



EXERCICE 3

Courant induit

Un solénoïde assez long, comportant 1 000 spires par mètre, chacune de rayon $r = 5{,}0$ cm, est parcouru par un courant d'intensité $i = 0{,}1 \cos(1\,000t)$.

Une bobine circulaire plate, comportant 100 spires de rayon moyen $R = 8{,}0$ cm, entoure la région centrale du solénoïde.

1) Déterminer l'expression en fonction du temps du flux inducteur à travers la bobine plate.

2) La bobine plate constituant un circuit fermé de résistance 0,2 Ω, quelle est l'expression de l'intensité qui la parcourt?

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ SI

SOLUTION

1) Le champ magnétique pratiquement uniforme à l'intérieur du solénoïde est $B = \mu_0 . n . i$.

$$B = 4\pi \times 10^{-7} \times 1\,000 \times 0{,}1 \cos(1\,000t)$$
$$= 1{,}26 \times 10^{-4} \cos(1\,000t)$$

Orientant la spire plate dans le sens du courant **à la date $t = 0$** dans le solénoïde, le flux inducteur est positif pour $t = 0$. L'aire utile est celle où le champ varie, c'est-à-dire l'intérieur du solénoïde.

Cette aire utile vaut :

$$S = \pi . r^2 = 3{,}14 \times (5 \times 10^{-2})^2 = 7{,}85 \times 10^{-3}\ \text{m}^2.$$

Comme il y a 100 spires,

$$\Phi = N . B . S = \mathbf{9{,}90 \times 10^{-5} \cos(1\,000t).}$$

2) Dans le calcul de la f.é.m. $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, le signe − qui s'introduit par dérivation du cosinus disparaît à cause du signe − qui traduit la loi de Lenz :

$$e = 9{,}90 \times 10^{-5} \sin(1\,000t).$$

L'intensité du courant induit vaut donc :

$$i = \frac{e}{r} = \mathbf{0{,}49 \sin(1\,000t).}$$

L'intensité maximale de ce courant sinusoïdal est voisine de 0,5 A.

EXERCICE 4

Auto-inductance

Un fil en cuivre de longueur totale p, de diamètre d (vernis isolant compris) est enroulé en N spires jointives autour d'une pièce cylindrique en bois de diamètre D. Le diamètre moyen d'une spire est ainsi $(D + d)$. La longueur du solénoïde est désignée par X. La résistivité du cuivre vaut $\rho = 1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega.\text{m}$.

1) Exprimer l'inductance L de la bobine obtenue :

a) en fonction de p et X ;

b) en fonction de N, d et D.

2) Exprimer la résistance de la bobine précédente, en fonction de ρ, N, d et D.

3) Comment la résistance et l'auto-inductance se trouvent-elles modifiées lorsque toutes les dimensions linéaires de la bobine (D, d, X) sont simultanément doublées?

SOLUTION

1) *a*) Le solénoïde, constitué de N spires jointives de diamètre d, a pour longueur $X = N . d$. Chaque spire a pour aire $S = \dfrac{\pi . (D + d)^2}{4}$ et la longueur totale des N tours de fil est $p = N . \pi . (D + d)$.

L'inductance vaut :

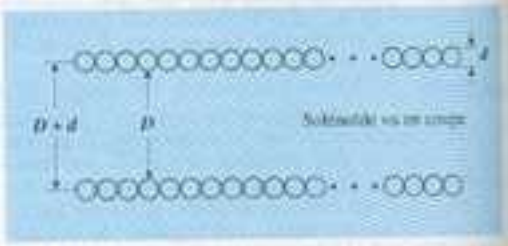
$$L = \mu_0 . \frac{N^2 . S}{X} = \mu_0 . N^2 . \left(\frac{\pi . (D + d)^2}{4}\right) . \frac{1}{N . d}$$

En y remplaçant $(D + d)$ par $\dfrac{p}{N . \pi}$, il vient :

$$L = \mu_0 . \frac{p^2}{4\pi . N . d},$$

et, en tenant compte de la valeur $4\pi \times 10^{-7}$ pour μ_0 :

$$\boldsymbol{L = 10^{-7} \frac{p^2}{X}.}$$



b) Avec $p = N . \pi . (D + d)$ et $X = N . d$, l'expression précédente devient :

$$\boldsymbol{L = 10^{-7} \pi^2 . N . \frac{(D + d)^2}{d}.}$$

2) La résistance $R = \dfrac{\rho . p}{s}$ s'exprime par :

$$R = \rho . \frac{N . \pi . (D + d)}{\frac{d^2}{4} . \pi} \qquad \boldsymbol{R = 4\rho . N . \frac{(D + d)}{d^2}.}$$

3) En doublant la longueur X du solénoïde et le diamètre d du fil, le nombre N de spires reste le même. D'après les rapports de diamètres qui interviennent dans les formules (D est aussi doublé), **l'inductance est multipliée par 2 et la résistance est divisée par 2.**

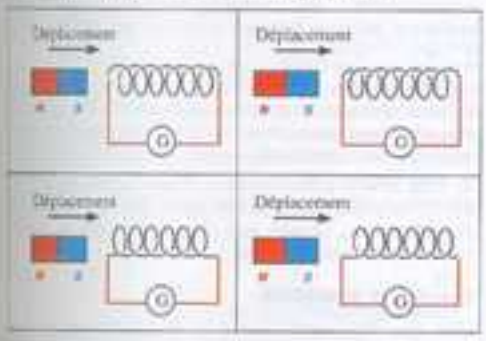
2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATION

Sans calculs

Exercice 1

Le galvanomètre dévie-t-il dans le même sens dans les cas des montages indiqués ci-dessous?



Préciser le sens du déplacement de l'aiguille du galvanomètre en supposant qu'elle dévie vers la droite lorsque le courant y pénètre par sa gauche.

Exercice 2

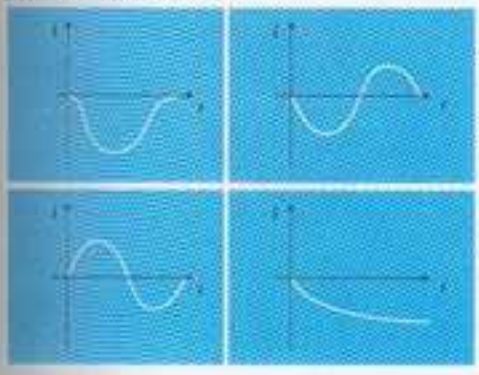
L'expérience présentée dans le cours à la figure 15 montre le retard à l'allumage d'une lampe. Elle ne met pas en évidence de retard à son extinction. Justifier.

Exercice 3

Un aimant droit vertical est lâché au-dessus d'une spire horizontale. Il la traverse dans sa région centrale.



Quelle est la courbe qui représente le mieux l'allure de l'évolution en fonction du temps de l'intensité du courant induit dans la spire?



Exercice 4

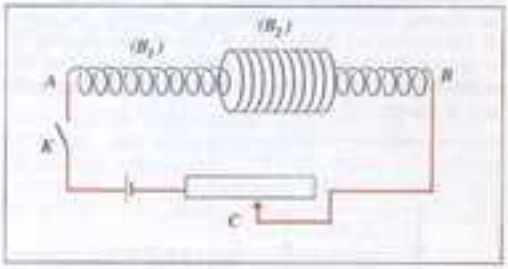
Le flux magnétique à travers une bobine plate varie-t-il linéairement :

1) Si un aimant droit dont la direction est orthogonale au plan de la bobine est approché à vitesse constante de la région centrale de la bobine?

2) Si une intensité variant linéairement en fonction du temps passe dans la bobine?

Exercice 5

Préciser le sens du courant induit dans la bobine formée B_2 quand on réalise successivement les opérations suivantes :



1) Fermer l'interrupteur K.

2) Introduire dans B_1 un noyau de fer doux.

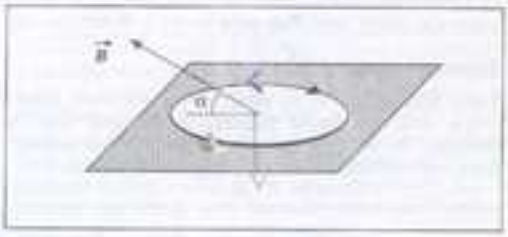
3) Déplacer le curseur C vers la gauche.

4) Ouvrir l'interrupteur K.

F.é.m. induite

*** Exercice 6**

1) Calculer le flux magnétique à travers la spire avec les données suivantes :



Bobine plate de 100 spires;
Rayon de chaque spire : 15 cm;
$\alpha = 30°$; $B = 0,05$ T.

Le champ magnétique est uniforme.

2) Quelle est la f.é.m. induite si le champ magnétique s'annule progressivement, régulièrement, en 0,05 s?

3) Quel est alors le sens du courant induit?

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 7

Un avion métallique vole horizontalement à mach 2 (600 $m.s^{-1}$ environ). Son envergure est de 25 m.

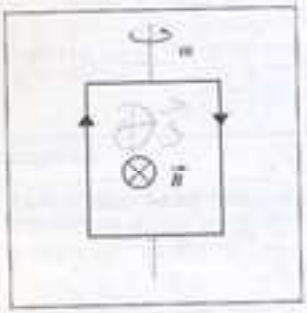
1) Quelle est la f.é.m. induite entre les extrémités des ailes?

2) Pourrait-on réaliser un tachymètre en reliant par des fils conducteurs un voltmètre aux extrémités des ailes?

La composante verticale du champ terrestre vaut 40 μT.

* Exercice 8

Un cadre rectangulaire vertical de hauteur h, de largeur a, comporte N spires de fil conducteur. Il plonge dans un champ magnétique uniforme horizontal de valeur B. Un moteur lui communique une vitesse de rotation ω autour de l'axe vertical passant par les milieux des côtés horizontaux. L'orientation du circuit est indiquée sur la figure.



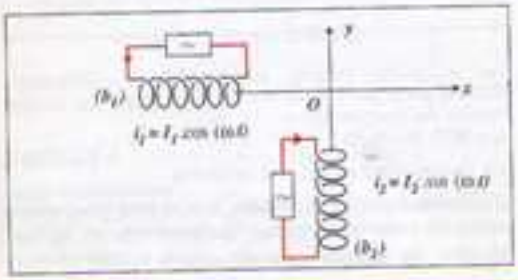
$a = 3$ cm;
$h = 5$ cm;
$N = 20$ spires;
$B = 0{,}15$ T;
$\omega = 20\pi$ rad.s^{-1}.

1) La figure représente la position du cadre à la date $t = 0$. Exprimer en fonction du temps l'écart angulaire θ entre le vecteur-aire et le vecteur-champ magnétique $\vec{B}$.

2) Déterminer l'expression du flux magnétique $\Phi(t)$ à travers le cadre, ainsi que celle de la f.é.m. induite $e(t)$.

Exercice 9

Deux bobines b_1 et b_2 horizontales ont leurs axes à angle droit (la figure ci-dessous est une vue de dessus). b_1 et b_2 sont parcourues par les courants dont les intensités sont données sur la figure.



Le champ créé en O par b_1 est dirigé selon Ox. Celui qui est créé en O par b_2 est selon Oy. Les valeurs maximales B_0 des champs créés par les deux bobines sont égales.

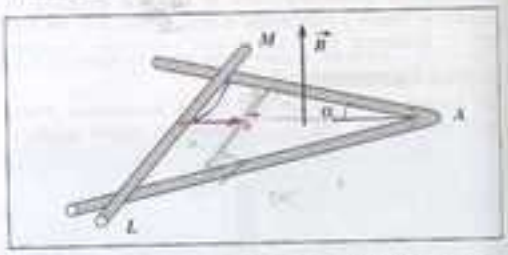
1) Représenter, en tenant compte des orientations indiquées sur les bobines et des sens des enroulements, les vecteurs-champs magnétiques créés par les deux bobines aux dates suivantes : $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4\omega}$; $t = \frac{\pi}{2\omega}$; $t = \frac{3\pi}{4\omega}$.

2) Montrer que le champ magnétique créé par les deux bobines équivaut en O à un « champ tournant » dont les caractéristiques seront précisées.

3) Une bobine plate circulaire, d'aire 5 cm^2, est placée en O, son axe étant dirigé selon Ox. Elle comporte $N = 20$ spires. Quelle est l'expression de la f.é.m. induite dans cette bobine?

* Exercice 10

Une tige LM de longueur ℓ repose sur deux rails horizontaux formant un écart angulaire égal à 2α. Elle est déplacée, à vitesse constante $\vec{v}$, en restant perpendiculaire à la bissectrice des deux rails. L'ensemble baigne dans un champ uniforme de vecteur $\vec{B}$ vertical pointant vers le haut.



1) A quelle distance d de A peut-on poser la tige pour que ses deux extrémités reposent sur les rails? La tige étant dans cette position, le point de l'espace qui coïncide avec son milieu O est pris comme origine. L'axe Ox passant par A est orienté de O vers A. x désigne l'abscisse du milieu de la tige LM en mouvement.

2) Calculer le flux magnétique à travers le circuit LMA en fonction de x, ℓ et α.

3) Déterminer l'expression de la f.é.m. induite dans le circuit.

Intensités de courants induits

Exercice 11

Une bobine plate circulaire souple, de 1 m de diamètre, de résistance 0,5 Ω comporte 100 spires. Déterminer l'intensité du courant induit dans les cas suivants :

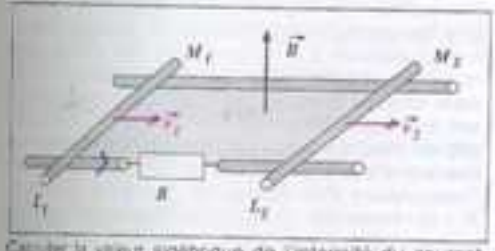
1) La bobine est placée perpendiculairement au méridien magnétique et son aire devient nulle en 0,05 s.

2. EXERCICES PROPOSÉS

2) La bobine est verticale, dans le plan méridien magnétique. Elle fait un demi-tour, à vitesse angulaire constante, autour de son diamètre horizontal en 0,1 s. Les composantes horizontale et verticale du champ magnétique terrestre valent respectivement 20 μT et 40 μT.

***Exercice 12**

Deux tiges L_1M_1 et L_2M_2 parallèles reposent sur deux rails horizontaux auxquels elles restent perpendiculaires. Elles sont déplacées aux vitesses respectives $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ en restant au contact des rails. Les rails et les tiges ont une résistance électrique nulle. Une résistance $R = 0{,}05\ \Omega$ est insérée sur l'un des rails, entre les deux tiges. L'ensemble baigne dans un champ uniforme vertical pointant vers le haut, de valeur $B = 0{,}2$ T.



Calculer la valeur algébrique de l'intensité du courant induit dans le cadre $L_1L_2M_2M_1$ dans les cas suivants :

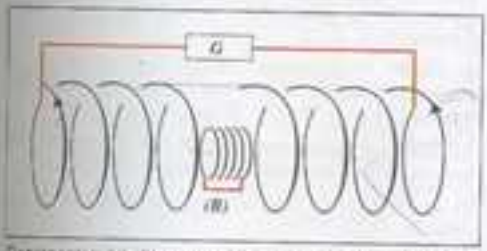
1) $v_1 = v_2 = 0{,}5\ m.s^{-1}$ vers la droite.

2) $v_1 = 0{,}5\ m.s^{-1}$ vers la droite, $v_2 = 0{,}5\ m.s^{-1}$ vers la gauche.

3) $v_1 = 0{,}5\ m.s^{-1}$ vers la droite, $v_2 = 0{,}25\ m.s^{-1}$ vers la gauche.

Exercice 13

Un solénoïde comportant $n_1 = 2\,000$ spires par mètre, chacune d'aire 20 cm², est alimenté par un générateur G. A l'intérieur du solénoïde, dans sa région centrale, se trouve une bobine plate (B), de même axe que le solénoïde, comportant $N = 300$ spires, chacune d'aire moyenne $S = 10\ cm^2$. La résistance de (B) est de 5 Ω. Elle est insérée dans le même sens (indiqué sur la figure) que le solénoïde.



Représenter graphiquement les courbes qui montrent l'évolution en fonction du temps de l'intensité du courant induit dans (B) dans les cas suivants :

1) L'intensité dans le solénoïde passe de $i = -0{,}5$ A à 2 en 1 ms.

2) L'intensité dans le solénoïde est « triangulaire » : elle est nulle aux dates $t = k.T$

(k entier et $T = 2 \times 10^{-3}$ s);

elle est maximale aux dates $t = \frac{(2k+1)}{2}.T$ et vaut alors $I_m = 200$ mA.

3) L'intensité dans le solénoïde est :

$$i = 0{,}3 \cos(3\,000t).$$

Auto-induction

Exercice 14

Un solénoïde de longueur $\ell = 0{,}40$ m, comportant 6 000 spires, chacune d'aire 15 cm², est parcouru par un courant. Calculer l'énergie magnétique qu'il emmagasine lorsque l'intensité passe de 0 à 1 A; de 1 A à 2 A; de 2 A à 3 A.

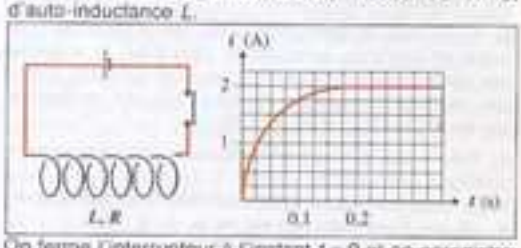
Exercice 15

Une bobine d'inductance $L = 0{,}5$ H, de résistance $R = 5\ \Omega$, est parcourue par un courant alternatif sinusoïdal d'intensité $i = 0{,}8 \cos(100\pi.t)$. Déterminer la tension aux bornes de la bobine. La mettre sous la forme $u = U_m.\cos(\omega.t + \varphi)$.

EXERCICES D'APRÈS BACCALAUREATS

***Exercice 16**

Un circuit se compose d'un générateur de f.é.m. $E = 20$ V et de résistance intérieure négligeable, d'un interrupteur et d'une bobine de résistance R et d'auto-inductance L.



On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et on enregistre à l'oscilloscope la représentation graphique de $i(t)$, où t est la durée comptée à partir de la fermeture du circuit et i l'intensité du courant.

Cette courbe présente, à l'instant $t = 0$, une tangente dont le coefficient directeur est 40 unités du SI. Au bout du temps $t = 0{,}2$ s, on peut considérer que le courant est établi, son intensité étant constante et égale à 2 A.

1) A l'aide de la représentation graphique, préciser comment varie qualitativement la f.é.m. d'auto-induction e.

2) Déterminer, à l'instant de la fermeture, lorsque l'intensité est encore pratiquement nulle, la f.é.m. d'auto-induction e.
En déduire l'auto-inductance L de la bobine.

3) Quelle est la f.é.m. d'auto-induction lorsque $t > 0{,}2$ s? En déduire la résistance de la bobine.

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES DESTINÉS A TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 19 — A.1.a.

Définir les expressions suivantes : circuit oscillant; pulsation propre; énergie magnétique; amortissement, entretien d'un circuit oscillant.

Exercice 20 — A.1.b.

La période des oscillations d'un oscillateur mécanique est-elle plutôt de l'ordre de la seconde ou de la milliseconde? Même question pour un circuit oscillant.

Exercice 21 — A.1.c.

La résistance d'un dipôle ohmique dépend-elle de la température du dipôle? de la fréquence du courant?

Exercice 22 — A.1. c.

Énoncer, sans formule la loi de conservation de l'énergie électromagnétique d'un circuit oscillant.

Exercice 23 — A.1.c.

Rappeler les propriétés du modèle d'amplificateur opérationnel en fonctionnement linéaire idéal.

Exercice 24 — A.2.b.

Suivre la même démarche que dans le chapitre 5 (page 92 : supposer connue l'expression de l'énergie magnétique et aboutir à celle de l'énergie potentielle) pour introduire l'expression $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ de l'énergie du condensateur chargé.

Exercice 25 — A.2.b.

Dessiner de mémoire le montage correspondant au circuit d'entretien des oscillations électriques d'un circuit oscillant.

Exercice 26 — A.2.b.

Démontrer la relation de conservation de l'énergie électromagnétique pour un circuit oscillant.

Exercice 27 — B.1.

Comparer les propriétés de l'*A.O.* idéal, à celle d'un *A.O.* (TL081 de préférence) réel, en demandant une photocopie du catalogue du constructeur à un marchand de matériel électronique.

Exercice 28 — B.2.

Trouver les incorrections :

1) Un circuit oscillant est réalisé en montant en série une résistance avec une capacité.

2) La période des oscillations d'un circuit oscillant est proportionnelle à la racine carrée du rapport de l'inductance sur l'inverse de la capacité.

3) L'inductance d'un circuit oscillant est l'analogue électrique de la masse d'un oscillateur mécanique.

4) La raideur d'un ressort est l'analogue mécanique de l'inverse de la capacité d'un circuit oscillant.

Exercice 29 — B.3.

Écrire l'équation différentielle à laquelle obéit la charge $q(t)$ d'un circuit oscillant non amorti. Vérifier qu'une solution du type $q = Q_0 . e^{-\gamma t} . \cos(\omega t + \varphi)$ convient à condition de prendre pour la pulsation ω une expression convenable, que l'on exprimera en fonction de $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L . C}}$ et de $\gamma = \frac{R}{2L}$. Cette pulsation existe-t-elle toujours? Que se passe-t-il physiquement quand elle devient imaginaire?

Exercice 30 — B.4.

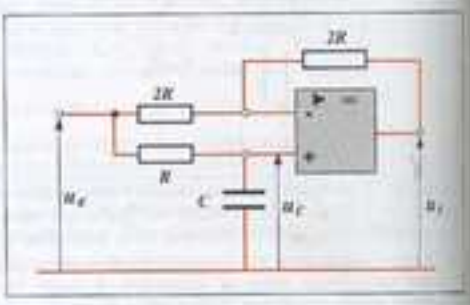
Préparer un exposé sur l'utilisation des circuits oscillants en radio et télévision.

Exercice 31 — C.1.b.

Reprendre l'étude du dispositif d'entretien des oscillations dans le cas où la résistance insérée entre la sortie s' du circuit intégré linéaire et l'entrée inverseuse est la moitié de celle qui est insérée entre s et l'entrée non inverseuse.

Exercice 32 — C.2.b.

1) Pour le montage indiqué ci-dessous, déterminer la relation donnant la tension d'entrée u_e en fonction de R, C, u_s et $\frac{du_s}{dt}$. Même question pour la tension de sortie u_s.



2) En supposant que la tension aux bornes du condensateur soit sinusoïdale ($u_C = U_C . \cos(\omega . t)$), exprimer u_e et u_s sous la forme $u_e = U_e . \cos(\omega . t - \varphi_1)$ et $u_s = U_s . \cos(\omega . t - \varphi_2)$. Comparer U_e à U_s et φ_1 à φ_2. Justifier le nom de déphaseur donné à ce montage.

2. EXERCICES PROPOSÉS

EXERCICES DESTINÉS À TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 20 — A.1.a.

Définir les termes suivants : « flux inducteur », « flux induit », « auto-inductance ».

Exercice 21 — A.1.a.

Quels sont les noms des unités de flux magnétique? d'inductance? de f.é.m. induite?

Exercice 22 — A.1.b.

Une bobine dont l'inductance vaut 1 H possède-t-elle une grande inductance?

Exercice 23 — A.1.c.

Sans vous référer au cours, écrivez l'énoncé de la loi de Lenz.

Exercice 24 — A.1.c.

Exprimer l'inductance d'un solénoïde long en fonction de sa longueur ℓ et de la longueur p de fil enroulé.

Exercice 25 — A.1.c.

Préciser toutes les circonstances où le flux inducteur à travers un circuit peut varier.

Exercice 26 — A.1.c.

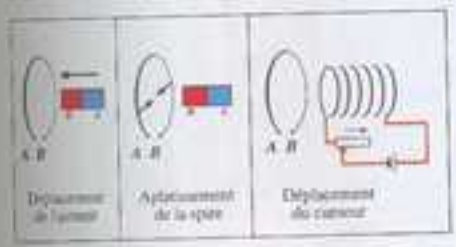
En quelle unité peut s'exprimer le rapport $\frac{L}{R}$ d'une inductance à une résistance. (Répondre en n'utilisant que les unités fondamentales m, kg, s...)

Exercice 27 — A.1.c.

Exprimer le volt à l'aide des unités fondamentales (m, kg, s, A...). Faire de même pour le weber par seconde. Conclusion?

Exercice 28 — A.2.b.

Déterminer le signe de la tension $u = V_A - V_B$ dans les circonstances indiquées sur les schémas ci-dessous.



Exercice 29 — B.1.

Préparer un exposé sur les travaux de Faraday.

Exercice 30 — B.2.

Faire un plan détaillé du cours en remplaçant chaque titre de paragraphe (1. 1), a)) par une phrase résumant l'essentiel du paragraphe.

Exercice 31 — B.3.

Une tige LM de longueur ℓ, orientée de L vers M, est déplacée orthogonalement à un champ vertical $\vec{B}$ ascendant uniforme.
Quelle est la signification physique des produits scalaires suivants :

$$(\vec{B} \wedge \vec{\ell}).\vec{v} \,?\quad (\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{\ell} \,?\quad (\vec{\ell} \wedge \vec{v}).\vec{B} \,?$$

Exercice 32 — B.3

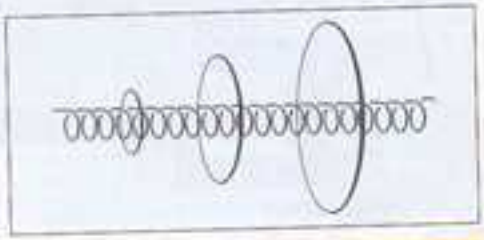
Lorsqu'on applique une tension constante à une bobine de résistance R et d'inductance L, le courant qui s'établit a une intensité donnée en fonction du temps selon la loi exponentielle : $i = I_{max}(1 - e^{-t/\tau})$, où τ désigne la « constante de temps » de la bobine $\left(\tau = \frac{L}{R}\right)$.
Tracer la courbe indiquant l'allure de l'évolution de $i(t)$.
Quelle est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $i(t)$ à la date $t = 0$? à la date $t = \tau$?
Au bout de combien de temps l'intensité atteint-elle une valeur égale à 99 % de sa valeur finale?

Exercice 33 — B.4.

Préparer des transparents pour rétroprojecteur pour montrer en classe l'évolution de la f.é.m., $e(t)$, induite dans une bobine circulaire qui tourne dans un champ uniforme autour d'un axe diamétral orthogonal au champ. La bobine sera représentée dans des positions successives se déduisant l'une de l'autre par rotation de 15°. La courbe $e(t)$ se construira peu à peu en insistant sur les variations qui se produisent d'une position à l'autre de la bobine.

Exercice 34 — C.1.b.

Un solénoïde très long est entouré de trois bobines « monospire » de rayons R, $2R$ et $3R$. Un courant variable passe dans le solénoïde. Les trois spires sont suffisamment éloignées les unes des autres pour être insensibles aux effets d'induction qu'elles pourraient mutuellement créer. Quelle doit être la relation entre les diamètres des fils constituant les trois spires pour qu'elles soient parcourues par le même courant induit?



Pour en savoir plus

THÉORIE SOMMAIRE DU TRANSFORMATEUR

1. Conventions

Les bobines étant orientées de telle sorte que les flux magnétiques qui les traversent soient de même signe, les sens des flèches associées aux tensions aux primaire et secondaire en résultent (fig. 34).

Les résistances des enroulements primaire et secondaire sont toujours faibles afin de limiter les pertes par effet Joule. Elles seront prises nulles en première approximation.

Enfin, la carcasse de fer, réalisée avec des feuillets, rend les pertes dues à l'existence des courants de Foucault assez faibles pour qu'il n'en soit pas tenu compte.

2. Rapport des tensions

Si φ désigne la valeur à la date t du flux magnétique, variable, à travers une spire, la relation $u = r.i - e$, générale avec les conventions adoptées, donne, avec $r_1 = r_2 = 0$:

$$u_1 = -e_1 = n_1.\frac{d\varphi}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = -e_2 = n_2.\frac{d\varphi}{dt}.$$

Par suite, le rapport des tensions variables vaut à chaque instant $\frac{u_2}{u_1} = \frac{n_2}{n_1}$.

Si le flux est sinusoïdal, $\varphi_m = \Phi.\sin(\omega.t)$ par exemple,

$$u_1 = n_1.\Phi_m.\omega.\cos(\omega.t)$$

et, $$u_2 = n_2.\Phi_m.\omega.\cos(\omega.t).$$

u_1 et u_2 ont donc la même phase (ici nulle) **et le rapport des tensions maximales vaut** $\frac{n_2}{n_1}$, comme indiqué dans le cours.

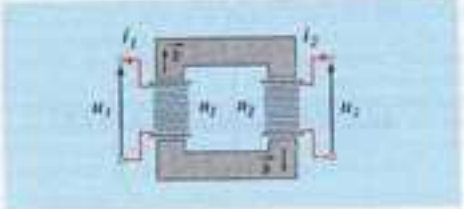


Fig. 34

3. Intensités

Le système constitué par les deux bobines reçoit, pendant un court intervalle de temps dt, les énergies $u_1.i_1.dt$ (au primaire) et $u_2.i_2.dt$ (au secondaire). Ces énergies sont à considérer algébriquement, positives quand elles constituent un gain pour le système.

Le transformateur n'accumule pas d'énergie électrique : il redonne en permanence ce qu'il reçoit. Par suite :

$$(u_1.i_1 + u_2.i_2).dt = 0 \quad \text{et} \quad u_2.i_2 = -u_1.i_1.$$

En tenant compte des expressions de u_1 et u_2, alors : $i_2 = -\frac{n_1}{n_2}.i_1$.

Les deux intensités sont en opposition.

Si l'une s'écrit $i_1 = I_{1m}.\cos(\omega.t - \alpha_1)$, l'autre est donnée par

$$i_2 = \frac{n_1}{n_2}.I_{1m}.\cos(\omega.t - \alpha_1 + \pi).$$

Le rapport des intensités maximales vaut :

$$\frac{I_{2m}}{I_{1m}} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Remarque :

La non-accumulation permanente d'énergie électrique dans le transformateur n'est pas si évidente. Il pourrait y avoir des phases d'accumulation d'énergie, puis de restitution. Dans ce cas, i_1 et i_2 ne seraient plus en opposition. Mais un oscilloscope montre que, dans les conditions ici adoptées, i_1 et i_2 sont bien en opposition. L'hypothèse de la non-accumulation d'énergie électrique permanente peut donc être retenue.



Fig. 35. *Transformateur Legrand.*

9 Circuits oscillants

1 Dipôle L, C.

2 Étude théorique du circuit oscillant.

3 Conservation de l'énergie électromagnétique.

4 Entretien des oscillations électriques



Oscilloscope performant.

1 DIPÔLE L, C

Un oscillateur électrique est un circuit dans lequel les électrons se déplacent en repassant périodiquement par une position moyenne d'équilibre.

1) *Montage*

Le montage de la figure 1 *a* permet de charger un condensateur de capacité C (en appuyant puis relachant l'interrupteur-poussoir K_1), puis de le décharger dans une bobine résistante et inductive (r, L) en maintenant l'interrupteur K_2 enfoncé. Un oscilloscope visualise la tension aux bornes du condensateur.

2) *Observations*

• En appuyant sur l'interrupteur K_1, l'oscillogramme montre que la tension aux bornes du condensateur devient instantanément égale à la f.é.m. du générateur : le condensateur s'est chargé.

• En relachant l'interrupteur K_1, puis en appuyant sur l'interrupteur K_2, le condensateur se décharge à travers la bobine. L'oscillogramme (fig. 1 *b*) montre que **la tension aux bornes du condensateur est oscillante.** Cela justifie le nom de **circuit oscillant** donné au dipôle L, C.

L'amplitude des oscillations électriques diminue au cours du temps. La courbe obtenue ressemble à celle des oscillations mécaniques amorties (chapitre 5). L'amortissement est dû à l'inévitable résistance de la bobine.

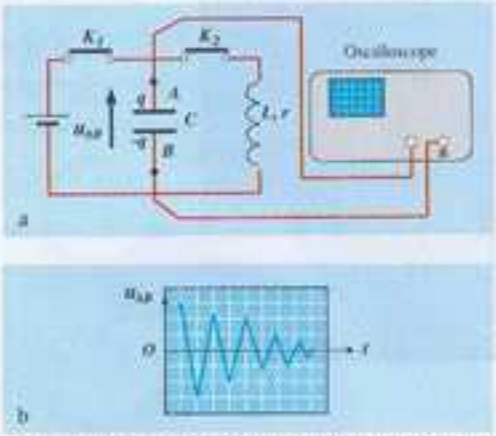


Fig. 1. ***Décharge oscillante d'un condensateur dans une bobine inductive.***

2 ÉTUDE THÉORIQUE DU CIRCUIT OSCILLANT

Dans cette première approche théorique, la résistance de la bobine sera supposée suffisamment petite pour être considérée comme nulle. Dans ces conditions les oscillations ne sont pas amorties.

1. Équation différentielle régissant les oscillations électriques

a) Dispositif théorique et conventions

Un condensateur de capacité C est chargé (fig. 2). Il se décharge dans une bobine purement inductive.

Le sens de la flèche associée aux tensions est lié à l'orientation du dipôle (fig. 3). Le produit $p = u.i$ est la puissance du dipôle. Avec cette convention, la puissance est positive lorsque le dipôle reçoit de l'énergie, négative quand il en fournit.

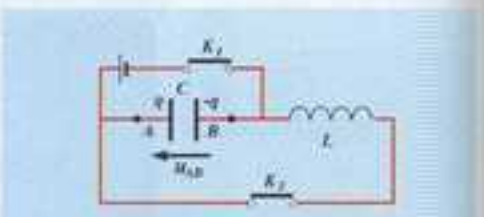


Fig. 2. ***Le condensateur se charge quand K_1 est seul fermé. Il se décharge dans la bobine quand K_2 est seul fermé.***

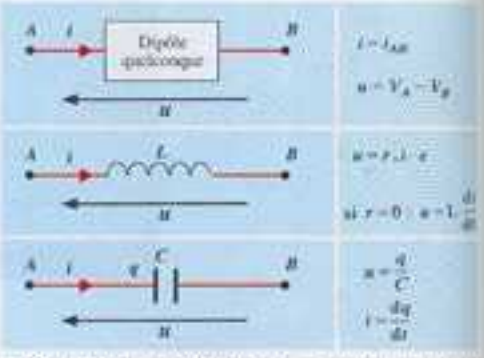


Fig. 3. ***Convention générale et son application aux cas de la bobine seulement inductive et au condensateur.***

• Pour une bobine inductive non résistante, la relation générale $u = r.i - e$ devient :

$u = L.\frac{di}{dt}$ puisque $r = 0$ et que $e = -L.\frac{di}{dt}$.

• Pour un condensateur, la relation entre sa charge q et sa tension aux bornes u_c est :

$$q = C.u_c$$

C, désigne la capacité du condensateur, qui s'exprime en farad (F).

D'où :
$$u = \frac{q}{C}$$

La charge q est celle de l'armature qui est désignée par la flèche qui sert à orienter le dipôle. Elle s'exprime en coulomb (C).

Quand le condensateur se charge ou se décharge, un courant d'intensité i, passe dans le circuit qui relie ses armatures.

Avec les conventions de la figure 4, la charge de l'armature A augmente (qu'elle soit positive ou négative), lorsque l'intensité est positive. i et dq ont donc le même signe et l'intensité algébrique est :

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

b) Mise en équation

Le condensateur est supposé initialement chargé.

Lorsque le circuit est fermé en appuyant sur l'interrupteur K_2, la tension $u_{AB} = u_L + u_C$ est nulle (fig. 4).

Par suite :

$$L.\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Or, $i = \frac{dq}{dt}$ donc : $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$; en remplaçant dans l'expression précédente, il vient :

$$L.\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}.q = 0 \quad \text{ou :} \quad L.\ddot{q} + \frac{1}{C}.q = 0$$

C'est une équation différentielle.

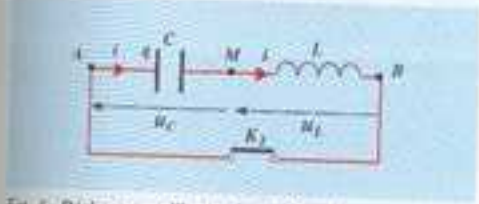


Fig. 4. Décharge oscillante du condensateur. L'interrupteur K_2 court-circuite les bornes A et B.

2. Résolution de l'équation

a) Recherche de la solution

L'équation précédente est formellement équivalente à celle qui a été obtenue pour un oscillateur mécanique non amorti (chapitre 5) :

$m.\frac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0$ et qui admet pour solution :

$$x(t) = X_m.\cos(\omega_0.t + \varphi).$$

Par analogie, cela suggère d'essayer pour la variable q, une solution sinusoïdale du type :

$$q(t) = Q_m.\cos(\omega_0.t + \varphi).$$

Si cette solution convient :

$$\frac{dq}{dt} = -\omega_0.Q_m.\sin(\omega_0.t + \varphi),$$

et : $\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega_0^2.Q_m.\cos(\omega_0.t + \varphi) = -\omega_0^2.q.$

En remplaçant dans l'équation différentielle :

$$L.\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}.q = 0,$$

il vient : $-L.\omega_0^2.q(t) + \frac{1}{C}.q(t) = 0.$

Cette équation est satisfaite à tout instant lorsque : $L.\omega_0^2 = \frac{1}{C}$.

La solution sinusoïdale envisagée convient donc, à condition que la constante ω_0, soit liée aux caractéristiques des dipôles par la relation :

$$L.C.\omega_0^2 = 1$$

b) Oscillations harmoniques

La constante ω_0, est appelée **pulsation propre** (ou naturelle) du circuit oscillant. Elle s'exprime en radian par seconde ($rad.s^{-1}$).

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$$

ω_0	en radian par seconde ($rad.s^{-1}$)
L	en henry (H)
C	en farad (F)

Dans l'expression, $q(t) = Q_m.\cos(\omega_0.t + \varphi)$, les constantes Q_m et φ dépendent des conditions initiales choisies par l'expérimentateur (charge initiale du condensateur et date origine). Q_m est **la charge maximale** du condensateur et φ **la phase** à la date $t = 0$.

c) Période et fréquence propres

La période propre des oscillations est égale à la période de la fonction sinusoïdale précédente, soit, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$:

$$T_0 = 2\pi.\sqrt{L.C}$$

La période s'exprime en seconde(s). L'inverse de la période propre est la **fréquence propre** :

$$N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi . \sqrt{L . C}}.$$

Elle s'exprime en hertz (Hz).
Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

CIRCUIT OSCILLANT HARMONIQUE	
Équation différentielle : $L . \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} . q = 0.$	
Solution : $q = Q_m . \cos(\omega_0 . t + \varphi)$	
$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L . C}}$	$T_0 = \frac{1}{N_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi . \sqrt{L . C}$
L en henry (H) q et Q_m en coulomb (C) C en farad (F) ω_0 en radian par seconde (rad.s^{-1}) T_0 en seconde (s) N_0 en hertz (Hz) φ en radian (rad)	

3. Lois horaires et diagrammes

En électricité, la variable utilisée est souvent $i(t)$. L'intensité s'obtient par dérivation de l'expression :

$$q(t) = Q_m . \cos(\omega_0 . t + \varphi),$$

soit :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\omega_0 . Q_m . \sin(\omega_0 . t + \varphi).$$

Pour éviter le signe $-$, $i(t)$ s'écrit :

$$i(t) = \omega_0 . Q_m . \cos\left(\omega_0 . t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i(t) = I_m . \cos\left(\omega_0 . t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

avec $I_m = \omega_0 . Q_m$, intensité maximale du courant.

L'**intensité** du courant est en **quadrature avance sur la charge** du condensateur.

Ceci peut être représenté par les diagrammes $q(t)$ et $i(t)$ (fig. 5).
L'intensité est nulle lorsque la charge est extrémale, elle est extrémale quand la charge est nulle.

3 CONSERVATION DE L'ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

1. Énergie emmagasinée dans une bobine et dans un condensateur

a) Énergie magnétique d'une bobine

L'expression de l'énergie magnétique emmagasinée dans une bobine d'auto-inductance L, parcourue par un courant d'intensité i, a été établie au chapitre 8 :

$$E_{mag} = \frac{1}{2} L . i^2.$$

Selon le paragraphe précédent, l'intensité i est telle que :

$$i = -\omega_0 . Q_m . \sin(\omega_0 . t + \varphi).$$

En remplaçant dans l'expression de l'énergie magnétique, il vient :

$$E_{mag} = \frac{1}{2} L . \omega_0^2 . Q_m^2 . \sin^2(\omega_0 . t + \varphi).$$

D'après la relation $L . \omega_0^2 . C = 1$, soit $L . \omega_0^2 = \frac{1}{C}$ on en déduit :

$$E_{mag} = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} . \sin^2(\omega_0 . t + \varphi).$$

En tenant compte de la relation :

$$2 \sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha),$$

cette expression devient :

$$E_{mag} = \frac{1}{4} \frac{Q_m^2}{C} . (1 - \cos(2\omega_0 . t + 2\varphi))$$

L'énergie magnétique se présente comme une fonction sinusoïdale du temps, de pulsation $2\omega_0$, de fréquence $2N_0$ et de période $\frac{T_0}{2}$.

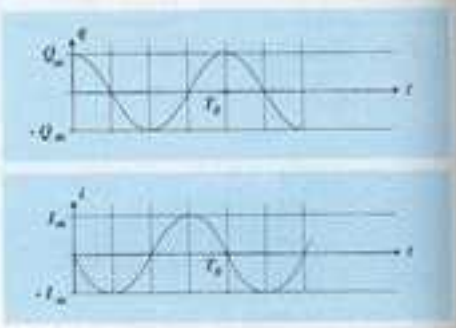


Fig. 5

b) Énergie électrique d'un condensateur

Les condensateurs ont été étudiés en classe de première. L'énergie électrique emmagasinée dans un condensateur de capacité C, lorsque sa charge est q, est donnée par :

$$E_{élec} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}.$$

En tenant compte de l'expression de la charge $q(t) = C.u(t)$, l'énergie du condensateur s'exprime aussi par les relations suivantes :

$$E_{élec} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}C.u^2 = \frac{1}{2}q.u.$$

Or, selon nos conventions, la charge q s'écrit :

$$q = Q_m.\cos(\omega_0.t + \varphi).$$

En remplaçant dans l'expression de l'énergie électrique, il vient :

$$E_{élec} = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}.\cos^2(\omega_0.t + \varphi).$$

En tenant compte de la relation :

$$2\cos^2\alpha = (1 + \cos 2\alpha),$$

cette expression s'écrit :

$$E_{élec} = \frac{1}{4}\frac{Q_m^2}{C}.\left(1 + \cos(2\omega_0.t + 2\varphi)\right).$$

L'énergie électrique se présente comme une fonction sinusoïdale du temps, de pulsation $2\omega_0$, de fréquence $2N_0$ et de période $\frac{T_0}{2}$.

c) Conservation de l'énergie électromagnétique

L'**énergie électromagnétique** d'un circuit oscillant est la somme de l'énergie magnétique de la bobine et de l'énergie électrique du condensateur :

$$E = \frac{1}{2}L.i^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}.$$

Soit :

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}.\left[\sin^2(\omega_0.t + \varphi) + \cos^2(\omega_0.t + \varphi)\right].$$

Les termes entre crochets sont indépendants du temps, car :

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Par suite :

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}.$$

L'énergie électromagnétique du circuit oscillant reste donc constante. En d'autres termes, **elle se conserve.**

Cette énergie constante E, est égale à l'énergie électrique maximale emmagasinée par le condensateur, $\frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}$, quand l'énergie magnétique est nulle. C'est aussi l'énergie magnétique maximale emmagasinée par la bobine, quand l'énergie électrique est nulle, car :

$$I_m = \omega_0.Q_m \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{L.C}$$

d'où : $E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2C}.\left(\frac{I_m}{\omega_0}\right)^2 = \frac{1}{2}L.I_m^2.$

Lors des oscillations, il y a transformation mutuelle des énergies électrique et magnétique.

2. Analogies électromagnétiques

Le comportement des oscillateurs mécaniques et électriques non amortis sont régis par deux équations différentielles analogues :

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0 \quad \text{et} \quad L.\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}.q = 0.$$

La variable q joue en électricité le rôle de la variable x en mécanique, l'inductance L celui de la masse m, etc. Ces analogies sont résumées dans le tableau p. 185.



Fig. 6. ***Circuit oscillant dans une calculette. On reconnaît la bobine et le condensateur.***

4 ENTRETIEN DES OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES

1. Amortissement des oscillations

L'observation à l'oscilloscope a montré que les oscillations électriques s'amortissent.

a) Causes des pertes d'énergie

Les électrons libres qui oscillent dans les conducteurs autour de leurs positions statistiques d'équilibre sont en interaction avec les ions du réseau métallique. Dans la bobine, ces interactions correspondent à deux effets macroscopiques :

• *Les électrons* perdent de l'énergie au profit des ions du réseau, dont l'agitation thermique augmente. A notre échelle, cela se traduit par une élévation de température. En régime permanent, la bobine rayonne sous forme de **chaleur** cette énergie qu'elle reçoit (effet Joule). Il s'agit là d'un **phénomène dissipatif.**

• *L'énergie* reçue par les ions est perdue par les électrons, qui se trouvent ralentis. Cet effet se traduit à notre échelle par l'existence de la **résistance** électrique.

Ainsi, la résistance électrique de la bobine d'un circuit oscillant est la cause de phénomènes dissipatifs qui font diminuer l'énergie électromagnétique du circuit. Cette perte d'énergie est compensée par une apparition de **chaleur.**

b) Équation différentielle pour un oscillateur amorti

La figure 7 reprend le dispositif étudié précédemment en y insérant un dipôle ohmique de résistance réglable R.

La tension $u = u_{AB} = V_A - V_B$ aux bornes de la série est à chaque instant :

$$u = u_C + u_{RL} = \frac{q}{C} + R\,.\,i + L\,.\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Cette tension comme précédemment, est nulle quand l'interrupteur K_2 est enfoncé (court-circuit).

En choisissant comme variable $q(t)$, il vient, avec $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}$:

$$\frac{q}{C} + R\,.\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + L\,.\,\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = 0,$$

soit

$$L\,.\,\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\,.\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\,.\,q = 0.$$

Cette équation est identique à celle obtenue pour les oscillateurs mécaniques amortis :

$$m\,.\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \lambda\,.\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\,.\,x = 0$$

— la résistance électrique R, joue pour le circuit oscillant le rôle de la résistance mécanique λ, des oscillateurs mécaniques;

— l'inductance L, est l'analogue électrique de la masse m;

— l'inverse de la capacité est l'analogue de la constante de raideur k du ressort.

c) Étude expérimentale

• *Montage*

La figure 8 représente un montage utilisable pour visualiser à l'oscilloscope la tension u_C aux bornes du condensateur : A est relié à la voie 1 (ou Y_A) et M est branché à la masse de l'oscilloscope. La tension $u_C(t)$ montre l'évolution en fonction du temps de la charge $q(t)$ du condensateur, car $q = C\,.\,u_C$.

La résistance totale du circuit oscillant est égale à la somme des résistances r de la bobine et de la résistance R extérieure, réglable.

• *Oscillogrammes*

Selon les valeurs de la résistance R, les régimes de décharge suivants sont observés :

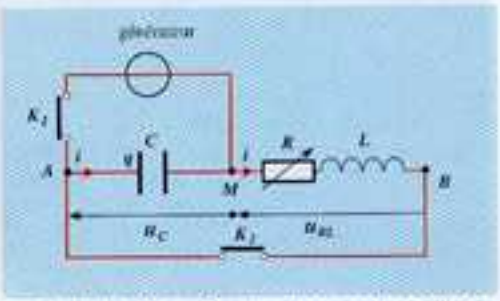


Fig. 7. ***Dipôle R, L, C série. Le mode d'amortissement dépend de la valeur de R.***

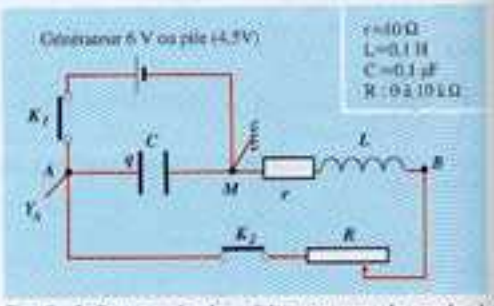


Fig. 8. ***Influence de la résistance sur le mode de décharge du condensateur.***

— **Si R est faible,** le régime est oscillatoire mais du fait de l'existence de l'amortissement électrique, l'amplitude des oscillations diminue et la période T est légèrement supérieure à la période propre T_0; le régime est *pseudo-périodique* (fig. 9).

— **Si R est élevée,** le régime est *« apériodique »* et amorti. Il n'y a plus d'oscillations. La tension aux bornes du condensateur décroît exponentiellement en fonction du temps, d'autant plus lentement que la résistance est plus grande (fig. 10 *a*).

— Entre ces cas extrêmes, il existe une valeur de la résistance, telle que les oscillations cessent. Cette résistance est appelée *résistance critique*. On démontre que c'est pour cette valeur que la décharge non oscillante est la plus rapide (fig. 10 *b*).

Au lieu d'appuyer successivement sur les interrupteurs K_1 et K_2, il est plus commode de remplacer l'ensemble {pile, K_1} de la figure 6 par un générateur de tension en créneaux (fig. 11 *a*) et de supprimer l'interrupteur K_2. Le condensateur subit alors automatiquement une succession de charges et de décharges. Si la résistance du circuit est inférieure à la résistance critique, l'allure de l'oscillogramme obtenu est donné à la figure 11 *b*.

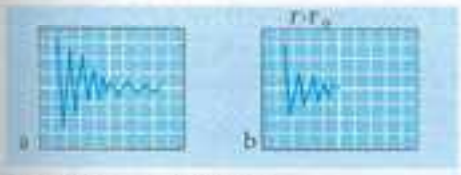


Fig. 9 ***Régimes pseudopériodiques.***
a) $R = 0$ ($r = 10\ \Omega$). *b)* $R = 1\ k\Omega$.

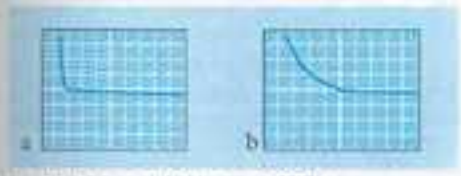


Fig. 10 ***Régimes apériodique et critique.***
a) $R = 10\ k\Omega$. *b)* $R = 2\ k\Omega$ *(critique).*



Fig. 11 ***Observation automatique de la décharge oscillante du condensateur.***
a) Tension appliquée au condensateur.
b) Décharges oscillantes du condensateur.

d) Interprétation énergétique

L'équation : $L.\frac{di}{dt} + R.i + \frac{q}{C} = u$, traduit l'additivité des tensions instantanées aux bornes des composants du dipôle. Désignant par dE l'énergie électrique reçue par le dipôle pendant un court intervalle de temps dt, la puissance $P = \frac{dE}{dt} = u.i$ du dipôle est :

$$\frac{dE}{dt} = L.i.\frac{di}{dt} + R.i^2 + \frac{q}{C}.i$$

Puisque $i = \frac{dq}{dt}$ l'expression précédente peut s'écrire :

$$dE = L.i.di + R.i^2.dt + \frac{q}{C}.dq.$$

Dans cette expression, $L.i.di$, peut s'interpréter comme la petite variation de :

$$E_{magn} = \frac{1}{2}.L.i^2.$$

$\left(\text{en effet } \frac{dE_{magn}}{dt} = L.i.\frac{di}{dt}\right)$.

De même $\frac{q}{C}.dq$ est la petite variation de $E_{élec} = \frac{1}{2}.\frac{q^2}{C}$.

L'équation précédente s'écrit donc :

$$dE = d(E_{magn}) + R.i^2.dt + d(E_{élec}),$$

soit, en regroupant les deux termes qui constituent l'énergie électromagnétique emmagasinée dans la bobine et le condensateur :

$$E_{charg} = E_{magn} + E_{élec}$$
$$dE = d(E_{charg}) + R.i^2.dt.$$

Dans le cas des oscillations amorties, il n'y a aucune source d'énergie électrique extérieure. Les deux extrémités du dipôle sont court-circuitées : $u = 0$ et $dE = 0$ à tout instant, par suite, $d(E_{charg}) = -R.i^2.dt$.

Cette expression, toujours négative montre que le dipôle amorti perd de l'énergie électromagnétique.

2. Entretien des oscillations électriques

Pour compenser les pertes d'énergie électromagnétique subies par le dipôle pendant un intervalle de temps dt, il faut une source d'énergie extérieure qui fournisse au dipôle une énergie : $dE = R.i^2.dt$. Cette source d'énergie doit fonctionner par « bouffées », fournissant davantage d'énergie lorsque l'intensité est extrémale.

En pratique un **amplificateur opérationnel** ($A.O.$) permet de réaliser automatiquement cette compensation.

a) Principe du montage (fig. 12)

Un dipôle constitué par une bobine de résistance R et d'inductance L, placé en série avec un condensateur de capacité C, est monté entre le fil de masse M du montage et le point S qui aboutit à l'entrée inverseuse e_- de l'amplificateur opérationnel. L'entrée inverseuse e_- de l'*A.O.* est liée à sa sortie s' par un dipôle ohmique de résistance R_1. L'entrée non inverseuse e_+ est liée d'une part à la sortie s' par un dipôle ohmique ayant lui aussi une résistance égale à R_1, et d'autre part au fil de masse par l'intermédiaire d'un rhéostat de résistance réglable R_0. La valeur maximale de R_0 doit être supérieure à la résistance R du dipôle R, L, C.

Comme d'habitude, l'alimentation de l'*A.O.* n'est pas représentée sur le schéma.

b) Choix des conventions et des orientations

Le potentiel du fil de masse est conventionnellement nul. Les tensions u_C aux bornes du condensateur, u_{R_0} aux bornes du rhéostat, et $u = V_S - V_M$ sont comptées à partir de la masse, d'où le sens indiqué pour les flèches associées. La flèche associée à la tension u_{RL} aux bornes de la bobine poursuit celle de u_C. L'orientation du dipôle R, L, C en résulte, conformément aux conventions habituelles. La partie du montage située à droite des points S et M, qui constitue le **système d'entretien** des oscillations, peut ainsi être considéré comme une source de tension u délivrant une intensité i positive quand elle sort du circuit d'entretien (fig. 13).

Les résistances d'entrées de l'*A.O.* sont pratiquement « infinies » : les courants d'entrées i_+ et i_- sont nuls.

Puisque $i_- = 0$, le courant passant dans la branche $s'Ae_-$ est aussi égal à i, d'où découle l'orientation de cette branche, ainsi que le sens de la flèche associée à la tension $R_1.i$ du dipôle ohmique branché selon $s'Ae_-$.

Puisque $i_+ = 0$, le courant i_1 qui passe dans R_0 passe aussi dans la branche $s'BN'$. Les orientations des conducteurs $s'BN'$ et $N'N$ résultent du sens choisi pour la flèche associée à :

$$u_0 = V_{N'} - V_N = R_0.i_1.$$

Le sens de la flèche associée à la tension $R_1.i_1$ en résulte.

c) Mise en équation

• Pour la maille $MSRLCM$ du dipôle R, L, C : $u - u_{RL} - u_C = 0$, d'où :

$$u = u_{RL} + u_C = R.i + L.\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

soit, puisque $i = \frac{dq}{dt}$:

$$u = R.\frac{dq}{dt} + L.\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} \qquad (1)$$

• Pour la maille $MSe_-e_+N'NM$:

$$u + \varepsilon - R_0.i_1 = 0, \qquad (2)$$

en désignant par ε la tension entre les bornes d'entrée de l'*A.O.*

• Pour la maille $e_-As'BN'e_+e_-$:

$$R_1.i - R_1.i_1 - \varepsilon = 0. \qquad (3)$$

d) Fonctionnement de l'A.O. en régime linéaire

En régime linéaire, la tension entre les bornes d'entrée de l'*A.O.* est nulle : $\varepsilon = 0$.

D'après (3), $R_1.(i - i_1) = 0$, d'où : $i = i_1$.

En reportant dans (2) : $u + 0 - R_0.i = 0$, d'où :

$$u = R_0.i.$$

La relation (1) s'écrit alors :

$$L.\frac{d^2q}{dt^2} + (R - R_0).\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Le dispositif d'entretien des oscillations équivaut à la mise en série avec la bobine d'une résistance $-R_0$: **il simule une résistance négative.**

Du point de vue énergétique, la tension $u = R_0.i$ correspond à une puissance :

$$P = u.i = R_0.i^2.$$

L'énergie fournie au dipôle R, L, C pendant un court intervalle de temps dt, est bien du type attendu : $dE = R_0.i^2.dt$.

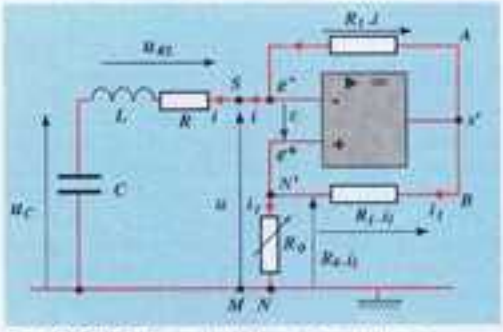


Fig. 12. *Choix des orientations et conventions.*

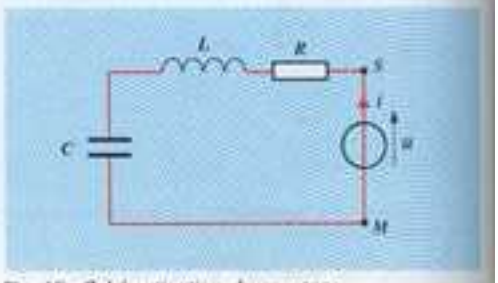


Fig. 13. *Schématisation du montage.*

• Si $R_g = R$, l'équation précédente devient celle d'un circuit oscillant non amorti, vibrant à la pulsation propre du dipôle R, L, C :

$$L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0.$$

Le dispositif d'entretien compense alors exactement, à chaque instant, l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance de la bobine inductive. Il y a entretien des oscillations.

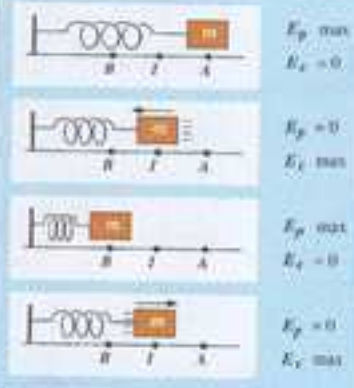
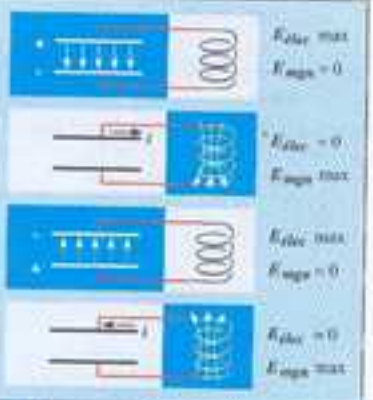
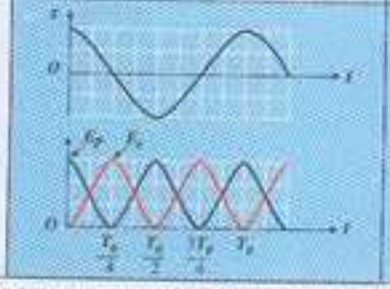
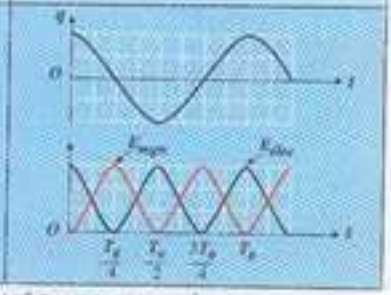
• Si $R_g < R$, l'équation devient celle d'un circuit oscillant amorti de résistance inférieure à R. Les oscillations ne peuvent pas prendre naissance dans ces conditions. Si elles existent, elles s'amortissent. Les pertes d'énergie ne sont pas assez compensées :

$$R_g \cdot i^2 \cdot t < R \cdot i^2 \cdot t$$

L'amplificateur opérationnel ne fournit pas assez d'énergie pour entretenir les oscillations.

• Si $R_g > R$, l'*A.O.* fournit plus d'énergie qu'il n'en faut pour entretenir les oscillations. Les oscillations deviennent de plus en plus amples, et l'*A.O.* peut atteindre la saturation. Il ne fonctionne plus en régime linéaire. Le signal de sortie n'est plus sinusoïdal : il présente de la distorsion.

La vérification expérimentale de ces propriétés fait l'objet de la fiche expérimentale.

	Oscillateurs mécaniques	Circuits oscillants
Équation différentielle	$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0$	$L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot q = 0$
Conservation de l'énergie	$\frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2 = E_{méca}$	$\frac{1}{2} L \cdot i^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = E_{élec}$
Grandeurs analogues	x ; $v = \frac{dx}{dt}$; $a = \frac{dv}{dt}$	q ; $i = \frac{dq}{dt}$; $\frac{di}{dt}$
	m ; k	L ; $\frac{1}{C}$
Évolution des systèmes		
Diagrammes temporels		

ANALOGIES DE COMPORTEMENT DES OSCILLATEURS MÉCANIQUES ET ÉLECTRIQUES

Fiche expérimentale

ENTRETIEN DES OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES

1) DONNÉES RELATIVES AU MONTAGE

La figure 14 donne le schéma d'un montage qui permet d'observer des oscillations électriques entretenues.
La partie gauche du montage est un dipôle série R, L, C. La bobine ($R = 10\ \Omega$, $L = 0,1$ H) en l'absence de fer) peut être remplacée par une petite bobine du commerce, moins encombrante, mais souvent de résistance plus élevée (il faut alors choisir un rhéostat de résistance R_0 qui lui soit supérieure).
La partie droite est constituée par un amplificateur opérationnel TL081 environné de résistances dont l'une, R_0, est réglable.
L'alimentation (−15 V, 0, +15 V) du circuit intégré n'est pas représentée sur le schéma. Elle doit évidemment être utilisée. C'est une qu'il faut commencer par brancher.
Des précisions sur ce montage sont données à la page 196.

2) FONCTIONNEMENT

a) Observation des oscillations entretenues

Relier les bornes du condensateur à l'oscilloscope.
Faire varier la résistance R_0 du rhéostat par valeurs croissantes, puis décroissantes.
Observer les déformations des oscillogrammes (fig. 15).
Interpréter.

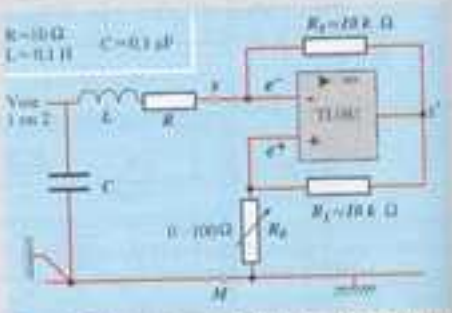


Fig. 14. *Montage pour l'entretien des oscillations électriques.*

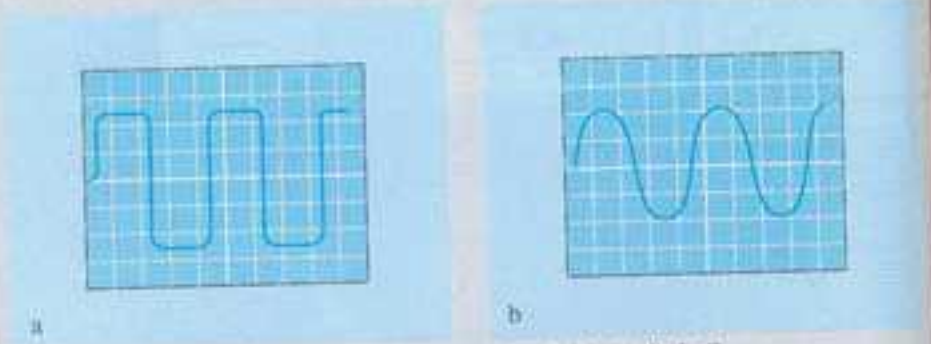


Fig. 15. *Oscillations entretenues d'un dipôle série R, L, C.*
a) $R_0 = 100\ \Omega > R$: oscillations non sinusoïdales. *b) $R_0 = 10\ \Omega = R$: oscillations sinusoïdales.*

b) Caractéristiques intensité-tension du dispositif d'entretien

Réaliser le montage indiqué à la figure 16. Le générateur + 15 V, − 15 V peut être celui qui alimente l'*A.O.* (dans ce cas, il est inutile de relier son point milieu à la masse du montage, car cette opération est déjà réalisée pour alimenter l'*A.O.*). Relever dans un tableau les couples de points (u, i). Tracer la courbe montrant l'évolution de u en fonction de i. Préciser le domaine de linéarité. Recommencer éventuellement les mesures en remplaçant les deux dipôles ohmiques $R_1 = 10\ k\Omega$ par des dipôles de résistances $R'_1 = 1\ k\Omega$. Comparer les domaines de linéarité.

Remarque : En remplaçant le générateur + 15 V, − 15 V et le potentiomètre par un générateur *BF* inséré comme indiqué à la figure 17, un oscilloscope utilisé en *XY* permet de visualiser la caractéristique $i \longrightarrow u$: brancher *S* en *X*, *T* en *Y* et *M* à la masse de l'oscilloscope.

3) UTILISATION D'UN OHMMÈTRE NUMÉRIQUE

Un ohmmètre numérique est un générateur de courant. Par exemple, utilisé sur le calibre 200 Ω, il impose un courant d'intensité constante égale à 1 mA et affiche en mV la tension aux bornes du dipôle ohmique branché à ses bornes (si cette tension vaut 150 mV, la résistance est de 150 Ω). Vérifier que l'ohmmètre numérique, branché directement entre les bornes *M* et *S* du circuit d'entretien des oscillations, indique une valeur négative pour la résistance. Intervertir les deux bornes de l'ohmmètre. La valeur de la résistance affichée est-elle encore négative? En pratique, elle ne sera pas exactement la même, car les deux résistances R_1 ne sont pas rigoureusement égales, et la tension de décalage de l'*A.O.* (« tension d'offset ») n'est pas corrigée.

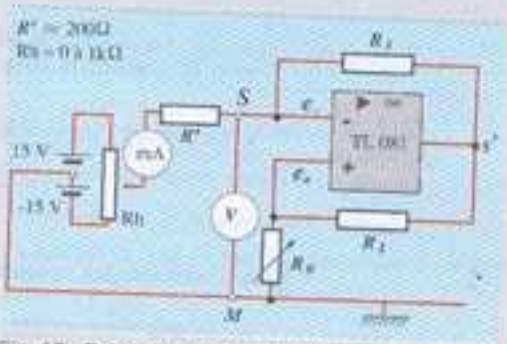


Fig. 16. ***Relevé de la caractéristique $i \longrightarrow u$ de l'amplificateur opérationnel.***

4) INFLUENCE DE LA CAPACITÉ

En changeant de condensateur, la fréquence propre des oscillations est modifiée ($L \cdot C \cdot \omega_0^2 = 1$). Dans quel sens une augmentation de la capacité fait-elle théoriquement varier la fréquence? Vérifier expérimentalement.

En principe, la résistance R_0 qui déclenche les oscillations quasi-sinusoïdales ne devrait pas dépendre de la capacité. Vérifier expérimentalement qu'il n'en est rien. En fait, la résistance électrique *R* de la bobine dépend de la fréquence des oscillations. Cette résistance augmente-t-elle ou diminue-t-elle lorsque la fréquence croît?

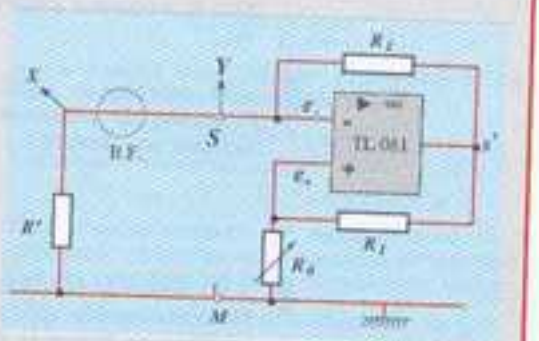


Fig. 17. ***Relevé à l'oscilloscope de la caractéristique $i \longrightarrow u$.***

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

• Retrouver rapidement **l'équation différentielle** régissant les oscillations d'un circuit oscillant :

$$L.\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C}=0$$

• Connaître l'expression de la **solution sinusoïdale** de l'équation précédente :

$$q = Q_m.\cos.(\omega_0.t+\varphi)$$

où Q_m est la **charge maximale** du condensateur, ω_0 la **pulsation propre** et φ la **phase** à la date $t=0$.

• Retrouver l'expression de l'**intensité** par dérivation :

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=Q_m.\omega_0.\cos\left(\omega_0.t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right).$$

• Connaître les relations donnant, pour un circuit oscillant non amorti :

— la **pulsation propre** $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L.C}}$;

— la **période propre** $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi.\sqrt{L.C}$,

d'où la **fréquence propre** $N_0=\frac{1}{T_0}$.

• Se rappeler la signification des expressions qui interviennent dans l'équation de **conservation de l'énergie** électromagnétique d'un **circuit oscillant non amorti :**

$$\frac{1}{2}L.i^2+\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=C^{te}.$$

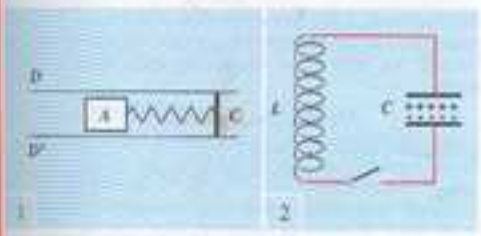
• Expliquer le fonctionnement d'un **amplificateur opérationnel** convenablement monté, qui permet d'**entretenir les oscillations** d'un circuit oscillant en jouant le rôle d'une « **résistance négative** ».

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

1) On considère un solide A, de masse m, glissant sans frottement entre deux glissières D et D'. On accroche à ce solide une extrémité d'un ressort de masse négligeable et de raideur k, l'autre extrémité étant reliée à un point fixe C (fig. *a*). On déplace le solide A de façon à provoquer l'allongement du ressort et on l'abandonne sans vitesse initiale. Il apparaît alors des oscillations mécaniques.

a) Établir l'équation différentielle du mouvement du solide A, en prenant comme variable l'élongation x du solide A.



b) En déduire la période des oscillations.

Application numérique : $m = 0{,}5$ kg et $k = 25$ N.m^{-1}.

2) On réalise le circuit (fig. *b*) comprenant une bobine de résistance négligeable, d'inductance L et un condensateur chargé de capacité C. On ferme le circuit.

a) Établir l'équation différentielle traduisant les oscillations électriques qui apparaissent dans le circuit en prenant pour variable la charge q d'une armature du condensateur.

b) En déduire la période des oscillations.

Application numérique : $L = 0{,}1$ H et $C = 10^{-9}$ F.

3) Faire apparaître dans un tableau récapitulatif les analogies électriques et mécaniques en citant les grandeurs électriques de la question 2) qui correspondent aux grandeurs mécaniques suivantes : masse m, raideur k, élongation x et vitesse v du solide A, énergie cinétique et énergie potentielle du système solide A-ressort.

SOLUTION

1) *a)* Puisque le mobile glisse sans frottement, l'effet de son poids est annulé par la réaction des glissières. La seule force active est la force de rappel élastique, de valeur algébrique : $F_x = -k.x$.

L'accélération a_x du mobile est donc telle que : $m.a_x = -k.x$.

soit : $$m.\frac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0.$$

b) Cette équation différentielle admet une solution : $x = X_m.\cos(\omega_0.t + \varphi)$.

Deux dérivations successives donnent :

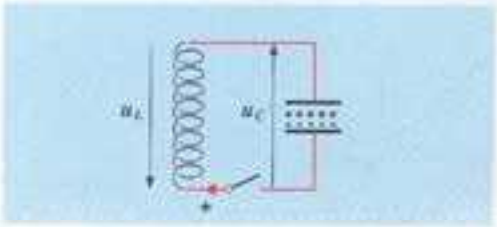
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -X_m.\omega_0^2.\cos(\omega_0.t + \varphi) = -\omega_0^2.x.$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, il vient $-m.\omega_0^2.x + k.x = 0$. L'équation est donc satisfaite pour $k = m.\omega_0^2$. La période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ est donc :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Application numérique : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}5}{25}} \approx$ **0,89 s.**

2) La flèche associée à la tension u_C aux bornes du condensateur est choisie pour que cette tension soit initialement positive. Le sens habituel d'orientation des circuits en résulte, ainsi que le sens de la flèche associée à la tension aux bornes de la bobine.



Lorsque l'interrupteur est fermé, le dipôle L, C est court-circuité et la somme $u_C + u_L$ est nulle.

Avec les conventions choisies, un courant d'intensité positive charge le condensateur : $i = \frac{dq}{dt}$.

La tension u_C aux bornes du condensateur s'exprime par : $u_C = \frac{q}{C}$.

La tension u_L aux bornes de la bobine est :

$$u_L = r.i - e = 0.i + L.\frac{di}{dt} = L.\frac{d^2q}{dt^2}.$$

La relation $u_C + u_L = 0$ se traduit par l'équation différentielle :

$$L.\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}.q = 0.$$

b) Par analogie avec l'équation différentielle du système mécanique, la période propre vaut :

$$T_0 = 2\pi.\sqrt{L.C}.$$

L'application numérique donne :

$$T_0 = 2\pi.\sqrt{0{,}1 \times 10^{-9}} \approx \mathbf{6{,}3 \times 10^{-5}}\ \mathbf{s}.$$

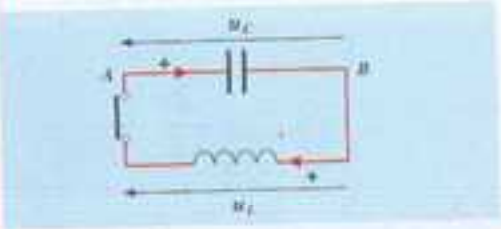
3) Le tableau demandé se déduit d'abord de la comparaison entre les deux équations différentielles, puis en examinant les combinaisons entre les grandeurs analogues, par exemple, l'analogue de $\frac{1}{2}m.v^2$ est l'énergie magnétique $\frac{1}{2}L.i^2$.

1. EXERCICES RESOLUS

Grandeurs mécaniques	m	A	x	v	$\frac{1}{2} m.v^2$	$\frac{1}{2} k.x^2$
Grandeurs électriques	L	$\frac{1}{C}$	q	i	$\frac{1}{2} L.i^2$	$\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$

EXERCICE 2

Un condensateur de capacité $C = 0,1\ \mu F$ est chargé sous tension $u_{AB} = 50$ V, puis déconnecté de la source. A la date $t = 0$, il commence à se décharger dans une bobine d'inductance $L = 50$ mH, de résistance très faible.



1) Calculer la pulsation, la fréquence et la période propres des oscillations électriques.

2) Calculer la charge maximale du condensateur.

3) Quelles sont les expressions indiquant en fonction du temps l'évolution de la charge q_A de l'armature du condensateur et de l'intensité dans le circuit oscillant? Représenter les diagrammes de $q_A(t)$ et $i(t)$.

SOLUTION

1) La pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$ vaut :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{50 \times 10^{-3} \times 0,1 \times 10^{-6}}} = 1,4 \times 10^4\ rad.s^{-1}.$$

La fréquence et la période propres s'en déduisent :

$$N_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 2,3 \times 10^3\ Hz \quad \text{et} \quad T_0 = \frac{1}{N_0} = 4,4 \times 10^{-4}\ s.$$

2) La charge maximale du condensateur est égale à sa charge initiale :

$$Q_m = C.u_{AB} = 0,1 \times 10^{-6} \times 50 = 5 \times 10^{-6}\ C.$$

3) La relation $q = Q_m.\cos(\omega_0.t + \varphi)$ donne la charge de l'armature désignée par la flèche qui sert à orienter le conducteur, ici q_A.

A la date $t = 0$, la charge de l'armature A est positive ($u_{AB} = +50$ V) et $q_A = Q_m = Q_m.\cos\varphi$. Par suite $\cos\varphi = 1$. Le plus simple est de choisir $\varphi = 0$ (modulo 2π) :

$$q_A = Q_m.\cos(\omega_0.t).$$

L'intensité est donnée par :

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = -Q_m.\omega_0.\sin(\omega_0.t).$$

Elle est nulle à la date $t = 0$, puis commence par être négative, ce qui est normal pour un condensateur qui débute sa décharge. Cette intensité peut s'écrire aussi :

$$i(t) = Q_m.\omega_0.\sin(\omega_0.t + \pi).$$

L'intensité maximale vaut :

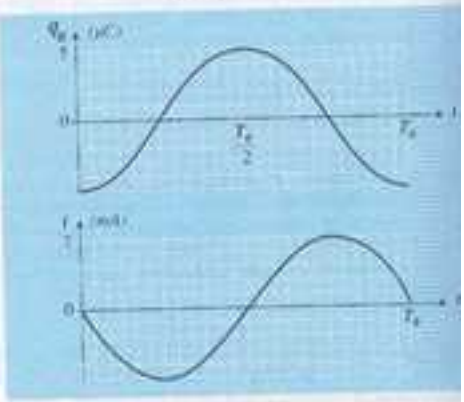
$$I_m = Q_m.\omega_0 = 5 \times 10^{-6} \times 1,4 \times 10^4 = 7,1 \times 10^{-2}\ A.$$

La charge q_B est l'opposée de q_A. Les deux fonctions sinusoïdales à représenter sont donc :

$$q_B = -Q_m.\cos(\omega_0.t) \quad \text{et} \quad I = -Q_m.\omega_0.\sin(\omega_0.t)$$

avec : $Q_m = 5\ \mu C$, $I_m = Q_m.\omega_0 = 71$ mA

et $T_0 = 4,4 \times 10^{-4}$ s.



Ces diagrammes montrent que la charge q_B est en quadrature avance sur l'intensité.

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATION

Sans calculs

Exercice 1

Deux dipôles L, C non résistants, d'inductances et de capacités différentes, peuvent-ils avoir la même fréquence d'oscillations? L'énergie électromagnétique est-elle la même si les condensateurs sont chargés initialement sous la même tension?

Exercice 2

Un circuit oscillant non résistant, a une période d'oscillations T. A la date $t = 0$, le condensateur possède sa charge maximale. A quelles dates l'énergie du circuit oscillant se trouve-t-elle uniquement sous forme d'énergie magnétique?

Exercice 3

A l'aide du dispositif d'entretien des oscillations utilisé dans le cours, les oscillations se déclenchent pour une résistance, R_0, du rhéostat, égale à 200 Ω. Observe-t-on des oscillations lorsque $R_0 = 100\ \Omega$? $R_0 = 400\ \Omega$? Ces oscillations sont-elles sinusoïdales?

Lois horaires

Exercice 4

Un circuit oscillant non amorti, d'inductance $L = 10$ mH et de capacité $C = 50$ pF est parcouru par un courant sinusoïdal d'intensité maximale $I_m = 0{,}10$ mA.

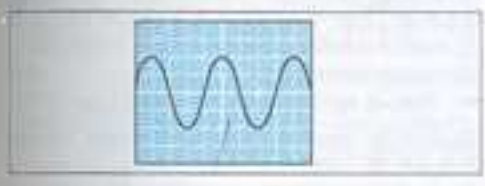
1) Faire un schéma du montage en indiquant les conventions utilisées.

2) Déterminer les lois horaires donnant l'intensité $i(t)$ dans le circuit, la charge $q(t)$ du condensateur, l'énergie magnétique $E_{mag}(t)$ de la bobine et $E_{élec}(t)$ du condensateur.

3) Représenter graphiquement l'évolution de ces grandeurs en fonction du temps.

Exercice 5

La figure ci-dessous représente l'oscillogramme de la tension aux bornes du condensateur ($C = 0{,}5$ µF) d'un circuit oscillant non amorti. Les réglages de l'oscilloscope sont : 1 µs/cm pour la vitesse de balayage et 2 V/cm pour la tension verticale.



Quelle est l'expression de l'intensité $i(t)$? (Préciser sur un schéma les conventions d'orientation utilisées.)

Exercice 6

L'énergie électrique d'un condensateur ($C = 0{,}1$ µF) monté en série avec une bobine non résistante est donnée (SI) en fonction du temps par :

$$E_{élec} = 0{,}005 \cos(4 \times 10^4 t)$$

Déterminer la valeur de l'inductance de la bobine et l'expression en fonction du temps de l'énergie magnétique de la bobine.

Exercice 7

Un condensateur de capacité $C = 1$ nF, initialement chargé, est relié à la date $t = 0$ à une bobine d'inductance L et de résistance R. Un oscilloscope permet d'étudier la tension u_C aux bornes du condensateur et donne la courbe ci-dessous.



La vitesse de balayage est réglée sur 0,5 µs/cm.

1) Déterminer, à partir de l'observation de cette courbe, la pseudo-période du phénomène. En déduire l'inductance de la bobine, en supposant que la pseudo-période est pratiquement égale à la période propre du circuit L, C, sans résistance.

2) Quel dispositif peut-on utiliser pour éviter l'amortissement des oscillations?

3) On ajoute une résistance r, extrêmement grande, en série avec la bobine. Comment la courbe est-elle modifiée?

Période, fréquence, pulsation

Exercice 8

L'équation différentielle régissant le comportement d'un circuit oscillant est :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 8 \times 10^4 q = 0.$$

La capacité du condensateur est de 0,5 µF.

1) Déterminer la pulsation, la fréquence et la période propres.

2) Quelle est l'inductance de la bobine?

Exercice 9

Avec une bobine dont l'inductance peut varier de 0,07 H à 1,0 H, et une batterie de condensateur dont la capacité peut varier de 0,5 µF à 15,5 µF, quelles sont les fréquences maximales et minimales des circuits oscillants réalisables?

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 10

La capacité d'un condensateur variable rotatif à air est donnée par la relation $C = 5 + 0{,}2\theta$ où θ désigne l'angle de rotation (exprimé en degré) des armatures mobiles ($0 < \theta < 180°$). La capacité est ainsi donnée en pF. Ce condensateur est commandé par la rotation d'un bouton sur un poste récepteur de radio. Il est associé à une bobine d'inductance L.

Quelles peuvent être les valeurs de L pour que le circuit oscillant L, C, vibre à la même fréquence que les grandes ondes radio (150 à 350 kHz), afin de les recevoir? Laquelle choisir?

Énergies

• Exercice 11

1) Un condensateur de capacité $C = 10\ \mu F$ est chargé sous une tension de 12 V. Quelle énergie emmagasine-t-il?

2) Le condensateur chargé est mis en relation avec une bobine d'inductance $L = 0{,}1$ H et avec un circuit d'entretien des oscillations. Quelle est l'intensité dans le circuit oscillant lorsque le circuit d'entretien compense exactement les pertes par effet Joule?

Exercice 12

Un condensateur de capacité $C = 2{,}5\ \mu F$ est associé à une bobine d'inductance $L = 4$ mH. Un dispositif d'entretien des oscillations permet de considérer que la résistance du circuit oscillant ainsi constitué est nulle. L'énergie initiale du condensateur chargé est de 20 µJ.

1) Représenter graphiquement l'évolution de l'énergie du condensateur en fonction de sa charge q.

Échelle : 1 cm pour 10^{-5} C en abscisses; 1 cm pour 2 µJ en ordonnées.

2) Représenter sur le graphique précédent la courbe montrant l'évolution de l'énergie électromagnétique du circuit oscillant.

3) Déterminer graphiquement l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine aux instants où l'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur vaut 5 µJ.

Exercice 13

Écrire l'équation de conservation de l'énergie d'un circuit oscillant non amorti. Quelle relation retrouve-t-on en dérivant cette relation par rapport au temps?

Exercice 14

Un condensateur de capacité $C = 0{,}5\ \mu F$ et une bobine d'inductance $L = 0{,}1$ H constituent un circuit oscillant non amorti. Représenter graphiquement les courbes indiquant l'évolution des énergies électrique, magnétique et électromagnétique :

1) en fonction de la charge $q(t)$,

2) en fonction du temps.

Analogies électromécaniques

Exercice 15

On désire que la période propre des oscillations verticales d'une automobile, de masse $m = 1$ t, reposant sur 4 ressorts identiques, soit à vide, égale à $T_0 = 1{,}3$ s (ce qui correspond à la période moyenne de la marche).

1) Déterminer la constante de raideur d'un ressort qui soutient le véhicule. De quelle distance d se déplace le centre d'inertie du véhicule quand 4 passagers, chacun de masse 100 kg, montent dans le véhicule? Si le véhicule et les passagers oscillent verticalement avec une amplitude égale à d, quelles sont les énergies cinétiques et potentielles maximales?

2) Des dispositifs électroniques permettent de simuler des condensateurs de capacités variables (de 0 à 250 µF par exemple) ou des inductances (de 0 à 250 H). Quelles valeurs de la capacité et de l'inductance pourraient conduire à la même période d'oscillations que la voiture chargée ou à vide? Quel intérêt y a-t-il à simuler électroniquement les oscillations verticales du véhicule?

EXERCICES D'APRÈS BACCALAURÉATS

Exercice 16

1) Une planche en bois de masse m est lancée sur l'eau, dans la direction Ox, avec une vitesse initiale v_0. Elle subit une force de freinage visqueux de valeur algébrique $F_x = -\lambda . v$. Montrer que, la poussée d'Archimède annulant l'effet du poids, l'équation différentielle qui régit sa vitesse est $m . \frac{dv}{dt} + \lambda . v = 0$.

Vérifier que l'expression $v = v_0 . e^{-k.t}$ convient comme solution pour cette équation. Exprimer k en fonction de λ et m. En déduire l'expression de $x(t)$, du type $A + B . e^{-k.t}$, en déterminant A, B et k en fonction de m, v_0 et λ. La date $t = 0$ est celle du lancement.

Application numérique :

$$m = 2\ \text{kg},\ v_0 = 1\ \text{m.s}^{-1};\ \lambda = 0{,}5\ \text{kg.s}^{-1}$$

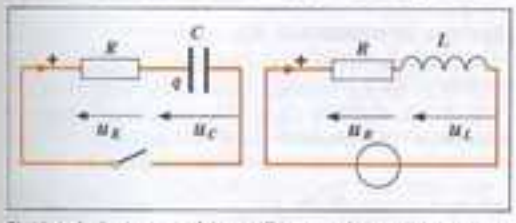
Au bout de combien de temps la vitesse n'est-elle plus que de 1 mm.s^{-1}?

2) Un condensateur de capacité C portant une charge initiale q_0 est relié à un dipôle ohmique de résistance R (fig. a). On ferme l'interrupteur à la date $t = 0$.

2. EXERCICES PROPOSES

Déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit la charge $q(t)$ du condensateur. Intégrer cette équation.

Application numérique : $q_0 = 2 \times 10^{-4}$ C; $C = 10$ µF; $R = 50\ \Omega$. Au bout de combien de temps la charge n'est-elle plus que le millième de la charge initiale?



3) Un générateur de f.é.m. E, sans résistance interne, alimente un dipôle série R, L (fig. *b*). Exprimer l'intensité dans le dipôle en fonction de E et R. A la date $t = 0$, le générateur est arrêté et la tension à ses bornes devient brusquement nulle. Écrire l'équation différentielle à laquelle obéit l'intensité du courant après cette date. Déterminer l'expression de l'intensité $i(t)$.

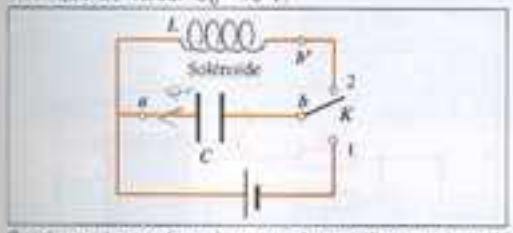
Application numérique : $L = 0{,}1$ H; $R = 50\ \Omega$; $E = 12$ V.

Au bout de combien de temps l'intensité n'est plus que le millième de l'intensité initiale?

* Exercice 17

1) Soit un solénoïde placé dans l'air comportant $N = 2\,000$ spires, de longueur $\ell = 50$ cm et de diamètre $D = 5$ cm. Établir l'expression littérale de l'auto-inductance, L, de ce solénoïde, puis calculer la valeur numérique de L. On supposera le champ magnétique uniforme à l'intérieur du solénoïde et on rappelle que la perméabilité de l'air est voisine de celle du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ SI.

2) On branche ce solénoïde dans le montage, représenté sur la figure, qui comporte : un condensateur de capacité $C = 0{,}5$ µF et une source de tension électrique de valeur $U_0 = 10$ V.



On charge le condensateur en plaçant l'interrupteur K en position 1 et on le fait ensuite se décharger dans le solénoïde en plaçant l'interrupteur dans la position 2.

a) Donner l'expression de l'intensité instantanée, i, du courant qui circule dans le solénoïde à partir de l'instant $t_0 = 0$ où l'on ferme l'interrupteur en position 2. Sur le schéma, on précisera les conventions d'orientation qui permettent de définir les valeurs algébriques des courants et des tensions.

On suppose que le circuit étudié ici a une résistance négligeable.

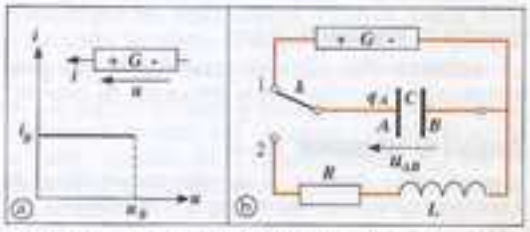
b) Déterminer la pulsation de l'oscillateur électrique ainsi réalisé.

3) Montrer que l'énergie emmagasinée dans le circuit constitué par le condensateur et le solénoïde est globalement constante.

Ceci est-il possible dans la réalité? Pourquoi?

Exercice 18

Un générateur de courant G, possède la caractéristique représentée figure *a*. Il délivre un courant d'intensité constante I_0 pour toute valeur de u inférieure à $U_0 = 12$ V.

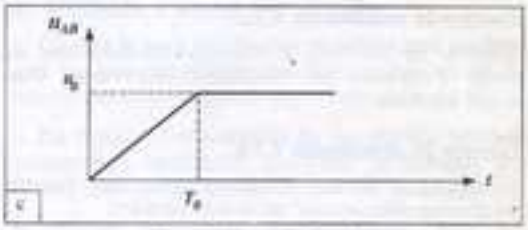


1) Lorsque K est en position 1 (fig. *b*), le condensateur de capacité $C = 10$ µF se charge par l'intermédiaire du générateur de courant; les variations de la tension u_{AB} aux bornes du condensateur, en fonction du temps, sont données par la figure *c*.

a) Quelle est la charge Q_0 prise par le condensateur lorsque $t \geq T_0$ (régime permanent)?

b) Quelle est alors l'énergie emmagasinée par le condensateur?

2) Établir pour $0 < t \leq T_0$ la relation entre I_0, t, C et u_{AB}. Déduire de cette relation et de la figure la valeur de I_0.



$U_0 = 12$ V; $T_0 = 60$ ms.

3) Le condensateur C étant chargé, on bascule K en 2, à une date qu'on choisira comme nouvelle date origine.

Établir la relation entre q_A, $\frac{dq_A}{dt}$, $\frac{d^2 q_A}{dt^2}$, R, L et C.

4) *a*) Dans l'hypothèse où R est très faible, le circuit est le siège d'oscillations électriques faiblement amorties de pseudo-période $T = 8{,}0$ ms. En déduire la valeur de l'inductance L de la bobine.

b) Dans l'hypothèse où R est très grande, donner l'allure de $q_A(t)$ pour $t > 0$. Comment peut-on qualifier cette décharge?

• *Courants sources de champ magnétique :* une aiguille magnétique dévie au voisinage d'un courant électrique (fig. 5). Cet effet a été découvert par le physicien danois Œrsted en 1819. Les courants électriques sont donc producteurs de champ magnétique, dans leur voisinage.

Les expériences précédentes montrent que **les aimants et les courants électriques sont des sources de champs magnétiques.**

b) Vecteur champ magnétique

L'orientation prise par l'aiguille aimantée, montre qu'elle est sensible à une grandeur orientée, qui est appelée vecteur-champ magnétique, désigné traditionnellement par $\vec{B}$.

• *Direction*

La direction du vecteur-champ est, tout naturellement, celle que prend l'aiguille aimantée qui le détecte.

• *Sens*

Par convention, le sens de $\vec{B}$ est choisi selon le sens $\vec{sn}$ (sud-nord) de l'aiguille aimantée détectrice.

• *Valeur*

La valeur du champ magnétique se mesure à l'aide d'un **teslamètre** (fig. 6). Le nom de cet appareil vient de ce que l'unité du SI de champ magnétique est le **tesla** (T), dont la définition sera précisée ultérieurement.

Il est utile de retenir qu'un champ magnétique de valeur 1 T est un champ intense. Par exemple, la composante horizontale du champ géomagnétique ne vaut que $B_h \approx 2 \times 10^{-5}$ T.

Les aimants supraconducteurs industriels permettent d'obtenir des champs beaucoup plus intenses, jusqu'à 10 T.

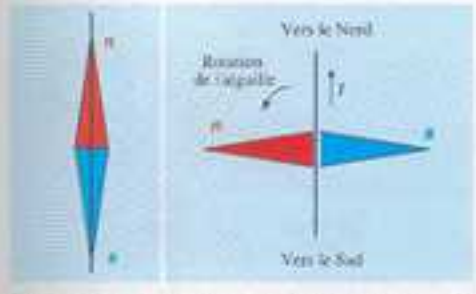


*Fig. 5. **Action d'un courant sur une aiguille aimantée.** L'aiguille dévie pratiquement de 90° si le courant est suffisamment intense.*

3. Interactions d'origine magnétique

a) Interactions aimant-aimant

L'expérience réalisée avec deux barreaux aimantés (fig. 7), dont la nature des extrémités est connue met en évidence les résultats suivants : chaque aimant est sensible au champ magnétique créé par l'autre.

• **Deux extrémités de même nature** (toutes deux *N*, ou *S*) **se repoussent.**

• **Deux extrémités de nature différente s'attirent.**

Cette propriété est parfois utilisée pour déterminer la nature nord ou sud des extrémités d'un aimant inconnu, par référence à un autre bien connu : boussole par exemple.

b) Interactions aimant-courant

• *Les courants agissent sur les aimants*

Cet effet a déjà été signalé à propos de l'expérience d'Œrsted (fig. 5). Le passage d'un courant à proximité d'un aimant tend à l'orienter ou à le déplacer, car l'aimant est sensible au champ magnétique créé par le courant.



*Fig. 6. **Teslamètre.***

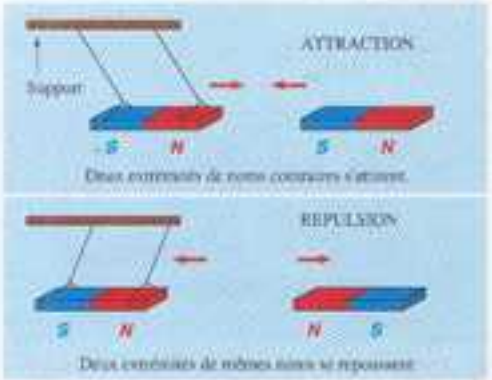


*Fig. 7. **Interactions attractives ou répulsives entre aimants.***

• *Les aimants agissent sur les courants*

La figure 8 *a* montre l'action d'un aimant sur un fil parcouru par un courant et la figure 8 *b*, l'action d'un aimant sur un pinceau d'électrons, qui constitue un courant électrique encore plus simple. Le fil conducteur se déplace, et le pinceau d'électrons est dévié. Ainsi, un courant agit sur un aimant et un aimant agit sur un courant. Il s'agit d'*actions réciproques*.

Le principe des moteurs électriques est basé sur cette mise en mouvement, dans un champ magnétique, des conducteurs parcourus par un courant.

c) Interactions courant-courant

Chaque fil parcouru par un courant est sensible au champ magnétique dont l'autre est la source. Selon les sens relatifs des courants, les interactions sont attractives ou répulsives (fig. 9).

Ces expériences, qui unissent la mécanique et l'électricité, sont à la base de la définition légale de l'ampère.

L'étude des interactions entre les courants et les aimants constitue l'électromagnétisme.

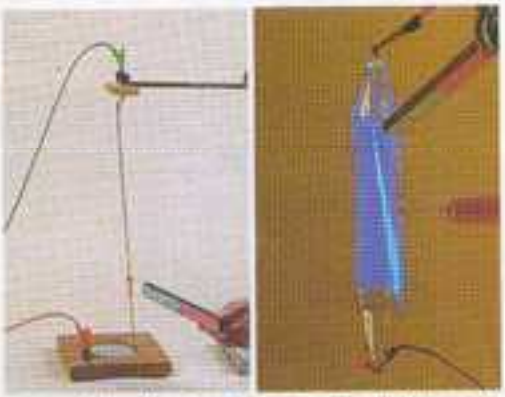


Fig. 8. ***Action d'un aimant sur un courant dans un fil (a) ou sur un pinceau d'électrons (b).***

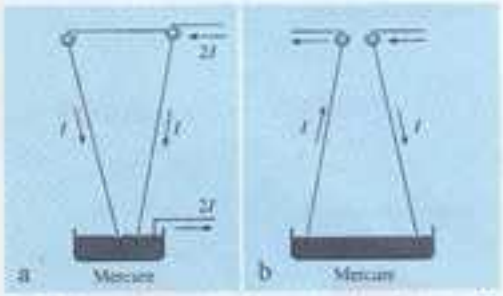


Fig. 9. ***Interactions attractives ou répulsives entre courants.***

a) Attraction entre fils parcourus par des courants de même sens.

b) Répulsion si les courants sont de sens contraires.

2 TOPOGRAPHIE D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE

La topographie d'un champ magnétique est une description de la structure spatiale du champ.

1. Spectre magnétique

a) Expérience

L'extrémité d'un aimant droit plongée dans de la limaille de fer se recouvre d'une houppe de limaille. Celle-ci est constituée de files de grains de fer attachés les uns aux autres (fig. 10 *a*), et qui dessinent une figure géométrique.

L'organisation de la limaille en files peut s'interpréter comme suit : placé dans un champ magnétique, chaque grain de limaille de fer devient un minuscule aimant qui agit comme une aiguille aimantée (fig. 10 *b*).



a) *b)*

Fig. 10. ***Un aimant,*** *introduit dans de la limaille de fer, s'entoure à ses extrémités d'une houppe de limaille qui matérialise les «lignes de champ magnétique». Il est commode d'entourer l'aimant d'une feuille de papier afin de se débarrasser plus facilement de la limaille.*



Fig. 11. ***Matérialisation des lignes de champ magnétique par de la limaille de fer.***

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATION

Sans calculs

Exercice 1

Un pendule élastique est écarté de sa position d'équilibre. Son élongation initiale est X_m. Il est lâché sans vitesse initiale. Parmi les grandeurs suivantes : {pulsation, vitesse au passage par la position d'équilibre, énergie mécanique}, quelles sont celles qui ne dépendent pas de X_m ?

Exercice 2

Un pendule élastique (masse m, raideur k) a pour période T_0, fréquence N_0, pulsation ω_0, amplitude X_m, énergie cinétique maximale $E_{c\,max}$.
Parmi ces grandeurs, quelles sont celles :

- qui augmentent avec la masse de l'oscillateur?
- qui diminuent si la masse est augmentée?
- qui ne dépendent pas de la masse?

Exercice 3

Un ressort à spires jointives peut-il être utilisé pour réaliser un pendule élastique vertical?

Exercice 4

Une force de valeur algébrique du type $F_x = -k.x^2$ peut-elle être une force de rappel? Même question pour $F_x = -k.x^3$.

Exercice 5

Un(e) élève de Terminale se laisse osciller sur une balançoire.

- Quelle est la cause principale d'amortissement?
- Comment procéder pour éviter cet amortissement?

Exercice 6

Une bille lâchée dans un bol évolue-t-elle dans une cuvette de potentiel?

Exercice 7

Deux bateaux flottent sur l'eau, moteurs arrêtés. La houle les fait osciller. La distance entre deux crêtes des vagues est désignée par λ. Quelles peuvent être, exprimées en fonction de λ, les distances entre les bateaux, pour qu'ils aient la même phase? Qu'ils soient en quadrature? Qu'ils soient en opposition?

Lois horaires

*** Exercice 8**

La loi horaire du mouvement d'un oscillateur est donnée (unités du SI) par

$$x = 0{,}05 \cos\left(25t - \frac{\pi}{3}\right).$$

1) Déterminer l'amplitude et la période du mouvement.

2) Quelles sont, à la date $t = 0$, l'abscisse, la vitesse et l'accélération du mobile?

Exercice 9

Établir la loi horaire donnant l'abscisse $x(t)$ d'un pendule élastique (masse $m = 0{,}10$ kg, raideur $k = 25$ N.m^{-1}) qui passe par sa position d'équilibre à la date $t = 1$ s avec une vitesse v égale à -2 m.s^{-1}.

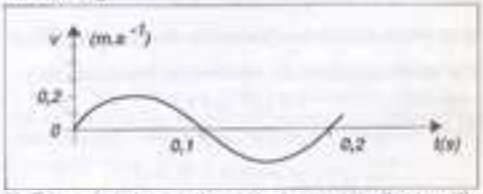
Exercice 10

Un pendule élastique vertical oscille de part et d'autre de sa position d'équilibre avec une amplitude $X_m = 5$ cm. Il passe par sa position la plus haute à la date $t = 0$.
Quelles sont les lois horaires des position, vitesse et accélération de ce pendule?

$m = 0{,}05$ kg; $k = 20$ N.m^{-1}.

*** Exercice 11**

La figure ci-dessous donne le diagramme temporel de la vitesse d'un pendule élastique horizontal de masse $m = 0{,}04$ kg.

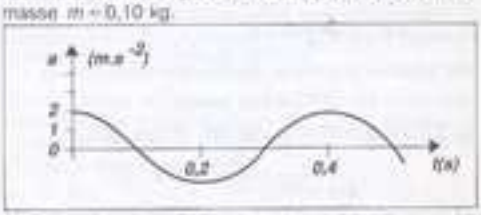


1) Déterminer les lois horaires donnant la vitesse $v(t)$, l'abscisse $x(t)$ et l'accélération $a(t)$.

2) Quelle est la raideur du ressort constituant le pendule?

Exercice 12

La figure ci-dessous donne le diagramme temporel de l'accélération d'un pendule élastique horizontal de masse $m = 0{,}10$ kg.



1) Déterminer les lois horaires donnant la vitesse $v(t)$ et l'abscisse $x(t)$ de l'oscillateur.

2) Quelle est l'expression de la force de rappel $F(x)$?

*** Exercice 13**

L'élongation d'un mobile de masse $m = 0{,}20$ kg est donnée en fonction du temps par

$$x = 0{,}05 \cos\left(10t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Déterminer les expressions de la valeur algébrique de la force de rappel $F_x(t)$ en fonction du temps et $F_x(x)$ en fonction de l'élongation.

2. EXERCICES PROPOSÉS

Énergie

Exercice 23

Un objet de masse $m = 0,50$ kg est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'amplitude $X_m = 0,10$ m et de période $T_0 = 2$ s.
Représenter graphiquement les courbes indiquant l'évolution des énergies cinétique, potentielle et mécanique :

1) En fonction de la position.

2) En fonction du temps.

Exercice 24

Un ressort, de masse négligeable vis-à-vis de celle des objets supposés ponctuels que l'on peut attacher à son extrémité inférieure, pend verticalement.

1) Quelles sont les expressions des énergies potentielles de pesanteur et élastique de cet oscillateur lorsqu'un objet de masse m est suspendu au ressort. Ces deux énergies potentielles seront choisies nulles lorsque le ressort n'est pas déformé.

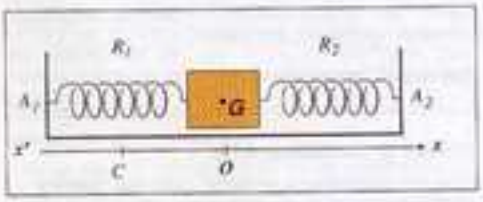
2) Indiquer l'allure de la courbe qui représente l'évolution en fonction de la cote z de l'objet, mesurée à partir de l'extrémité inférieure du ressort non chargé, de l'énergie potentielle (élastique et de pesanteur) du système.

3) Que devient l'expression de l'énergie potentielle du système lorsque les axes de la parabole précédente sont placés à son sommet? La cote de l'objet, mesurée à partir de la position d'équilibre de l'objet, sera désignée par z. Quelles peuvent être alors les conventions choisies pour les zéros des énergies potentielles?

EXERCICES D'APRÈS BACCALAURÉATS

Exercice 25

Un palet à coussin d'air, de masse $m = 700$ g, mobile sur une table horizontale, est accroché à deux ressorts identiques R_1 et R_2, de masse négligeable, tendus entre deux points A_1 et A_2.



Ces ressorts, de constantes de raideur :

$$k_1 = k_2 = 20\ \text{N.m}^{-1}$$

et de longueur à vide $\ell_{0_1} = \ell_{0_2} = 18$ cm, ont pour longueurs $\ell_1 = \ell_2 = 25$ cm, lorsque le palet est en équilibre.

1) Les frottements sont supposés négligeables. On écarte le palet de sa position d'équilibre de telle sorte que son centre d'inertie G se déplace dans la direction A_1A_2 vers A_1, de $\overline{OC} = -2$ cm, puis on l'abandonne sans vitesse initiale, à un instant qui sera choisi comme origine des dates.

a) Donner, à une date t quelconque, l'expression de l'allongement de chacun des ressorts en fonction de l'abscisse x de G.

b) Établir l'équation différentielle du mouvement de G.

c) Exprimer et calculer la pulsation propre et la période propre du mouvement.

d) Écrire l'équation horaire du mouvement de G.

2) En réalité, il existe des frottements. On admettra qu'ils peuvent être représentés par un vecteur force $\vec{f} = -\lambda.\vec{v}$, où λ est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur-vitesse de G.

a) Établir l'équation différentielle du mouvement de G.

b) Donner, en conservant les mêmes conditions initiales, l'allure des courbes représentant l'abscisse x de G en fonction du temps suivant l'importance des frottements.

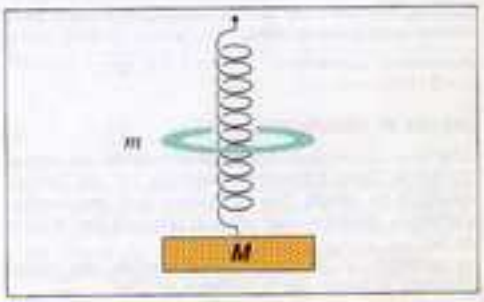
Exercice 26

Un objet de masse $M = 0,40$ kg est attaché à un ressort de raideur $k = 20\ \text{N.m}^{-1}$.

1) L'objet est lâché sans vitesse initiale, le ressort ayant sa longueur à vide. Déterminer l'amplitude des oscillations et leur période.

2) Le mobile s'immobilise après quelques oscillations. Quelle est la perte d'énergie mécanique du système? Qu'est devenue l'énergie perdue?

3) Un anneau de masse $m = 0,10$ kg est lâché sans vitesse initiale d'une hauteur $h = 0,20$ m au-dessus de l'objet. Il entoure le ressort et vient au contact de l'objet, auquel il reste collé.



2. EXERCICES PROPOSES

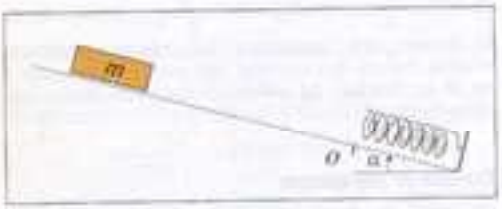
Quelle est la vitesse de l'anneau à l'instant du contact? Justifier la conservation de la quantité de mouvement du système lors du choc. Déterminer, en fonction de m, M, g et h, l'énergie cinétique du système juste après le choc.

4) Les énergies potentielles élastique et de pesanteur sont choisies nulles dans la position d'équilibre en charge (l'anneau n'ayant pas encore atteint le mobile M). Déterminer l'expression de l'énergie potentielle totale lorsque le mobile se trouve écarté de x à partir de la position d'équilibre précédente.

5) Déterminer l'amplitude des oscillations et leur période.

Exercice 27

Un mobile de masse m se déplace d'un mouvement rectiligne le long d'un banc à coussin d'air incliné d'un angle α sur l'horizontale. Un ressort à spires non jointives, de raideur k, est placé à l'extrémité inférieure du banc.



1) Lorsque le mobile est posé au contact du ressort, celui-ci se raccourcit de $\Delta\ell_0$ pour atteindre la position d'équilibre. Exprimer la raideur du ressort en fonction des données.

Application numérique : $m = 0{,}200$ kg; $\alpha = 10°$; $\Delta\ell_0 = 0{,}06$ m.

2) Le mobile est posé au contact du ressort non comprimé, puis lâché sans vitesse initiale. Déterminer l'amplitude et la période des oscillations.

Application numérique : $m = 0{,}200$ kg; $\alpha_1 = 10°$; $\alpha_2 = 30°$; $\alpha_3 = 60°$.

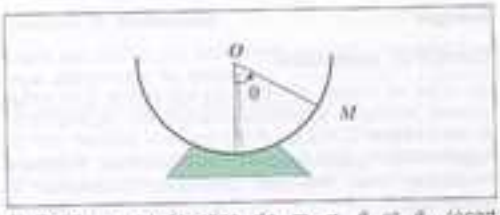
3) Le mobile est lâché sans vitesse initiale et parcourt une distance d sur le banc à air, avant de toucher le ressort. Déterminer le raccourcissement maximal du ressort. Combien de temps faut-il au mobile pour revenir à sa position initiale?

Application numérique : $m = 0{,}200$ kg; $\alpha = 10°$; $d = 0{,}10$ m.

Exercice 28

Une bille, assimilable à un point matériel de masse m, glisse sans frottement dans un bol de section circulaire de centre O et de rayon r. Son mouvement s'effectue dans un plan vertical passant par le fond du bol.

La position M de la bille est repérée par l'écart angulaire θ formé par la verticale et OM.



1) Exprimer, en fonction de m, g, θ et θ_0 (écart angulaire initial) la valeur R de l'action du bol sur la bille. Que devient la relation précédente

a) pour $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = 0°$

b) lorsque θ_0 peut être considéré comme un petit angle?

2) Dans le cas où θ_0 est un petit angle, le mouvement de la bille est pratiquement rectiligne au fond du bol. Quelle est l'expression de la valeur F de la force de rappel qu'elle subit? En déduire, en fonction de R et g, l'expression de la période des petites oscillations de la bille.

*** Exercice 29**

Un cube en bois de côté $a = 0{,}10$ m flotte sur l'eau, l'une de ses faces étant horizontale. La masse volumique du bois vaut $\rho = 750$ kg.m^{-3}.

a) Quelle est la hauteur de cube émergeant de l'eau?

b) Le cube est enfoncé de sorte que sa face supérieure affleure au niveau du liquide, puis lâché sans vitesse initiale. Calculer l'amplitude et la fréquence des oscillations verticales du cube.

c) Même question si le cube flotte sur de l'alcool, de masse volumique $\rho' = 790$ kg.m^{-3}.

Rappel : la valeur de la poussée d'Archimède est égale à celle du poids du fluide déplacé.

EXERCICES DESTINÉS A TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 30 A.1.a.

Définir les termes suivants : période, fréquence, pulsation, amplitude, élongation.

Exercice 31 A.1.a.

Quelles sont les unités de fréquence et de pulsation?

Exercice 32 A.1.b.

Pour les expériences réalisées avec des ressorts en travaux pratiques, quels étaient les ordres de grandeur des fréquences, des pulsations, et des énergies des oscillateurs?

Exercice 33 A.1.c.

Dans quel cas l'énergie mécanique d'un oscillateur se conserve-t-elle?

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 34 — A.1.c.

En attachant des masses marquées à l'extrémité inférieure d'un ressort, à prend les longueurs suivantes :

Masse (g)	0	50	100	150	200	250
Longueur (cm)	20,0	23,1	26,3	29,4	32,5	35,6

Masse (g)	300	350	400	450	500
Longueur (cm)	38,8	41,7	44,3	46,4	48,1

Ce ressort peut-il être modélisé comme étant à réponse linéaire?

Exercice 35 — A.2.a.

Attacher un fil de caoutchouc entre deux chaises afin qu'il soit horizontal. Dans la région centrale, attacher différents objets (par exemple des cuillers à soupe...) et mesurez la période des oscillations verticales pour 1, 2, 3... objets identiques accrochés. Tracer la courbe d'étalonnage de votre dispositif. Suspendre ensuite votre trousse et déterminer sa masse (en prenant pour unité de masse celle d'une cuiller). Si possible, vérifier vos résultats avec une balance de cuisine.

Exercice 36 — A.2.b.

Établir l'équation différentielle qui régit le mouvement d'un pendule élastique vertical.

*** Exercice 37** — A.2.b.

Exprimer l'énergie mécanique d'un oscillateur horizontal (m, k) en fonction

— de l'amplitude X_m,

— de la vitesse maximale V_m,

— de la fréquence propre N_0 et de l'amplitude X_m.

Exercice 38 — B.1.

Chercher des documents relatifs aux nuisances supportées par le corps humain aux très basses fréquences (genre mal de mer...) ou à fréquences plus élevées (tracteurs, perforeuses...). L'enquête peut être collective.

Exercice 39 — B.2.

Faire un résumé (100 mots = 10 %) du paragraphe I.1. du chapitre. Le résumé ne doit pas être rédigé en « style télégraphique ».

Exercice 40 — B.3.

Écrire l'équation différentielle du premier ordre qui traduit la conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur non amorti. Dériver cette relation par rapport au temps. Quelle relation est ainsi retrouvée?

Exercice 41 — B.3.

Écrire, en utilisant les variables x et $v_x = \dot{x}$, l'équation différentielle non linéaire du premier ordre qui traduit la conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur horizontal. Chercher directement à quelle(s) condition(s) cette équation admet une solution du type

$$x = X_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

Exercice 42 — B.3.

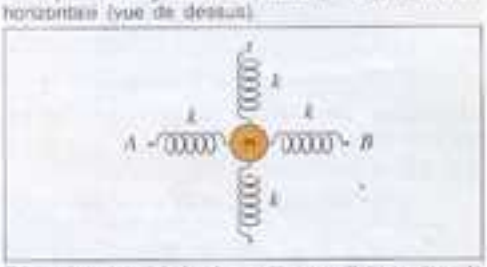
Écrire l'équation différentielle du second ordre qui régit le mouvement d'un oscillateur amorti (m, k, λ).
Chercher à quelle condition une solution du type $x = A \cdot e^{-\lambda/2m} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$, où A et φ sont déterminés par les conditions initiales, convient. Exprimer la constante C en fonction de k et m, et la pulsation ω en fonction de k, m et λ.

Exercice 43 — B.4.

Représenter graphiquement les courbes qui montrent l'évolution de l'énergie cinétique d'un mobile :
— en fonction du temps;
— en fonction de l'abscisse;
— en fonction du carré de la vitesse.

*** Exercice 44** — C.1.b.

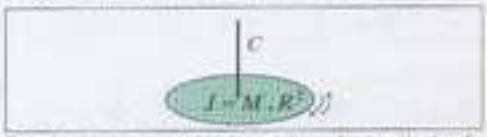
La figure ci-dessous représente un petit de masse m en équilibre sous l'action de quatre ressorts identiques, orthogonaux, sur une table à coussin d'air horizontale (vue de dessus).



Déterminer la période des petites oscillations dans la direction AB.

Exercice 45 — C.2.b.

La figure ci-dessous représente un disque susceptible d'effectuer des oscillations de rotation horizontales autour d'un fil vertical de constante de torsion C.



Pour ces mouvements de rotation, la constante de torsion C joue le rôle de la raideur k d'un ressort, et la masse doit être remplacée par le moment d'inertie J du disque par rapport à son axe de rotation.
Exprimer la période des oscillations en fonction de M, R et C.

Pour en savoir plus

OSCILLATIONS HORIZONTALES D'UN MOBILE ATTACHÉ A DEUX RESSORTS

1) *Dispositif*

Il est possible de faire osciller, sur une table à coussin d'air horizontale, un mobile autoporté attaché à deux ressorts de raideurs éventuellement différentes k_1 et k_2 (fig. 17), et de longueurs à vide sont ℓ_1 et ℓ_2.

2) *Analyse des actions*

• Le poids de l'objet et la réaction de la table, qui sont verticaux et opposés, annulent leurs effets (ils ne sont pas représentés sur la figure).

• Pour accrocher les ressorts, il faut les allonger de $\Delta\ell_1 = O_1N_0$ et $\Delta\ell_2 = O_2P_0$. L'objet prend une position d'équilibre sous l'action des deux tractions opposées $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ exercées par les ressorts, le centre d'inertie se trouvant au niveau du point I sur l'axe Ax.

$\vec{T}_1 = -k_1.\overrightarrow{O_1N_0}$; $\vec{T}_2 = -k_2.\overrightarrow{O_2P_0}$ et $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$, d'où, en faisant intervenir la position du centre d'inertie :

$$-k_1.(\overrightarrow{O_1I} + \overrightarrow{IN_0}) - k_2.(\overrightarrow{O_2I} + \overrightarrow{IP_0}) = \vec{0}. \quad (1)$$

• Si le mobile est lâché après avoir été écarté de sa position d'équilibre, il effectue des oscillations longitudinales. Pour une position quelconque où le centre d'inertie est au niveau de M sur Ax, les forces de traction horizontales des ressorts s'expriment par : $\vec{F}_1 = -k_1.\overrightarrow{O_1N}$ et $\vec{F}_2 = -k_2.\overrightarrow{O_2P}$.

3) *Force équivalente associée aux actions*

L'ensemble des forces agissant sur l'objet équivaut donc à :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -k_1.\overrightarrow{O_1N} - k_2.\overrightarrow{O_2P}$$
$$= -k_1.(\overrightarrow{O_1I} + \overrightarrow{IN}) - k_2.(\overrightarrow{O_2I} + \overrightarrow{IP}).$$

Par soustraction de la relation d'équilibre (1) il vient : $\vec{F} = -k_1.(\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IN_0}) - k_2.(\overrightarrow{IP} - \overrightarrow{IP_0})$

$$= -k_1.(\overrightarrow{N_0N}) - k_2.(\overrightarrow{P_0P}).$$

$\overrightarrow{N_0N}$ et $\overrightarrow{P_0P}$ représentent les vecteurs déplacements des extrémités N et P de l'objet, qui sont aussi égaux au déplacement $\overrightarrow{IM}$ du centre d'inertie du solide.

Finalement : $\vec{F} = -(k_1 + k_2).\overrightarrow{IM}$.

4) *Conclusion*

Un objet autoporté sur une table horizontale, attaché à deux ressorts de même direction, de raideurs k_1 et k_2, subit, lorsqu'il est écarté de sa position d'équilibre I dans la direction des ressorts, un ensemble de forces équivalentes à une force de rappel du type $\vec{F} = -k.\overrightarrow{IM}$.

La constante de rappel k est égale à la somme des raideurs des deux ressorts.

TRAVAIL D'UNE FORCE ÉLASTIQUE

1) *Analyse*

Pour maintenir allongé un ressort dont une extrémité A est fixe, il convient d'exercer à son extrémité une force $\vec{F}$ opposée à la force élastique $\vec{F}_{élas}$ (fig. 18) qui est une *force de rappel*.

Lorsque le ressort est étiré progressivement, la force élastique augmente en valeur absolue. Il en va de même si le ressort est comprimé.

Dans les deux cas, si le ressort est à réponse linéaire, $\vec{F}_{élas} = -k.\overrightarrow{OM}$, ou, en passant aux valeurs algébriques, $F_{x\,élas} = -k.x$.

2) *Calcul du travail*

Le *travail élémentaire* dW est défini par :

$dW = F_{x\,élas}.dx$, soit : $dW = -k.x.dx$.

Lorsque l'extrémité M du ressort passe d'un point M_1 (abscisse x_1) à un point M_2 (abscisse x_2) le travail total s'obtient en faisant la somme de tous les travaux élémentaires :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} -k.x.dx = \frac{1}{2}k.x_1^2 - \frac{1}{2}k.x_2^2.$$

3) *Interprétation*

L'expression précédente montre que le travail peut être considéré comme la *perte algébrique* (c'est-à-dire l'opposée de la variation) de la fonction $\frac{1}{2}k.x^2$, à laquelle il serait possible d'ajouter une constante. Il s'agit d'une fonction de la *variable de position* x. Cette fonction est appelée ***énergie potentielle*** associée à la force élastique.

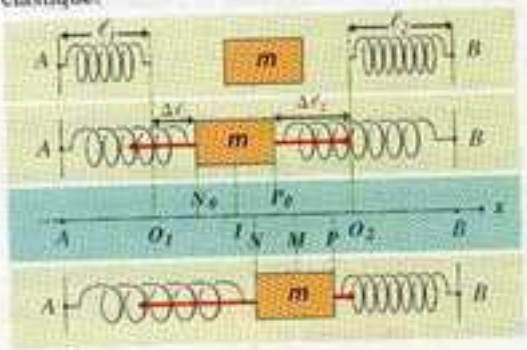


Fig. 17

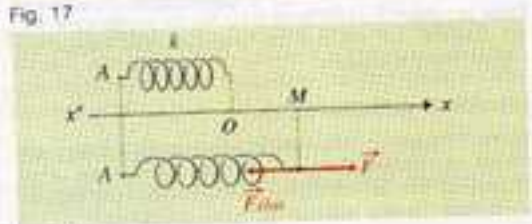


Fig. 18

Pour en savoir plus

OSCILLATIONS HORIZONTALES D'UN MOBILE ATTACHÉ A DEUX RESSORTS

1) *Dispositif*

Il est possible de faire osciller, sur une table à coussin d'air horizontale, un mobile autoporté attaché à deux ressorts de raideurs éventuellement différentes k_1 et k_2 (fig. 17), et de longueurs à vide sont ℓ_1 et ℓ_2.

2) *Analyse des actions*

• Le poids de l'objet et la réaction de la table, qui sont verticaux et opposés, annulent leurs effets (ils ne sont pas représentés sur la figure).

• Pour accrocher les ressorts, il faut les allonger de $\Delta\ell_1 = O_1N_0$ et $\Delta\ell_2 = O_2P_0$. L'objet prend une position d'équilibre sous l'action des deux tractions opposées $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ exercées par les ressorts, le centre d'inertie se trouvant au niveau du point I sur l'axe $\vec{Ax}$.

$\vec{T}_1 = -k_1.\overrightarrow{O_1N_0}$; $\vec{T}_2 = -k_2.\overrightarrow{O_2P_0}$ et $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$, d'où, en faisant intervenir la position du centre d'inertie :

$$-k_1.(\overrightarrow{O_1I} + \overrightarrow{IN_0}) - k_2.(\overrightarrow{O_2I} + \overrightarrow{IP_0}) = \vec{0}. \quad (1)$$

• Si le mobile est lâché après avoir été écarté de sa position d'équilibre, il effectue des oscillations longitudinales. Pour une position quelconque où le centre d'inertie est au niveau de M sur $\vec{Ax}$, les forces de traction horizontales des ressorts s'expriment par : $\vec{F}_1 = -k_1.\overrightarrow{O_1N}$ et $\vec{F}_2 = -k_2.\overrightarrow{O_2P}$.

3) *Force équivalente associée aux actions*

L'ensemble des forces agissant sur l'objet équivaut donc à :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -k_1.\overrightarrow{O_1N} - k_2.\overrightarrow{O_2P}$$
$$= -k_1.(\overrightarrow{O_1I} + \overrightarrow{IN}) - k_2.(\overrightarrow{O_2I} + \overrightarrow{IP}),$$

Par soustraction de la relation d'équilibre (1) il vient :

$$\vec{F} = = -k_1.(\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IN_0}) - k_2.(\overrightarrow{IP} - \overrightarrow{IP_0})$$
$$= -k_1.(\overrightarrow{N_0N}) - k_2.(\overrightarrow{P_0P}).$$

$\overrightarrow{N_0N}$ et $\overrightarrow{P_0P}$ représentent les vecteurs déplacements des extrémités N et P de l'objet, qui sont aussi égaux au déplacement $\overrightarrow{IM}$ du centre d'inertie du solide.

Finalement : $\vec{F} = -(k_1 + k_2).\overrightarrow{IM}$.

4) *Conclusion*

Un objet autoporté sur une table horizontale, attaché à deux ressorts de même direction, de raideurs k_1 et k_2, subit, lorsqu'il est écarté de sa position d'équilibre I dans la direction des ressorts, un ensemble de forces équivalentes à une force de rappel du type $\vec{F} = -k.\overrightarrow{IM}$.

La constante de rappel k est égale à la somme des raideurs des deux ressorts.

TRAVAIL D'UNE FORCE ÉLASTIQUE

1) *Analyse*

Pour maintenir allongé un ressort dont une extrémité A est fixe, il convient d'exercer à son extrémité une force $\vec{F}$ opposée à la force élastique $\vec{F}_{élas}$ (fig. 18) qui est une *force de rappel*.

Lorsque le ressort est étiré progressivement, la force élastique augmente en valeur absolue. Il en va de même si le ressort est comprimé.

Dans les deux cas, si le ressort est à réponse linéaire, $\vec{F}_{élas} = -k.\overrightarrow{OM}$, ou, en passant aux valeurs algébriques, $F_{x\,élas} = -k.x$.

2) *Calcul du travail*

Le *travail élémentaire* dW est défini par :

$$dW = F_{x\,élas}.dx, \quad \text{soit :} \quad dW = -k.x.dx.$$

Lorsque l'extrémité M du ressort passe d'un point M_1 (abscisse x_1) à un point M_2 (abscisse x_2) le travail total s'obtient en faisant la somme de tous les travaux élémentaires :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} -k.x.dx = \frac{1}{2}k.x_1^2 - \frac{1}{2}k.x_2^2.$$

3) *Interprétation*

L'expression précédente montre que le travail peut être considéré comme la *perte algébrique* (c'est-à-dire l'opposée de la variation) de la fonction $\frac{1}{2}k.x^2$, à laquelle il serait possible d'ajouter une constante. Il s'agit d'une fonction de la *variable de position* x. Cette fonction est appelée ***énergie potentielle*** associée à la force élastique.

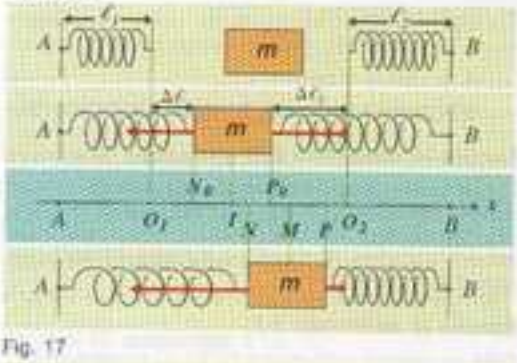


Fig. 17

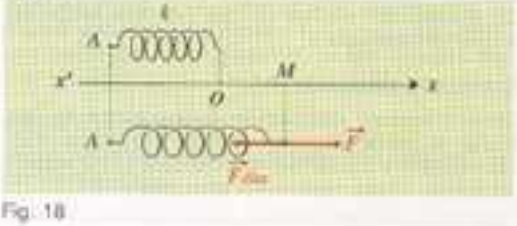
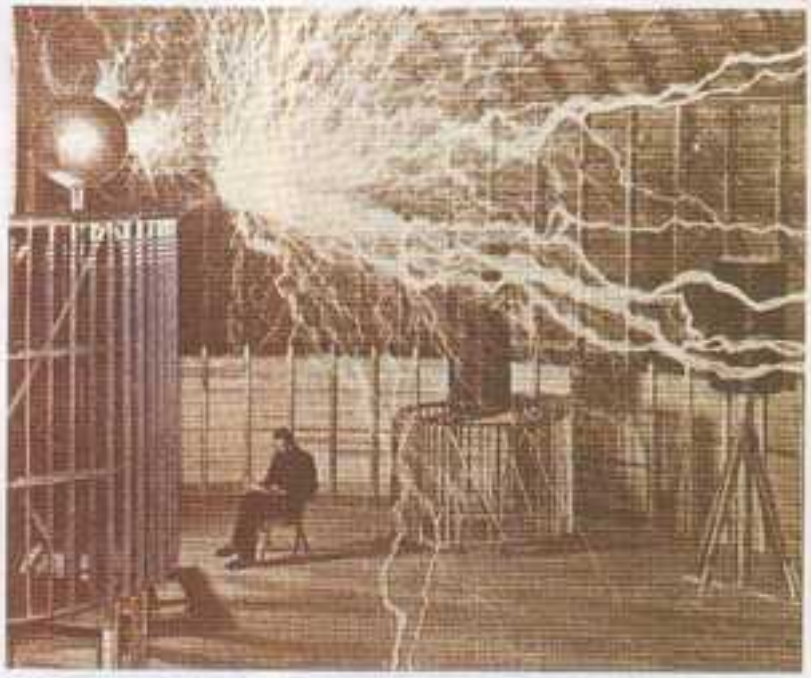


Fig. 18

6 Champ magnétique

1 Phénomènes magnétiques.
2 Topographie d'un champ magnétique.
3 Le solénoïde.
4 Action d'un champ magnétique sur une particule chargée
5 Applications.



Tesla lisant sous les étincelles fournies par ses transformateurs.
Il a envoyé cette photographie au physicien William Crookes avec les mots suivants : « A mon illustre ami sir William Crookes, à qui je pense toujours ainsi qu'à ses aimables lettres auxquelles je ne réponds jamais ! »
(Nikola Tesla, 17 juin 1901.)

Une boussole prend une direction privilégiée dans l'espace : l'une de ses extrémités pointe toujours sensiblement vers le nord. Un aimant permet de ramasser des aiguilles en acier en les attirant à distance... Ces interactions fascinaient déjà les Anciens.
L'étude de ce chapitre devrait rendre ces phénomènes moins mystérieux.

1 PHÉNOMÈNES MAGNÉTIQUES

1. Quelques propriétés des aimants

L'aiguille d'une boussole est habituellement constituée d'une fine tige en acier qui a été frottée contre un aimant. Elle possède une propriété étonnante : placée n'importe où sur la Terre, elle reprend toujours, au même endroit, la même direction.

L'une de ses extrémités pointe sensiblement vers le nord. On l'appelle « extrémité nord ». L'autre est l'« extrémité sud ». Ces extrémités sont encore appelées parfois par tradition « pôle nord » et « pôle sud ».

Un aimant droit, horizontal possède la même propriété d'orientation spontanée (fig. 1), puisqu'une boussole n'est autre qu'un petit aimant. En revanche, une tige en laiton ou en matière plastique ne s'oriente pas naturellement dans l'espace.

Les objets qui ont la propriété de s'orienter de façon privilégiée au voisinage de la Terre sont dits **magnétiques**. Il s'agit là d'une propriété nouvelle, sans relation ni avec les forces de gravitation, ni avec les forces électriques.

La figure 2 donne une représentation schématique d'une aiguille magnétique. Une boussole est l'association d'une aiguille magnétique à une graduation circulaire portant les points cardinaux.



Fig. 1. ***Un aimant droit, s'oriente dans la direction sud-nord.***

2. Champ magnétique

Il règne un champ magnétique dans une région de l'espace, lorsqu'une aiguille aimantée y subit des actions.

a) Sources de champs

• *Champ géomagnétique :* la Terre est la source d'un champ magnétique, appelé **champ géomagnétique.** Ce champ est détecté par les boussoles. Une aiguille aimantée, suspendue par un axe passant par son centre d'inertie, ne s'oriente pas horizontalement dans le champ géomagnétique (fig. 3). Le plan vertical qui contient l'aiguille orientée est appelé plan **méridien magnétique** du lieu. (Voir « Pour en savoir plus ».)

• *Aimants sources de champ magnétique :* un aimant approché latéralement d'une aiguille aimantée la fait dévier (fig. 4).

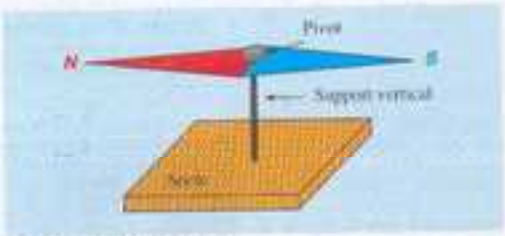


Fig. 2. ***Aiguille aimantée.***

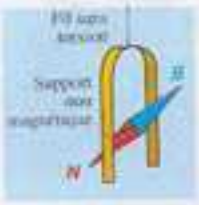


Fig. 3. ***Détection du champ magnétique terrestre.***

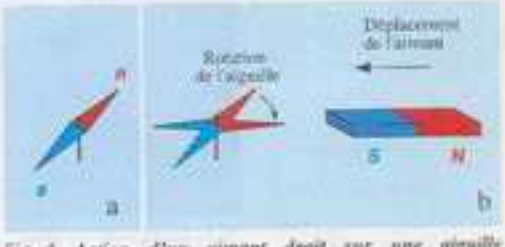


Fig. 4. ***Action d'un aimant droit sur une aiguille aimantée.***
a) Aiguille orientée dans le champ terrestre.
b) Rotation de l'aiguille sous l'influence de l'aimant.

5 APPLICATIONS

1. Spectrographe de masse

La constitution d'un spectrographe de masse est indiquée à la figure 34.
Des ions positifs dont on veut mesurer la masse, sont émis pratiquement sans vitesse initiale, par une source S. Ils acquièrent entre des plaques accélératrices une vitesse v telle que :

$$\frac{1}{2}\, m \,.\, v^2 = q \,.\, U \quad \text{soit} \quad v = \sqrt{\frac{2q \,.\, U}{m}}$$

Ils pénètrent dans un champ magnétique uniforme. Leur trajectoire devient un cercle de rayon R lié à leur quantité de mouvement par :

$$p = m \,.\, v = q \,.\, B \,.\, R.$$

Leur masse, s'exprime par :

$$m = \frac{(m \,.\, v)^2}{m \,.\, v^2} = \frac{(q \,.\, B \,.\, R)^2}{2q \,.\, U},$$

d'où :

$$m = \frac{1}{2}\,\frac{q \,.\, B^2 \,.\, R^2}{U}.$$

Tout ce qui figure au second membre est connu ou mesurable (le rayon de courbure R se déduit de la position de l'impact sur la plaque photographique). Les masses peuvent ainsi être déterminées avec précision.
C'est avec des dispositifs de ce genre que les **isotopes** ont été mis en évidence, en constatant l'existence d'impacts voisins sur les plaques photographiques.
Un petite fente fine de sortie peut remplacer la plaque photographique, à la distance $2R$ de la fente d'entrée. D'après la relation précédente,

$$R^2 = \frac{2m \,.\, U}{q \,.\, B^2}, \text{ d'où : } R = \sqrt{\frac{2m \,.\, U}{q \,.\, B^2}},$$

ou

$$2R = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2m \,.\, U}{q}}.$$

Tous les ions de même rapport $\frac{q}{m}$, appelé « charge massique », sortent par la fente. Ils sont ainsi séparés des autres isotopes et peuvent être recueillis dans un collecteur.

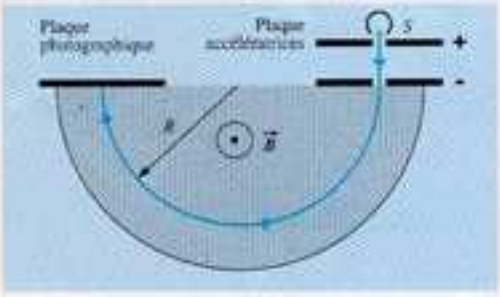


Fig. 34

2. Cyclotron

Les cyclotrons sont des **accélérateurs cycliques de particules chargées.** Leur constitution est indiquée à la figure 35.

La figure est une vue de dessus. Deux boîtes conductrices cylindriques, appelées « dees » (leur forme de lettre D rappelle celle d'une boîte à camembert coupée en deux) baignent dans un champ magnétique uniforme ($B \approx 1$ T). Une source d'ions, positifs dans le cas de figure, est placée dans la région centrale O. L'ensemble est maintenu dans un vide poussé.

Une tension alternative ($U_m \approx 10$ kV) est appliquée aux dees. L'effet de cette tension est d'accélérer rectilignement, pendant une très courte durée, les ions quand ils se trouvent entre les deux cavités. Ils entrent ensuite dans un dee où règne le champ magnétique qui incurve leur trajectoire selon un demi-cercle. Quand les ions sortent d'un dee, l'autre est devenu attracteur.

A chaque demi-tour, ils acquièrent un supplément d'énergie électrique $q \,.\, U_m$.

Les demi-cercles successifs sont décrits à la vitesse angulaire $\omega = \frac{q}{m} \,.\, B$. Comme ω est indépendante de l'énergie des ions, elle demeure constante au cours de l'accélération.

Comme la tension change de signe à chaque demi-tour, sa période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est égale à la durée d'un tour. Par suite, la vitesse angulaire ω des ions est égale à la pulsation de la tension alternative appliquée aux dees.

Quand le rayon de courbure de la trajectoire est devenu pratiquement égal au rayon R des dees, les particules atteignent une région où le champ magnétique est rendu localement nul. Elles ne sont alors plus incurvées et sortent tangentiellement de la cavité avec une quantité de mouvement de valeur :

$$p = q \,.\, B \,.\, R.$$

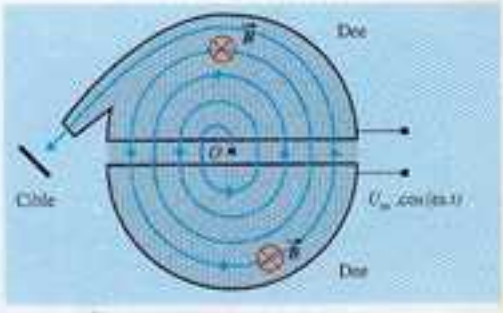


Fig. 35. *Éléments d'un cyclotron.*

Les particules sont envoyées sur des cibles. Leur énergie cinétique est maximale à la sortie et vaut :

$$E_c = \frac{1}{2} m . v^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{q^2 . B^2 . R^2}{m}.$$

Cette énergie se trouve limitée par les caractéristiques de l'appareil (B et R).

Remarque :
Il semblerait, d'après la relation $p = q . B . R$, que la vitesse $v = \frac{p}{m} = \frac{q}{m} . B . R$ ne soit pas limitée supérieurement (en augmentant B et R). Il n'en est rien : **une particule matérielle a toujours une vitesse inférieure à la célérité de la lumière.** Cette importante question sera reprise au chapitre 15.

3. Déflexion magnétique

a) Calcul d'une petite déflexion

Pénétrant en O avec une vitesse $\vec{v}$ orthogonale au champ magnétique uniforme $\vec{B}$ (fig. 36), les particules décrivent à vitesse constante un arc de cercle OS, tant qu'elles sont sous l'influence du champ uniforme. A la sortie en S du champ, elles retrouvent en l'absence d'actions une trajectoire rectiligne ST' qui semble provenir d'un point I situé dans la région centrale de la zone d'influence du champ. Dans ce cas de figure, le champ magnétique pointe vers l'arrière et les particules sont négatives.
La longueur $\ell = OS$ de l'arc de cercle de rayon R est donnée en fonction de la déviation α par $\ell = R . \alpha$, à condition d'exprimer α en radian. La valeur de la quantité de mouvement des particules reste constante :

$$m . v_0 = |q| . B . R.$$

Sur l'écran, placé à la distance L de I, l'impact du pinceau passe de T (en l'absence de champ) à T'. TT' est la distance D de déflexion, que l'on abrège souvent en « déflexion ». Cette distance est telle que $\tan \alpha = \frac{D}{L}$.

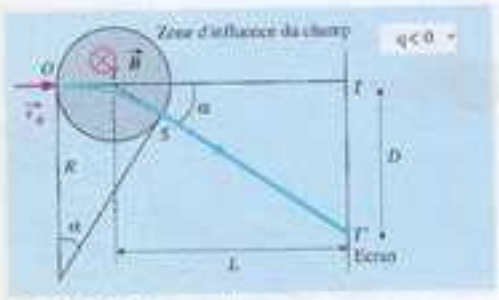


Fig. 36. ***Déflexion magnétique.***

Si la déviation est petite, $\tan \alpha \approx \alpha \approx \frac{D}{L}$ alors, $\alpha \approx \frac{D}{L} = \frac{\ell}{R} = \frac{\ell . |q| . B}{m . v_0}$, d'où :

$$D = L . \ell . \frac{|q|}{m} . \frac{B}{v_0}.$$

Applications

- Connaissant L, ℓ, B, v_0 et mesurant D, cela donne une méthode de détermination du rapport $\frac{|q|}{m}$ des particules (d'où leur masse si leur charge est connue).

- Si ce sont des particules élémentaires ($|q| \approx 1{,}6 \times 10^{-19}$ C) qui sont injectées, leur déviation est inversement proportionnelle à leur quantité de mouvement $m . v_0$.
Toutes les particules de même signe et de même quantité de mouvement arrivent au même point sur l'écran. Une fente, ménagée au point d'impact, ne laisse passer qu'elles : l'appareil est un sélecteur de quantité de mouvement.

b) Déflexions magnétiques dans un téléviseur

Dès sa sortie du canon à électrons, le pinceau électronique pénètre dans deux champs magnétiques orthogonaux, l'un pour la déflexion magnétique horizontale, l'autre pour la déflexion verticale. Ces deux champs sont créés par des bobines situées à l'arrière du tube de l'appareil récepteur (fig. 37).
Les bobines sont soumises à des tensions « en dents de scie » afin que le spot revienne brusquement à gauche (en regardant l'écran) et un peu plus bas sur l'écran avant de balayer de nouveau vers la droite.

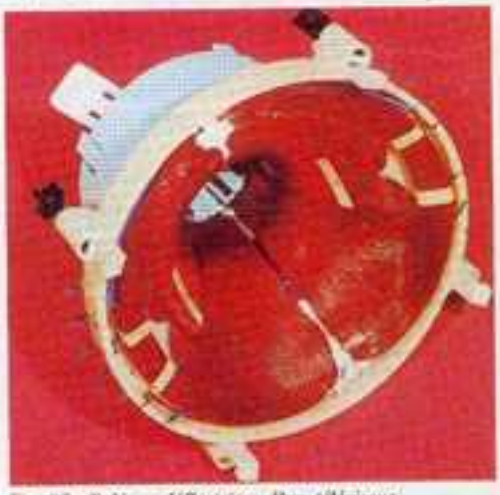


Fig. 37. ***Bobines déflectrices d'un téléviseur.***

b) Interprétation

La figure géométrique matérialisée au voisinage de l'aimant par les lignes de limaille, et suivie plus loin par les aiguilles aimantées est appelée **spectre magnétique** de l'aimant.

Dans le cas présent, il s'agit d'un spectre dans l'espace à trois dimensions. En faisant un léger effort d'abstraction, il est possible d'imaginer ces lignes, même en l'absence de limaille qui les matérialise. Ces courbes sont appelées **lignes de champ magnétique** (fig. 11).

Le vecteur-champ magnétique est tangent à ces lignes de champ.

Par convention **les lignes de champ sont orientées comme le vecteur-champ $\vec{B}$.**

2. Spectres obtenus à partir d'aimants

a) Spectre d'un aimant droit

• *Organisation spatiale des lignes de champ*

La figure 12 *a* schématise quelques lignes de champ magnétique d'un aimant droit. Ces lignes sont les prolongements des files de grains de limaille envisagées à la figure 10.

Elles sortent par l'extrémité nord et entrent par l'extrémité sud de l'aimant.

• *Visualisation expérimentale*

— Des aiguilles aimantées placées à proximité, confirment la direction et le sens du champ.

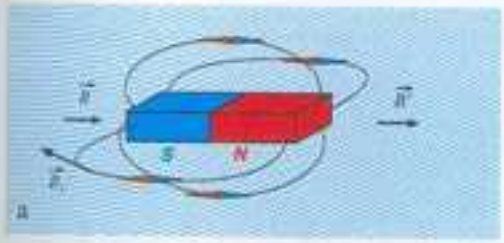




Fig. 12. ***Spectre magnétique d'un aimant droit.***
a) Structure spatiale.
b) Exploration dans un plan.

— En saupoudrant de limaille de fer fine, une feuille de papier posée sur l'aimant, il se forme un spectre. Tout près de l'aimant, les grains de limaille se redressent et prennent la direction des lignes de champ spatiales. Plus loin les grains restent horizontaux, car le champ est plus faible et la pesanteur l'emporte.

L'examen de la figure 12 *b* montre que les lignes de champ se resserrent près de l'aimant, là où les effets magnétiques deviennent intenses. Par suite, **un resserrement des lignes de champ indique qualitativement une augmentation de la valeur du champ.**

b) Spectre d'un aimant en U

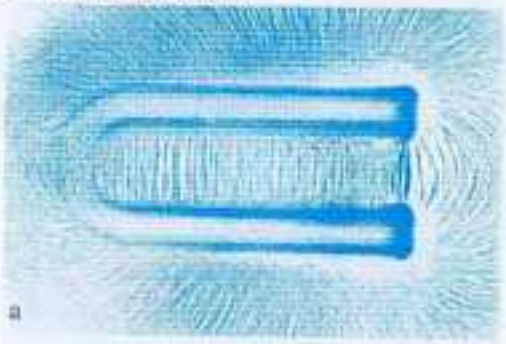
L'aimant droit précédent est remplacé par un aimant en *U*. Le spectre obtenu est indiqué à la figure 13 *a*. Plusieurs petites aiguilles magnétiques, placées à diverses hauteurs à l'intérieur des branches, restent parallèles entre elles, et perpendiculaires aux branches de l'aimant. D'autre part, une exploration du champ par une sonde de teslamètre montre que la valeur du champ reste pratiquement constante. Par suite, le champ magnétique est uniforme entre les deux branches d'un aimant en *U* (fig. 13 *b*).

Plus généralement, des **lignes de champ parallèles indiquent que le champ est uniforme.**

Comme pour l'aimant droit,

les lignes de champ magnétique sortent des régions nord et pénètrent dans les régions sud.

Ce résultat est général.



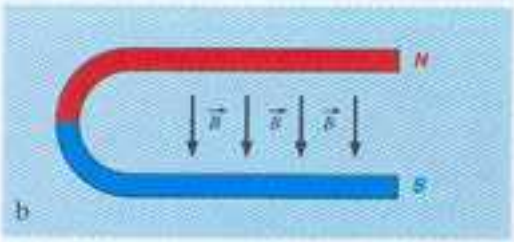


Fig. 13. ***Spectre magnétique d'un aimant en U.***
a) Photographie du spectre.
b) Champ uniforme entre les branches.

3. Spectres obtenus à partir de courants

a) Spectre d'un courant rectiligne

Un fil conducteur rectiligne vertical traverse une plaque horizontale sur laquelle est disposée une feuille de papier saupoudrée de limaille de fer. Lorsqu'un courant passe dans le fil, la limaille matérialise des **lignes de champ circulaires** (fig. 14).

Des petites aiguilles magnétiques disposées autour du fil indiquent le sens du champ.

En inversant le sens du courant, les aiguilles aimantées se retournent bout par bout.

Par suite, **le sens des lignes de champ est lié au sens du courant dans le fil.**

La plaque horizontale ne donne qu'un aspect plan du phénomène. Plusieurs plaques analogues à la précédente, superposées, montreraient la structure spatiale cylindrique du champ autour du fil.

Pour trouver le sens des lignes de champ magnétique en fonction du sens du courant, la figure 15 présente une règle de la main droite, qui met en relation de façon simple le sens des lignes de champ avec celui du courant. D'autres règles équivalentes existent.

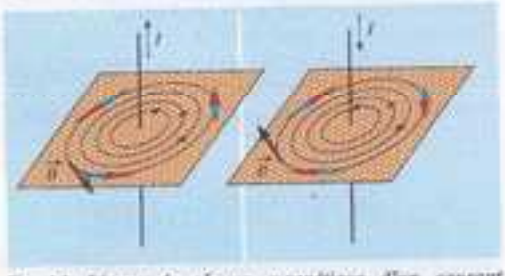


Fig. 14. ***Lignes de champ magnétique d'un courant rectiligne.*** *Elles sont circulaires, centrées sur le fil. Leur sens dépend de celui du courant.*

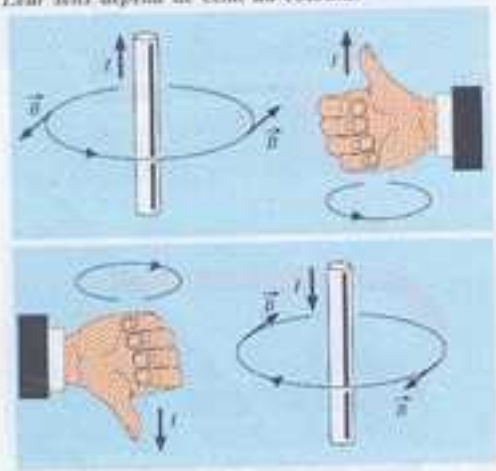


Fig. 15. ***Une règle pratique de la main droite pour trouver le sens des lignes de champ en relation avec le sens du courant dans le fil.***

b) Spectre d'un solénoïde

Un solénoïde est constitué d'un fil conducteur enroulé en spirale. Il peut être assimilé à une succession de spires circulaires parallèles.

A l'intérieur du solénoïde, les lignes de champ sont sensiblement parallèles. Par suite, le champ magnétique est pratiquement **uniforme** à l'intérieur du solénoïde (fig. 16).

A l'extérieur, les lignes de champ s'écartent en s'éloignant des extrémités.

Ainsi, le solénoïde donne accès aux lignes de champ à l'extérieur et à l'intérieur de la source du champ. L'expérience montre que les **lignes de champ magnétique constituent des courbes fermées et qui ne se croisent pas.** Ce résultat est général.

Là encore, une règle de la main droite met en relation de façon simple le sens des lignes de champ avec celui du courant (fig. 17).

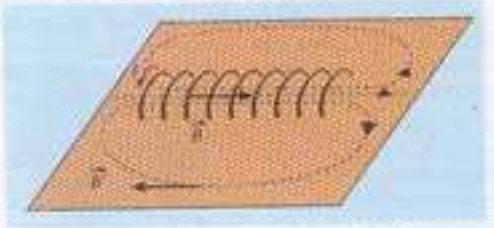


Fig. 16. ***Spectre magnétique d'un solénoïde court.*** *Seules, les demi-spires supérieures du solénoïde sont ici représentées.*

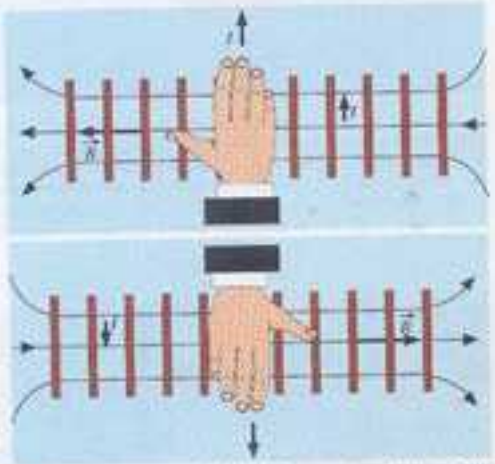


Fig. 17. ***Une autre règle de la main droite,*** *pour déterminer le sens des lignes de champ et celui de $\vec{B}$ à partir du sens du courant.*
Cette règle n'est pas tout à fait analogue à celle de la figure 15. Dans la première, ce sont les doigts qui suivent les lignes de champ, le pouce indiquant le sens du courant. Dans le cas du solénoïde, c'est l'inverse.

c) Spectre d'une bobine plate

Le spectre magnétique d'une bobine plate circulaire est donné à la figure 18.

d) Spectre des bobines de Helmholtz

Deux bobines plates, parallèles, circulaires, de rayon R, distantes de ce rayon R, parcourues dans le même sens par le même courant, constituent un dispositif appelé bobines de Helmholtz (fig. 19).

Les lignes de champ sont quasiment parallèles entre les deux bobines. Il en résulte que **le champ magnétique est uniforme entre les deux bobines.** Ce dispositif simple est souvent utilisé, car il donne un champ uniforme dans une région accessible et relativement étendue.

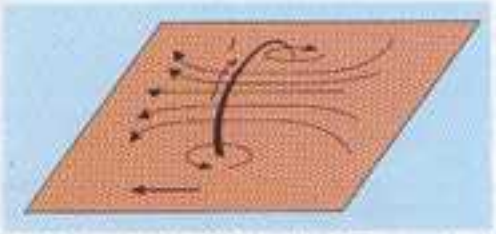


Fig. 18. ***Spectre d'une bobine plate.*** *Le pouce de la main droite, dont les doigts indiquent le sens du courant, donne encore le sens du vecteur-champ magnétique et des lignes de champ.*

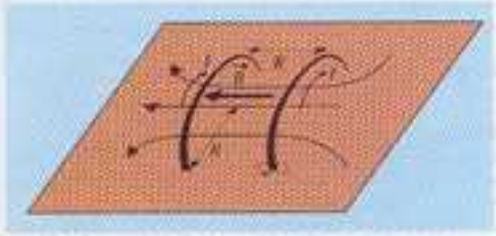


Fig. 19. ***Spectre de bobines de Helmholtz.*** *La distance entre les deux bobines est égale au rayon des bobines. A l'intérieur, le champ est uniforme.*



Fig. 20. *L'une des deux bobines d'Helmoltz qui crée le champ magnétique de la chambre à bulles du C.E.R.N.*

3 LE SOLÉNOÏDE

1. Analogie entre un aimant droit et un solénoïde court

a) Comparaison des spectres

Les spectres des aimants droits et des solénoïdes courts ont même allure à l'extérieur (fig. 21). Par analogie, la face du solénoïde d'où sortent les lignes de champ, est appelée face nord, et celle où elles rentrent est la face sud.

b) Interprétation de l'origine du magnétisme des aimants

L'intérieur d'un aimant peut être considéré comme constitué d'une foule de minuscules boucles microscopiques, parallèles entre elles, où des courants circulent dans le même sens que dans le solénoïde (fig. 22).

Cette interprétation a été proposée par le physicien français Ampère. Les courants qu'il a imaginés à l'intérieur des aimants portent encore le nom de « courants ampériens ».

Ainsi, dans les aimants comme dans les courants, le champ magnétique résulte du mouvement de charges électriques (électrons). Finalement, tous les phénomènes magnétiques sont dus à des actions à distance de **charges électriques en mouvement** sur d'autres **charges électriques en mouvement.**

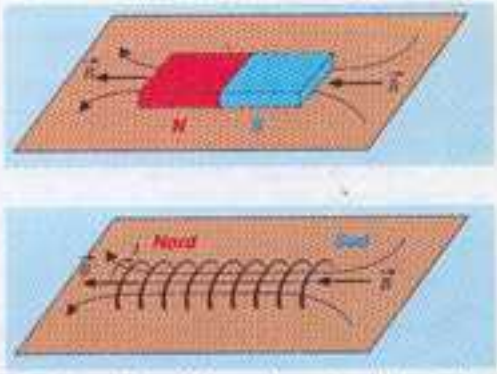


Fig. 21. ***Analogies de forme des spectres d'aimant droit et de solénoïde court.***

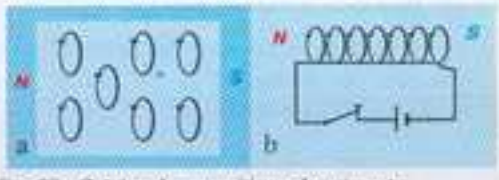


Fig. 22. ***Origine du magnétisme des aimants.***
a) Boucles de courants ampériens dans un aimant.
b) Courant dans un solénoïde.

c) Confirmation : expérience de l'aimant brisé

En cassant en deux, puis en quatre... une longue aiguille d'acier aimantée, il se forme deux, quatre... aimants (fig. 23).

Il est donc impossible d'isoler une région magnétique nord ou une région magnétique sud.

La raison en est que toute spire parcourue par un courant est à la fois face nord (vue d'un côté) et face sud (vue de l'autre côté).

2. Champ magnétique dans un solénoïde

a) Formule du solénoïde

L'étude des spectres magnétiques a montré que le champ magnétique est **uniforme** à l'intérieur du solénoïde.

Des considérations théoriques permettent d'établir que la valeur du champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde infiniment long, placé dans le vide, est donnée par la relation :

$$B = \mu_0 . n_1 . I$$

B en tesla (T);
μ_0 : $4\pi \times 10^{-7}$ SI;
n_1 : nombre de spires par mètre;
I en ampère (A).

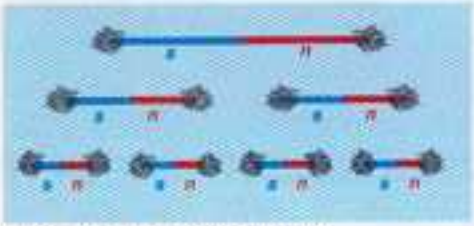


Fig. 23. ***Expérience de l'aimant brisé.***

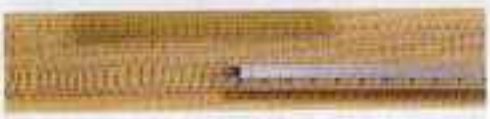


Fig. 24. ***Utilisation d'un long ressort métallique comme solénoïde. Le nombre de spires par mètre est réglable.***

La constante μ_0 est appelée **perméabilité du vide.** Il s'agit d'une constante universelle. Dans le Système International, elle est égale à :

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}.$$

La tendance actuelle pour obtenir des champs intenses, est d'augmenter I au maximum possible, par l'utilisation de bobines supraconductrices, dans lesquels on peut faire passer des courants de plusieurs milliers d'ampères, ce qui conduit à des champs magnétiques de plusieurs teslas.

b) Vérification expérimentale

En pratique, il est évidemment impossible de disposer de solénoïdes infiniment longs et de travailler dans le vide. Les expériences suivantes montrent que la formule précédente est applicable avec une bonne approximation pour la région centrale d'un solénoïde assez long, placé dans l'air. Un solénoïde peut être considéré comme assez long dès que sa longueur dépasse environ 5 fois le diamètre d'une spire.

- Un teslamètre, placé dans la région centrale d'un solénoïde assez long, montre que la valeur du champ magnétique est proportionnelle à l'intensité du courant.

- L'influence du nombre de spires par mètre peut être vérifiée, à intensité constante, en introduisant le teslamètre dans un long ressort métallique compressible ou extensible (fig. 24).

B est bien proportionnel à n_1.

Remarque :
Une aiguille magnétique, placée à l'intérieur d'un solénoïde dont l'axe est perpendiculaire au plan du méridien magnétique du lieu, s'oriente sous l'influence du champ géomagnétique et du champ créé par le solénoïde (fig. 25). Elle prend la direction de la *somme vectorielle* $\vec{B}$, de la composante géomagnétique horizontale $\vec{B}_0$ et du vecteur-champ créé par le solénoïde, $\vec{B}_s$.

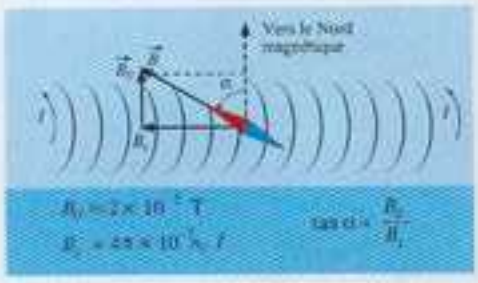


Fig. 25. ***Orientation d'une aiguille aimantée dans un solénoïde sous l'influence conjuguée du champ géomagnétique $\vec{B}_0$ et du champ $\vec{B}_s$ créé par le solénoïde.***

c) Généralisation

D'autres formules donnent les valeurs des champs magnétiques créés par les dispositifs de forme géométrique simple (fil rectiligne, bobines plates ou de Helmholtz...). Elles ne sont pas au programme, et seraient données si besoin est. Dans tous les cas :

la valeur du vecteur-champ magnétique créé en un point de l'espace par un circuit électrique quelconque, est proportionnelle à l'intensité du courant dans le circuit.

Le sens du vecteur-champ change de sens avec celui du courant.



Fig. 26. *Ampoule à pinceau circulaire d'électrons.*



Fig. 27. *Trajectoire circulaire des électrons lancés orthogonalement à $\vec{B}$.*

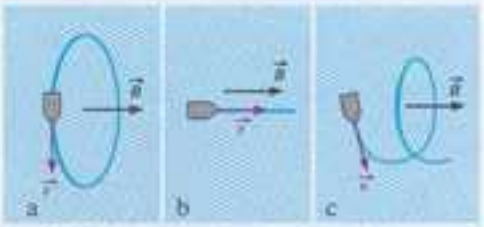


Fig. 28. *Trajectoire des électrons lancés à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$.*

a) $\vec{v} \perp \vec{B}$: trajectoire circulaire.

b) $\vec{v} \nparallel \vec{B}$: trajectoire rectiligne.

c) $\vec{v}$ quelconque : trajectoire hélicoïdale.

4 ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UNE PARTICULE CHARGÉE

1. Étude expérimentale

a) L'ampoule à pinceau circulaire d'électrons

• *Dispositif*

Une grande ampoule, dans laquelle est placé un canon à électrons, renferme un gaz sous faible pression. L'ampoule est placée entre deux bobines de Helmholtz (fig. 26).

— La direction du vecteur-vitesse des électrons à la sortie du « canon » peut être modifiée en tournant l'ampoule horizontalement autour de son support. Les électrons peuvent ainsi être émis dans toutes les directions d'un plan vertical.

— La valeur de la vitesse de sortie des électrons est réglable en jouant sur la tension accélératrice dans le canon.

— La valeur du champ magnétique uniforme entre les bobines est modifiable par réglage de l'intensité du courant dans les bobines de Helmholtz, sources du champ magnétique.

La trajectoire des électrons dans l'ampoule peut être observée par suite des chocs de ces électrons sur les molécules du gaz raréfié intérieur. Les molécules choquées absorbent de l'énergie qu'elles réémettent sous forme lumineuse.

• *Observations*

— Si les électrons sont lancés dans l'ampoule orthogonalement au champ magnétique, leur trajectoire est circulaire (fig. 27 et 28 *a*).

Le fait que la luminosité soit sensiblement la même en tous points de la trajectoire laisse présager que le mouvement circulaire des électrons est uniforme.

— Si les électrons sont lancés dans l'ampoule parallèlement au champ magnétique, leur trajectoire est rectiligne (fig. 28 *b*).

— Si les électrons sont lancés avec une vitesse initiale quelconque, la trajectoire est une hélice (fig. 28 *c*).

• *Modification du rayon de la trajectoire*

Dans le cas où la trajectoire est circulaire, c'est-à-dire quand le vecteur-vitesse initial des électrons est orthogonal au champ magnétique :

— si la vitesse initiale des électrons est augmentée, le rayon du cercle croît;

— si le champ magnétique est augmenté, le rayon du cercle diminue.

c) Généralisation

D'autres formules donnent les valeurs des champs magnétiques créés par les dispositifs de forme géométrique simple (fil rectiligne, bobines plates ou de Helmholtz...). Elles ne sont pas au programme, et seraient données si besoin est. Dans tous les cas :

la valeur du vecteur-champ magnétique créé en un point de l'espace par un circuit électrique quelconque, est proportionnelle à l'intensité du courant dans le circuit.

Le sens du vecteur-champ change de sens avec celui du courant.



Fig. 26. *Ampoule à pinceau circulaire d'électrons.*



Fig. 27. *Trajectoire circulaire des électrons lancés orthogonalement à $\vec{B}$.*

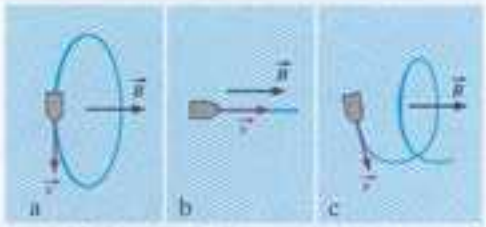


Fig. 28. *Trajectoire des électrons lancés à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$.*

a) $\vec{v} \perp \vec{B}$: trajectoire circulaire.

b) $\vec{v} \neq \vec{B}$: trajectoire rectiligne.

c) $\vec{v}$ quelconque : trajectoire hélicoïdale.

4 ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UNE PARTICULE CHARGÉE

1. Étude expérimentale

a) L'ampoule à pinceau circulaire d'électrons

• *Dispositif*

Une grande ampoule, dans laquelle est placé un canon à électrons, renferme un gaz sous faible pression. L'ampoule est placée entre deux bobines de Helmholtz (fig. 26).

— La direction du vecteur-vitesse des électrons à la sortie du « canon » peut être modifiée en tournant l'ampoule horizontalement autour de son support. Les électrons peuvent ainsi être émis dans toutes les directions d'un plan vertical.

— La valeur de la vitesse de sortie des électrons est réglable en jouant sur la tension accélératrice dans le canon.

— La valeur du champ magnétique uniforme entre les bobines est modifiable par réglage de l'intensité du courant dans les bobines de Helmholtz, sources du champ magnétique.

La trajectoire des électrons dans l'ampoule peut être observée par suite des chocs de ces électrons sur les molécules du gaz raréfié intérieur. Les molécules choquées absorbent de l'énergie qu'elles réémettent sous forme lumineuse.

• *Observations*

— Si les électrons sont lancés dans l'ampoule orthogonalement au champ magnétique, leur trajectoire est circulaire (fig. 27 et 28 *a*).

Le fait que la luminosité soit sensiblement la même en tous points de la trajectoire laisse présager que le mouvement circulaire des électrons est uniforme.

— Si les électrons sont lancés dans l'ampoule parallèlement au champ magnétique, leur trajectoire est rectiligne (fig. 28 *b*).

— Si les électrons sont lancés avec une vitesse initiale quelconque, la trajectoire est une hélice (fig. 28 *c*).

• *Modification du rayon de la trajectoire*

Dans le cas où la trajectoire est circulaire, c'est-à-dire quand le vecteur-vitesse initial des électrons est orthogonal au champ magnétique :

— si la vitesse initiale des électrons est augmentée, le rayon du cercle croît;

— si le champ magnétique est augmenté, le rayon du cercle diminue.

b) Chambres à bulles à hydrogène liquide

Le principe des chambres à bulles sera précisé chapitre 15.

En bref, des particules chargées, lancées dans de l'hydrogène liquide, provoquent par interaction avec les atomes d'hydrogène une avance à l'ébullition qui se manifeste par l'apparition d'une succession de petites bulles qui matérialisent le trajet des particules. Une photographie de ces bulles, prises au flash quand elles viennent de se former, montre les trajectoires des particules chargées.

• La figure 29 est la reproduction d'un tel cliché. Les trajectoires sont incurvées par un champ magnétique uniforme perpendiculaire au plan de la photographie, pointant ici vers l'arrière de la figure. Les particules sont injectées dans la chambre orthogonalement à ce champ.

Les deux grandes spirales du cliché attirent immédiatement l'œil. Ce sera le seul événement étudié ici.

Pour les deux particules qui suivent les spirales, la particule notée e^- est un électron, la particule notée e^+ est un anti-électron, de même masse que l'électron, mais de charge opposée. Alors que l'électron tourne dans un sens, l'anti-électron tourne dans l'autre sens : l'incurvation des trajectoires dépend du signe de la charge des particules.



Fig. 29. ***Traces laissées dans une chambre à bulles par des particules chargées.***

Les trajectoires des particules sont des spirales, et non des cercles comme dans l'ampoule électronique. Elles sont en effet ralenties par leurs interactions avec les molécules de dihydrogène liquide.

• La figure 30 est extraite d'un autre cliché, où la vitesse initiale de l'électron n'est pas orthogonale au champ magnétique. L'hélice qui devrait être la trajectoire de l'électron s'inscrit en réalité sur un cône, par suite des effets de freinage.

2. Force magnétique

a) Expression

Les expériences réalisées avec l'ampoule électronique ou dans une chambre à bulles montrent que les particules chargées lancées dans un champ magnétique peuvent prendre des trajectoires circulaires, ou hélicoïdales. La force responsable de ces incurvations est appelée **force magnétique.** Elle dépend de la charge des particules, de leur vitesse et de la valeur du champ.

L'expression de cette force a été donnée par le physicien hollandais Lorentz : une particule de charge q, évoluant à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$, subit l'action d'une force magnétique donnée par le produit vectoriel :

$$\vec{F} = q\,.\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

F en newton (N);
q en coulomb (C);
v en mètre par seconde ($m.s^{-1}$);
B en tesla (T).

b) Caractéristiques

Les caractéristiques de la force magnétique résultent de son expression par un produit vectoriel (fig. 31) :

• *la direction* de la force est orthogonale au plan défini par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{B}$.



Fig. 30. ***Trajectoire hélicoïdale d'un électron dans une chambre à bulles.***

• *son sens* est tel que le trièdre formé par les vecteurs $q.\vec{v}$, $\vec{B}$ et $\vec{F}$ soit direct. Le sens du vecteur $q.\vec{v}$ dépend évidemment du signe de la charge.

• Si α désigne l'angle inférieur à π formé par les vecteurs $q.\vec{v}$ et $\vec{B}$, la valeur de la force magnétique est :

$$F = |q| . v . B . \sin \alpha \qquad \text{(fig. 32)}$$

Cette force est nulle si $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires ($\alpha = 0$ ou π).
Elle est aussi nulle si la particule est au repos ($v = 0$) : un champ magnétique ne peut pas servir à mettre en mouvement des particules immobiles.
Dans le cas où la vitesse est orthogonale au champ magnétique $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, l'expression de la force magnétique est : $F = q . v . B$.

c) Définition théorique du champ magnétique

La relation $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$ fait intervenir des grandeurs connues (force, charge, vitesse) et une grandeur abstraite : le vecteur-champ magnétique $\vec{B}$. En déterminant la force agissant sur une particule de charge et de vitesse connues, il est possible d'en déduire le champ magnétique agissant sur la particule. C'est pourquoi la relation $\vec{F} = q.\vec{v} . \wedge \vec{B}$ peut être considérée comme une définition du vecteur-champ $\vec{B}$.

Dans le SI, $B = \dfrac{F}{q . v . \sin \alpha}$ s'exprime en $N.C^{-1}.m^{-1}.s$, qui a reçu le nom de tesla (T).

d) Application

Le poids d'un proton, de masse :

$$m_p = 1{,}67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

est :

$$P = m . g = 1{,}67 \times 10^{-27} \times 9{,}8 = 1{,}67 \times 10^{-26} \text{ N},$$

de l'ordre de 10^{-26} N.

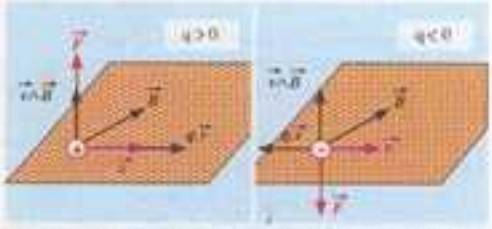


Fig. 31. ***Détermination du vecteur-force magnétique à partir des vecteurs $q.\vec{v}$ et $\vec{B}$. Le trièdre : courant, champ, force est direct.***

Animé d'une vitesse $v = 1\,000 \text{ m.s}^{-1}$ (ce qui est très faible pour ce genre de particules), dans un champ peu intense ($B = 1$ mT) orthogonal à la vitesse, le proton subit l'action d'une force magnétique $F = q . v . B$ puisque $\sin \alpha = 1$:

$$F = 1{,}6 \times 10^{-19} \times 1\,000 \times 10^{-3} = 1{,}6 \times 10^{-16} \text{ N},$$

de l'ordre de 10^{-15} N.
Cette force est 10 millions de fois supérieure au poids! Cet exemple numérique montre qu'en pratique, le poids des particules est négligeable vis-à-vis des forces magnétiques.

3. Étude de la trajectoire circulaire

L'expression $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$ permet de prévoir le mouvement d'une particule de masse m et de charge q. Le seul cas envisagé ici est celui d'une particule lancée dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme avec une vitesse initiale orthogonale à $\vec{B}$.
La charge q est supposée positive.

a) Analyse des actions

Puisque le poids de la particule est négligeable vis-à-vis de la force magnétique, la seule force agissante est $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$.
D'après la relation $\Sigma \vec{f} = m.\vec{a}$, le vecteur-accélération de la particule est :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q}{m} . \vec{v} \wedge \vec{B}.$$

En tant que produit vectoriel, l'accélération $\vec{a}$ est constamment orthogonale au vecteur-vitesse $\vec{v}$ et au vecteur-champ magnétique $\vec{B}$.

b) Choix du repère

Le mouvement de la particule est étudié dans un repère terrestre, supposé galiléen.
L'origine O du repère est le point d'entrée de la particule dans le champ magnétique.
L'axe Ox est choisi colinéaire à la vitesse initiale $\vec{v}_0$ et de même sens. Oy est pris orthogonal à $\vec{B}$ et perpendiculaire à Ox (fig. 33). Le repère est complété par un axe Oz tel que le trièdre $Oxyz$ soit direct (Oz est dans ce cas de sens contraire à $\vec{B}$).

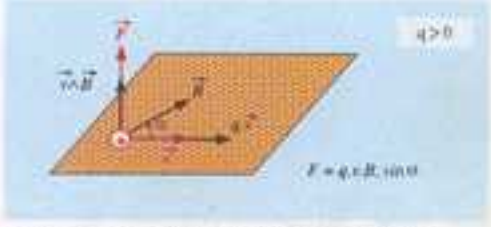


Fig. 32. ***Caractéristiques de la force magnétique.***

c) Caractéristiques du mouvement

• Puisque $\vec{a}$ est orthogonal à $\vec{B}$, donc à $\overrightarrow{Oz}$, sa coordonnée $a_z = \dfrac{d^2z}{dt^2}$ est nulle.

Deux intégrations successives donnent :
$v_z = C^{te} = 0$ comme au départ;
$z = C^{te} = 0$ pour la même raison.
Ainsi, la trajectoire est contenue dans le plan xOy orthogonal à $\vec{B}$. **La trajectoire est donc plane,** orthogonale au champ magnétique.

• Dans le repère mobile de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{n})$, en M (fig. 33) :

— L'accélération tangentielle en M est :

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

Puisque $\vec{a}$ est constamment orthogonal à $\vec{v}$, $a_\tau = 0$: le vecteur-accélération n'a pas de composante tangentielle.
Par intégration : $v = v_0$. La vitesse garde une valeur constante, et le **mouvement est uniforme.**

— L'accélération normale est $a_n = \dfrac{v_0^2}{R}$

R désignant le rayon de courbure de la trajectoire. Puisque la trajectoire est plane, le vecteur-vitesse reste orthogonal à $\vec{B}$. Le vecteur-accélération $\vec{a} = \dfrac{q}{m}.\vec{v} \wedge \vec{B}$ a donc pour valeur :

$$a = \frac{|q|}{m}.v_0.B = \frac{v_0^2}{R}$$

Par suite, le rayon de courbure est constant. La **trajectoire est circulaire,** de rayon :

$$R = \frac{m.v_0}{|q|.B}$$

En résumé, une particule lancée avec une vitesse $\vec{v}$ orthogonale à un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, acquiert une mouvement circulaire uniforme dans un plan orthogonal à $\vec{B}$.

Remarque : Si la charge de la particule est négative, le sens d'incurvation du cercle trajectoire est inversé.

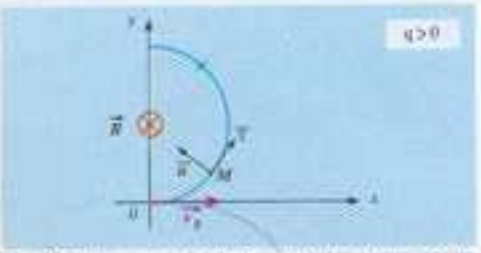


Fig. 33. *Mouvement circulaire uniforme d'une particule chargée (ici positivement) dans un champ magnétique uniforme.*

4. Autres conséquences de la relation $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$

a) La puissance d'une force magnétique est nulle

La puissance d'une force $\vec{F}$ est donnée par le produit scalaire : $P = \vec{F}.\vec{v}$.
La force magnétique qui est orthogonale au vecteur-vitesse, a donc une puissance nulle : elle ne travaille pas. L'application du théorème de l'énergie cinétique montre alors que l'énergie cinétique de la particule ne varie pas.
Par suite, la force magnétique peut incurver les trajectoires d'une particule mais ne peut pas modifier la valeur de sa vitesse.

b) Quantité de mouvement d'une particule évoluant dans un champ magnétique

L'expression du rayon de courbure de la trajectoire a été établie plus haut :

$$R = \frac{m.v_0}{|q|.B}$$

Par suite, la valeur $p = m.v_0$ de la quantité de mouvement d'une particule est reliée au rayon de courbure de sa trajectoire par la relation :

$p = \lvert q \rvert . B . R$
p en kilogramme-mètre par seconde ($kg.m.s^{-1}$) q en coulomb (C) B en tesla (T) R en mètre (m)

c) Vitesse angulaire des particules mobiles

Pour des particules en mouvement circulaire, leur vitesse angulaire $\omega = \dfrac{v_0}{R}$ se déduit de la relation : $m.v_0 = |q|.B.R$: $\omega = \dfrac{|q|.B}{m}$ (voir « Pour en savoir plus »).

Cette vitesse angulaire ne dépend pas de la vitesse v_0.
Les particules effectuent un tour en :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi.m}{|q|.B}$$

d) Particule évoluant dans un champ électrique et dans un champ magnétique

La particule subit dans ce cas l'action d'une force électrique $\vec{F}_1 = q.\vec{E}$ et, simultanément, celle d'une force magnétique $\vec{F}_2 = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$. La force totale $\vec{F}$ agissant sur la particule est donc

$$\vec{F} = q.(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Elle est appelée force de Lorentz.
Contrairement à la force magnétique, la force électrique peut être accélératrice.

Pour en savoir plus

Vecteur vitesse angulaire et champ magnétique

a) Définition du vecteur vitesse angulaire

Pour préciser la notion d'axe de rotation pour un mouvement circulaire, il est commode d'associer à la vitesse angulaire $\omega = \frac{v}{R}$, un *vecteur* $\vec{\omega}$ défini comme suit :

- Sa *direction* est orthogonale au plan du cercle.
- Son *sens* se déduit de celui du vecteur vitesse $\vec{v}$ par une règle de la main droite, comme l'indique la figure 42.
- Sa *valeur* ω est celle de la vitesse angulaire : $\omega = \frac{v}{R}$, exprimée en rad.s^{-1}.

La flèche qui le représente est habituellement dessinée avec son origine au centre du cercle.

b) Exemples d'utilisation

- Lorsque le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ et le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sont connus, le vecteur vitesse linéaire $\vec{v}$ s'en déduit par le produit vectoriel $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$. En effet, ce vecteur a bien comme valeur $v = R.\omega$ et le trièdre construit avec $\vec{\omega}$, $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ est direct lorsque $\vec{v}$ a le sens du mouvement.
- De même, la *force centripète* appliquée à une particule en mouvement circulaire s'exprime par $\vec{F} = \vec{\omega} \wedge \vec{p}$, où $\vec{p}$ désigne le vecteur quantité de mouvement de la particule, comme le lecteur pourra s'en assurer à titre d'exercice de manipulation du produit vectoriel.

Ces résultats sont résumés dans la figure 43.

c) Relation entre $\vec{\omega}$ et $\vec{B}$

Il a été montré dans le cours que des particules chargées, lancées à la vitesse $\vec{v}_0$ orthogonalement à un champ magnétique $\vec{B}$, décrivent un cercle dans un plan orthogonal à $\vec{B}$, avec une vitesse $\vec{v}$ de valeur constante v_0. ***Les vecteurs $\vec{\omega}$ et $\vec{B}$ sont donc colinéaires.*** Par suite, $\vec{\omega} = C.\vec{B}$.

La constante C peut être identifiée comme l'*opposée de la charge massique* des particules. En posant en effet :

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m}.\vec{B}$$

la force centripète $\vec{F} = \vec{\omega} \wedge \vec{p}$ s'écrit :

$$\vec{F} = -\frac{q}{m}.\vec{B} \wedge m.\vec{v} = -q.\vec{B} \wedge \vec{v},$$

qui est bien égal à la force magnétique $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$ d'après l'anti-commutativité du produit vectoriel (fig. 44).

La relation $\vec{\omega} = -\frac{q}{m}.\vec{B}$ inclut en particulier celle qui a été donnée en cours : $\omega = \frac{q}{m}.B$. Elle permet de retrouver aisément le sens de $\vec{B}$ lorsque le signe de la charge q et le sens du vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ sont connus. Ce sens est souvent facile à trouver, sur un cliché de chambre à bulles par exemple, avec une règle de la main droite.

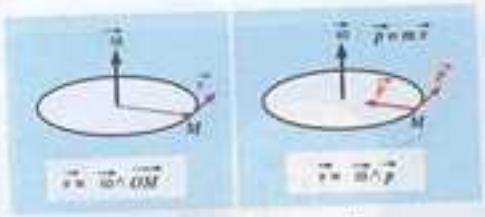


Fig. 43

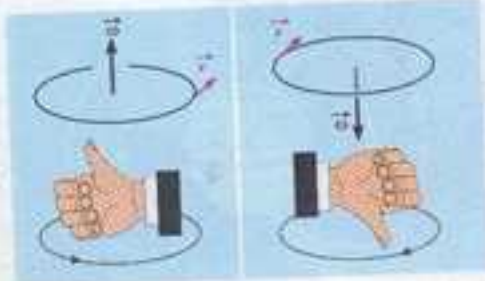


Fig. 42

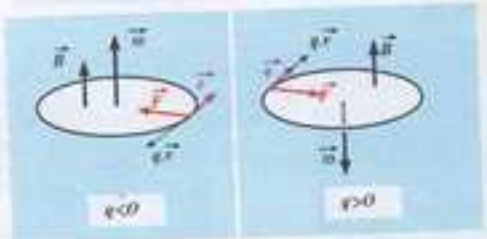


Fig. 44. *$\vec{\omega}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires :*
— de même sens si la charge est négative ;
— de sens contraires si la charge est positive.

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

- Se rappeler qu'une aiguille aimantée sn s'oriente dans un **champ magnétique** $\vec{B}$ de sorte que $\vec{sn} \nearrow \vec{B}$.

- Qu'il règne un champ magnétique sensiblement **uniforme** :
  — entre les branches d'un **aimant** en U ;
  — à l'intérieur d'un **solénoïde** parcouru par un courant ;
  — entre deux **bobines de Helmholtz** parcourues par un courant.

- Pouvoir retrouver le sens du vecteur-champ magnétique créé en un point de l'espace par un courant, par une **règle d'orientation dans l'espace** (règle de la main droite par exemple). Le vecteur $\vec{B}$ sort d'une région ou d'une face nord

- Connaître la formule qui donne la valeur du champ magnétique **uniforme** dans la région centrale d'un solénoïde assez long :

$$B = 4\pi \times 10^{-7} n_l . I.$$

$B = \mu_0 n I$

- Se rappeler que tous les phénomènes magnétiques résultent de l'action de particules chargées **en mouvement** (sources de champ magnétique) sur d'autres particules chargées **en mouvement** (sensibles au champ).

- Connaître l'expression de la force magnétique $\vec{F}$ qui agit sur une particule de charge q évoluant à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$:

$$\vec{F} = q . \vec{v} \wedge \vec{B}.$$

- Que la valeur de la quantité de mouvement d'une particule chargée évoluant circulairement dans un champ magnétique uniforme est donnée par :

$$p = |q| . B . R.$$

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1 Bobines de Helmholtz

En mesurant la valeur du champ magnétique le long de l'axe d'une bobine plate, de rayon $R = 10$ cm, on obtient les résultats suivants :

x (cm)	0	1	2	3	5	7,5	10	15	20	30
B	10	9,9	9,4	8,8	7,2	5,1	3,5	1,7	0,9	0,3

La valeur B du champ magnétique est exprimée en unités arbitraires et x désigne l'abscisse comptée à partir du centre de la bobine.

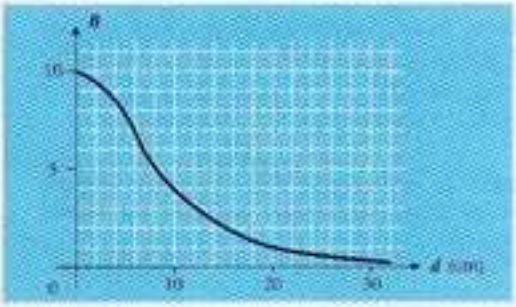
1) Tracer la courbe donnant en fonction de x l'évolution de la valeur du champ.

2) Deux bobines identiques à la précédente, coaxiales, placées à la distance d l'une de l'autre, sont montées en série et parcourues par la même intensité, dans le même sens que précédemment.
Par une addition graphique, tracer la courbe montrant l'évolution de la valeur du champ magnétique le long de l'axe dans les trois cas suivants : $d = 5$ cm, $d = 10$ cm et $d = 20$ cm.
Quel est le dispositif qui assure au mieux l'uniformité du champ entre les bobines?

3) Dans le cas où $d = 10$ cm, on inverserait les connexions reliant les deux bobines afin que les courants qui les traversent soient de sens contraire. Comment varie le champ le long de l'axe?

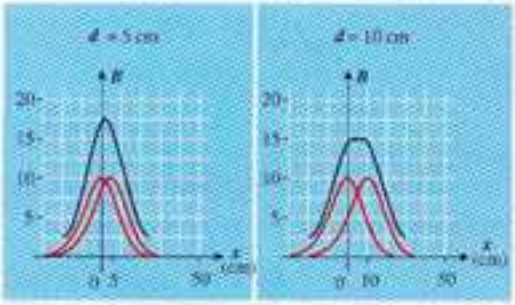
SOLUTION

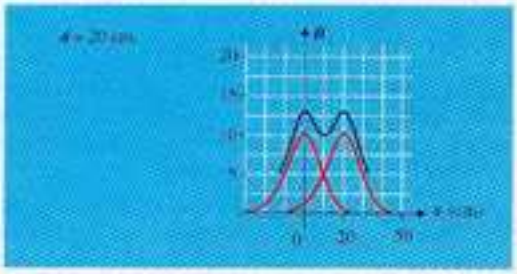
1) La courbe représentant l'évolution de $B(x)$ est la suivante :



Elle serait à compléter par symétrie par rapport à OB.

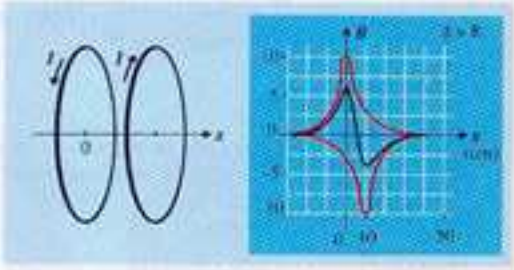
2) Lorsque les bobines sont parcourues par des courants de même sens, les contributions de chacune d'elles au champ s'ajoutent. En traçant les deux courbes, avec des maxima distants de d, la valeur du champ s'obtient en ajoutant en chaque point les valeurs. On obtient ainsi les allures suivantes (à tracer à plus grande échelle) :





La courbe résultante présente un méplat dans le cas où $d = 10$ cm, c'est-à-dire quand la distance entre les deux bobines est égale au rayon. Le champ est alors pratiquement uniforme entre les bobines.

3) Les vecteurs-champ magnétique créés par les bobines sont maintenant de sens inverses, et leurs valeurs se retranchent. On peut partir de la figure précédente et retrancher point par point ou, comme ci-dessous, tracer deux nouvelles courbes en comptant par exemple positivement les champs lorsqu'ils pointent vers la droite.



1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 2 Valeur d'un champ magnétique

Avec le dispositif étudié dans le cours (page 113), on constate que les électrons, soumis à une tension accélératrice de 400 V dans le canon, prennent une trajectoire plane circulaire de diamètre $d = 10$ cm.

1) Quelle est la valeur du champ magnétique existant entre les bobines de Helmholtz?

2) Combien de temps faut-il à un électron pour faire un tour?

La charge massique des électrons, de masse $9{,}1 \times 10^{-31}$ kg vaut $1{,}76 \times 10^{11}$ C.kg^{-1}.

SOLUTION

1) Dans le canon à électrons, la variation de l'énergie cinétique de l'électron $\frac{1}{2} m.v^2 - 0$ est égale au travail $e.U$ de la force électrique. Le poids de l'électron est négligeable vis-à-vis de la force électrique et son travail n'intervient pas. La vitesse des électrons est donc telle que :

$$v^2 = 2\frac{e}{m}.U = 2 \times 1{,}76 \times 10^{11} \times 400,$$

d'où $v = 1{,}2 \times 10^7$ m.s^{-1}.

Sur la trajectoire de rayon $R = 5 \times 10^{-2}$ m, la vitesse angulaire ω vaut :

$$\omega = \frac{v}{R} = 2{,}4 \times 10^8 \text{ rad.s}^{-1}.$$

La valeur du champ magnétique est :

$$B = \frac{\omega}{q}.m = \frac{2{,}4 \times 10^8}{1{,}76 \times 10^{11}}$$

soit $\boldsymbol{B = 1{,}3 \times 10^{-3}}$ **T.**

2) L'électron parcourt la longueur $2\pi.R$ à la vitesse

$$v = \frac{2\pi \cdot R}{T} = 1{,}2 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}.$$

La durée d'un tour est $T = \frac{2\pi.R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$,

soit $\boldsymbol{T = 2{,}6 \times 10^{-8}}$ **s.**

EXERCICE 3 Filtre de vitesse

Des particules chargées pénètrent avec diverses vitesses colinéaires, horizontales, entre les armatures d'un condensateur plan. Les armatures horizontales, distantes de d, sont soumises à une tension électrique U. Simultanément, un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, horizontal, orthogonal au champ électrique $\vec{E}$, s'exerce lui aussi entre les armatures.

1) Préciser quelles doivent être les caractéristiques de la tension U, ainsi que celles des bobines de Helmholtz, pour que les champs aient la disposition indiquée par la figure.



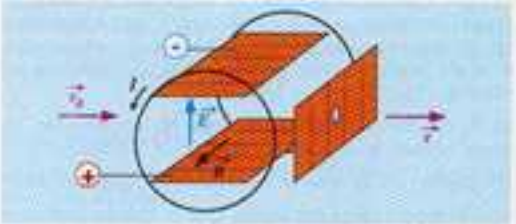
2) Quelle doit être la vitesse des particules pour que, soumises simultanément à $\vec{E}$ et $\vec{B}$, elles ne subissent aucune déviation entre les deux armatures?

3) Qu'arrive-t-il aux particules plus lentes? plus rapides? Le dispositif convient-il aussi bien pour les charges positives que pour les négatives?

Application numérique : $d = 0{,}5$ cm; $U = 50$ V; $B = 0{,}1$ T.

SOLUTION

1) Pour que le champ électrique soit vertical vers le haut, il faut que le potentiel de l'armature du bas soit le plus élevé.
Le champ magnétique est parallèle à l'axe des deux bobines de Helmholtz. Pour qu'il pointe vers nous, il faut voir tourner le courant dans le sens trigonométrique.



2) Les particules ne subissent aucune déviation si elles ne subissent pas d'action. La force de Lorentz doit être nulle (le poids est négligeable vis-à-vis des forces électriques ou magnétiques). Soit $q.\vec{E} + q.\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$.

Cette condition se traduit par $\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$, d'où $v = \frac{E}{B}$ puisque $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux. Le champ électrique entre les armatures a pour valeur $E = \frac{U}{d}$.

1. EXERCICES RESOLUS

La vitesse est alors : $v = \dfrac{U}{B.d}$, soit :

$$v = \frac{50}{5} \times 10^4 = 10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\boldsymbol{v = 100 \text{ km.s}^{-1}.}$$

3) Les particules plus lentes subiront une force magnétique plus faible. La force magnétique est vers le bas pour des particules positives, vers le haut pour les négatives. La force électrique ne change pas. Les charges positives lentes seront donc déviées vers le haut, les négatives lentes vers le bas. Ce sera l'inverse si les particules sont plus rapides, car la force magnétique l'emportera. Seules les particules de vitesse $v = \dfrac{E}{B}$ sortiront par le petit trou (ce qui justifie l'appellation de **filtre de vitesse** donnée à ce dispositif).
Que les particules soient positives ou négatives, la condition $\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$ conduit à une force nulle. Le dispositif filtre aussi bien les charges positives que les charges négatives.

EXERCICE 4 Spectrographe de masse

1) Des ions brome (I) Br^+ (il ne s'agit pas des ions bromure Br^- rencontrés en solution aqueuse) sortent d'une chambre d'ionisation, pratiquement sans vitesse initiale. Ils sont accélérés sous l'influence d'une tension électrique U.
Établir la relation donnant la valeur p de la quantité de mouvement qu'ils acquièrent ainsi en fonction de leur masse m, leur charge q et la tension accélératrice U.

2) Les ions pénètrent dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, orthogonal à la vitesse acquise.

a) Exprimer le rayon de courbure R de la trajectoire en fonction de m, U, q et B.

b) Application : $B = 0{,}12$ T ; $U = 3\,470$ V. Établir la relation numérique donnant m (exprimée en unité de masse atomique u : $1 \text{ u} = 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg) en fonction de R (en m). Calculer m sachant que l'impact des ions sur la plaque photographique du spectromètre est situé à 125,7 cm de la fente d'entrée.

3) A 1,6 cm de la trace précédente, on observe un autre impact, plus lointain de la fente d'entrée.

a) Quelle est la masse de l'isotope correspondant?

b) On trouve dans les tables que la masse atomique moyenne du brome vaut 80 u. En admettant que les deux isotopes précédents soient les seuls à prendre en compte, dans quelles proportions ces isotopes existent-ils dans le brome?

SOLUTION

1) La variation $\dfrac{1}{2}mv^2 - 0$ de l'énergie cinétique résulte seulement du travail de la force électrique (égal à $q.U$), car le poids des particules est négligeable vis-à-vis des forces électrique ou magnétique.
De $m.v^2 = 2q.U$, on déduit $m^2.v^2 = 2q.m.U$, d'où :

$$\boldsymbol{p = \sqrt{2q.m.U}.}$$

2) *a)* La force magnétique ne travaillant pas, il n'y a pas de variation d'énergie cinétique. Dans le champ magnétique, les valeurs des vitesses et de la quantité de mouvement restent inchangées. Par suite, $p = q.B.R$ et $R = \dfrac{p}{q.B}$, ou, tenant compte de la relation précédente :

$$\boldsymbol{R = \frac{\sqrt{2m.U}}{B.\sqrt{q}}.}$$

b) Les ions brome (I) portent une charge élémentaire positive :

$$q = 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Par élévation au carré de l'expression précédente, il vient $m = \dfrac{1}{2}\dfrac{q.B^2.R^2}{U}$. En y remplaçant par les valeurs numériques connues, il vient :

$$\frac{m}{R^2} = \frac{1}{2} \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times \frac{0{,}12^2}{3\,470} \approx 3{,}32 \times 10^{-25} \text{ SI}$$

Dans cette relation m s'exprime en kg et R en m. Comme $1 \text{ kg} = \dfrac{1}{1{,}66 \times 10^{-27}}$ u, on obtient :

$$\frac{m}{R^2} = \frac{3{,}32 \times 10^{-25}}{1{,}66 \times 10^{-27}} = 200 \text{ et finalement } m_{(u)} = 200R^2.$$

Après avoir parcouru un demi-arc de cercle, les impacts sont situés à une distance de la fente égale au diamètre du cercle. Pour $R = \dfrac{1{,}257}{2}$ m, on obtient :

$$\boldsymbol{m = 79{,}0 \text{ u}.}$$

3) *a)* Le second isotope décrit un demi-cercle de rayon plus grand. Pour cet ion, le rayon de la trajectoire est $R' = \dfrac{(125{,}7 + 1{,}6)}{2}$ cm $\approx 0{,}637$ m. Par suite :

$$\boldsymbol{m = 81{,}0 \text{ u}.}$$

b) La masse atomique moyenne du brome étant de 80, les deux isotopes du brome existent dans les **mêmes proportions.**

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATION

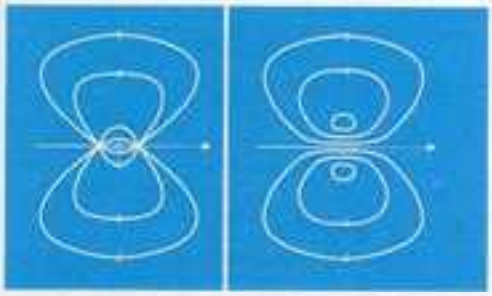
Sans calculs

Exercice 1

Recenser les dispositifs (aimants ou courants) qui donnent, dans des régions à préciser, un champ magnétique uniforme.

Exercice 2

Les deux schémas ci-dessous représentent un spectre magnétique et un spectre électrique.
Loin de la région centrale, ils ont sensiblement la même allure.



Lequel est le spectre magnétique? Quels dispositifs utiliser pour réaliser ces deux spectres?

Exercice 3

Pour quelle raison l'effet de freinage sur des électrons est-il beaucoup plus sensible dans une chambre à bulles que dans une ampoule à pinceau circulaire d'électrons?

Exercice 4

Préciser dans quels cas une particule (chargée ou non) est animée d'un mouvement rectiligne uniforme quand elle pénètre dans un champ magnétique.

* Exercice 5

Dans une ampoule à électrons on observe pour un réglage donné, que des électrons ont une trajectoire circulaire de rayon $R = 5$ cm. Qu'observe-t-on lorsqu'on réalise simultanément les opérations suivantes :

1) Tension accélératrice multipliée par 4 et intensité du courant dans les bobines de Helmholtz multipliée par 2?

2) Tension accélératrice divisée par 2 et intensité du courant dans les bobines multipliée par 1,41... ($\sqrt{2}$)?

3) Rotation de l'ampoule de 180° autour de son support, et inversion du sens du courant dans les bobines?

Exercice 6

Dans les figures ci-dessous, $\vec{v}$ représente le vecteur-vitesse d'une particule chargée située dans une région de l'espace où règnent un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$.



Chercher dans quel(s) cas de figure la particule :

1) Reste immobile.

2) Reste dans le plan de figure.

3) Reste en mouvement rectiligne ou l'acquiert.

Exercice 7

Faire un schéma des lignes de champ magnétique créé par un solénoïde, en les orientant en fonction du sens du courant indiqué sur le solénoïde. Reproduire la figure observée en regardant ce schéma dans un miroir. Le nouveau schéma est-il correct?

Exercice 8

Des particules de même charge, sortent toutes d'un cyclotron donné, avec la même quantité de mouvement $p = q.B.R$. Que représente R? Comment interpréter que cette quantité de mouvement soit indépendante de la tension accélératrice entre les dees?

Exercice 9

Lorsque des particules chargées sont animées, après déflexion magnétique, d'un mouvement rectiligne uniforme, peut-on dire que leur poids est négligeable vis-à-vis de la force magnétique?

Force magnétique

Les données suivantes seront utilisées dans les exercices si besoin est :

Charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

	Electron	Proton	Neutron	Particule α
Masse (kg)	$9{,}1 \times 10^{-31}$	$1{,}672 \times 10^{-27}$	$1{,}675 \times 10^{-27}$	$6{,}65 \times 10^{-27}$
Charge	$-e$	$+e$	0	$2e$

Composante horizontale du champ magnétique terrestre : $B_h \sim 2 \times 10^{-5}$ T.

2. EXERCICES PROPOSES

***Exercice 10**

Des électrons, animés d'un mouvement rectiligne uniforme horizontal, pénètrent avec une vitesse $v = 10\ km.s^{-1}$ dans une région où règne un champ magnétique de vecteur $\vec{B}$ horizontal ($B = 5 \times 10^{-3}$ T). $\vec{B}$ fait avec $\vec{v}$ un angle de 50°.
Quelle est alors la valeur de la force agissant sur les électrons? La comparer à leur poids.

Exercice 11

Un solénoïde horizontal comportant 1 000 spires par mètre, renferme dans sa région centrale une aiguille aimantée placée sur un pivot. Initialement, l'axe horizontal du solénoïde est perpendiculaire au méridien magnétique du lieu où se fait l'expérience.

1) Faire un schéma du dispositif.

2) Exprimer l'angle α dont tourne l'aiguille lorsqu'on fait passer un courant d'intensité I dans le solénoïde.

3) Tracer la courbe montrant l'évolution de α en fonction de I.

***Exercice 12**

Un solénoïde horizontal comportant 1 000 spires par mètre renferme dans sa région centrale une aiguille aimantée placée sur un pivot. Initialement, l'axe horizontal du solénoïde est dans le plan du méridien magnétique du lieu où se fait l'expérience.

1) Calculer l'intensité I_0 du courant qui doit passer dans le solénoïde, pour que le champ magnétique créé dans sa région centrale, ait même valeur que la composante horizontale du champ terrestre.

2) On fait tourner le solénoïde autour d'un axe vertical passant par sa région centrale (le solénoïde reste horizontal). Lorsque le solénoïde a été tourné de α, de quel angle β a tourné l'aiguille?
On envisagera successivement les trois cas suivants :

$$I = I_0 \qquad I = 2I_0 \qquad I = \frac{I_0}{2}$$

3) Préciser dans lequel des cas précédents l'aiguille fait moins d'un tour lorsque le solénoïde en fait un. De quel angle maximal l'aiguille tourne-t-elle alors?

Bobines de Helmholtz

Exercice 13

Une bobine plate circulaire comporte plusieurs spires de rayon moyen $R = 10$ cm. Elle est parcourue par un courant d'intensité $I = 0,5$ A. Un teslamètre indique que le champ magnétique créé au centre de la bobine vaut $B_0 = 2,0 \times 10^{-3}$ T. A 10 cm du centre, sur l'axe de la bobine, ce champ ne vaut plus que $B = 0,7 \times 10^{-3}$ T. Deux bobines identiques à la précédente sont associées afin de réaliser le dispositif de Helmholtz.

1) Faire un schéma du dispositif, en y précisant les sens du courant et du champ magnétique intérieur.

2) Estimer la valeur du champ magnétique au milieu des deux bobines parcourues dans le même sens par un courant de 2 A.

Particules chargées dans un champ magnétique

Exercice 14

Combien de tours par seconde un électron effectue-t-il lorsqu'il évolue dans un champ magnétique de 50 mT orthogonal à sa vitesse initiale? Ce résultat dépend-t-il de la vitesse initiale de l'électron? de la valeur du champ?

Exercice 15

Quelle est la vitesse d'une particule α animée d'un mouvement circulaire uniforme de rayon 1 m dans un champ magnétique de valeur 0,1 T?

***Exercice 16**

Des particules de masse m, porteuses d'une charge élémentaire e positive, sont initialement immobiles.

1) Elles subissent l'influence accélératrice d'une tension électrique U. Exprimer leur énergie cinétique E_c, leur quantité de mouvement p et leur vitesse v en fonction de e, m et U.

2) Elles pénètrent à la vitesse précédente dans un champ magnétique de vecteur $\vec{B}$ orthogonal à leur vitesse $\vec{v}$. Parmi les grandeurs suivantes $(E_c, p, v, \beta, \vec{v})$, lesquelles sont modifiées?

3) Exprimer le rayon de courbure de leur trajectoire en fonction de m, e, U et B.

Spectrographes de masse

Exercice 17

Dans un spectrographe de masse, des ions $^{66}Zn^+$ et $^{70}Zn^+$ initialement immobiles, sont accélérés sous l'influence d'une tension $U = 5$ kV. Ils pénètrent ensuite dans un champ magnétique de valeur $B = 10^{-2}$ T.

1) Faire un schéma du dispositif en y représentant les signes des charges des plaques accélératrices et le sens du vecteur champ magnétique.

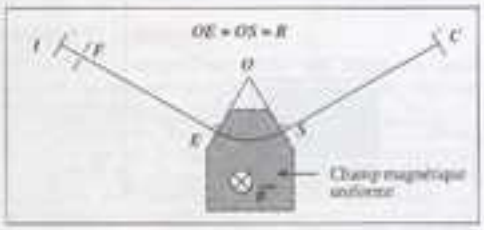
2) Quelle est la vitesse des ions à leur entrée dans le champ magnétique? lors de leur impact sur la plaque photographique après un demi-tour?

3) Quelle est la distance qui sépare, sur la plaque photographique, les impacts des deux types d'ions? Les masses des ions seront prises égales à 66 u et 70 u. ($1\ u = 1,66 \times 10^{-27}$ kg).

2. EXERCICES PROPOSES

* Exercice 18

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les particules étudiées ne sont pas relativistes.
Dans le spectrographe de masse schématisé sur la figure, des ions positifs de masse m, de charge q, sortent en I d'une chambre d'ionisation avec une vitesse négligeable.



Ils sont accélérés entre I et F par une tension $U = V_I - V_F$ continue et réglable. Ils sont ensuite déviés entre E et S par un champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de figure, la valeur B du champ magnétique restant constante pendant toute la durée d'utilisation. Ils sont enfin recueillis à l'entrée C fixe d'un collecteur.
Dans cet appareil, tous les ions que l'on veut recueillir en C doivent suivre la même trajectoire IFESC.
D'autre part, le vide est réalisé dans l'appareil, et l'effet de pesanteur sur les ions est négligeable.
La portion ES est un arc de cercle de centre O et de rayon R.

1) a) Établir en fonction de q, m et U l'expression de la valeur v de la vitesse avec laquelle un ion quelconque du faisceau parvient en E.

b) Établir la relation qui doit exister entre q, v, B, m et R pour que cet ion suive la trajectoire imposée.

c) Déduire des deux questions précédentes la relation entre q, B, R, m et U.

2) On utilise ce spectrographe de masse pour identifier les isotopes du strontium; les atomes de strontium s'ionisent sous la forme d'ions Sr^{2+}.

a) On place d'abord dans la chambre du strontium 88. Calculer la valeur à donner à la tension U pour que les ions du strontium 88 soient collectés en C.
On donne : $R = 0{,}70$ m; $B = 0{,}16$ T;
masse d'un atome de strontium 88 : 87,6 u;
charge électrique élémentaire : $1{,}60 \times 10^{-19}$ C;
unité de masse atomique : $1\ u = 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg.

b) On place maintenant dans la chambre d'ionisation un mélange d'isotopes du strontium. Pour les recueillir successivement en C, il faut donner à U différentes valeurs comprises entre 13 930 V et 14 440 V.
Entre quelles valeurs se situent les nombres de masse de ces isotopes?

Cyclotrons

Exercice 19

On applique une tension accélératrice alternative $u = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$ aux deux dees d'un cyclotron de rayon $R = 0{,}80$ m. Le champ magnétique uniforme a pour valeur $B = 0{,}90$ T. Les particules accélérées sont des protons, de charge massique :

$$\alpha_1 = \frac{q}{m} = 9{,}58 \times 10^7\ C \cdot kg^{-1}.$$

1) Exprimer, en fonction de q et U_m, l'accroissement d'énergie cinétique à chaque passage d'un dee à l'autre. On admettra que, pendant la très courte phase d'accélération entre les dees, la tension appliquée reste pratiquement constante et égale à U_m. Faire l'application numérique.
Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de la particule à chaque tour?

2) Établir les expressions littérales de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique de la particule à sa sortie du cyclotron. Dépendent-elles de U_m?

3) Exprimer, en fonction de q, B, R et U_m, le nombre de tours accomplis dans le cyclotron par la particule.
Applications numériques : $U_m = 1$ kV; $U_m = 100$ kV (valables pour tout l'exercice).

4) Quelles sont la vitesse angulaire des protons dans le cyclotron, et la pulsation ω de la tension appliquée aux dees?

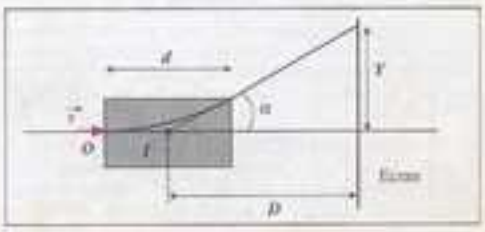
5) Pendant combien de temps les protons sont-ils accélérés dans le cyclotron?

6) Quelle distance le proton parcourt-il dans les dees avant de sortir?

Déflexion magnétique

Exercice 20

Un pinceau homocinétique d'électrons pénètre en O à la vitesse $\vec{v}$ dans une région (en grisé sur la figure) où règne un champ magnétique uniforme, de vecteur $\vec{B}$ orthogonal à $\vec{v}$, qui est nul à l'extérieur de la région grisée.



2. EXERCICES PROPOSES

Pour les applications numériques :

$v = 10^7\ \text{m.s}^{-1}$ $d = 2$ cm $D = 20$ cm $Y = 2{,}5$ cm.

1) Le pinceau est dévié vers le haut. Quel est le sens du vecteur champ $\vec{B}$?

2) Quel est, exprimé en fonction de la charge massique $q_* = \frac{q}{m}$, de v et de B, le rayon de courbure R de la trajectoire?

3) A sa sortie du champ, le pinceau semble provenir d'un point I très proche de la région centrale d'influence du champ. Le champ magnétique s'exerce sur un trajet de longueur très voisine de d.
Exprimer l'angle α de déflexion en fonction de d, q_*, B et v.

4) On observe une distance de déflexion $Y = 2{,}5$ cm. Que vaut le champ magnétique?

EXERCICES D'APRES BACCALAUREATS

* Exercice 21

1) Des électrons sont émis par effet thermo-électronique. Entre le filament F et une plaque P, distants de ℓ, on applique une tension $V_P - V_F > 0$.

$\ell = 2$ cm, $V_P - V_F = 100$ V, $g = 10\ \text{m.s}^{-2}$,

$m_e = 9 \times 10^{-31}$ kg, $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

a) Montrer que le poids de l'électron est négligeable devant la force électrostatique qui s'exerce sur lui.

b) Quelle est la nature du mouvement de l'électron entre F et P? Déterminer sa vitesse $\vec{v}_0$ en P, ainsi que la durée du trajet FP. Les électrons sont émis sans vitesse initiale.

2) On veut vérifier la valeur de la vitesse $\vec{v}_0$. On utilise l'ensemble FP comme canon à électrons, que l'on place dans une ampoule contenant un gaz raréfié. Cette ampoule est placée entre deux bobines de Helmholtz qui créent un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme perpendiculaire à $\vec{v}_0$. On observe un cercle de rayon R = 2,7 cm. On donne : $B = 1{,}25 \times 10^{-3}$ T.

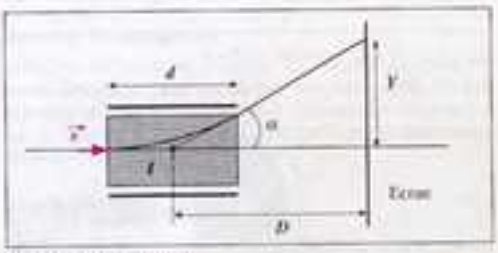
a) Quelle est la force $\vec{f}$ responsable de ce mouvement? Donner les caractéristiques de cette force. Faire un schéma clair sur lequel on placera $\vec{v}_0$, $\vec{B}$, $\vec{f}$ et la trajectoire.

b) Calculer v_0 et la période T du mouvement d'un électron. Cette période dépend-elle de $\vec{v}_0$?



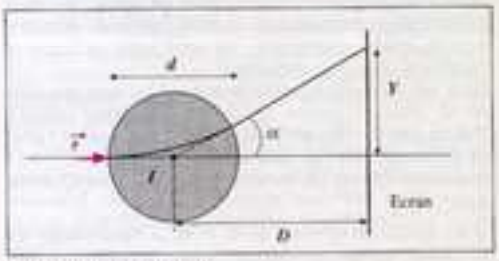
Exercice 22

Un pinceau de particules chargées pénètre horizontalement, à la vitesse $\vec{v}_0$, dans une région de l'espace où l'on peut créer soit un champ électrique $\vec{E}$, soit un champ magnétique $\vec{B}$, soit les deux simultanément. Ce dispositif donne le principe du spectrographe de Thomson (1856-1940).



Déflexion électrique :
Le champ électrique est créé par un condensateur horizontal :

$d = 4$ cm $\quad D = 25$ cm $\quad Y = 2{,}5$ cm



Déflexion magnétique :
Le champ magnétique est obtenu par un dispositif de Helmholtz. Une seule bobine est représentée.

$d = 4$ cm $\quad D = 25$ cm $\quad Y = 2{,}5$ cm

On se place dans les cas où les déflexions électrique et magnétique restent faibles.

1) L'armature supérieure du condensateur étant à un potentiel supérieur à celui de l'armature inférieure, on constate que les particules sont déviées vers le haut. Quel est le signe de leur charge?
On désire que les particules soient déviées aussi vers le haut par un champ magnétique de vecteur $\vec{B}$ horizontal. Quel doit être son sens? Préciser le sens du courant que l'on fera passer dans les bobines de Helmholtz.

2) Établir que les deux trajectoires sont planes et préciser leurs natures. Exprimer les angles de déflexion α_E et α_B en fonction de d, $|q|$, m, v et E ou B. A quelle condition sur E et B les deux angles de déflexion sont-ils égaux?

2. EXERCICES PROPOSES

3) Les données géométriques fournies aux figures précédentes sont obtenues dans le cas où les champs électrique et magnétique valent respectivement :

$E = 17\,600\ V.m^{-1}$ et $B = 5{,}00 \times 10^{-4}\ T$.

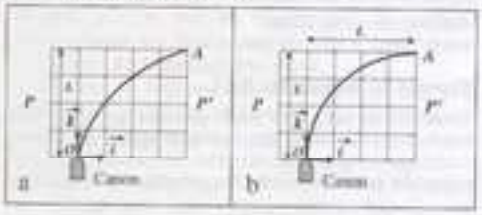
Comment peut-on déterminer ces valeurs expérimentalement? Quelle précaution convient-il de prendre afin que le champ géomagnétique n'intervienne pas?

En déduire la vitesse des particules et leur charge massique. Quelles sont, probablement, ces particules?

Exercice 23

Dans tout l'exercice, le poids des électrons sera négligé devant les autres forces mises en jeu. Le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct.

Dans un tube où règne le vide, on dispose un canon émettant en un point O un pinceau homocinétique d'électrons de vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$. Pour visualiser la trajectoire des particules, un écran fluorescent est placé dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$.



1) A l'intérieur de deux plaques planes P et P', de longueur L, parallèles au plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$, on crée un champ électrique $\vec{E}$ uniforme tel que la trajectoire des électrons, donnée en vraie grandeur figure a, passe exactement par le point A de coordonnées $(L, 0, L)$.

a) Préciser la direction et le sens du vecteur-champ électrique.

b) En prenant pour origine des dates celle de l'émission d'un électron en O, établir les équations paramétriques du mouvement entre O et A.

c) Établir la relation donnant la charge massique $\frac{e}{m}$ de l'électron en fonction de v_0, E, L.

2) Dans une deuxième expérience, on remplace le champ électrique par un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme tel que la trajectoire des électrons émis à la vitesse $\vec{v}_0$ soit un quart de cercle dans le plan de l'écran (fig. b).

a) Préciser le sens de $\vec{B}$.

b) Montrer que la valeur de la vitesse reste constante.

c) Établir la relation donnant la charge massique de l'électron en fonction de v_0, B et L.

3) A l'aide des deux expériences précédentes, déterminer la vitesse v_0 d'émission des électrons, ainsi que leur charge massique.

Application numérique : $L = 4$ cm; $E = 4 \times 10^4\ V.m^{-1}$; $B = 1{,}59 \times 10^{-3}\ T$.

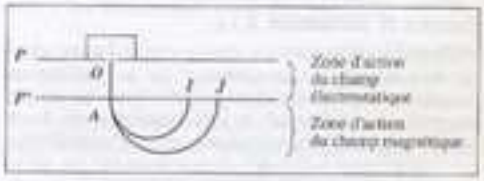
Exercice 24

L'uranium naturel contient essentiellement deux isotopes : l'uranium 235 et l'uranium 238.

L'un des procédés historiques pour séparer ces isotopes, est fondé sur la différence entre les rayons de courbure des trajectoires des atomes ionisés en mouvement dans un champ magnétique uniforme.

D'abord, les atomes neutres sont injectés dans une source d'ions où ils perdent chacun un électron. Les ions ainsi formés portent donc chacun la même charge électrique $q = +e$. Ils sortent de la source d'ions avec une vitesse négligeable, puis ils sont accélérés de O à A par la tension $U_0 = V_P - V_{P'}$ appliquée entre les deux plaques P et P'.

Les ions pénètrent alors en A avec une vitesse de direction perpendiculaire à P' dans une région où règne un champ magnétique uniforme, indépendant du temps, de vecteur $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de figure.



On donne : $B = 0{,}1$ T; $U_0 = 4\,000$ V;
charge électrique élémentaire : $1{,}60 \times 10^{-19}$ C;
unité de masse atomique : $1\ u = 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg;
masse de l'ion uranium 235 : $m_1 = 235$ u;
masse de l'ion uranium 238 : $m_2 = 238$ u.

1) Montrer que l'énergie cinétique est la même pour tous les ions arrivant en A, quel que soit l'isotope ionisé; en déduire que les vitesses acquises par les deux espèces d'ions sont différentes; exprimer les valeurs v_1 et v_2 de leurs vitesses en fonction de la charge, de la masse de l'ion correspondant, et de la tension accélératrice.

2) Au-delà de A, les ions décrivent des trajectoires circulaires dans le plan de figure.

Préciser sur un schéma le sens de $\vec{E}$ (champ électrostatique entre P et P') et de $\vec{B}$ (champ magnétique) pour que les ions puissent parvenir en I et J.

Exprimer littéralement R_1 et R_2 en fonction de la charge, la masse de l'ion correspondant, la tension accélératrice et la valeur du champ magnétique.

Exprimer littéralement la distance entre les deux traces I et J, puis calculer numériquement cette distance. On précisera quel est l'ion qui correspond à chacune des traces.

3) Le courant d'ions issu de la source correspond à une intensité de 10 µA, sachant que l'uranium naturel contient, en nombre d'atomes, 0,7 ‰ d'isotope léger, quelle est, en µg, la masse de cet isotope recueillie en 24 h?

LE CHAMP GÉOMAGNÉTIQUE

1. Rappel de données géographiques

L'axe de rotation de la Terre sur elle-même passe par les pôles géographiques Nord (N_g) et Sud (S) (fig. 38).

Le lecteur qui éprouverait quelques difficultés à voir cette figure dans l'espace aurait intérêt à prendre une vieille balle de tennis ou de ping-pong, à la faire traverser par une aiguille SN_g qui matérialiserait l'axe de rotation. Marquer sur la balle un point L, dessiner le grand cercle passant par L, N_g et S : il représente le **méridien géographique** du lieu L. Marquer le point N_m, figurant le Nord magnétique, à côté de N_g et, diamétralement opposé, le point S_m, figurant le sud magnétique (non représenté sur la figure). Dessiner sur la balle le grand cercle passant par N_m, L et S_m : il représente le **méridien magnétique** du lieu L, dont seule la partie N_mL est dessinée sur la figure. Enfin, piquant en L une épingle pointant vers le centre de la balle, on obtient l'image de la **verticale** du lieu. L'angle désigné par λ sur la figure est la **latitude géographique** du lieu, comptée de 0 à 90° pour les points de l'hémisphère nord.

La figure 39 reprend des données locales : la verticale CL y est redressée; les deux plans verticaux passant par L et contenant les nord géographique et magnétique sont les plans méridiens géographique et magnétique. L'angle D, formé par ces deux plans est appelé **déclinaison magnétique.**



Fig. 38

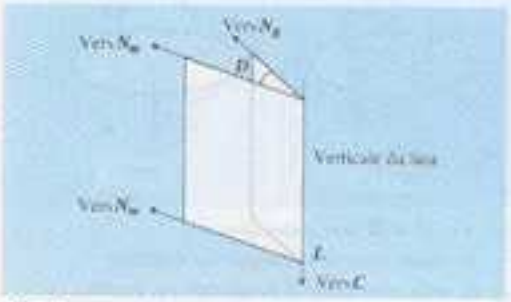


Fig. 39

2. Lignes de champ magnétique terrestre

Une aiguille magnétique, suspendue dans un étrier attaché à un fil sans torsion par un axe qui passe par son centre de gravité, s'oriente dans le plan méridien magnétique, mais **non horizontalement.** Elle forme avec l'horizontale un écart angulaire I appelé **inclinaison magnétique** (fig. 40).

Les lignes de champ géomagnétique ne sont donc pas horizontales.

La déclinaison et l'inclinaison magnétiques dépendent de l'endroit où l'on se trouve sur la Terre, et varient légèrement au cours du temps. En France, $D \approx 5°$ vers l'ouest et $I \approx 65°$ (en 1988).

La figure 41 montre un aspect global des lignes du champ géomagnétique, qui est susceptible de nombreuses variations locales. Il est à remarquer que ce que l'on appelle pôle nord magnétique est en fait une extrémité magnétique sud, qui attire les extrémités nord des aiguilles.

Sur cette figure sont représentés l'**équateur magnétique** et la **latitude magnétique** du lieu L. L'aimant droit équivalent aurait son extrémité nord au pôle magnétique Sud. Cet aimant droit est fictif. L'origine du géomagnétisme réside dans les roches qui se seraient solidifiées en figeant leurs ampériens orientés sous l'influence du magnétisme solaire ou, selon d'autres théories, résiderait dans les courants existant dans le noyau central terrestre conducteur à l'état fondu.

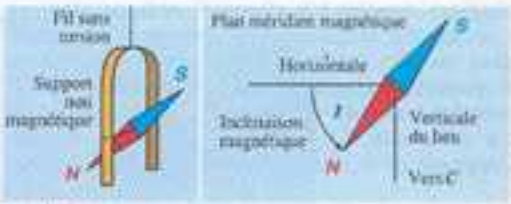


Fig. 40

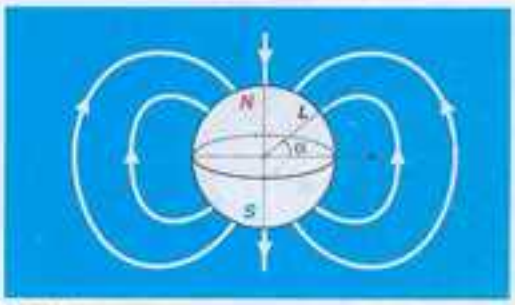


Fig. 41

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

Intensité d'un courant

La masse volumique du cuivre est $\rho = 8\,920\ kg.m^{-3}$. Sa masse molaire vaut $M(Cu) = 0{,}063\,6\ kg.mol^{-1}$.

1) Combien y a-t-il d'atomes de cuivre dans un fil de longueur $\ell = 0{,}50$ m et de section $s = 1{,}00\ mm^2$?

2) Si l'on suppose que chaque atome de cuivre libère un électron de conduction, quelle est la vitesse moyenne d'entraînement des électrons, si le fil est parcouru par un courant d'intensité $I = 1$ A?

3) Combien de temps faut-il, en moyenne, à un électron pour parcourir les 50 cm de fil, dans les conditions précédentes?

4) Comparer la vitesse d'entraînement des électrons à leur vitesse d'agitation thermique, qui est de l'ordre de $100\ km.s^{-1}$. Cette vitesse thermique est-elle négligeable vis-à-vis de la précédente? Comment justifier que l'on n'en tient pas compte?

La constante d'Avogrado vaut $N_a = 6{,}02 \times 10^{23}\ mol^{-1}$; $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

SOLUTION

1) Le volume du fil de cuivre est :

$$V = s.\ell = 5{,}00 \times 10^{-7}\ m^3$$

Sa masse est :

$$m = \rho.v = 5 \times 10^{-7} \times 8\,920 = 4{,}46 \times 10^{-3}\ kg$$

1 kg de cuivre renferme $\dfrac{1}{0{,}063\,6} = 15{,}7$ mol de cuivre.

La quantité de matière du fil considéré vaut donc : $4{,}46 \times 10^{-3} \times 15{,}7 = 7{,}01 \times 10^{-2}$ mol d'atomes de cuivre.

Il y a donc :

$N = 7{,}01 \times 10^{-2} \times 6{,}02 \times 10^{23} = \mathbf{4{,}22 \times 10^{22}}$ **atomes de cuivre** dans le fil.

2) Chaque atome libérant un électron de conduction, il y en a $N = 4{,}22 \times 10^{22}$ dans $V = 5 \times 10^{-7}\ m^3$, soit $N_v = \dfrac{4{,}22 \times 10^{22}}{5 \times 10^{-7}} = 8{,}45 \times 10^{28}$ par m^3.

La vitesse :

$$v = \frac{I}{N_v.s.e} = \frac{1}{8{,}45 \times 10^{28} \times 10^{-6} \times 1{,}60 \times 10^{-19}}$$

$$= \mathbf{7{,}4 \times 10^{-5}\ m.s^{-1}}.$$

Cette vitesse est très faible.

3) Pour parcourir la distance $\ell = v.t$ à la vitesse précédente, les électrons mettent environ :

$$t = \frac{\ell}{v} = \frac{0{,}5}{7{,}4 \times 10^{-5}} = 6{,}8 \times 10^3\ s,$$

soit **près de deux heures!**

4) La vitesse d'agitation thermique est loin d'être négligeable vis-à-vis de la vitesse globale d'entraînement, puisqu'elle est environ mille millions de fois plus grande qu'elle! Cependant, cette vitesse d'agitation est statistiquement nulle et elle ne contribue pas à la conduction.

Qualitativement, on peut retenir qu'un nombre énorme d'électrons, avançant globalement très lentement en portant chacun une toute petite charge, réussissent à faire passer 1 A dans le fil.

Remarque :
Cette lente vitesse de progression des électrons ne doit pas être confondue avec la célérité du signal, égale à celle de la lumière, qui donne l'ordre aux électrons de se mettre en mouvement dans le fil.

EXERCICE 2

Force de Laplace

Une fine tige cylindrique LM, de poids $P = 10$ mN, parcourue de L vers M par un courant d'intensité $I = 10$ A, repose sur deux rails initialement horizontaux. Un aimant en U crée un champ uniforme de valeur $B = 40$ mT qui s'exerce sur une longueur $\ell = 5$ cm de tige.

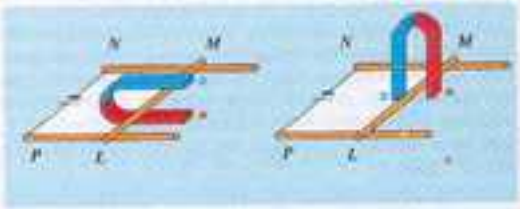
1) L'aimant est disposé comme l'indique la première figure ci-dessous (branche nord en dessous).

a) Préciser les caractéristiques de la force de Laplace, supposée appliquée au milieu de LM, agissant sur la tige. Quelle serait l'accélération initiale de la tige en l'absence de frottements?

b) De quel angle α par rapport à l'horizontal faut-il incliner les deux rails Pt et NM pour que la tige LM reste immobile :

- quand les branches de l'aimant restent horizontales?
- quand elles restent parallèles aux rails?

2) Que se produit-il si l'on adopte la disposition indiquée par la seconde figure?



SOLUTION

1) *a)* Le champ $\vec{B}$ est vertical vers le haut (il sort des régions N). Le courant va de L vers M.

Selon les règles d'orientation du produit vectoriel, la force $\vec{F} = I.\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ est donc horizontale et pointe vers la droite. Elle a pour valeur :

$$F = 10 \times 0{,}05 \times 0{,}04 = 0{,}02\ N = \mathbf{20\ mN}.$$

Cette valeur étant double de celle du poids, l'accélération horizontale de la tige aurait pour valeur $\boldsymbol{a = 2g}$ en l'absence de frottements.

b) • Si les branches de l'aimant restent horizontales, le champ magnétique est vertical vers le haut et la force de Laplace est encore horizontale vers la droite. La tige reste en équilibre si l'action $\vec{R}$ qu'elle subit de la part des rails est orthogonale aux rails (pas de frottements). La première figure ci-dessous représente la situation vue en coupe ($\vec{\ell}$ pointe vers l'arrière de la figure).

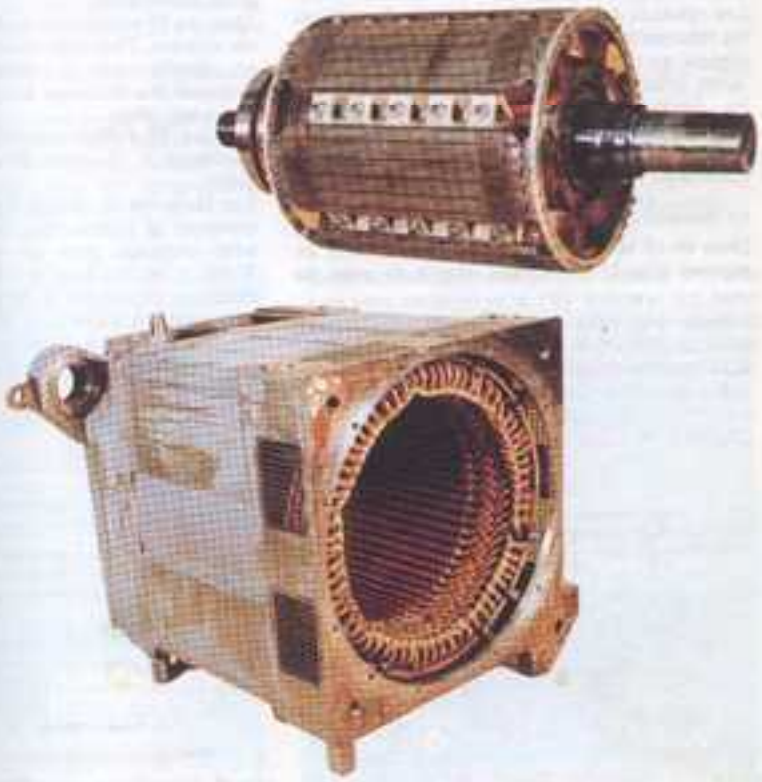
7 Action d'un champ magnétique sur un courant

1 Action d'un champ magnétique sur un élément de circuit.

2 Actions magnétiques sur un circuit entier.

3 Flux magnétique.

4 Applications.



Moteur électrique à courant continu du T.G.V. Atlantique.

Par son action sur les charges mobiles d'un circuit électrique, un champ magnétique est capable d'engendrer des déplacements de conducteurs. Cela mène à de nombreuses applications pratiques, telles que les moteurs, les haut-parleurs et certains appareils de mesures électriques.

1 ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UN ÉLÉMENT DE CIRCUIT

1. Conduction électrique dans un métal

a) *Électrons libres à l'intérieur d'un métal*

Tous les métaux sont conducteurs de l'électricité, ainsi que de la chaleur. Un métal est constitué d'ions positifs fixes disposés d'une manière régulière en réseau, et d'électrons de valence quasi-libres (fig. 1).

En réalité, l'immobilité des ions n'est que statistique : ils sont animés dans le métal d'incessants mouvements désordonnés d'agitation thermique (fig. 2).

Les rebonds des électrons se font au hasard sur les nuages électroniques des ions qui, eux, vibrent en restant pratiquement sur place.

Si un champ électrique est créé dans le métal, les électrons prennent un mouvement d'ensemble ordonné qui se superpose au mouvement d'agitation thermique : c'est le courant électrique.

b) *Intensité d'un courant*

Dans un fil conducteur, **le sens conventionnel du courant** (fig. 3) **est le sens inverse de celui du mouvement d'ensemble des électrons.** Le mouvement d'ensemble des électrons, négatifs, équivaut à un mouvement, dans le sens conventionnel, de charges positives.

L'intensité I, d'un courant électrique continu, représente la quantité d'électricité Q, qui traverse en une seconde, la section du circuit parcouru :

$$I = \frac{Q}{t}.$$

L'unité du SI d'intensité est le coulomb par seconde appelé ampère (A).

Le courant est dit **continu** si son intensité demeure constante au cours du temps. Lorsque le courant n'est pas continu, il faut considérer des intervalles de temps dt très courts pendant lesquels l'intensité ne varie pratiquement pas. Si dq désigne la quantité d'électricité qui parcourt le circuit pendant la durée dt, **l'intensité instantanée** i, est définie par :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Quels que soient les appareils mis en série dans un circuit, **l'intensité est la même en tout point d'un circuit-série.**

Dans un fil conducteur cylindrique parcouru par un courant, l'intensité étant partout la même, il en résulte que le mouvement d'ensemble ordonné des électrons est uniforme (voir Pour en savoir plus).

Soit un fil cylindrique (fig. 4) de section s, contenant N_1 électrons libres par mètre cube de métal.

Les électrons de vitesse d'ensemble $\vec{v}$, qui vont traverser la section dans la seconde qui vient, sont contenus dans un cylindre de volume $V = s \cdot v$, où il y en a $N = N_1 \cdot V = N_1 \cdot s \cdot v$. Ces électrons équivalent à N particules de charge élémentaire positive e, se déplaçant dans le sens conventionnel. La charge qui traverse la section du fil à chaque seconde, c'est-à-dire l'intensité, vaut donc :

$$I = N \cdot e = N_1 \cdot s \cdot v \cdot e.$$



Fig. 1. ***Image statique d'un conducteur métallique.*** *Des ions positifs fixes baignent dans « une mer » d'électrons libres.*

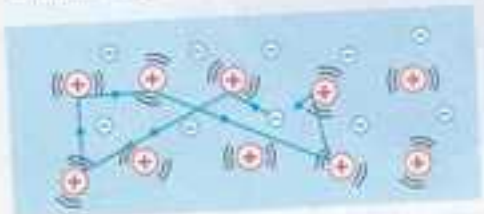


Fig. 2

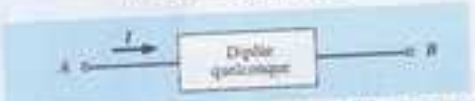


Fig. 3. ***Indication du sens conventionnel d'un courant.*** *La flèche, placée à côté du conducteur, indique par convention le sens connu du courant.*



Fig. 4. ***Interprétation de l'intensité dans un fil conducteur.***

2. Loi de Laplace

a) Champ magnétique agissant sur des électrons dans le vide ou dans un fil métallique

• *Expériences*

Un pinceau d'électrons subit une déviation sous l'influence d'un champ magnétique (fig. 5 *a*). Chaque électron subit l'action de la force magnétique $\vec{f} = q\,.\,\vec{v} \wedge \vec{B} = -e\,.\,\vec{v} \wedge \vec{B}$.

La trajectoire est circulaire si le champ est uniforme.

De même, un fil métallique mobile parcouru par un courant électrique se déplace sous l'influence d'un champ magnétique (fig. 5 *b*).

• *Interprétation.* Les deux expériences précédentes sont analogues : dans les deux cas, les particules mobiles sont des électrons en mouvement initialement vertical vers le bas.

Mais la seconde expérience apporte une information supplémentaire : la **force magnétique s'exerce sur la matière,** et pas seulement sur les électrons.

Pourtant, les ions positifs fixes du réseau cristallin ne subissent aucune force magnétique puisqu'ils restent (statistiquement) immobiles. Quelle est donc l'origine de cette force agissant sur la matière?

Les N électrons de la portion du fil subissent une force magnétique totale $\vec{F} = \Sigma \vec{f}$ qui les déplace vers la droite dans le cas étudié.

Par suite, les ions positifs sont attirés par les électrons déplacés, et toute la matière suit. Ainsi, la force magnétique est intégralement transmise au conducteur.

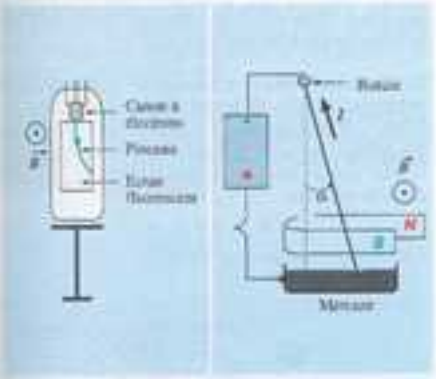


Fig. 5 *a.* ***Action d'un champ magnétique sur un pinceau d'électrons.***

Fig. 5 *b.* ***Action d'un champ magnétique sur un courant dans un fil conducteur.***

Dans les deux montages, compte tenu des sens de $\vec{B}$, des électrons et du courant, la déviation est vers la droite.

b) Expression macroscopique de la force magnétique

Il est possible d'obtenir une expression macroscopique traduisant l'effet global du champ magnétique sur le fil conducteur.

La figure 6 représente un fil vertical parcouru par un courant ascendant d'intensité I. La région bleutée du fil, de longueur ℓ et de section s, est une portion de fil qui baigne dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ pointant vers l'œil du lecteur.

Désignant toujours par N_1 le nombre de particules libres par unité de volume, la partie ombrée du fil, de volume $V = \ell\,.\,s$, en contient :

$$N = N_1\,.\,V, \quad \text{soit :} \quad N = N_1\,.\,\ell\,.\,s.$$

Chaque particule est soumise à la force magnétique $\vec{f} = q\,.\,\vec{v} \wedge \vec{B}$. Le vecteur $q\,.\,\vec{v}$ pointe vers le haut, que les particules envisagées soient des électrons ($q = -e$) de vitesse $\vec{v}$ vers le bas ou des particules positives ($q = e$) de vitesse opposée vers le haut. D'après les propriétés du produit vectoriel, la force magnétique $\vec{f}$ pointe ici vers la droite.

La force totale subie par les particules est :

$$\vec{F} = N\,.\,\vec{f}, \quad \text{soit :} \quad \vec{F} = N_1\,.\,\ell\,.\,s\,.\,q\,.\,\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

La première composante $N_1\,.\,\ell\,.\,s\,.\,q\,.\,\vec{v}$, du produit vectoriel précédent, contient l'expression établie plus haut pour l'intensité :

$$I = N_1\,.\,s\,.\,v\,.\,q.$$

Cette composante a donc pour valeur $I\,.\,\ell$. Son caractère vectoriel peut être conservé en orientant le conducteur dans le sens conventionnel du courant. Le produit $I\,.\,\vec{\ell}$ définit alors un vecteur dont le sens est celui du courant.

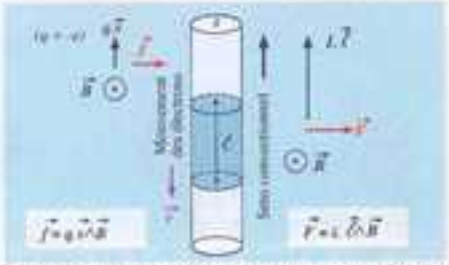


Fig. 6. ***Passage de l'échelle atomique à l'échelle macroscopique.***

L'expression de la force magnétique $\vec{F}$ agissant sur la portion de fil conducteur de longueur ℓ parcouru par un courant d'intensité I est donc :

$$\vec{F} = I . \vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

Dans les applications numériques :

F est en newton (N);
I en ampère (A);
ℓ en mètre (m);
B en tesla (T).

Elle est appelée **force de Laplace.** Il s'agit d'une force répartie qui a le même effet que si elle s'appliquait au milieu de la portion de conducteur baignant dans le champ uniforme.

c) *Caractéristiques de la force de Laplace*

En tant que produit vectoriel, la force de Laplace agissant sur un brin rectiligne de fil, possède les caractéristiques suivantes :

- sa *direction* est orthogonale au plan défini par le fil et le vecteur-champ $\vec{B}$;
- son *sens* est tel que le trièdre défini par les vecteurs $I . \vec{\ell}$, $\vec{B}$, $\vec{F}$ soit direct. ($\vec{\ell}$ est orienté dans le sens du courant);
- sa *valeur* est : $F = I . \ell . B . \sin \alpha$,

α désignant l'angle (inférieur à π) formé par le fil et le vecteur-champ magnétique.

En particulier, la force de Laplace est nulle si $I . \vec{\ell}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires ($\alpha = 0$).

La figure 7 résume quelques cas. Le plan dessiné est déterminé par $I . \vec{\ell}$ et $\vec{B}$. Quand elle existe, la force de Laplace lui est orthogonale.

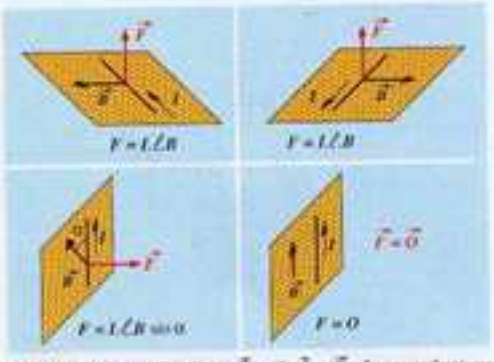


Fig. 7. ***Force de Laplace*** $\vec{F} = I . \vec{\ell} \wedge \vec{B}$. *Le conducteur est orienté dans le sens du courant. Le trièdre* $I . \vec{\ell}$, $\vec{B}$, $\vec{F}$ *est direct.*

d) *Applications*

— *Moteur linéaire*

Une tige conductrice cylindrique est posée sur deux rails conducteurs horizontaux. Un générateur entretient le passage d'un courant continu dans le circuit. Un champ magnétique vertical est appliqué sur tout ou partie de la tige mobile.

La force de Laplace $\vec{F}$, la met en mouvement (fig. 8).

La longueur du circuit qui intervient dans la formule de Laplace est celle de la portion de tige soumise au champ magnétique.

— *Balance de Cotton*

La balance de Cotton (fig. 9) est un appareil destiné à mesurer des champs magnétiques relativement intenses, ou à comparer deux champs entre eux. Elle n'est pratiquement plus utilisée maintenant, mais son principe est simple.

L'un des fléaux (OA) de la balance supporte un plateau. L'autre fléau est entouré d'un ruban plat conducteur $OLMNPO$ appliqué sur un support léger (non représenté sur la figure). Les portions LM et NP sont des arcs de cercles centrés sur l'axe O de rotation de la balance.

Un courant d'intensité I, réglable par rhéostat, parcourt le ruban. Son sens est choisi pour que le brin $MN = \ell$ subisse, sous l'influence du champ magnétique à mesurer, une force de Laplace $\vec{F}$, verticale vers le bas.

Tandis que sur les arcs de cercle toutes les lignes d'action des forces de Laplace élémentaires (telles que $d\vec{f}$ et $d\vec{f}'$), de sens opposés, passent par l'axe O de rotation : elles ne contribuent pas à faire tourner la balance.

Les constructeurs s'arrangent habituellement pour que les bras de levier soient égaux : $D = D'$. Dans ces conditions, l'équilibre de la balance est obtenu lorsque la force de Laplace a même valeur que le poids des masselottes m ajoutées dans le plateau :

$$I . \ell . B = m . g,$$

d'où résulte la mesure de B.



Fig. 8. ***Réalisation pratique d'un moteur linéaire.*** *Le champ magnétique ne baigne pas le circuit entier.*

2 ACTIONS MAGNÉTIQUES SUR UN CIRCUIT ENTIER

1. Circuit dans un champ magnétique uniforme

a) Étude théorique

Un circuit fermé plan de forme quelconque, parcouru par un courant, est constitué d'une succession de brins rectilignes.
Il baigne dans un champ magnétique uniforme orthogonal à son plan (fig. 10).
Chaque brin du circuit, de longueur $d\ell$, orienté dans le sens du courant, subit l'action d'une force de Laplace :

$$d\vec{f} = I\,.\,d\vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

La somme vectorielle de toutes ces forces élémentaires est :

$$\Sigma d\vec{f} = \Sigma(I\,.\,d\vec{\ell} \wedge \vec{B}).$$

Dans cette somme, tous les termes ont en commun I et $\vec{B}$. Elle s'écrit donc :

$$\Sigma d\vec{f} = I\,.(\Sigma d\vec{\ell}) \wedge \vec{B}.$$

Mais, le circuit étant fermé, la somme vectorielle $\Sigma d\vec{\ell}$ est nulle. Les forces de Laplace agissant sur le circuit fermé ont donc une somme vectorielle nulle : $\Sigma\vec{f} = \vec{0}$.

Plus généralement, la démonstration précédente reste valable pour un circuit fermé de forme quelconque, non nécessairement plan, placé dans un champ magnétique uniforme de direction quelconque. Ce circuit peut en effet encore être considéré comme une succession de petits brins rectilignes infinitésimaux $d\vec{\ell}$ et comme le circuit est fermé $\Sigma d\vec{\ell} = \vec{0}$.

Lorsqu'un circuit fermé parcouru par un courant continu est placé dans un champ magnétique uniforme, la somme vectorielle de toutes les forces de Laplace qu'il subit est nulle.

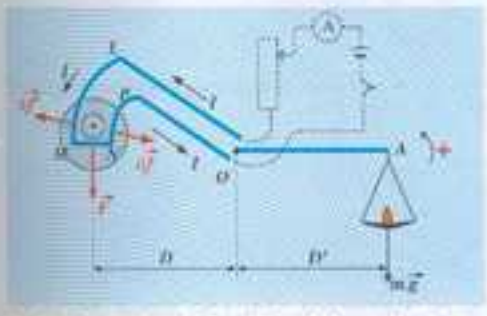


Fig. 9. Schéma de principe d'une balance de Cotton.

b) Exemples

• *Circuit rectangulaire vertical indéformable dans un champ uniforme horizontal* (fig. 11).
— Quand le champ magnétique $\vec{B}$ est orthogonal au plan du cadre, le cadre est soumis à quatre forces de Laplace deux à deux opposées et de même ligne d'action. Leurs effets s'annulent. Le cadre reste en équilibre (fig. 11 *a*).
— Lorsque le vecteur-champ magnétique $\vec{B}$ est parallèle au plan du cadre (fig. 11 *b*), aucune force ne s'exerce plus sur les brins horizontaux (I, $\vec{\ell}$ et $\vec{B}$ colinéaires). Les deux forces opposées $\vec{F}_1$ et $-\vec{F}_1$, appliquées aux brins verticaux, n'ont pas la même ligne d'action. Elles constituent un **couple** qui fait tourner le cadre.
Dans le cas où le champ magnétique horizontal n'est ni orthogonal, ni parallèle au plan du cadre, il peut être considéré comme constitué de deux composantes, l'une perpendiculaire au plan du cadre, qui ne provoque aucun effet et l'autre orthogonale au plan du cadre, qui le fait tourner.

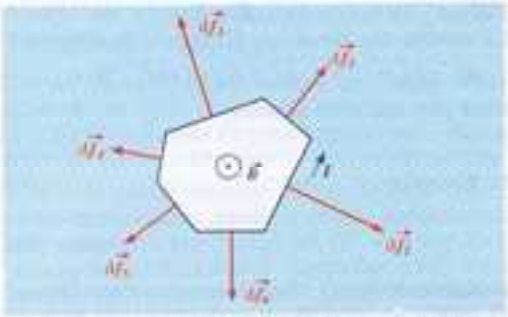


*Fig. 10. **Forces élémentaires de Laplace.** Un circuit de forme quelconque peut être considéré comme une succession de petits brins rectilignes.*

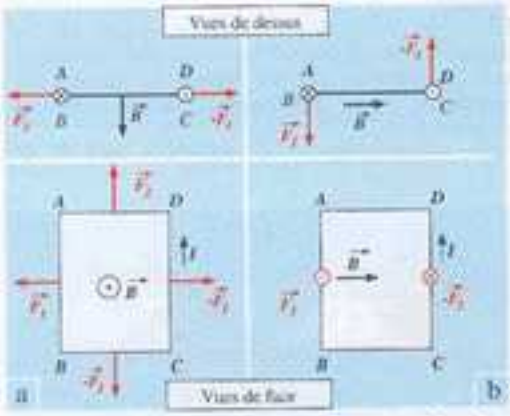


*Fig. 11. **Forces de Laplace agissant sur un cadre plan rectangulaire.***
a) Le cadre est en équilibre.
b) Le cadre va tourner sous l'action des deux forces.

2 ACTIONS MAGNÉTIQUES SUR UN CIRCUIT ENTIER

1. Circuit dans un champ magnétique uniforme

a) Étude théorique

Un circuit fermé plan de forme quelconque, parcouru par un courant, est constitué d'une succession de brins rectilignes.
Il baigne dans un champ magnétique uniforme orthogonal à son plan (fig. 10).
Chaque brin du circuit, de longueur $d\ell$, orienté dans le sens du courant, subit l'action d'une force de Laplace :

$$d\vec{f} = I.d\vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

La somme vectorielle de toutes ces forces élémentaires est :

$$\Sigma d\vec{f} = \Sigma (I.d\vec{\ell} \wedge \vec{B}).$$

Dans cette somme, tous les termes ont en commun I et $\vec{B}$. Elle s'écrit donc :

$$\Sigma d\vec{f} = I.(\Sigma d\vec{\ell}) \wedge \vec{B}.$$

Mais, le circuit étant fermé, la somme vectorielle $\Sigma d\vec{\ell}$ est nulle. Les forces de Laplace agissant sur le circuit fermé ont donc une somme vectorielle nulle : $\Sigma\vec{f} = \vec{0}$.

Plus généralement, la démonstration précédente reste valable pour un circuit fermé de forme quelconque, non nécessairement plan, placé dans un champ magnétique uniforme de direction quelconque. Ce circuit peut en effet encore être considéré comme une succession de petits brins rectilignes infinitésimaux $d\vec{\ell}$ et comme le circuit est fermé $\Sigma d\vec{\ell} = \vec{0}$.

Lorsqu'un circuit fermé parcouru par un courant continu est placé dans un champ magnétique uniforme, la somme vectorielle de toutes les forces de Laplace qu'il subit est nulle.



Fig. 9. *Schéma de principe d'une balance de Cotton.*

b) Exemples

• *Circuit rectangulaire vertical indéformable dans un champ uniforme horizontal* (fig. 11).
— Quand le champ magnétique $\vec{B}$ est orthogonal au plan du cadre, le cadre est soumis à quatre forces de Laplace deux à deux opposées et de même ligne d'action. Leurs effets s'annulent. Le cadre reste en équilibre (fig. 11 *a*).
— Lorsque le vecteur-champ magnétique $\vec{B}$ est parallèle au plan du cadre (fig. 11 *b*), aucune force ne s'exerce plus sur les brins horizontaux (I, $\vec{\ell}$ et $\vec{B}$ colinéaires). Les deux forces opposées $\vec{F}_1$ et $-\vec{F}_1$, appliquées aux brins verticaux, n'ont pas la même ligne d'action. Elles constituent un **couple** qui fait tourner le cadre.
Dans le cas où le champ magnétique horizontal n'est ni orthogonal, ni parallèle au plan du cadre, il peut être considéré comme constitué de deux composantes, l'une perpendiculaire au plan du cadre, qui ne provoque aucun effet et l'autre orthogonale au plan du cadre, qui le fait tourner.

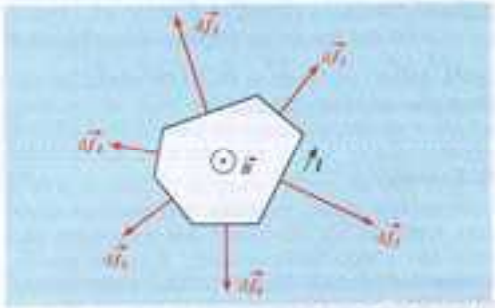


Fig. 10. ***Forces élémentaires de Laplace.*** *Un circuit de forme quelconque peut être considéré comme une succession de petits brins rectilignes.*

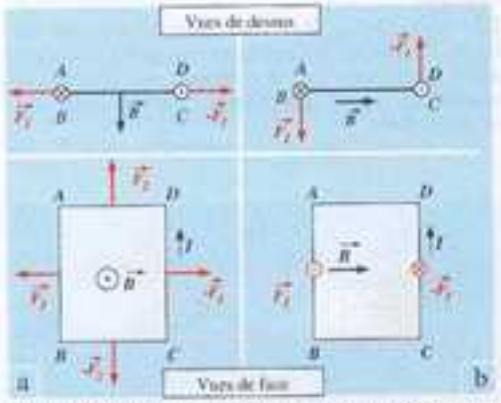


Fig. 11. ***Forces de Laplace agissant sur un cadre plan rectangulaire.***
a) Le cadre est en équilibre.
b) Le cadre va tourner sous l'action des deux forces.

• *Circuit rectangulaire déformable dans un champ magnétique uniforme vertical.*

Dans l'exemple du moteur linéaire, si maintenant le champ magnétique règne sur l'ensemble du circuit électrique, la somme des forces de Laplace est nulle. Seule, la force qui s'exerce sur la tige mobile est active, les autres n'ont aucun effet par suite des réactions du support et de la rigidité des circuits. Dans le cas indiqué, la force fait augmenter l'aire du circuit (fig. 12).

2. Circuit dans un champ magnétique quelconque

a) Étude théorique

Un circuit fermé de forme quelconque, peut toujours être considéré comme une succession de brins orientés $d\vec{\ell}_1$, $d\vec{\ell}_2$, ... chacun subissant la force élémentaire $d\vec{f}_i = I\,.\,d\vec{\ell}_i \wedge \vec{B}_i$. Dans le calcul de la somme des forces, le champ magnétique ne peut plus être mis en facteur car il n'est plus uniforme : $\vec{B}_1 \neq \vec{B}_2 \neq \ldots$

La somme des forces de Laplace élémentaires :

$$d\vec{f}_1 + d\vec{f}_2 + \ldots = I\,.\,d\vec{\ell}_1 \wedge \vec{B}_1 + I\,.\,d\vec{\ell}_2 \wedge \vec{B}_2 + \ldots$$

n'est plus nulle en général.

b) Exemple

Une bobine plate circulaire, comportant quelques tours de fils en cuivre, est suspendue par deux fils conducteurs souples. Elle est placée devant un aimant droit, source d'un champ magnétique non uniforme (fig. 13).

Si la bobine est parcourue par un courant, avec la disposition de l'aimant et le sens du courant indiqués sur la figure, elle vient s'embrocher sur l'aimant.

Elle s'est donc déplacée d'une région où les lignes de champ étaient écartées, pour se diriger vers la région où les lignes de champ se resserrent, donc des champs faibles vers les champs forts.

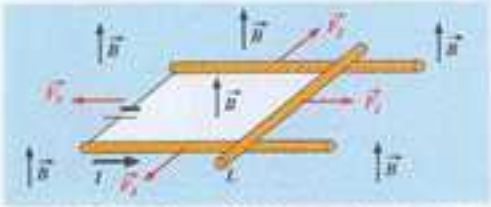


Fig. 12. *Circuit déformable dans un champ uniforme. La somme des forces est nulle. $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sont opposées. $\vec{F}_1$ déplace la tige LM et $\vec{F}_3$ est appliquée à une portion fixe du circuit.*

Ce résultat peut être retrouvé en remarquant que la bobine, assimilée à un solénoïde plat, présente à l'extrémité sud de l'aimant une face nord qui se trouve attirée.

Dans cette expérience, l'existence du mouvement de translation montre qu'**un circuit fermé parcouru par un courant, placé dans un champ magnétique non uniforme, subit l'action d'un ensemble de forces magnétiques dont la somme vectorielle n'est pas nulle.**

3 FLUX MAGNÉTIQUE

Lors des déplacements provoqués par des forces magnétiques, il peut se produire des **variations de l'aire** des circuits électriques (tige se déplaçant sur les rails, fig. 12), des **variations du champ magnétique** à travers les bobines (bobine s'embrochant sur un aimant, fig. 13), ou des modifications de l'orientation des **surfaces** dans les **champs** (rotation d'un cadre dans un champ uniforme, fig. 11 *b*).

Ces résultats peuvent être retrouvés en appliquant au circuit entier, une règle qui va être étudiée dans ce paragraphe.

1. Définition du flux magnétique

a) Vecteur-aire

Il est commode d'associer à un circuit fermé plan, un vecteur $\vec{S}$, de même valeur que son aire S et de même sens que le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à son plan (fig. 14) :

$$\vec{S} = S\,.\,\vec{n}.$$

La figure 15 donne une règle de la main droite qui permet de retrouver le sens du vecteur unitaire normal $\vec{n}$.

Il dépend du sens du courant dans le circuit.

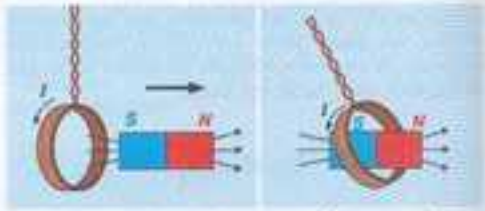


Fig. 13. *Action d'un champ magnétique non uniforme sur une bobine plate.*



Fig. 14. *Vecteur-aire. Son sens dépend de l'orientation choisie sur le conducteur.*

b) Flux magnétique

Si le champ magnétique est uniforme, par définition :

le flux Φ, du champ magnétique à travers un circuit est le produit scalaire du vecteur-champ $\vec{B}$ par le vecteur-aire $\vec{S}$.

L'unité du SI de flux magnétique est le weber (Wb).

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

Dans les applications numériques :

Φ s'exprime en weber (Wb);
B en tesla (T);
S en mètre carré (m^2).

• En tant que **produit scalaire**, le flux est une **grandeur algébrique** (fig. 16) :

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha,$$

où α désigne l'angle inférieur ou égal à π formé par $\vec{B}$ et $\vec{S}$.

• Le flux est maximal pour $\alpha = 0$. Dans ce cas $\vec{B}$ et $\vec{S}$ sont colinéaires et de même sens : $\Phi = B \cdot S$.

• Le flux est nul si $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas le champ $\vec{B}$ est parallèle au plan du circuit.

• Le flux est positif pour $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$ et négatif pour $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$.

Si une bobine traversée par un champ uniforme comporte N spires, le flux magnétique est :

$$\Phi = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S}.$$

Remarque :
Si le champ n'est pas uniforme à travers le circuit, il convient de décomposer la surface à travers laquelle le flux est calculé, en éléments d'aires dS suffisamment petits, pour que le champ puisse être considéré comme uniforme à travers chaque surface élémentaire. Le flux cherché est la somme de tous les flux élémentaires :

$$\Phi = \Sigma \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

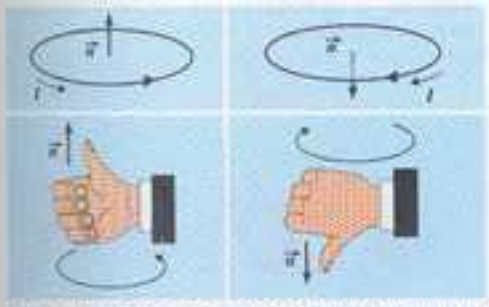


Fig. 15. Une règle de la main droite pour retrouver le sens du vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à une spire orientée.

2. Diverses circonstances de variations du flux

Les déplacements des conducteurs sous l'action des forces de Laplace étudiées précédemment s'accompagnent tous de **variations du flux magnétique** à travers les circuits. Il se produit en effet des variations d'aire (fig. 12), d'angle (fig. 11 *b*) ou de champ magnétique (fig. 13). Quand le sens du courant est connu, comme c'est le cas ici, **les circuits sont orientés dans le sens du courant.**

a) Variations de la valeur de l'aire

Le déplacement d'une tige sur rails horizontaux a été présenté à la figure 12. Le circuit entier est supposé baigner dans un champ magnétique uniforme orthogonal à son plan (fig. 17).

Sur la figure 17 *a*, le flux est positif car les vecteurs $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$ et $\vec{B}$ sont de même sens. La force de Laplace $\vec{F}$ tire la tige vers la droite. L'aire du circuit augmente. Ainsi, le flux augmente et sa variation $\Delta\Phi$ est positive.

Sur la figure 17 *b*, où le sens du champ a été inversé, le flux est négatif car les vecteurs $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$ et $\vec{B}$ sont de sens opposés ($\alpha = \pi$). La force de Laplace entraîne la tige vers la gauche. L'aire du circuit diminue. Ainsi, le flux négatif diminue en valeur absolue, donc, sa variation $\Delta\Phi$ est encore positive.

Le déplacement spontané de la tige s'effectue dans un sens tel que le flux magnétique à travers le circuit augmente.



Fig. 16. Flux magnétique. C'est une grandeur algébrique.

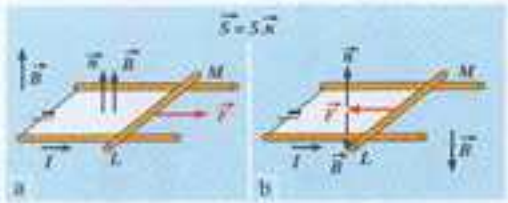


Fig. 17. Circuit déformable dans un champ uniforme. L'aire apparaît en blanc.
a) Flux positif croissant. b) Flux négatif décroissant en valeur absolue.
$\Delta\Phi > 0$ $\Delta\Phi > 0$

b) Variations de champ magnétique

La bobine parcourue par un courant qui vient « s'embrocher » sur l'aimant (fig. 13) se trouve, en position finale, dans une région où le champ est plus intense qu'au départ. L'aire de la bobine n'a pas varié. Le flux final, positif comme le flux initial dans ce cas, est devenu plus grand par suite de l'augmentation de la valeur B du champ.

c) Variations de l'angle α entre $\vec{B}$ et $\vec{S}$

Une bobine plate de N spires pouvant tourner autour d'un fil vertical de suspension (fig. 18), baigne dans un champ magnétique uniforme horizontal $\vec{B}$ engendré par des bobines de Helmholtz (non représentées).

Initialement, l'axe de la bobine est orthogonal au champ $\vec{B}$ (fig. 18 *a*). Le flux à travers chaque spire est alors nul $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$. Quand le courant est établi, la bobine tourne autour de la verticale.

Elle atteint, après quelques oscillations éventuelles, une position d'équilibre telle que son vecteur $\vec{S}$ soit parallèle au vecteur $\vec{B}$ ($\alpha = 0$) (fig. 18 *b*).

Le flux final est donc $\Phi = N.B.S$. Le même phénomène de rotation est observable en remplaçant la bobine par un solénoïde.

Ainsi, **la rotation spontanée d'un circuit dans un champ magnétique uniforme a lieu dans un sens tel que le flux magnétique à travers le circuit augmente.**

Remarque :
Le solénoïde s'oriente dans le champ magnétique comme le ferait un aimant droit. Les faces extrêmes du solénoïde peuvent être appelées l'une nord (celle d'où sort le vecteur unitaire $\vec{n}$ orienté en relation avec le sens du courant) et l'autre la face sud. Cela confirme l'**analogie entre les solénoïdes et les aimants droits.** Le solénoïde peut être considéré comme une juxtaposition de bobines plates et un aimant comme un ensemble de bobines équivalentes aux boucles microscopiques des courants ampériens.

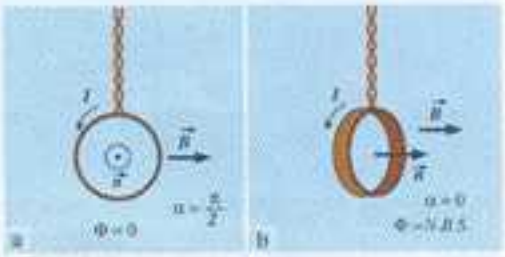


Fig. 18. ***Rotation d'une bobine plate dans un champ magnétique uniforme.***

3. Règle du flux maximal

a) Déplacements spontanés des circuits dans un champ magnétique

Les déplacements spontanés des circuits orientés dans le sens du courant s'effectuent de telle sorte que le flux magnétique à travers ces circuits augmente.
Cette évolution cesse lorsque le flux ne peut plus augmenter. En d'autres termes :

> La position d'équilibre stable finale d'un circuit parcouru par un courant placé dans un champ magnétique, est telle que le flux qui traverse le circuit soit maximal.

Cette règle, générale, est connue sous le nom de « **loi du flux maximal** ».
En pratique, des contraintes interviennent : zone d'intervention du champ d'étendue limitée, pesanteur, réactions d'axe...
Dans ces conditions, le circuit se déplace de telle sorte que le flux magnétique final qui le traverse prenne la valeur la plus grande possible compatible avec les contraintes du montage.
La position finale est une position d'équilibre stable.

b) Exemple

Une bobine plate circulaire suspendue verticalement est embrochée autour de la région centrale d'un aimant droit (fig. 19). Un courant est alors établi de telle sorte que le flux initial à travers la bobine soit négatif :

$$\alpha = \pi, \quad \Phi = -N.B.S.$$

La bobine est repoussée, sort de l'aimant ($B = 0$) et se retourne : le flux devient positif : $\alpha = 0$.
La bobine retournée revient s'embrocher autour de la région centrale de l'aimant où le flux magnétique positif qui la traverse est *maximal* :

$$\Phi = N.B.S.$$

La variation de flux au cours de cette opération est :

$$\Delta\Phi = (N.B.S) - (-N.B.S) = 2N.B.S.$$

L'analyse d'un tel mouvement par les forces de Laplace élémentaires, est nettement moins simple.

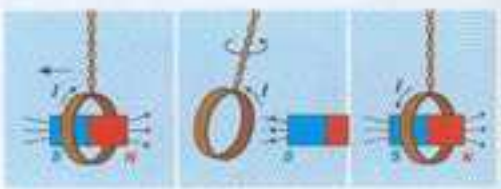


Fig. 19. ***Action d'un champ magnétique non uniforme sur une bobine plate.***

4 APPLICATIONS

Du fait de la mise en mouvement des circuits parcourus par les courants, les actions magnétiques sont riches d'applications pratiques.

1. Moteurs

a) *L'ancêtre*

La **roue de Barlow** (1822) est probablement le plus ancien des moteurs électriques rotatifs, mais sans doute le plus médiocre... (fig. 20). Un disque en cuivre, d'axe horizontal, trempe tout juste, à sa partie inférieure, dans un bain de mercure qui assure les contacts électriques sans empêcher la rotation du disque. Un aimant en U crée un champ magnétique perpendiculaire au disque dans la région radiale qui joint l'axe de rotation au bain de mercure. Quand le courant passe, les forces de Laplace, qui s'appliquent à la matière, font tourner la roue.

b) *Moteurs à courant continu*

La faible puissance de la roue de Barlow, vient de ce qu'une toute petite portion de la roue (pratiquement un rayon vertical) est sollicitée par les forces magnétiques. Les moteurs modernes ne présentent pas cet inconvénient.

• *Constitution*

La partie tournante, appelée **rotor**, d'un moteur est constituée de cadres rectangulaires en cuivre fixés autour d'un bâti cylindrique (fig. 21). Ils sont parcourus par un courant électrique continu.

Un champ magnétique est créé soit par un aimant pour les petits moteurs, soit par un électro-aimant pour les plus puissants.

Les pièces polaires sont cylindriques afin d'entourer le rotor et de créer un champ magnétique radial. Cette partie, immobile est le **stator**.

Ainsi, les fils du rotor subissent toujours des forces de Laplace tangentes au rotor, ce qui leur confère une efficacité rotative maximale.

Les figures 21 et 22 représentent schématiquement un moteur, en perspective et de profil, avec l'astucieux système de **collecteur** qui permet d'inverser le sens du courant dans les fils lors de la rotation.



Fig. 20 ***Roue de Barlow.***

• *Tension aux bornes*

En régime permanent, l'énergie électrique $U.q$ reçue par un moteur est convertie en chaleur $r.i^2.t = r.i.q$ et en énergie mécanique E_M. Par suite :

$$U.q = r.i.q + E_M,$$

ou :

$$U = r.i + \frac{E_M}{q}.$$

$E' = \frac{E_M}{q}$ est appelée **f.c.é.m.** du moteur.

La tension aux bornes d'un moteur s'exprime donc par :

$$U = r.i + E'.$$

Et l'énergie mécanique qu'il fournit est :

$$E_M = E'.i.t.$$

Si U est la tension aux bornes d'un moteur, et qu'il circule le courant i pendant la durée t :
— le moteur absorbe l'énergie électrique $U.i.t$;
— une partie $R.i^2.t$ est perdue sous forme de chaleur;
— le moteur restitue l'énergie mécanique $E'.i.t$ (voir Pour en savoir plus).

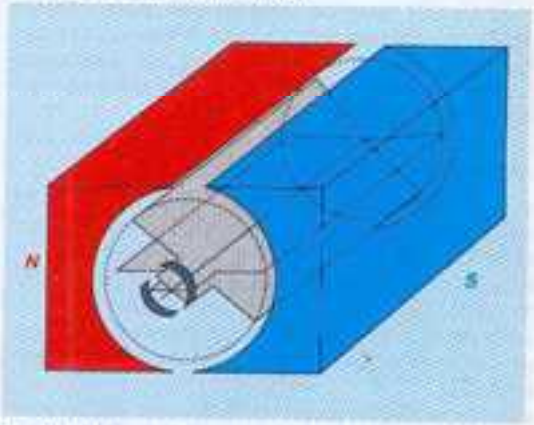


Fig. 21 ***Moteur à courant continu.***

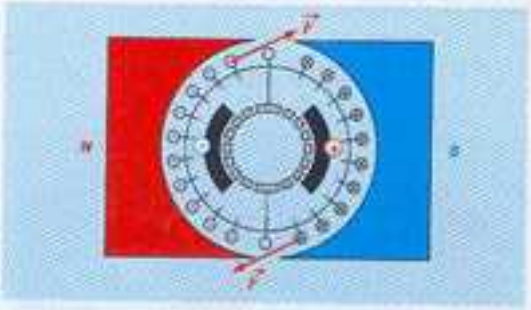


Fig. 22 ***Moteur vu de face.*** *Des balais reliés aux pôles + et − d'un générateur frottent sur le « collecteur ». Les diverses parties du collecteur sont reliées aux spires de telle sorte que le courant passe toujours dans le même sens quand elles sont à gauche, et dans l'autre sens à droite.*

Les moteurs électriques à courant continu sont très utilisés comme petits esclaves énergétiques : démarreur, essuie-glace, ventilateur de voiture... et pour la traction de grande puissance telles les motrices des T.G.V.

2. Appareils magnéto-électriques

a) Galvanomètre à cadre mobile

Un cadre rectangulaire sur lequel sont enroulées N spires de fil conducteur enduit d'un vernis isolant est placé dans un champ magnétique radial créé par un aimant permanent (fig. 23). Ce cadre est suspendu à un fil qui joue un triple rôle : soutenir le cadre, l'alimenter en courant à mesurer, servir de fil de torsion.

Lorsque le cadre tourne, le fil de suspension exerce un couple de rappel. L'angle de rotation à l'équilibre, est proportionnel à l'intensité du courant dans le fil.

Cet appareil, très sensible, permet de déceler de très faibles intensités, inférieures au nA (10^{-9} A), mais est d'une utilisation délicate.

b) Ampèremètres et voltmètres

• Les ampèremètres sont basés sur le même principe. Ils sont de construction plus robuste (le fil de torsion est remplacé par un ressort spiral). L'utilisation d'un shunt en dérivation permet d'adapter le calibre de l'appareil aux intensités à mesurer (fig. 24 *a*).

Ils sont montés en série dans les circuits afin de mesurer l'intensité qui les parcourt.

• Les ampèremètres sont transformés en voltmètres, en plaçant une forte résistance en série (fig. 24 *b*).

Ils sont montés en dérivation sur les dipôles dont on veut mesurer la tension aux bornes.

Leur résistance série, doit être grande sous peine de capturer le courant qui ne passerait plus dans le dipôle.

Ces appareils à cadre mobile sont maintenant remplacés par des ampèremètres ou des voltmètres **électroniques** moins fragiles, plus performants et d'emploi plus commode.



Fig. 23. *Galvanomètre à cadre mobile. Le champ magnétique est radial. Un ressort spiral rappelle le cadre vers sa position initiale.*

3. Haut-parleurs

Les haut-parleurs transforment des vibrations électriques en vibrations sonores. La figure 25 donne une représentation schématique d'un haut-parleur électrodynamique.

Un aimant, généralement en ferrite, crée un champ magnétique radial. Sa forme est étudiée pour qu'une petite bobine suspendue puisse coulisser autour de sa région centrale. Cette bobine reçoit les signaux électriques amplifiés fournis par un récepteur de radio, télévision ou autre.

La bobine est solidaire d'une membrane souple en carton plissé.

Lorsque le courant variable passe dans la bobine, elle subit l'action de forces de Laplace et y répond par des déplacements latéraux qui entraînent la membrane. Les tranches d'air voisines de la membrane sont ainsi mises en vibrations qui, de proche en proche, sont transmises à l'oreille des auditeurs. Voir la Fiche expérimentale.

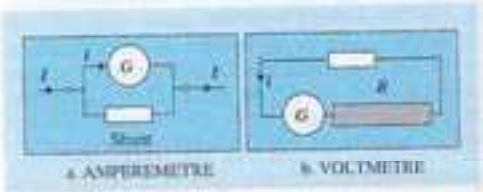


Fig. 24. *Transformation d'un galvanomètre à cadre mobile en ampèremètre ou en voltmètre.*

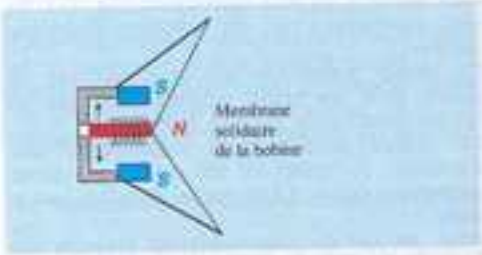


Fig. 25. *Coupe d'un haut-parleur électrodynamique.*



Fig. 26

Fiche expérimentale

MESURE DU CHAMP MAGNÉTIQUE PRODUIT PAR L'AIMANT PERMANENT D'UN HAUT-PARLEUR

1) DISPOSITIF

Cette mesure nécessite deux haut-parleurs identiques :
— l'un est totalement démonté pour mesurer le nombre de spires N de la bobine ainsi que le rayon r de ses spires;
— le deuxième sert à la mesure de B. Pour cela on découpe la membrane pour faciliter les mouvements verticaux de la bobine, qui est maintenu en place élastiquement par le *spider*.
Pour repérer la position d'équilibre de la bobine on colle sur le côté de la membrane un petit miroir, sur lequel on envoie un faisceau laser qui s'y réfléchit, et dont l'image est recueilli en A sur un écran voisin (fig. 27).

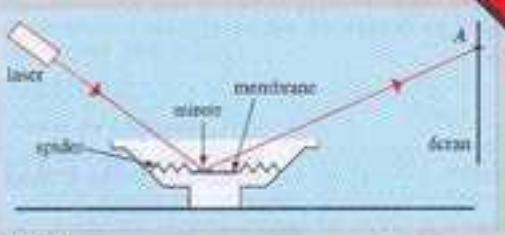


Fig. 27

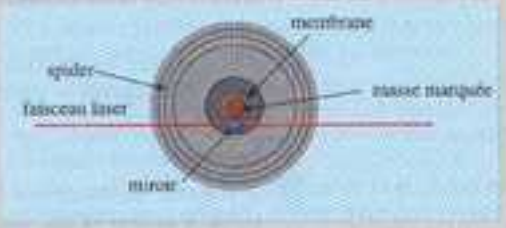


Fig. 28

2) EXPÉRIENCE

On place une masse marquée m, au centre de la membrane (fig. 28) : celle-ci descend sous l'action du poids $\vec{P} = m.\vec{g}$ et atteint une nouvelle position d'équilibre lorsque la force élastique de rappel du spider est égale au poids.

On envoie un courant d'intensité I, de façon que les forces de Laplace $d\vec{F}$ ramènent la membrane à sa position initiale (fig. 29), repérée en A sur l'écran, grâce au faisceau laser (attention au sens du courant!).
La résultante $\vec{F} = \Sigma\, d\vec{F}$ des forces de Laplace compense l'action du poids $\vec{P}$:

$$\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$$

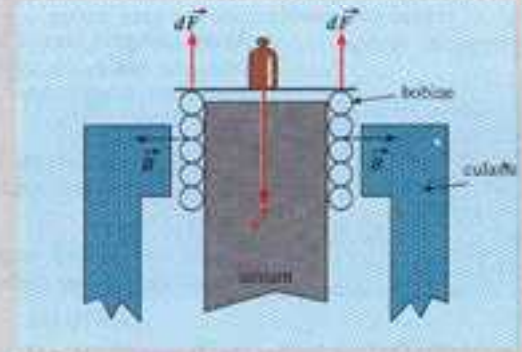


Fig. 29

3) CALCUL DU CHAMP MAGNÉTIQUE

Les N spires de la bobine sont placées dans un champ magnétique radial, d'intensité uniforme B, car les lignes de ce champ rentrent radialement dans l'aimant après avoir circulées dans la culasse (fig. 30).
Donc : $F = B.I.\ell = m.g = P$.
Or $\ell = 2\pi.r.N$, d'où :

$$B = \frac{m.g}{I.2\pi.r.N}$$

Exemple de résultats :
Pour un haut-parleur tel que : $r = 1{,}1$ cm et $N = 50$. En plaçant une masse de 100 g, l'équilibre est rétabli par un courant d'intensité $I = 0{,}53$ A, ce qui conduit à B calculé de 0,55 T.
Pour un haut-parleur usuel, son champ magnétique est de 0,5 à 0,8 T.

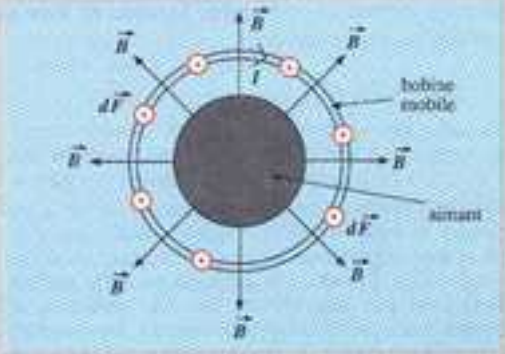


Fig. 30

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

- Se rappeler que les électrons circulent dans un circuit dans le sens inverse du sens conventionnel.

- Retrouver toutes les caractéristiques (sens, direction, valeur) de la **force de Laplace** à partir de son expression :

$$\vec{F} = I . \vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

- Retenir qu'un **circuit fermé**, placé dans un **champ magnétique uniforme**, subit l'action d'un ensemble de forces de Laplace dont la **somme vectorielle** est **nulle.**

- Avoir compris que si la somme vectorielle des forces agissant sur un circuit est nulle, le circuit peut tourner autour de certains axes de rotation, ou se déformer.

- Retenir que pour un circuit placé dans un champ magnétique **non uniforme,** la somme vectorielle des forces de Laplace est **non nulle.**

- Savoir que le flux magnétique à travers une surface d'aire S est une **grandeur algébrique** définie par :

$$\Phi = N . \vec{B} . \vec{S}.$$

- Savoir qu'un circuit soumis à des forces magnétiques est en **équilibre stable** lorsque le **flux** magnétique qui le traverse est **maximal.**

2 F.É.M. D'INDUCTION

Un courant induit prend naissance dans un circuit fermé bien qu'il ne contienne aucun générateur. De nombreux générateurs pourraient faire passer dans le circuit un courant de même intensité que celle du courant induit : il suffirait d'ajuster leur f.é.m. et leur résistance interne. Le plus simple est d'envisager celui dont la résistance interne est nulle. Par définition :

La f.é.m. d'induction est égale à celle d'un générateur sans résistance interne, qui créerait dans le circuit, un courant de même intensité que le courant induit.

1. Déplacement d'une tige dans un champ uniforme

a) Sens du courant induit

La figure 11 reprend un dispositif déjà utilisé pour étudier la force de Laplace : deux rails parallèles conducteurs horizontaux supportent une tige conductrice. Mais il n'y a plus de générateur, remplacé ici par un galvanomètre sensible.

Le circuit fermé est orienté de sorte que le flux inducteur soit positif. Lorsque la tige est déplacée vers la droite, l'aire du circuit augmente, le flux inducteur aussi. Sa variation $\Delta\Phi$ est positive. Par suite, le flux induit φ, et le courant induit i, sont négatifs. Dans la tige, le courant induit va donc de M vers L.

Remarque :
Le sens du courant induit peut être déterminé d'une autre façon : la cause de sa naissance est le déplacement de la tige vers la droite. Le sens du courant induit est tel que la force de Laplace $\vec{F}' = i\,\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ agissant sur LM tente de s'opposer au mouvement. $\vec{F}'$ doit donc pointer vers la gauche, ce qui nécessite un courant dans le sens de $\overrightarrow{ML}$.

b) La tige considérée comme un générateur

Le tableau ci-contre rappelle les conventions de signes qui vont être utilisées dans la suite.

• *Signe de la f.é.m.*
Lorsqu'elle est déplacée la tige engendre un courant.

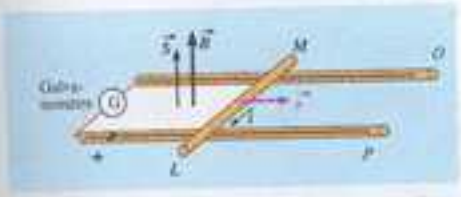
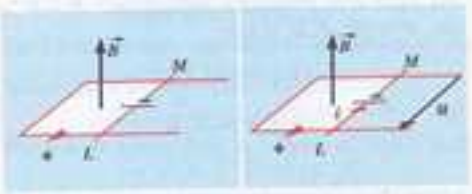


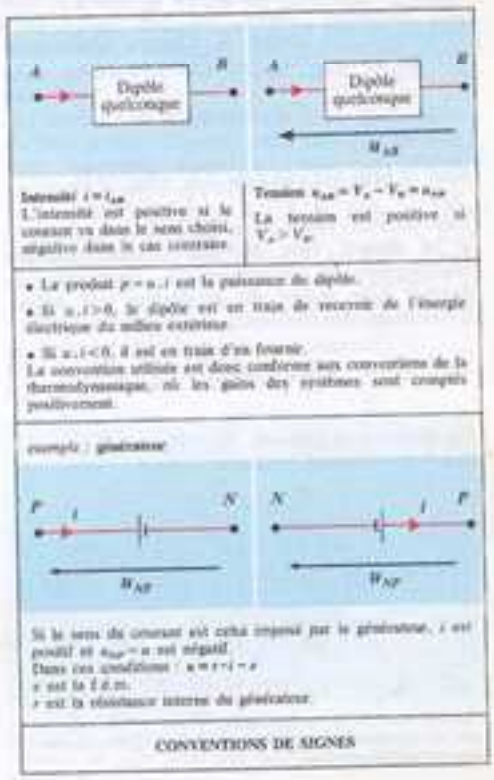
Fig. 11. *Tige déplacée orthogonalement à un champ magnétique uniforme. Le courant induit qui prend naissance dans le circuit est tel que la force de Laplace $\vec{F}$, agissant sur le brin LM le ralentisse.*

Le générateur qui, placé entre L et M, fournirait un courant dans le même sens devrait avoir la disposition suivante :



Par convention, **la f.é.m. e, d'un générateur a le même signe que le courant qu'il tend à débiter.** Avec les orientations choisies, lorsque la tige est déplacée vers la droite, $\Delta\Phi$ est positif et i est négatif. La **f.é.m. induite e, est négative.**

• *Valeur de la f.é.m. induite*
D'après le principe de l'inertie, la force F qu'il convient d'appliquer à la tige pour la maintenir en mouvement uniforme vers la droite est, en l'absence de frottements, juste opposée à la force de Laplace F', qui résulte de l'apparition du courant induit dans ML. Il faut donc fournir de l'énergie mécanique à la tige pour que son mouvement reste uniforme. Cette énergie est intégralement convertie en énergie électrique.



A tout instant la puissance électrique :

$$P = |e| . |i|$$

est égale à la puissance mécanique : $P' = F' . v$.
Or, $F' = |i| . \ell . B$, d'où :

$$|e| . |i| = |i| . \ell . B . v$$

et :

$$|e| = B . \ell . v.$$

• *Générateur en circuit ouvert*
Si les rails sont retirés et si la tige est déplacée comme précédemment dans le champ magnétique, il n'y a plus de courant induit car le circuit est ouvert (fig. 12). La tige joue alors le rôle de générateur débranché qui, comme une pile qui ne débite pas, possède une f.é.m., dont la valeur absolue reste :

$$|e| = B . \ell . v.$$

Son signe dépend de l'orientation donnée à la tige. Dans le cas de la figure 12 *a* elle est négative.

Le signe de cette f.é.m. peut se retrouver par une autre méthode. Quand la barre est déplacée vers la droite (par exemple) à la vitesse $\vec{v}$, tous ses électrons libres ont un mouvement d'ensemble de vitesse $\vec{v}$. Chacun d'eux subit l'action d'une force magnétique :

$$\vec{F} = (-e) . \vec{v} \wedge \vec{B}$$

dont le sens est celui de $\overrightarrow{LM}$ (fig. 12 *b*).

Les électrons libres de la tige ont donc tendance à se diriger vers M, qui devient chargée négativement. Corrélativement, l'extrémité L devient pôle positif du générateur par défaut d'électrons. La tension :

$$u = u_{LM} = V_L - V_M,$$

est positive et comme $V_L - V_M = r . 0 - e = -e$, la f.é.m. est bien négative.

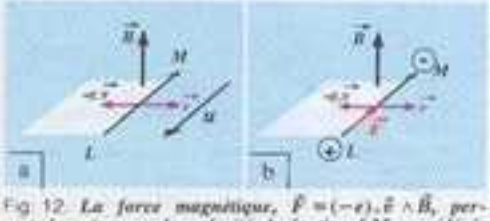


Fig. 12. ***La force magnétique, $\vec{F} = (-e) . \vec{v} \wedge \vec{B}$, permet de retrouver la polarité de la tige LM considérée comme un générateur.***

2. Loi de Faraday

a) Expression de la f.é.m. induite

L'intensité du courant induit, et, par suite, la valeur de la f.é.m. induite, augmentent (en valeur absolue) avec la vitesse de variation du flux magnétique inducteur. Par exemple, le courant induit devient nettement plus intense quand un aimant est approché ou éloigné rapidement d'une bobine que lorsqu'il est mis lentement en mouvement (fig. 13). Ainsi, une variation donnée $d\Phi$ de flux inducteur conduit à une f.é.m. importante si elle a lieu pendant un intervalle de temps dt, très court.
L'expression qui rend compte de ces faits expérimentaux, en reliant la f.é.m. induite e, à la variation du flux inducteur Φ, est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

e en volt (V)
Φ en weber (Wb)
t en seconde (s)

Le signe − résulte de la loi de Lenz, selon laquelle e (de même signe que le courant induit) est de signe opposé à celui de $d\Phi$.
Cette relation donne la définition générale de la f.é.m. induite e. Elle présente l'intérêt d'établir un lien entre une cause (variation de flux inducteur) et un effet (apparition d'une f.é.m.). Son énoncé est connu sous le nom de **loi de Faraday.**

La f.é.m. d'induction est l'opposée de la dérivée par rapport au temps du flux inducteur à travers le circuit.

b) Confirmation

Dans l'expression $|e| = B . \ell . v$ établie plus haut pour la tige qui se déplace orthogonalement au champ uniforme, $\ell . v$ représente l'aire balayée par la tige en 1 s, c'est-à-dire $\frac{\Delta S}{\Delta t}$.

$|e| = B . \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ représente la vitesse de variation du flux inducteur, ce qui démontre la relation de Faraday dans un cas particulier.

c) Vérification

Voir fiche expérimentale.



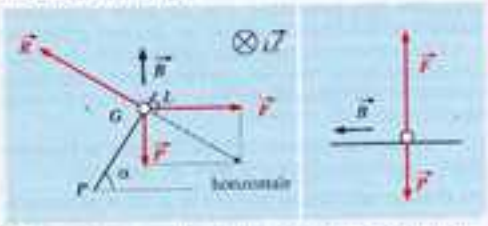
Fig. 13. ***Variation plus ou moins rapide de flux magnétique.***

1. EXERCICES RESOLUS

La condition d'équilibre des forces $\vec{R} + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$ donne, en projection sur les rails orientés vers le haut : $0 - P.\sin\alpha + F.\cos\alpha = 0$, d'où il vient :

$$\tan\alpha = \frac{F}{P} = 2; \quad \alpha = 63°.$$

• Si les branches restent parallèles aux rails, il en est de même de la force de Laplace. Sa valeur étant double du poids, la tige montera même si les rails sont verticaux et il n'y a pas d'équilibre possible pour la tige intérieure à l'aimant (à moins de placer les rails au-dessus de la tige).

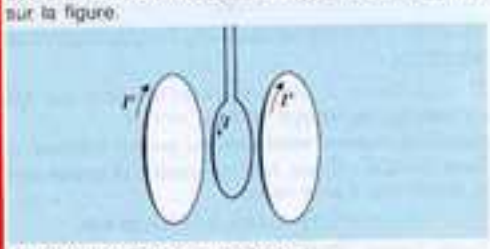


2) Selon la disposition indiquée, la force de Laplace est maintenant vers le haut, comme l'indique la seconde figure ci-dessus. La tige se soulève, ce qui interrompt le passage du courant et supprime la force de Laplace : la tige retombe aussitôt, ce qui rétablit le courant : **la tige sautille.**

EXERCICE 3

Flux maximal

Une bobine plate circulaire, suspendue par deux fils conducteurs souples, est située dans un plan vertical. Ses caractéristiques sont indiquées ci-dessous. Elle est parallèle au plan de deux bobines de Helmholtz sources d'un champ magnétique de valeur $B = 0{,}12$ T. Les sens des courants dans les bobines sont indiqués sur la figure.



Pour les applications numériques :
Bobine plate : $N = 25$ spires ; Rayon $r = 5$ cm ;
Intensité $I = 0{,}40$ A.

Bobines de Helmholtz :
Rayon $R = 10$ cm ; Intensité $I' = 0{,}60$ A.

1) Reproduire la figure en y indiquant le sens du vecteur-champ magnétique $\vec{B}$ et le sens du vecteur-aire $\vec{S}$ associé à la bobine plate, en relation avec le sens du courant d'intensité I. Représenter la situation sur un schéma où la bobine est vue de face. Représenter le sens des forces de Laplace agissant sur deux brins de fil élémentaires diamétralement opposés sur la bobine.

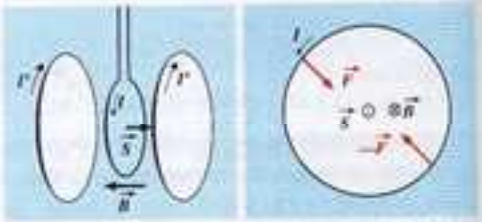
2) Calculer le flux initial Φ_1 à travers la bobine plate. Montrer qu'elle est en équilibre instable dans sa position initiale.

3) Déterminer le flux Φ_2 à travers la surface de la bobine plate lorsqu'elle atteint sa position finale d'équilibre stable, que l'on précisera.

4) Quelle est la variation de flux à travers la bobine lors de son passage de sa position initiale à sa position finale ? Cette variation de flux est-elle la même si les intensités I et I' sont simultanément divisées par 2 ?

SOLUTION

1) Le sens du vecteur-champ $\vec{B}$ créé par les bobines de Helmholtz et le sens du vecteur-aire $\vec{S}$ s'obtiennent en utilisant une règle de la main droite (par exemple). La bobine plate étant orientée dans le sens du courant, $\vec{S}$ pointe vers la droite alors que $\vec{B}$ pointe vers la gauche dans le cas de figure fourni par l'énoncé.



Pour deux brins diamétralement opposés sur la bobine, les forces de Laplace sont opposées et pointent vers le centre du cercle ($\vec{F}$ et $-\vec{F}$ par exemple). La somme de toutes ces paires de forces appliquées en des points diamétralement opposés est nulle (elles ont toutes la même valeur si le cercle est décomposé en brins infinitésimaux de mêmes longueurs). La bobine reste donc en équilibre. Cet équilibre est instable car, à la moindre rotation autour de l'axe vertical, les lignes d'action des forces ne sont plus confondues : elles entraînent la rotation de la bobine.

2) L'aire de la spire vaut :

$$S = \pi.r^2 = 3{,}14 \times (5 \times 10^{-2})^2 \approx 7{,}85 \times 10^{-3}\ \text{m}^2.$$

En valeur absolue, le flux vaut :

$$N.B.S = 25 \times 0{,}12 \times 7{,}85 \times 10^{-3} \approx 2{,}36 \times 10^{-2}\ \text{Wb}.$$

Mais, $\vec{B}$ et $\vec{S}$ étant de sens opposés, le flux initial est négatif, d'où :

$$\Phi_1 \approx -2{,}4 \times 10^{-2}\ \text{Wb}.$$

3) La bobine se retourne face pour face afin que le flux final soit maximal, positif, il a même valeur absolue que le précédent (le vecteur-aire $\vec{S}$ a tourné de π) :

$$\Phi_2 \approx 2{,}4 \times 10^{-2}\ \text{Wb}.$$

4) La variation de flux vaut $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$:

$$\Delta\Phi \approx 4{,}8 \times 10^{-2}\ \text{Wb}.$$

1. EXERCICES RESOLUS

Si les intensités sont toutes divisées par 2, il en va de même pour le champ magnétique créé par les bobines de Helmholtz (quel que soit le montage, la valeur du champ magnétique est proportionnelle à l'intensité du courant). B est la seule variable qui intervienne sur la variation de flux, qui est donc **moitié de la précédente.** Le fait que l'intensité dans la bobine plate soit divisée par 2 n'intervient pas.

Remarque :
Les données fournies pour les bobines de Helmholtz, ainsi que l'intensité du courant dans la bobine plate, n'étaient pas nécessaires.

EXERCICE 4

Moteur à courant continu

Un générateur de f.é.m. $E = 220$ V, de très faible résistance interne, alimente un moteur par l'intermédiaire d'un rhéostat de résistance maximale $R = 21{,}5\ \Omega$. Un ampèremètre très peu résistant est inséré dans le circuit.

1) Le moteur est bloqué et le rhéostat réglé à sa résistance maximale. L'intensité dans le moteur vaut alors $I = 10$ A. Débloqué, le moteur se met à tourner de plus en plus vite et la résistance du rhéostat est réduite progressivement à 0. Quand le moteur tourne à raison de 1 500 tours par minute, l'intensité vaut encore $I = 10$ A.

a) Déterminer la résistance interne r, du moteur et sa f.c.é.m. E' quand le régime de rotation est atteint.

b) Expliquer le rôle du « rhéostat de démarrage » utilisé.

2) Le rotor du moteur comporte $n = 548$ brins constituant 274 spires enroulées sur un cylindre de longueur $\ell = 0{,}10$ m et de rayon $R = 0{,}05$ m. Le champ magnétique radial entre les pièces polaires a pour valeur $B = 0{,}5$ T.
Calculer, lorsque l'intensité qui passe dans les cadres vaut $I = 10$ A :

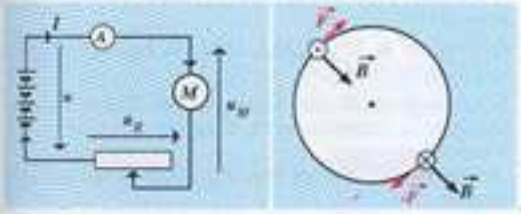
a) la force de Laplace appliquée à chacun des fils;

b) le moment du couple total par rapport à l'axe de rotation du moteur;

c) la puissance mécanique du moteur.

SOLUTION

1) *a)* Orientons le circuit dans le sens du courant. Le sens des flèches associées aux tensions est indiqué sur le schéma ci-dessous.



• Le générateur, de résistance interne nulle, tend à débiter un courant d'intensité positive : $E > 0$,

$$U = 0 . I - E \quad \text{donne} \quad U = -E$$

• Le rhéostat n'a pas de f.é.m. :

$$u_R = R . I$$

• La tension aux bornes du moteur est :

$$u_M = r . I + E'$$

La loi des mailles appliquée au circuit donne :

$$U + u_R + u_M = 0$$

Par suite, $(r + R) . I + E' = -U = E$.
Si le moteur est bloqué, $E' = 0$; $R = 21{,}5\ \Omega$; $I = 10$ A;
$r = \dfrac{E}{I} - R = 22 - 21{,}5\ \Omega$ et : $\boldsymbol{r = 0{,}5\ \Omega}$.

Si le moteur tourne,

$$R = 0 \quad \text{et} \quad E' = E - r . I = 220 - 0{,}5 \times 10 = 215 \text{ V};$$

$$\boldsymbol{E' = 215 \text{ V}}.$$

b) Au moment du démarrage, la f.c.é.m. du moteur est encore nulle et, en l'absence de rhéostat, l'intensité serait $I = \dfrac{E}{r} = \dfrac{220}{0{,}5} = 440$ A, ce qui pourrait détruire les enroulements. Le rhéostat évite cet inconvénient.

2) *a)* La force de Laplace sur un brin de fil a pour valeur

$$F = I . \ell . B . \sin\frac{\pi}{2} = 10 \times 0{,}1 \times 0{,}5 \times 1; \quad \boldsymbol{F = 0{,}5 \text{ N}}.$$

b) Sur le brin symétrique du précédent par rapport à l'axe de rotation, la force a même valeur, mais est de sens opposé (seconde figure). Le moment de ces deux forces par rapport à l'axe vaut :

$$M_1 = F . 2R = 0{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}05 \text{ N.m}.$$

Il y a $\dfrac{n}{2} = 274$ paires de brins actifs. Le moment du couple total vaut donc, sans tenir compte du petit nombre de brins inactifs pendant qu'ils passent d'une pièce polaire à l'autre :

$$M = \frac{n}{2} . M_1 = 274 \times 0{,}05 = 13{,}7 \text{ N.m}; \quad \boldsymbol{M = 13{,}7 \text{ N.m}}.$$

c) Pour un tour de moteur, le travail de la force appliqué à un brin vaut $W_1 = F . 2\pi . R$ et, comme il y a n brins, le travail total par tour est :

$$W_1 = n . F . 2\pi . R = 548 \times 0{,}5 \times 2 \times 3{,}14 \times 0{,}05 = 86 \text{ J}.$$

Le moteur tourne à raison de $\dfrac{1\,500}{60} = 25$ tours par seconde. $W = 25 W_1 = 2\,150 \text{ J.s}^{-1}$.
La puissance mécanique est donc $\boldsymbol{P = 2\,150 \text{ W}}$.

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATION

Sans calculs

Exercice 1

Un brin de fil conducteur rectiligne parcouru par un courant baigne dans un champ magnétique uniforme orthogonal au fil. Quelles sont les actions réciproques des actions suivantes :

1) Action des forces magnétiques sur les électrons mobiles du conducteur?

2) Action des électrons sur les ions positifs statistiquement immobiles dans le conducteur?

Exercice 2

Y a-t-il flux magnétique à travers un solénoïde :

1) Lorsqu'un aimant droit lui fait face alors qu'il n'y passe aucun courant?

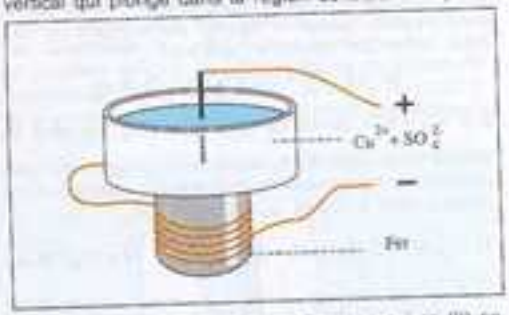
2) Lorsqu'il est parcouru par un courant sans qu'il existe de sources de champ magnétique dans son voisinage?

3) Lorsqu'un aimant droit lui fait face et qu'il y passe du courant?

Ne pas tenir compte du champ géomagnétique.

Exercice 3

Un récipient cylindrique en fer, en forme de cristallisoir, à fond isolant, contient une solution de sulfate de cuivre (II). Il est posé sur un cylindre de fer autour duquel est entouré un fil conducteur afin de constituer un électro-aimant. Ce fil est soudé en A au récipient. Le courant dans l'électrolyte est amené par un fil vertical qui plonge dans la région centrale du liquide.



1) Comment les ions sulfate et les ions cuivre (II) se déplaceraient-ils dans le récipient en l'absence d'électro-aimant?

2) Quelles sont les caractéristiques de la force de Lorentz agissant sur ces ions lorsque l'électro-aimant fonctionne?

3) Dans quel sens le liquide se met-il à tourner dans le récipient?

4) Cette « roue de Barlow liquide » fonctionne-t-elle exactement selon le même principe que la roue de Barlow décrite dans le cours?
Pour une réalisation expérimentale éventuelle, prévoir la possibilité d'intensités assez grandes.

Conduction

• Exercice 4

Utiliser les résultats de l'exercice résolu N° 1 (fil de longueur 0,5 m et de section 1 mm²) pour déterminer la vitesse des électrons, toujours pour une intensité de 1 A, dans des fils :

1) De longueur double et de même section.

2) De longueur moitié et de section double.

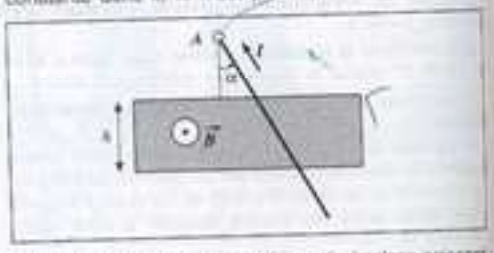
Exercice 5

On réalise l'électrolyse d'une solution de chlorure de sodium à 0,1 mol.L^{-1}, entre deux électrodes de platine planes, verticales, assimilables à un condensateur plan. Le champ électrique horizontal est pratiquement uniforme. Les ions sodium Na^+ se déplacent deux fois plus vite que les ions chlorure Cl^-. L'intensité du courant vaut 0,5 A. Quelle est la vitesse des ions?

Force de Laplace sur un élément de circuit

• Exercice 6

Un fil conducteur initialement vertical est mobile autour d'une rotule A. Il baigne dans un champ magnétique horizontal qui s'exerce dans une région parallélépipédique de hauteur h représentée en coupe sur la figure. Le dispositif qui fait passer un courant d'intensité constante dans le fil n'est pas représenté.



Exprimer la valeur F_{ab} de la force de Laplace agissant sur la portion de fil qui baigne dans le champ, en fonction de F_0 (valeur de la force quand le fil est vertical) et de l'écart angulaire α, que fait le fil avec la verticale.

Exercice 7

Un conducteur rectiligne de longueur $\ell = 0,50$ m est parcouru par un courant d'intensité $I = 10$ A. Les composantes horizontale et verticale du champ magnétique terrestre ont pour valeurs $B_h = 20\ \mu T$ et $B_v = 42,5\ \mu T$ ($\vec{B}_v$ pointe vers le sol).
Préciser les caractéristiques de la force de Laplace agissant sur le fil.

1) Lorsque le fil est vertical parcouru par un courant descendant.

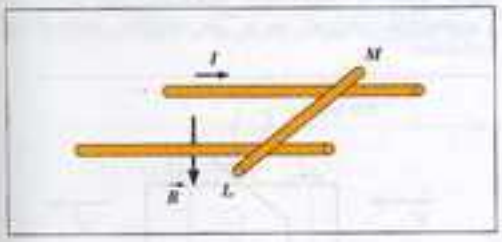
2) Lorsque le fil est horizontal, le courant allant du sud vers le nord.

3) Lorsque le fil est horizontal et forme un écart angulaire α (compris entre 0 et 2π) avec la position précédente.
Les réponses seront accompagnées de schémas soignés.

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 8

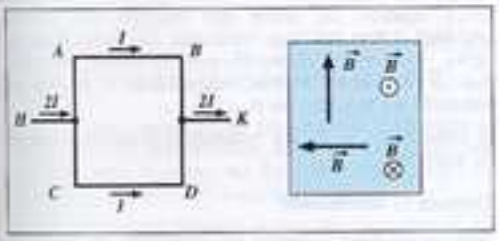
Une barre LM de longueur $\ell = 0{,}08$ m peut glisser sans frottement sur deux rails horizontaux distants de $d = 0{,}05$ m. La valeur du champ magnétique est $B = 0{,}2$ T. L'intensité du courant vaut $I = 2$ A.



Déterminer les caractéristiques de la force de Laplace agissant sur la tige LM.

Exercice 9

Un cadre rectangulaire $ABDC$, vertical, est parcouru par un courant indiqué par la figure ci-dessous.

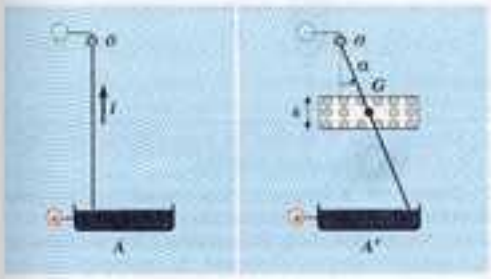


1) Déterminer le sens des forces de Laplace agissant sur les différents brins du cadre $ABDC$, dans les quatre cas de champ magnétique uniforme indiqués sur la figure.

2) Le cadre ne peut tourner qu'autour de l'horizontale HK. Y a-t-il, dans les quatre situations précédentes, rotation spontanée du cadre?

Exercice 10

Une tige rectiligne conductrice de longueur $L = OA$ est attachée en O à une rotule autour de laquelle elle peut tourner pratiquement sans frottements. Son extrémité inférieure A plonge dans le mercure. La tige est parcourue par un courant de A vers O, d'intensité I.



Données numériques :

$OA = 0{,}30$ m; $h = 0{,}05$ m; $B = 0{,}020$ T; $mg = 0{,}10$ N.

1) La tige est verticale et plonge de $d = 1$ cm dans le mercure. De quel angle θ peut-on écarter la tige sans qu'elle perde le contact avec le mercure?

2) Un champ magnétique dont la zone d'influence est parallélépipédique, de hauteur h, est appliqué de telle sorte que la force de Laplace puisse être considérée comme appliquée au centre d'inertie de la tige. Quelle doit être l'intensité du courant pour que la tige s'écarte de $\alpha = 10°$ par rapport à la verticale lorsqu'elle a pris sa position d'équilibre?

Forces de Laplace sur un circuit entier

Exercice 11

Un cadre rectangulaire vertical $MNPQ$, de côtés horizontaux $MN = PQ = a = 2{,}0$ cm et verticaux $MQ = NP = b = 3{,}0$ cm, comporte $N = 25$ spires de fil fin. Il est mobile autour d'un axe vertical passant par son centre d'inertie. Les fils de suspension servent aussi à faire passer le courant dans le cadre; ils sont suffisamment souples pour ne pas s'opposer par torsion à la rotation du cadre.

Le cadre est placé entre les branches d'un aimant en U et, en l'absence de courant, son plan est parallèle au vecteur-champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et horizontal ($B = 0{,}030$ T). Lorsque le courant passe dans le cadre, son intensité vaut $I = 200$ mA.

1) Faire un schéma représentant le cadre (vu de face) et un aimant en U créant un champ pointant vers la droite sur la figure. Déterminer les caractéristiques des forces de Laplace agissant sur le cadre dans cette position lorsqu'on y lance le courant.

2) Faire un schéma vu de dessus lorsque le plan du cadre a tourné de 30° autour de la verticale. Calculer les forces de Laplace agissant alors sur les côtés du cadre; les représenter sur le schéma.

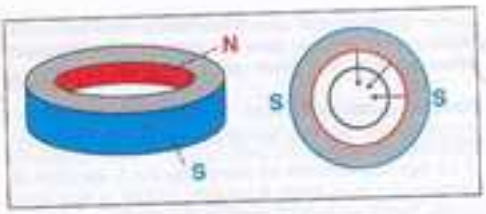
3) Faire un schéma vu en perspective du cadre lorsqu'il a tourné de 90° à partir de la position initiale. Calculer les forces de Laplace et les représenter.

4) Les forces de Laplace restent-elles constantes pendant la rotation? Que peut-on dire de leur somme vectorielle en n'importe quelle position?

Exercice 12

Un aimant en ferrite à la forme d'un cylindre creux dont l'extérieur constitue une région sud et l'intérieur une région nord. Une bobine plate circulaire de 20 spires, coaxiale à l'aimant, de poids 0,10 N, est placée à l'intérieur.

2. EXERCICES PROPOSES



Est-il possible que la bobine plate se soulève si l'on y fait passer un courant? Si oui, préciser ses caractéristiques.

• Exercice 13

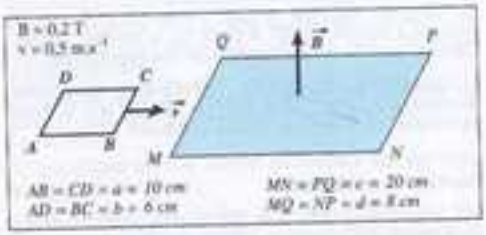
Une spire circulaire, de rayon $R = 8$ cm, tourne autour d'un axe vertical passant par son centre d'inertie, avec une vitesse angulaire $\omega = 100$ rad.s^{-1}. Elle évolue dans un champ magnétique uniforme horizontal de valeur $B = 0,30$ T. A la date $t = 0$, le vecteur-aire associé à la spire est colinéaire au vecteur-champ magnétique, et de même sens.
Déterminer l'expression donnant en fonction du temps le flux magnétique à travers la spire.

Exercice 14

Calculer le flux magnétique à travers un solénoïde de longueur 50 cm, comportant 250 spires, chacune d'aire 8 cm^2, parcouru par un courant d'intensité $I = 0,40$ A. Le champ magnétique sera supposé uniforme dans tout le solénoïde. Le résultat du calcul donne-t-il une valeur par excès, par défaut, ou exacte?

Exercice 15

Un cadre rectangulaire plan horizontal $ABCD$ se déplace avec une vitesse horizontale $\vec{v}$. Il pénètre dans une région où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ délimité dans le même plan que celui du cadre par un rectangle $MNPQ$. A la date $t = 0$, le côté BC du cadre coïncide avec MQ. Le cadre est orienté comme l'indique la figure.

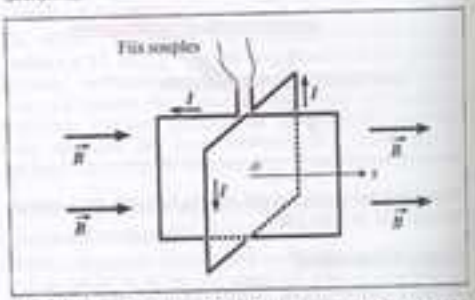


Représenter la courbe montrant l'évolution en fonction du temps du flux magnétique à travers le cadre.

Flux maximal

• Exercice 16

Le dispositif ci-dessous, constitué de deux cadres conducteurs carrés orthogonaux de côtés a, peut tourner autour d'un axe vertical. Il se trouve initialement dans la disposition indiquée sur la figure. L'ensemble baigne dans un champ magnétique uniforme.



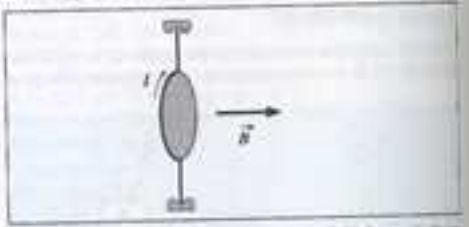
1) Calculer le flux magnétique à travers le dispositif dans sa position initiale.

2) La rotation du cadre est repérée par l'écart angulaire θ que fait l'axe horizontal $\overrightarrow{Ox}$ indiqué sur la figure, solidaire du dispositif, avec le champ magnétique $\vec{B}$. Exprimer le flux magnétique à travers le dispositif en fonction de θ.

3) Déterminer la ou les position(s) d'équilibre stable du système.

Exercice 17

Une bobine plate circulaire est constituée de 50 spires de rayon moyen $R = 6$ cm (une seule de ces spires est représentée sur la figure ci-dessous). La bobine peut tourner sans frottement autour de son diamètre vertical. Initialement, la bobine est placée entre deux bobines de Helmholtz (non représentées sur la figure) qui créent le champ magnétique $\vec{B}$ indiqué, orthogonal au plan de la bobine. Un courant d'intensité $I = 0,5$ A traverse la bobine, dans le sens précisé sur la figure.



1) Montrer que la bobine se trouve initialement dans une position d'équilibre instable.

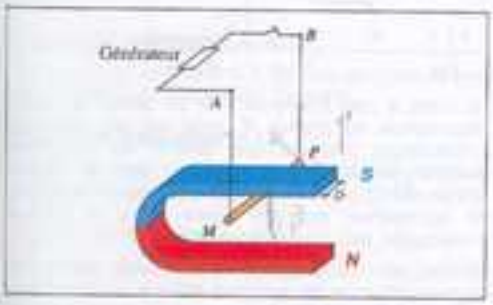
2) Calculer la variation du flux magnétique à travers la bobine lorsque, quittant la position précédente, elle atteint sa position d'équilibre stable. Cette variation de flux dépend-t-elle de l'intensité du courant?

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APRÈS BACCALAURÉATS

• Exercice 18

Une tige en cuivre MP, de poids $P = 0{,}05$ N, de longueur $\ell = 8{,}0$ cm est suspendue à deux conducteurs très souples AM et BP de longueur $L = 50$ cm. Elle baigne dans un champ magnétique créé par un aimant en U dont la disposition est indiquée sur la figure.



$AM = BP = L = 0{,}50$ m; $MP = 8$ cm.
Largeur de l'aimant : $D = 0{,}5$ cm; $B = 0{,}15$ T.

1) Dans quel sens doit-on faire passer le courant, et quelle doit être son intensité, pour que la tige MP soit déplacée vers la droite, les fils AM et BP formant un écart angulaire $\alpha = 20°$ avec la verticale?

2) On fait tourner l'aimant autour de l'horizontale MP de telle sorte que le champ $\vec{B}$ créé par l'aimant reste orthogonal à MP ($\vec{B}$ reste dans un plan vertical).
L'angle formé par $\vec{B}$ et la verticale est désigné par β. Établir la relation entre α (écart entre les fils AM et BP avec la verticale) et β.

3) Représenter graphiquement, pour β variant de 0 à 2π, la courbe montrant l'évolution de α en fonction de β.

Exercice 19

Deux rails parallèles en cuivre, équidistants de ℓ, sont inclinés d'un angle α sur l'horizontale $\left(0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.
Une tige LM, de poids $\vec{P}$, peut glisser sans frottement sur ces rails. Deux butées situées à la base des rails empêchent la tige de quitter le circuit.
Un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, orthogonal aux rails et vers le haut, créé par un aimant, s'exerce entre les deux rails sur une zone de longueur d. Un générateur G impose un courant d'intensité I, constante dans le circuit GLM, indépendante de la position de la tige LM sur les rails.



Pour les applications numériques :
distance entre les rails : $\ell = 5$ cm;
$d = 5$ cm pour la zone d'action du champ;
$B = 0{,}02$ T; $\alpha = 10°$;
Poids de la tige LM : $P = 0{,}05$ N;
Longueur des rails : $OA = 1$ m.

1) La tige est posée sans vitesse initiale sur les rails dans la zone d'action du champ magnétique. A quelles conditions reste-t-elle en équilibre?
Dans la suite de cet exercice, on suppose que le courant va de L vers M.

2) La tige, lâchée sans vitesse initiale à l'extrémité supérieure des rails, commence à subir l'effet du champ magnétique après avoir glissé sur une distance D réglable par déplacement de l'aimant source du champ. L'intensité du courant vaut maintenant $I = 15$ A.

a) Exprimer sa vitesse v_0 lorsqu'elle pénètre dans le champ.

b) A quelles conditions peut-elle traverser toute la zone d'action du champ?

3) Où faut-il poser la tige pour qu'elle reste en équilibre entre O et A?

4) On se place dans le cas où la distance D (définie à la question 2) vaut 5 cm. La tige est lâchée en O sans vitesse initiale. Quel est le flux du champ magnétique à travers le circuit? le flux final? La règle du flux maximal est-elle respectée?

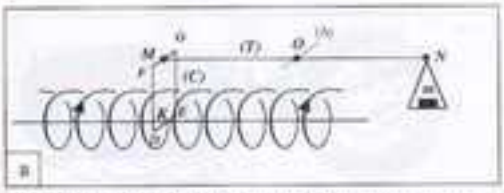
• Exercice 20

Dans tout cet exercice, on négligera le champ magnétique terrestre.

1) Avec un fil de diamètre $d = 0{,}60$ mm, on veut construire un solénoïde (S) dont le rayon d'une spire est $R = 4$ cm et comportant $N = 180$ spires; l'espace laissé libre entre deux spires consécutives est 1 mm.
Calculer la longueur L de ce solénoïde.
Le fil est parcouru par un courant d'intensité $I = 9$ A; quelle est la valeur B_0 du champ magnétique au centre du solénoïde, si l'on admet valable la formule relative au solénoïde infiniment long?

2) On mesure le champ magnétique au centre de ce solénoïde à l'aide d'un dispositif semblable à la balance de Cotton.

2. EXERCICES PROPOSES



a

Une tige (T) perpendiculaire en O à un axe horizontal (Δ) est mobile autour de cet axe; (T) porte un plateau à son extrémité N; un cadre (C), $DEGF$, rectangulaire, indéformable, dont le plan est perpendiculaire à (T), est fixé par le milieu de son côté horizontal supérieur à l'autre extrémité M de (T).

Ce cadre (C) est parcouru par un courant d'intensité I'; si $I' = 0$ la tige (T) et les côtés DE et FG sont horizontaux; l'axe du solénoïde (S) est parallèle à (T), dans le même plan vertical et le milieu K du côté DE est au centre du solénoïde.

Maintenant, l'intensité du courant I' est différente de zéro.

a) Indiquer sur un schéma et en les justifiant le sens du courant I' pour que la force qui s'exerce sur DE soit dirigée vers le bas (le sens de l'intensité du courant dans le solénoïde est indiqué sur le schéma).

b) La tige (T) est de nouveau horizontale si l'on ajoute sur le plateau une masse $m = 0{,}226$ g. On a

$DE = \ell = 2$ cm; $MO = d = 25$ cm; $NO = d' = 10$ cm;

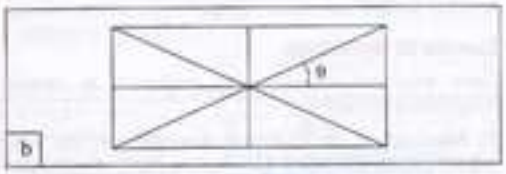
l'intensité de la pesanteur est $g = 9{,}8\ \text{m.s}^{-2}$.

Montrer que les forces qui s'exercent sur FD et GE n'interviennent pas dans l'étude de l'équilibre.

Trouver à l'aide de cette expérience la valeur B_2 du champ magnétique au centre du solénoïde pour $I = 9$ A et $I' = 6{,}5$ A.

3) La formule $B_3 = 4\pi \times 10^{-7} \times \dfrac{N.I}{L}.\cos\theta$ permet aussi de calculer la valeur du champ magnétique au centre du solénoïde (S). θ est le demi-angle au sommet des cônes ayant pour base les extrémités du solénoïde et pour sommet le centre du solénoïde.

Calculer B_3 pour $I = 9$ A.

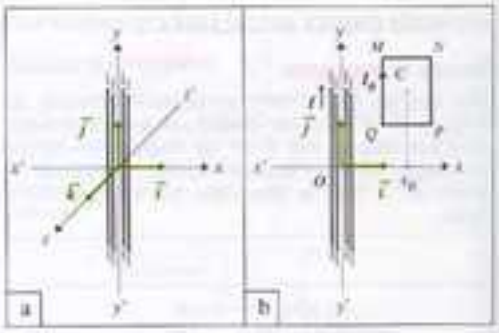


b

4) Connaissant la valeur de B_1, B_2 et B_3, que peut-on en conclure quant à la validité des formules proposées?

Exercice 21

Quatre fils conducteurs, rectilignes et infiniment longs, sont disposés le long de l'axe $y'y$ d'un système d'axes orthonormées $(Oxyz)$, de vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Chaque fil est parcouru par un courant continu I circulant dans le sens du vecteur $\vec{j}$ (fig. a).



a b

Fig. a Fig. b

1) Dans le plan horizontal xOz on réalise le spectre magnétique du champ $\vec{B}$ créé par les quatre fils conducteurs. Sachant que ceux-ci se comportent comme un fil unique parcouru par un courant d'intensité $4I$, dire comment on peut obtenir le spectre, le représenter sur une figure claire et préciser l'orientation des lignes de champ.

2) Un cadre rectangulaire indéformable $MNPQ$ de largeur $MN = 2a$, de longueur $MQ = b$, est placé dans le plan vertical xOy, à proximité de l'axe $y'y$; ses côtés MQ et NP sont parallèles à $y'y$, son centre de symétrie C se trouve à une distance $x_0 > a$ de l'axe $y'y$. Un courant I_0 circule dans le cadre, dans le sens $MNPQM$ (fig. b).

a) Sachant que la valeur du champ magnétique $\vec{B}$ créé par n fils, en un point quelconque A du plan xOy est donné par la relation $B = \dfrac{\mu_0.n.I}{2\pi.x}$, calculer la valeur de $\vec{B}$ aux points M, N, P, Q; représenter sur une figure le vecteur $\vec{B}$ en ces points.

b) On supposera que le champ magnétique créé par le courant I_0 est négligeable.

1. Montrer que la somme vectorielle des forces qui s'exercent sur les côtés MN et PQ est nulle.

2. Déterminer les forces qui s'exercent sur chacun des côtés QM et NP. Calculer leurs valeurs puis les représenter sur une figure claire.

3. Trouver la somme vectorielle des forces appliquées au cadre. Calculer sa valeur et la représenter sur la figure précédente.

Application numérique : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ SI; $n = 4$; $I = 15$ A; $I_0 = 5$ A.

$x_0 = 3$ cm; $a = 2$ cm; $b = 8$ cm.

3) Exprimer en fonction de x_0, a, b et I le flux Φ du champ magnétique créé par le courant I passant dans chacun des fils, à travers le cadre $MNPQ$. On établira le flux élémentaire $d\Phi$ créé par le courant à travers une bande parallèle aux côtés QM et PN, de largeur dx et située à une distance x du fil; puis on intégrera l'expression obtenue.

Au cours de cet exercice on négligera l'influence du champ magnétique terrestre.

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES DESTINÉS A TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 22 A.1.a.

Faire un tableau à deux colonnes, la première indiquant les formules de définition, la seconde les unités utilisées, pour les grandeurs suivantes : intensité d'un courant; champ magnétique; flux magnétique.

Exercice 23 A.1.a.

Le flux est-il une grandeur algébrique? une grandeur orientée?

Exercice 24 A.1.a.

Le weber par mètre carré a été une unité du SI avant de recevoir un nom spécial. Lequel?

Exercice 25 A.1.b.

Quelle est la grandeur physique qui pourrait s'exprimer en newton-mètre par ampère?

Exercice 26 A.1.b.

Quel est dans nos régions l'ordre de grandeur (exprimé par une puissance de 10) du flux géomagnétique à travers une spire plate d'aire 1 m² dont le plan est perpendiculaire au plan méridien magnétique.

Exercice 27 A.1.c.

Énoncer la loi du flux maximal.

Exercice 28 A.1.c.

Comment définit-on le flux magnétique à travers une surface :

1) dans le cas du champ magnétique uniforme?

2) dans le cas où le champ n'est pas uniforme?

Exercice 29 A.2.b.

Que peut-on dire de la somme vectorielle de toutes les forces de Laplace agissant sur un circuit fermé parcouru par un courant plongé dans un champ magnétique uniforme? Démontrer cette propriété.

Exercice 30 A.2.b.

Une spire fixe, d'aire $S = 0{,}1\ m^2$, dont le plan est parallèle à ceux de deux bobines de Helmholtz, est parcourue par un courant qui a initialement le même sens que celui qui passe dans les bobines. Le champ magnétique entre les bobines vaut $B = 0{,}05$ T. Calculer le flux du champ magnétique à travers la spire. Que devient ce flux si le sens du courant dans les bobines de Helmholtz est inversé (mais pas celui dans la spire)? Quelle est la variation du flux magnétique à travers la spire?

Exercice 31 B.1.

Chercher dans un annuaire l'adresse d'un fabricant de moteurs électriques. Lui écrire pour lui demander de la documentation.

Exercice 32 B.2.

Rédiger un texte visant à expliquer à quelqu'un qui n'y connaît rien en physique (le pauvre!) ce qu'est une force de Laplace.

*** Exercice 33** B.3.

Un trièdre $Oxyz$, associé à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ contient dans le plan xOy une spire carrée $OABC$ de côté a. Les composantes du champ magnétique sont les suivantes :

$$\vec{B}_x = \vec{0}, \quad \vec{B}_y = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B}_z = \left(B_0 . \sin \frac{\pi . x}{a}\right) . \vec{k}$$

Calculer le flux du champ magnétique à travers la spire carrée.

Exercice 34 B.3.

Reprendre l'exercice n° 10 et y ajouter la question n° 3 :

3) *Question difficile.* Sans modifier l'intensité, l'aimant est maintenant placé au niveau de la cuve à mercure, juste au-dessus. La tige conserve-t-elle la même position d'équilibre? Si elle tourne, dans quel sens et de combien? Quel sera dans ce cas le phénomène observé?

Exercice 35 B.4.

Représenter par des flèches les forces de Laplace agissant sur un cadre rectangulaire vertical (faire dans chaque cas une vue de face où le courant tournera dans le sens direct, une vue de profil et une vue de dessus) lorsque :

1) Le champ magnétique uniforme est orthogonal au plan du cadre et le flux à travers le cadre est négatif.

2) Le champ magnétique uniforme est parallèle au plan du cadre, pointant vers la droite lorsque le cadre est vu de face.

3) Le champ magnétique pointe vers le sol; il fait un angle de 30° avec la verticale.

Exercice 36 C.1.b.

Un circuit fermé parcouru par un courant tombe dans un champ magnétique uniforme. Que peut-on dire de la somme vectorielle des forces de Laplace et des forces de pesanteur agissant sur tous les brins du circuit.

Exercice 37 C.2.b.

Une spire de 1 m de diamètre est parcourue par un courant d'intensité 2 A. Un escargot avance sur la spire avec une vitesse égale à la vitesse moyenne de progression des électrons, qui sont donc pour lui statistiquement immobiles. Y a-t-il, pour l'escargot, courant électrique dans la spire? Si oui, dans quel sens?

Pour en savoir plus

CONDUCTION ÉLECTRIQUE

Conducteurs ohmiques

Les électrons dans un fil conducteur sont mis en mouvement par un champ électrique crée par un générateur (fig. 31).
Les électrons se présentent en B avec une énergie potentielle $E_{pB} = -e.V_B$. Arrivés en A, ils n'ont plus que l'énergie potentielle :

$$E_{pA} = -e.V_A.$$

Chacun d'eux a perdu :

$$E_{pB} - E_{pA} = +e.(V_A - V_B),$$

en allant de B en A. C'est le réseau d'ions positifs qui absorbe cette énergie : les ions, choqués par les électrons en mouvement, vibrent. Ceci se traduit par une élévation de température du fil.
D'autre part, la perte d'énergie potentielle est par définition égale au travail de la force électrique (statistiquement) constante. Elle peut donc se calculer par :

$$W = \vec{F}_m . \overrightarrow{BA} = -e.\vec{E}.\overrightarrow{BA} = e.E.\ell,$$

en désignant par ℓ la longueur du fil AB.
De : $e.E.\ell = e.(V_A - V_B)$, nous tirons $E.\ell = U$, avec $U = V_A - V_B$.

• Puisque les électrons sont en mouvement uniforme, il faut admettre qu'une force retardatrice $\vec{F}_r$, opposée à la force motrice $\vec{F}_m$, agit sur eux.
L'hypothèse la plus simple est de supposer que $\vec{F}_r = -\lambda.\vec{v}$, du même type que celle du frottement visqueux citée chapitre 5.
La mécanique du mouvement de l'électron se décrit donc par $\vec{F}_m + \vec{F}_r = \vec{0}$, soit $e.\vec{E} = \lambda.\vec{v}$.
D'où : $v = \dfrac{I}{N_1.s.e}$

Par suite, $e.E = \lambda.v = \lambda.\dfrac{I}{N_1.s.e}$. En remplaçant E dans l'expression $U = E.\ell$, il vient :

$$U = \lambda.\frac{I.\ell}{N_1.s.e^2} = \frac{\lambda}{N_1.e^2}.\frac{I.\ell}{s}.$$

• Le terme $\rho = \dfrac{\lambda}{N_1.e^2}$ est appelé **résistivité** du matériau. Il dépend de sa nature : le cuivre est plus conducteur que le fer.

Posant ensuite $R = \dfrac{\rho.\ell}{s}$, on reconnaît la **résistance** du fil. Finalement, on aboutit à $U = R.I$ qui n'est autre que la **loi d'Ohm.**

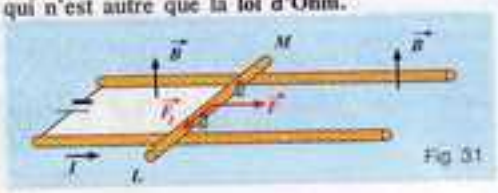


Fig. 31

F.c.é.m. d'un moteur

Son origine

L'existence de la f.c.é.m. peut se comprendre à partir du moteur linéaire (fig. 32).

• Si deux butées empêchent la tige LM de démarrer : le moteur est bloqué. Une intensité I passe dans le circuit et une force de Laplace $\vec{F}$, sans effet, agit sur LM.

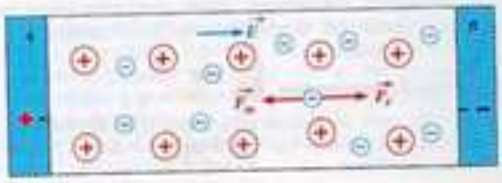
• Les butées étant ôtées, la tige démarre et prend un mouvement accéléré. A la date t, la vitesse des électrons dans la tige LM a deux composantes : l'une, de M vers L, très petite, due à la présence du générateur, est responsable de la force de Laplace précédente; l'autre, est la vitesse de la tige, vers la droite dans le cas de figure.
Du fait de cette vitesse $\vec{v}$ de la tige, chaque électron subit une force $\vec{F}_1 = -e.\vec{v} \wedge \vec{B}$, qui, d'après les règles du produit vectoriel, est horizontale, de sens $\overrightarrow{LM}$. Or, les électrons sont incités par le générateur à passer dans l'autre sens dans la tige, de M vers L. Ce mouvement imposé aux électrons par le générateur se trouve donc ralenti. Par suite l'intensité diminue, ainsi corrélativement, que la force de Laplace appliquée au conducteur LM.
S'il n'y avait pas de frottements, la tige atteindrait un mouvement uniforme quand l'intensité deviendrait nulle. En réalité, il y a toujours des frottements et la tige est en mouvement uniforme quand la force de Laplace diminuant devient opposée à la force de frottement. Le mouvement est encore plus lent si l'on demande à la tige de travailler, par exemple de soulever un objet par l'intermédiaire d'une poulie.
Comme dans l'exemple précédent du conducteur ohmique, les électrons se présentent en M avec une énergie potentielle $-e.V_M$. A leur sortie en L, il leur reste une énergie potentielle $-e.V_L$.
Chacun a perdu :

$$-e.V_M - (-e.V_L) = e.(V_L - V_M).$$

Si q est la quantité d'électricité transporté par ces électrons, l'énergie perdue est :

$$q.(V_L - V_M),$$

que l'on note $q.E'$.
E' est appelée la f.c.é.m. du moteur.


Fig. 32

8 Induction électromagnétique

1 Variation de flux à travers un circuit fermé.

2 F.é.m. d'induction.

3 Auto-induction.

4 Applications.



Stator d'un alternateur de 900 MW.

Le chapitre précédent a montré que les circuits parcourus par un courant peuvent être mis en mouvement dans un champ magnétique. Mais comment ***créer un courant*** *en utilisant les phénomènes magnétiques? La méthode à utiliser fait l'objet de ce chapitre.*

1 VARIATION DE FLUX A TRAVERS UN CIRCUIT FERMÉ

Le **flux** d'un champ magnétique uniforme à travers une surface est défini par :

$$\Phi = \vec{B} \,.\, \vec{S}.$$

Si le sens du courant dans la spire n'est pas connu, la spire peut être orientée de deux façons. Le sens du vecteur-aire $\vec{S}$, résulte de ce choix (fig. 1), et par suite le signe du flux magnétique.

Une **variation de flux magnétique** à travers un circuit peut résulter d'une variation du vecteur-champ (en grandeur ou direction), d'une variation du vecteur-aire (en grandeur ou direction), ou encore des variations simultanées de ces deux grandeurs vectorielles.

1. Obtention d'un courant induit

a) Variations du vecteur-champ magnétique

• *Variations de la valeur du champ*

Lorsqu'une bobine reliée à un galvanomètre est traversée par un champ magnétique de valeur **variable**, le galvanomètre décèle le passage d'un courant. Ce courant, créé dans la bobine bien qu'elle ne soit reliée à aucun générateur, est appelé **courant induit**.

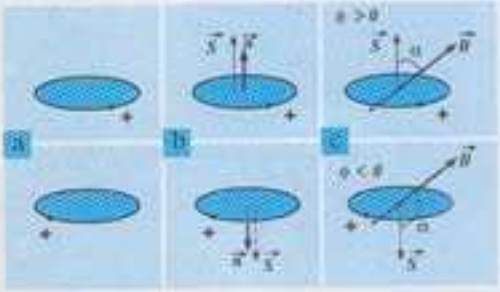


Fig. 1. ***Flux du champ magnétique à travers la surface délimitée par une spire plane.***

a) La spire est orientée.

b) Le sens du vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à la spire s'en déduit. Celui du vecteur-aire $\vec{S} = S\,.\,\vec{n}$ est le même.

c) Le flux magnétique est le produit scalaire : $\Phi = \vec{B}\,.\,\vec{S}$, de valeur algébrique $B\,.\,S\,.\cos\alpha$. Son signe dépend de l'orientation choisie.

— Dans l'expérience de la figure 2 la variation de la valeur du champ, résulte du déplacement d'un aimant ou d'un solénoïde vers une bobine fixe. Une fois de plus, l'analogie de comportement entre aimants et les courants se manifeste. Un courant induit prend aussi naissance dans la bobine si c'est elle qui est rapprochée ou éloignée de l'aimant ou du solénoïde fixes.

— Dans l'expérience de la figure 3 *a*, il y a variation du champ magnétique créé par le solénoïde intérieur à la bobine, par modification de l'intensité qui le parcourt.

— Dans l'expérience de la figure 3 *b*, un barreau de fer doux est introduit à l'intérieur d'un solénoïde entouré par la bobine. Les boucles microscopiques de courants ampériens intérieures au fer s'orientent sous l'influence du champ magnétique engendré par le solénoïde. Cela provoque une augmentation du champ.

Dans toutes les expériences précédentes, l'observation du galvanomètre montre que **le courant induit n'existe que pendant la durée de la variation de la valeur du champ magnétique.**

Remarque :
Le courant induit ne peut prendre naissance que si le circuit est fermé.

• *Variations du vecteur $\vec{B}$ en valeur et direction*

La figure 4 schématise une expérience où le champ à l'intérieur de la bobine fixe, varie en valeur et direction par suite de la rotation d'un aimant.

Le galvanomètre montre que si l'aimant est maintenu en rotation uniforme, le courant créé dans la bobine est alternatif. Cette expérience donne le principe des générateurs de courants alternatifs, appelés alternateurs à induit fixe.

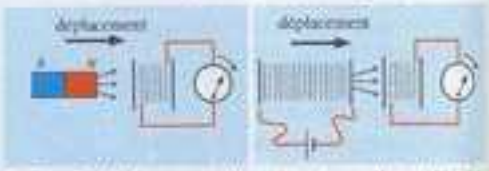


Fig. 2. ***Le déplacement d'un aimant ou d'un solénoïde vers une bobine coaxiale induit un courant dans la bobine. Un galvanomètre sensible décèle le courant induit, qui n'existe que pendant les déplacements.***



Fig. 3. ***Variation du champ magnétique dans une bobine coaxiale à une autre.***

b) Variations du vecteur-aire

• *Modification de la valeur de l'aire*

Un aimant est placé verticalement sur une table. Il est entouré par une bobine plate circulaire souple d'environ 1 m de diamètre (fig. 5).

Lorsque l'aire de la bobine est modifiée, en resserrant ou écartant les spires, le galvanomètre indique le passage d'un courant induit.

• *Modification de la direction du vecteur-aire*

Une bobine plate, constituée de plusieurs spires d'environ 1 m de diamètre, est initialement verticale. Elle est tournée rapidement d'un demi-tour, son axe de rotation horizontal *EW* ayant la direction Est-Ouest (fig. 6).

Un galvanomètre sensible, relié à la bobine, dévie légèrement pendant la rotation.

Le vecteur-aire garde la même valeur, mais il change de direction. Le champ magnétique qui intervient est ici le *champ géomagnétique*, qui pointe obliquement vers le sol.

c) Conclusion

Le flux magnétique, dont les variations provoquent l'apparition d'un courant induit dans le circuit fermé, est appelé **flux inducteur.**

Toute variation du flux inducteur à travers un circuit fermé entraîne l'existence d'un courant induit dans ce circuit. Ce courant n'existe que pendant la variation du flux inducteur.

Ce phénomène est appelé **induction électromagnétique.**

Attention : Aussi important soit-il, un flux ne suffit pas pour créer un courant induit. **Il faut que ce flux varie.**

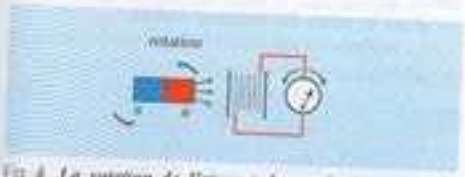


Fig. 4. La rotation de l'aimant devant la bobine y fait naître un courant alternatif.



Fig. 5. Une variation d'aire d'un circuit provoque l'apparition d'un courant induit.

2. Sens du courant induit

a) Étude expérimentale

Le sens du courant induit créé dans une bobine plate, lorsque les extrémités nord ou sud d'un aimant droit en sont approchées ou éloignées, dépend de la nature (*N* ou *S*) de l'extrémité de l'aimant et du sens de son mouvement (fig. 7).

Lorsque l'aimant est approché, il se crée dans la spire un courant induit de sens tel, que la face de la bobine devienne de même nature (nord ou sud) que celle de l'extrémité approchée de l'aimant. Le courant induit change de sens si, au contraire, l'aimant est éloigné :

Le sens du courant induit dans la bobine est celui qui crée une face qui tente de s'opposer au mouvement de l'aimant.

La figure 8 donne un moyen simple pour retrouver la nature nord ou sud de la face d'une spire parcourue par un courant.

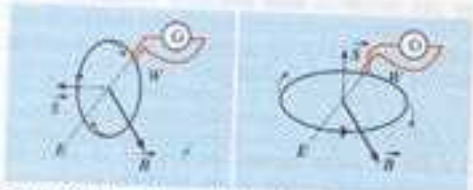


Fig. 6. Rotation d'une bobine dans le champ géomagnétique. Le vecteur-aire tourne dans le plan méridien magnétique (vertical).

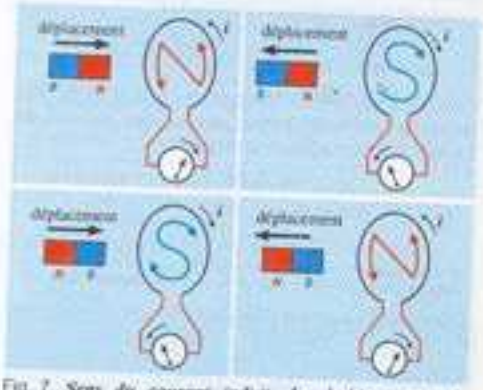


Fig. 7. Sens du courant induit. La bobine tente de s'opposer aux mouvements de l'aimant.



Fig. 8. Les flèches qui prolongent les lettres N ou S indiquent le sens du courant induit.

b) Flux induit par variation de flux inducteur

La règle précédente s'applique aux déplacements relatifs d'un aimant et d'une bobine. Plus généralement, toute variation de flux inducteur à travers un circuit, crée un courant induit, et fait intervenir la séquence :

- variation $\Delta\Phi$ **du flux inducteur;**
- création d'un **courant induit** i;
- ce courant induit crée un champ magnétique $\vec{b}$, appelé **champ induit;**
- ce champ $\vec{b}$, fait apparaître un flux φ, appelé **flux induit** :

$$\Delta\Phi \longrightarrow i \longrightarrow \vec{b} \longrightarrow \varphi$$

Par exemple, si un solénoïde est entouré d'une bobine (fig. 9), une diminution de l'intensité I dans le solénoïde, provoque une diminution du champ $\vec{B}$, donc du flux inducteur à travers la bobine.
Le **courant induit** i, créé dans la bobine est dans ce cas de même sens que I.
Ce courant induit crée un **champ induit** $\vec{b}$ de **même sens que** $\vec{B}$ et le flux de $\vec{b}$ à travers la bobine est le **flux induit** φ.

c) Loi de Lenz

La loi de Lenz permet de prévoir le sens du courant induit, d'une façon générale :

> Le sens du courant induit est tel, que le flux induit créé à travers le circuit fermé où il prend naissance, tende à s'opposer à la variation du flux inducteur.

Comme l'intensité i du courant induit et le flux induit φ sont de même signe, cet énoncé se traduit mathématiquement par :

$$\varphi \cdot \Delta\Phi < 0.$$

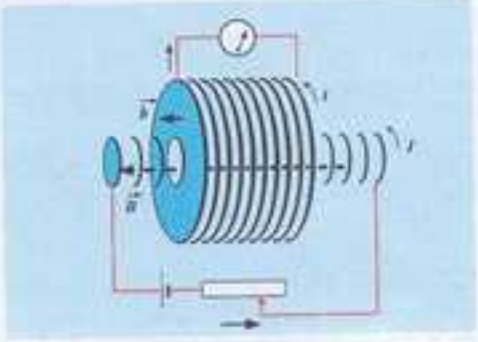


Fig. 9

Il est parfois plus commode d'utiliser la loi de Lenz sous une forme un peu plus générale :

> Le sens du courant induit est tel qu'il tente de s'opposer à la cause qui le produit.

Cet énoncé s'applique par exemple sur la figure 9. Le champ induit $\vec{b}$, modère la diminution de $\vec{B}$.

d) Détermination du sens du courant induit

- *Orientation d'un circuit*

Si, avant toute variation de flux, il n'y a pas de courant dans le circuit, celui-ci peut être orienté d'une manière arbitraire. Selon l'expérience, le courant induit parcourra le circuit dans le sens + choisi, ou dans le sens opposé. Son intensité est donc une grandeur algébrique.
La figure 10 indique une situation physique et son traitement algébrique avec les deux choix possibles pour l'orientation de la spire.
Le signe du flux magnétique dépend du sens choisi pour orienter le conducteur, mais **le flux induit et l'intensité du courant induit ont toujours le même signe.**

- *Méthode générale d'étude théorique*

Pour prévoir le sens d'un courant induit, il est possible de procéder comme suit :
— orienter le circuit;
— chercher le signe du flux inducteur Φ;
— chercher le signe de la variation $\Delta\Phi$ du flux inducteur. (Attention! Un flux inducteur négatif qui augmente, décroît en valeur absolue !);
— en déduire le signe du flux induit φ (qui est opposé à celui de $\Delta\Phi$), et le signe du courant induit i, qui est le même que celui du flux induit φ;
— d'où le sens du courant induit.

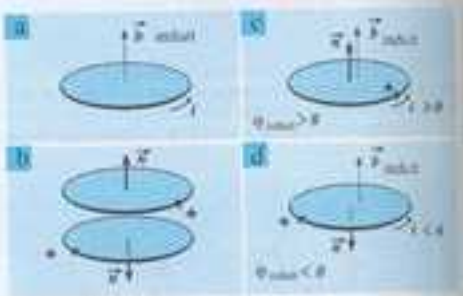
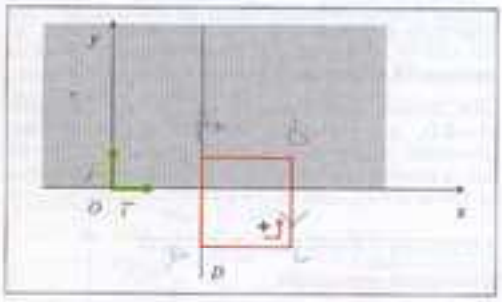


Fig. 10. ***La situation physique :***
a) Un courant induit i crée un champ induit $\vec{b}$.
b) Les deux orientations possibles pour la spire.
c) et d) Les deux traitements algébriques possibles.

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 17

L'espace est rapporté au trièdre direct (Ox, Oy, Oz) de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; le champ magnétique terrestre n'est pas à considérer ici. Un cadre conducteur carré de côté a, comportant N tours de fil, à la résistance R et un coefficient d'auto-induction négligeable. Guidé par un dispositif mécanique M glisse le long de la droite D selon un mouvement de translation uniforme dans le plan horizontal (Ox, Oy). Sa vitesse est $\vec{v} = v_0.\vec{i}$. A la date $t = 0$, le cadre pénètre dans la région hachurée où règne le champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B} = B_0.\vec{k}$. On conviendra de prendre, comme sens positif sur le cadre, le sens inverse des aiguilles d'une montre, comme l'indique la figure ci-dessous.



1) Quelle est, avant la date $t = 0$, la somme des forces qui s'exercent sur le cadre?

2) a) Décrire le phénomène qui se produit dans le cadre et montrer, qu'après la date $t = 0$, il s'exerce des forces électromagnétiques sur les côtés du cadre. Les représenter sur un schéma clair (on envisagera les deux cas $B_0 > 0$ et $B_0 < 0$).

b) Pour que le cadre conserve son mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}$, M devra exercer une force supplémentaire. Exprimer les coordonnées F_x, F_y, F_z de $\vec{F}$ en fonction de N, a, R, v_0 et B_0.

Application numérique : $a = 0{,}2$ m; $N = 100$; $|B_0| = 0{,}1$ T; $v_0 = 0{,}2$ m.s^{-1}; $R = 2\ \Omega$.

Pendant combien de temps M doit-il exercer $\vec{F}$?

Exercice 18

Deux gros conducteurs rectilignes et parallèles MM' et NN' sont placés dans un plan horizontal à une distance $\ell = 0{,}1$ m l'un de l'autre. Les extrémités M et N sont réunies aux bornes d'un générateur de f.é.m. $E_0 = 4$ V, de résistance interne négligeable. Sur les deux rails peut rouler un tube CD qui leur reste perpendiculaire. La résistance du circuit ainsi constitué reste sensiblement constante : $R = 2\ \Omega$, quand CD se déplace. L'ensemble baigne dans un champ magnétique vertical $\vec{B}$, de bas en haut, de valeur $B = 0{,}4$ T.

1) Déterminer la direction, le sens et la valeur de la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur CD.

2) Le générateur est ôté et remplacé par un court-circuit. La résistance reste égale à $2\ \Omega$. CD est déplacé avec une vitesse $v = 5$ m.s^{-1}. Calculer l'intensité i_0 du courant induit. Préciser sur un schéma son sens lorsque C se déplace de M vers M'.

3) Le générateur est à nouveau installé, et CD est déplacé à la vitesse de 5 m.s^{-1}. Quelle est l'intensité du courant dans le circuit? Envisager les deux sens possibles du déplacement.

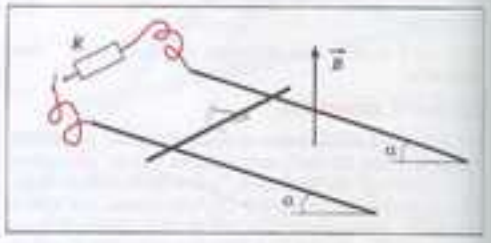
* Exercice 19

On prendra comme accélération de la pesanteur $g = 10$ m.s^{-2}.

Deux rails rectilignes, parallèles, distants de d sont disposés suivant les lignes de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale.

Une tige conductrice homogène, de longueur légèrement supérieure à d, de masse m, peut glisser, sans roulement et sans frottement, sur les rails. Cette tige reste toujours perpendiculaire aux rails, de façon que son milieu soit dans le plan médiateur des rails. Elle est, de plus, supposée parfaitement homogène.

Les extrémités supérieures des rails sont reliées par l'intermédiaire d'un interrupteur K et d'une résistance R. Les résistances des rails, de la tige et des contacts sont supposées négligeables devant R. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, vertical, ascendant.



1) L'interrupteur étant ouvert, on abandonne, sans vitesse initiale, la tige en haut des rails, à la date $t = 0$. Lorsqu'elle a parcouru une distance ℓ, on ferme l'interrupteur.

a) Établir l'expression littérale de la vitesse de translation de la tige à cet instant. Calculer cette vitesse.

b) Établir l'expression littérale de la date t_1 de fermeture de l'interrupteur. Calculer cette date.

2) a) Pour $t > t_1$, montrer que l'accélération de la tige décroît.

b) Établir l'expression littérale de la vitesse limite atteinte par la tige. Calculer cette vitesse limite.

Données numériques :
$d = 10$ cm; $\alpha = 15°$; $m = 15$ g; $R = 1\ \Omega$; $B = 1$ T; $\ell = 10$ cm.

2 F.É.M. D'INDUCTION

Un courant induit prend naissance dans un circuit fermé bien qu'il ne contienne aucun générateur. De nombreux générateurs pourraient faire passer dans le circuit un courant de même intensité que celle du courant induit : il suffirait d'ajuster leur f.é.m. et leur résistance interne. Le plus simple est d'envisager celui dont la résistance interne est nulle. Par définition :

La f.é.m. d'induction est égale à celle d'un générateur sans résistance interne, qui créerait dans le circuit, un courant de même intensité que le courant induit.

1. Déplacement d'une tige dans un champ uniforme

a) Sens du courant induit

La figure 11 reprend un dispositif déjà utilisé pour étudier la force de Laplace : deux rails parallèles conducteurs horizontaux supportent une tige conductrice. Mais il n'y a plus de générateur, remplacé ici par un galvanomètre sensible.

Le circuit fermé est orienté de sorte que le flux inducteur soit positif. Lorsque la tige est déplacée vers la droite, l'aire du circuit augmente, le flux inducteur aussi. Sa variation $\Delta\Phi$ est positive. Par suite, le flux induit φ, et le courant induit i, sont négatifs. Dans la tige, le courant induit va donc de M vers L.

Remarque :
Le sens du courant induit peut être déterminé d'une autre façon : la cause de sa naissance est le déplacement de la tige vers la droite. Le sens du courant induit est tel que la force de Laplace $\vec{F}' = i\,\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ agissant sur LM tente de s'opposer au mouvement. $\vec{F}'$ doit donc pointer vers la gauche, ce qui nécessite un courant dans le sens de $\overrightarrow{ML}$.

b) La tige considérée comme un générateur

Le tableau ci-contre rappelle les conventions de signes qui vont être utilisées dans la suite.

• *Signe de la f.é.m.*
Lorsqu'elle est déplacée la tige engendre un courant.

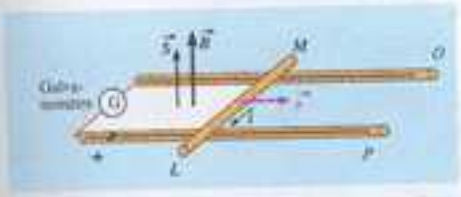
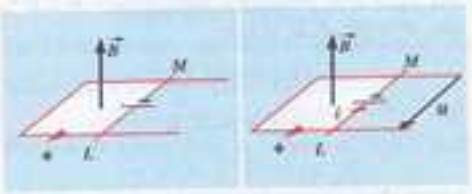


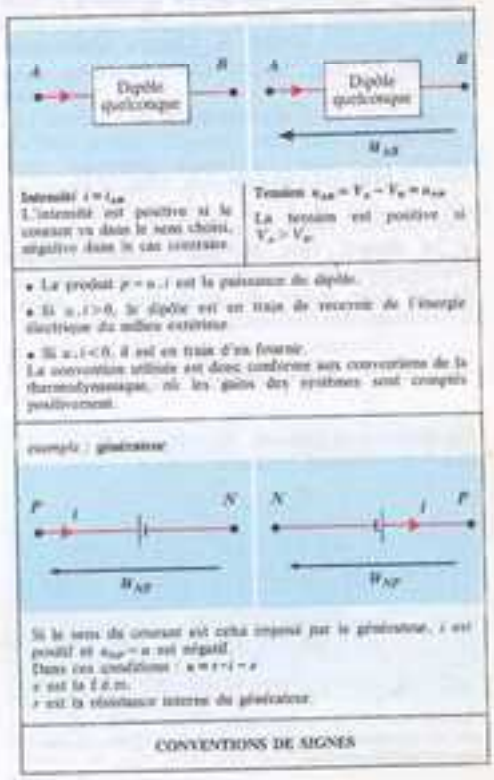
Fig. 11. *Tige déplacée orthogonalement à un champ magnétique uniforme. Le courant induit qui prend naissance dans le circuit est tel que la force de Laplace $\vec{F}$, agissant sur le brin LM le ralentisse.*

Le générateur qui, placé entre L et M, fournirait un courant dans le même sens devrait avoir la disposition suivante :



Par convention, **la f.é.m. e, d'un générateur a le même signe que le courant qu'il tend à débiter.** Avec les orientations choisies, lorsque la tige est déplacée vers la droite, $\Delta\Phi$ est positif et i est négatif. La **f.é.m. induite e, est négative.**

• *Valeur de la f.é.m. induite*
D'après le principe de l'inertie, la force F qu'il convient d'appliquer à la tige pour la maintenir en mouvement uniforme vers la droite est, en l'absence de frottements, juste opposée à la force de Laplace F', qui résulte de l'apparition du courant induit dans ML. Il faut donc fournir de l'énergie mécanique à la tige pour que son mouvement reste uniforme. Cette énergie est intégralement convertie en énergie électrique.



A tout instant la puissance électrique :

$$P = |e| . |i|$$

est égale à la puissance mécanique : $P' = F' . v$.
Or, $F' = |i| . \ell . B$, d'où :

$$|e| . |i| = |i| . \ell . B . v$$

et :

$$|e| = B . \ell . v.$$

• *Générateur en circuit ouvert*
Si les rails sont retirés et si la tige est déplacée comme précédemment dans le champ magnétique, il n'y a plus de courant induit car le circuit est ouvert (fig. 12). La tige joue alors le rôle de générateur débranché qui, comme une pile qui ne débite pas, possède une f.é.m., dont la valeur absolue reste :

$$|e| = B . \ell . v.$$

Son signe dépend de l'orientation donnée à la tige. Dans le cas de la figure 12 *a* elle est négative.

Le signe de cette f.é.m. peut se retrouver par une autre méthode. Quand la barre est déplacée vers la droite (par exemple) à la vitesse $\vec{v}$, tous ses électrons libres ont un mouvement d'ensemble de vitesse $\vec{v}$. Chacun d'eux subit l'action d'une force magnétique :

$$\vec{F} = (-e) . \vec{v} \wedge \vec{B}$$

dont le sens est celui de $\overrightarrow{LM}$ (fig. 12 *b*).

Les électrons libres de la tige ont donc tendance à se diriger vers M, qui devient chargée négativement. Corrélativement, l'extrémité L devient pôle positif du générateur par défaut d'électrons. La tension :

$$u = u_{LM} = V_L - V_M,$$

est positive et comme $V_L - V_M = r . 0 - e = -e$, la f.é.m. est bien négative.

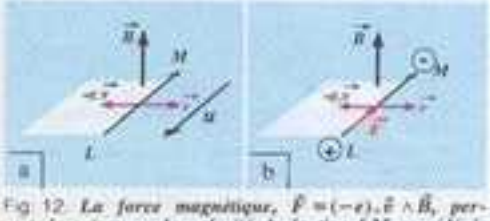


Fig. 12. ***La force magnétique, $\vec{F} = (-e) . \vec{v} \wedge \vec{B}$, permet de retrouver la polarité de la tige LM considérée comme un générateur.***

2. Loi de Faraday

a) Expression de la f.é.m. induite

L'intensité du courant induit, et, par suite, la valeur de la f.é.m. induite, augmentent (en valeur absolue) avec la vitesse de variation du flux magnétique inducteur. Par exemple, le courant induit devient nettement plus intense quand un aimant est approché ou éloigné rapidement d'une bobine que lorsqu'il est mis lentement en mouvement (fig. 13). Ainsi, une variation donnée $d\Phi$ de flux inducteur conduit à une f.é.m. importante si elle a lieu pendant un intervalle de temps dt, très court.
L'expression qui rend compte de ces faits expérimentaux, en reliant la f.é.m. induite e, à la variation du flux inducteur Φ, est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

e en volt (V)
Φ en weber (Wb)
t en seconde (s)

Le signe − résulte de la loi de Lenz, selon laquelle e (de même signe que le courant induit) est de signe opposé à celui de $d\Phi$.
Cette relation donne la définition générale de la f.é.m. induite e. Elle présente l'intérêt d'établir un lien entre une cause (variation de flux inducteur) et un effet (apparition d'une f.é.m.). Son énoncé est connu sous le nom de **loi de Faraday.**

La f.é.m. d'induction est l'opposée de la dérivée par rapport au temps du flux inducteur à travers le circuit.

b) Confirmation

Dans l'expression $|e| = B . \ell . v$ établie plus haut pour la tige qui se déplace orthogonalement au champ uniforme, $\ell . v$ représente l'aire balayée par la tige en 1 s, c'est-à-dire $\frac{\Delta S}{\Delta t}$.

$|e| = B . \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ représente la vitesse de variation du flux inducteur, ce qui démontre la relation de Faraday dans un cas particulier.

c) Vérification

Voir fiche expérimentale.



Fig. 13. ***Variation plus ou moins rapide de flux magnétique.***

3. Intensité d'un courant induit

Un courant induit ne prend naissance que dans les circuits fermés. En imaginant qu'un tel circuit est coupé, ses deux extrémités A et B équivalent aux pôles d'un générateur qui ne débite pas, de résistance interne r égale à celle du circuit, et délivrant une tension :

$$u = u_{AB} = V_A - V_B = r.0 - e.$$

Réunir A et B, équivaut à court-circuiter le générateur, et à lui faire débiter un courant de court-circuit d'intensité égale à celle du courant induit. Sa tension aux bornes étant nulle, $u = r.i - e = 0$, et :

$$i = \frac{e}{r}$$

i en ampère (A)
e en volt (V)
r en ohm (Ω)

Cette relation est en accord avec les conventions adoptées, qui font que **le courant et la f.é.m. induits sont de même signe.**
Cette relation s'écrit aussi :

$$i = -\frac{1}{r}.\frac{d\Phi}{dt}.$$

Remarque :
S'il est utile d'algébriser pour les questions théoriques, il est souvent possible de s'en passer dans les cas pratiques. Il suffit de déterminer les valeurs absolues $|e|$ et $|i|$ et de trouver le sens du courant par une application simple de la loi de Lenz.

4. Rotation d'un cadre dans un champ uniforme

a) Dispositif

Une bobine circulaire tourne autour d'un axe fixe vertical dans un champ magnétique, $\vec{B}$, uniforme (fig. 14).
La position de la bobine est repérée par l'angle $\theta = (\vec{B}, \vec{S})$ que forme à la date t, le vecteur-aire avec le vecteur-champ magnétique. La bobine tourne d'un mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire ω tel que : $\theta = \omega.t$ si θ est choisi nul à la date $t = 0$.

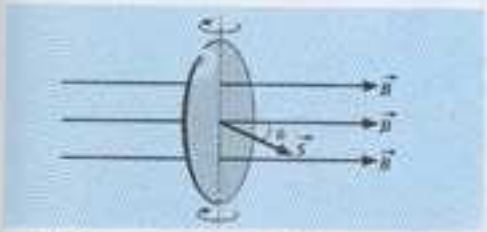


Fig. 14. *La rotation d'une bobine dans un champ magnétique uniforme induit dans la bobine une f.é.m. sinusoïdale.*

b) F.é.m. induite

Le flux inducteur $\Phi = \vec{B}.\vec{S}$ a pour expression $\Phi = B.S.\cos\theta$, soit :

$$\Phi = B.S.\cos(\omega.t).$$

La f.é.m. induite est donnée en fonction du temps par $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, soit :

$$e = B.S.\omega.\sin(\omega.t).$$

S'il y a N spires dans la bobine au lieu d'une,

$$e = N.B.S.\omega.\sin(\omega.t).$$

La f.é.m. est une fonction sinusoïdale du temps. Sa valeur maximale est $E_m = N.S.B.\omega$.
Ce dispositif donne le principe d'un générateur de tension alternative sinusoïdale (ou **alternateur**) à induit mobile.

Remarque :
Au lieu d'envisager la rotation de la spire dans un champ uniforme, il revient au même d'imaginer que la spire reste fixe et que c'est le vecteur-champ $\vec{B}$ qui tourne. Les courants alternatifs permettent de réaliser simplement de tels « champs tournants ».

3 AUTO-INDUCTION

Un circuit parcouru par un courant crée en tous points de l'espace un champ magnétique dont la valeur est proportionnelle à l'intensité du courant. Ce champ existe en particulier à l'intérieur du circuit lui-même. Il en résulte un flux magnétique d'induction, qui, n'étant pas d'origine extérieure, est appelé **flux propre** ou **auto-flux.**
Si l'intensité du courant varie, il en va de même du flux propre. Comme toute variation de flux, cette variation d'auto-flux crée une f.é.m. d'induction qui s'oppose à cette variation.
Le circuit joue donc ici à la fois le rôle d'inducteur et d'induit.
Les phénomènes d'auto-induction résultent d'une variation de flux propre à travers un circuit.

1. Mise en évidence du phénomène

a) Retard à l'établissement d'un courant

Un générateur alimente deux dérivations (fig. 15) :

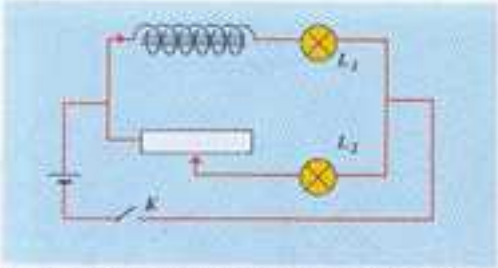


Fig. 15. *Quand on ferme l'interrupteur K, la lampe L_1, brille après la lampe L_2.*
La bobine est réalisée à partir de deux bobines enroulées autour d'une carcasse fermée en fer, montées de telle sorte que leurs effets magnétiques s'ajoutent.

— l'une contient une bobine à noyau de fer doux et une lampe à incandescence L_1;

— l'autre est constituée par un rhéostat et une lampe L_2, identique à la précédente.

La résistance du rhéostat est ajustée pour que les deux lampes brillent du même éclat quand le courant passe en régime permanent, sa résistance est alors sensiblement égale à celle de la bobine.

A la fermeture de l'interrupteur, la lampe L_2 brille instantanément, mais la lampe L_1 ne s'allume que progressivement.

L'interprétation est simple : quand le courant apparaît dans la bobine, un courant auto-induit prend naissance, qui tempère la croissance du courant d'après la loi de Lenz. Le courant finit par s'établir, mais plus lentement que dans l'autre branche où aucun effet d'induction ne se manifeste.

b) Visualisation à l'oscilloscope

Un générateur de tension périodique en créneaux (« tension rectangulaire ») alimente la bobine précédente placée en série avec un rhéostat de résistance R (fig. 16). Cela équivaut à réaliser une succession automatique de fermetures et d'ouvertures du circuit.

L'oscilloscope visualise la tension $u = R.i$, aux bornes du rhéostat, qui représente aussi l'évolution de l'intensité du courant en fonction du temps (au facteur R près) (fig. 17 *a*).

• En présence de fer à l'intérieur de la bobine, l'oscillogramme montre que le courant n'atteint pas immédiatement sa valeur maximale, et qu'il ne s'annule que progressivement (fig. 17 *b*). Les courbes ont des allures d'exponentielles.

• En sortant progressivement le fer de la bobine, les exponentielles se déforment, croissent ou décroissent plus vite, et finissent par prendre une allure de créneaux (fig. 17 *c*). La bobine sans fer joue le rôle d'une résistance pratiquement pure, sans effet auto-inductif sensible.

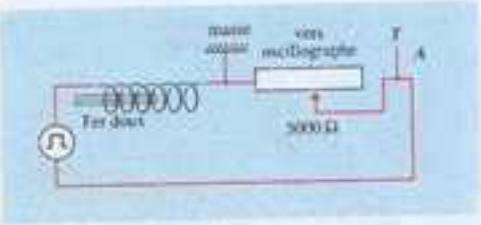


Fig. 16. ***Montage pour visualiser à l'oscilloscope le retard à l'établissement ou à la rupture d'un courant. Avec la bobine double la carcasse de fer peut être plus ou moins ouverte afin de régler les effets magnétiques.***

La présence de fer augmente considérablement la valeur du flux à travers les bobines. Il en résulte des variations de flux propre plus importantes à chaque demi-période de la tension en créneaux. Conformément à la loi de Lenz, la f.é.m. induite tend à s'opposer à l'établissement du courant ou à sa diminution. Cette f.é.m., qui apparaît dans le circuit par suite de la variation de son propre courant, est dite **auto-induite.**

Une f.é.m. induite apparaît donc dans un circuit lorsque le flux qui le traverse varie, soit par suite de causes extérieures (induction), soit parce que le courant varie dans le circuit (auto-induction).

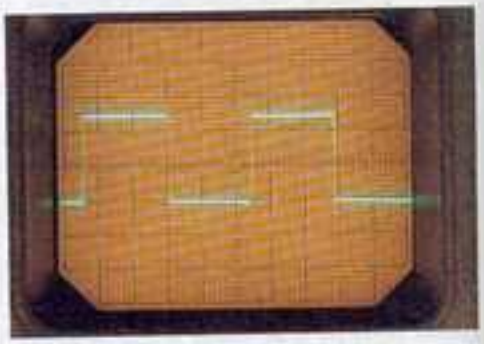


Fig. 17 a

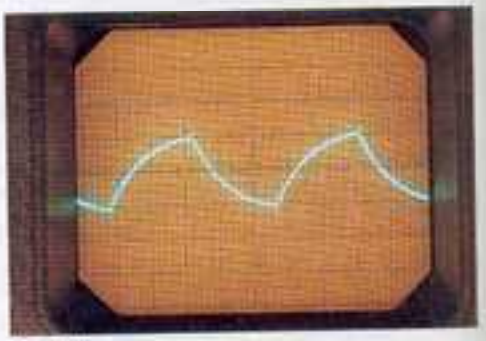


Fig. 17 b

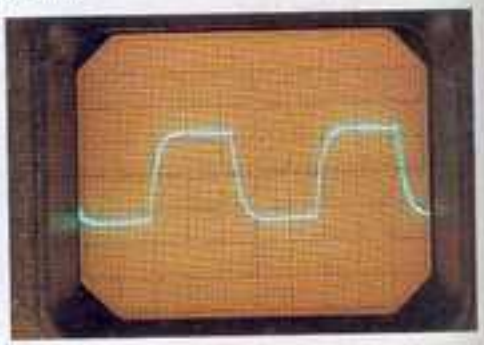


Fig. 17 c

2. Auto-inductance

a) Définition

Le flux propre φ à travers un circuit (c'est-à-dire le flux du champ magnétique $\vec{b}$ créé par le courant qui parcourt le circuit) est, comme le champ magnétique, proportionnel à l'intensité du courant ($\varphi = b\,.S$ et $b = K\,.i$). Il peut s'écrire $\varphi = L\,.i$ où L est une constante.

La figure 18 montre, sur un cas particulier aisément généralisable, que **le flux propre est de même signe que l'intensité.** Ce signe dépend de l'orientation choisie pour le conducteur.

Le coefficient L est donc toujours positif. Il est appelé **auto-inductance** ou, en abrégé, **inductance.** Il dépend de la forme des circuits. Il s'exprime en weber par ampère appelé henry (H).

Pour une spire de 1 m de diamètre :

$$L = 3 \times 10^{-6}\ \text{H};$$

pour une bobine de haut-parleur : $L \approx 10^{-3}$ H; pour un électro-aimant industriel : $L = 100$ H.

Le flux propre à travers un circuit s'exprime par :

$$\varphi = L\,.i$$

φ en weber (Wb)
L en henry (H)
i en ampère (A)

b) Calcul approximatif de l'inductance d'un solénoïde

Le champ magnétique intérieur à un solénoïde, de longueur nettement supérieure au diamètre des spires, est uniforme. S'il possède N spires équidistantes réparties sur sa longueur ℓ, il a $n_1 = \dfrac{N}{\ell}$ spires par mètre et le champ dans la région centrale vaut :

$$B = \mu_0 . n_1 . i = \mu_0 . \frac{N}{\ell} . i.$$

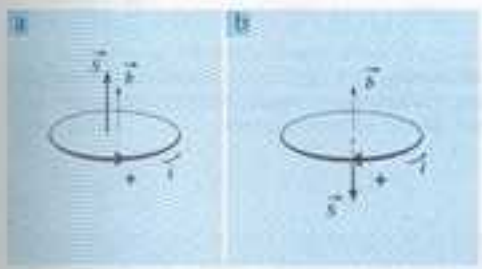


Fig. 18. ***L'intensité du courant et le flux propre sont de même signe.***

a) Premier choix de l'orientation. Le vecteur-aire pointe vers le haut (règle de la main droite). Le flux de $\vec{b}$ et l'intensité i sont positifs.

b) Second choix : flux et intensité négatifs.

Le flux propre à travers une spire de la région centrale s'exprime donc par :

$$\varphi_1 = \vec{B}\,.\vec{S} = \mu_0 . \frac{N}{\ell} . i\,.S.$$

Cette expression n'est qu'approchée pour les spires proches des extrémités du solénoïde, où la valeur du champ magnétique est légèrement inférieure. Cependant, si le solénoïde est très long, elle convient pour la plupart des spires. En l'appliquant un peu abusivement à toutes, le flux propre total s'écrit donc :

$$\varphi = N\,.\varphi_1 = \mu_0 . \frac{N^2}{\ell} . i\,.S.$$

Il se trouve ainsi évalué par excès.

L'expression précédente est bien du type $\varphi = L\,.i$ avec :

$$L = \mu_0 . \frac{N^2 . S}{\ell}$$

c) Bobines à noyaux de fer doux

La relation précédente est valable pour un solénoïde dans l'air (en toute rigueur dans le vide). Pour augmenter le flux propre, des pièces en fer peuvent être introduites dans les bobines.

La valeur calculée plus haut est alors à multiplier par un coefficient μ_r, appelé perméabilité relative, qui peut être de l'ordre de 1000.

Certaines bobines ont une inductance réglable par introduction d'une plus ou moins grande portion d'un barreau de fer doux (fig. 19).



Fig. 19. ***Bobine d'inductance L réglable par introduction de fer doux.***

3. F.é.m. d'auto-induction

a) Expression

Une variation de l'intensité du courant dans un circuit d'inductance constante L entraîne une variation du flux propre $\varphi = L \cdot i$.

Il en résulte qu'une f.é.m., dite auto-induite, ou d'auto-induction, apparaît dans le circuit.
La f.é.m. d'auto-induction, s'exprime comme la f.é.m. d'induction par : $e = -\dfrac{d\varphi}{dt}$, soit en fonction de l'inductance :

$$e = -L \cdot \frac{di}{dt}$$

e en volt (V)
L en henry (H)
i en ampère (A)
t en seconde (s)

La f.é.m. d'auto-induction est donc d'autant plus importante que les variations de l'intensité sont plus rapides et que l'inductance du circuit est plus élevée.

b) Effets

• *La f.é.m. auto-induite n'intervient pas en régime continu*, car $\dfrac{di}{dt}$ est nul dans ce cas. Une bobine inductive (R, L) se comporte alors comme un conducteur ohmique purement résistant.

• *En régime variable, la f.é.m. auto-induite modère les variations du courant inducteur.* C'est pour cette raison que la lampe L_1 de la figure 15 brille avec retard.

• *Une bobine inductive empêche les discontinuités d'intensité.* Une discontinuité est une variation d'intensité pendant un intervalle de temps très court. D'où l'apparition d'une f.é.m. auto-induite considérable qui s'oppose à cette discontinuité.

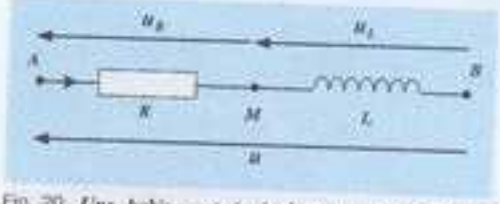


Fig. 20. *Une bobine est équivalente à une résistance pure en série avec une inductance pure :*

$u_R = R \cdot i \qquad u_L = L \cdot \dfrac{di}{dt} \qquad u = u_R + u_L$.

4. Loi d'Ohm pour une bobine inductive

a) Tension aux bornes d'une bobine inductive

La tension aux bornes d'un dipôle linéaire peut s'écrire, avec les conventions habituelles :

$$u = r \cdot i - e.$$

Dans le cas d'une bobine de résistance R et d'inductance L, cette relation devient, en tenant compte de $e = -L \cdot \dfrac{di}{dt}$:

$$u = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$$

Elle exprime la loi d'Ohm pour un dipôle résistant et inductif.

La relation précédente montre qu'une bobine inductive R, L peut être considérée comme une **résistance pure en série avec une inductance pure** (fig. 20).

Cette figure indique entre M et B la représentation conventionnelle d'une inductance pure. Le point M n'a pas d'existence physique réelle : il est impossible de le relier à un oscilloscope par exemple.

La figure 21 revient sur les représentations conventionnelles.

b) Loi d'Ohm vue comme une équation différentielle

La relation $u = R \cdot i + L \cdot \dfrac{di}{dt}$ fait intervenir la variable i et sa dérivée première $\dfrac{di}{dt}$, par rapport au temps. Il s'agit d'une **équation différentielle.** Sa résolution permet de trouver $i(t)$ quand $u(t)$ est donné et inversement.

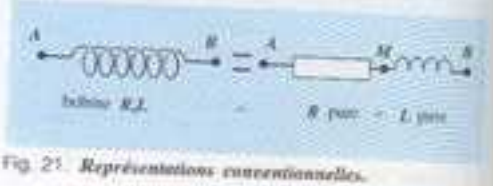


Fig. 21. *Représentations conventionnelles.*

5. Énergie magnétique d'une bobine inductive

a) *Interprétation énergétique de la loi d'Ohm*

Lorsqu'une bobine de résistance R, et d'inductance L, est parcourue par un courant d'intensité i, la tension u à ses bornes est :

$$u = R\,.\,i + L\,.\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

La puissance $P = u\,.\,i$ de la bobine, positive lorsque la bobine est en train de recevoir de l'énergie E, s'exprime donc par :

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = R\,.\,i^2 + L\,.\,i\,.\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Pendant un intervalle de temps suffisamment court pour que l'intensité i puisse être considérée comme constante, la bobine reçoit l'énergie :

$$\mathrm{d}E = P\,.\,\mathrm{d}t = R\,.\,i^2\,.\,\mathrm{d}t + L\,.\,i\,.\,\mathrm{d}i.$$

• Le terme $R\,.\,i^2\,.\,\mathrm{d}t$, positif quel que soit le sens du courant, est donc un gain d'énergie pour la bobine. Il fait intervenir la résistance R, qui traduit le fait que les électrons qui traversent la bobine perdent de l'énergie en interagissant avec les ions du réseau métallique constituant le fil conducteur. Cette énergie perdue par les électrons est récupérée par les ions dont l'agitation thermique augmente. Ainsi, la température du fil s'élève. Le terme $R\,.\,i^2\,.\,\mathrm{d}t$ correspond donc à l'effet Joule.

• Le terme $L\,.\,i\,.\,\mathrm{d}i$ est algébrique. Il représente une petite quantité d'énergie reçue (s'il est positif) ou fournie par la bobine, pendant le court intervalle de temps $\mathrm{d}t$, du fait de l'existence de son inductance L. Cet accroissement algébrique d'énergie de la bobine est appelé **énergie magnétique.**

b) *Énergie magnétique emmagasinée par une bobine*

Lorsque l'intensité du courant passe de la valeur i_1 à la valeur i_2, l'énergie magnétique E_{mgn} qui s'emmagasine dans la bobine est la somme des variations précédentes, calculable par intégration :

$$E_{mgn} = \int_{i_1}^{i_2} L\,.\,i\,.\,\mathrm{d}i = \frac{1}{2}\,L\,.\,i_2^2 - \frac{1}{2}\,L\,.\,i_1^2.$$

En particulier, si l'intensité passe de 0 à une valeur i, l'énergie magnétique qui s'emmagasine dans la bobine s'exprime par :

$$E_{mgn} = \frac{1}{2}\,L\,.\,i^2$$

E en joule (J)
L en henry (H)
i en ampère (A)

c) *Manifestations de l'énergie magnétique emmagasinée*

A l'ouverture d'un circuit inductif, l'énergie magnétique peut être restituée. Par exemple dans le montage de la figure 22, quand l'interrupteur est fermé, le courant d'intensité i ne passe que dans la bobine, à cause de la diode. La bobine emmagasine l'énergie : $\frac{1}{2}\,L\,.\,i^2$.

A l'ouverture du circuit, la bobine restitue cette énergie dans la seconde branche du circuit : le moteur tourne et peut soulever une petite masse (fig. 23).

L'intensité du courant varie de i à 0 en très peu de temps. Il en résulte une tension :

$$u = L\,.\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

qui peut être beaucoup plus importante que la tension d'alimentation.
Cette **surtension** peut être mise en évidence par différents effets spectaculaires.

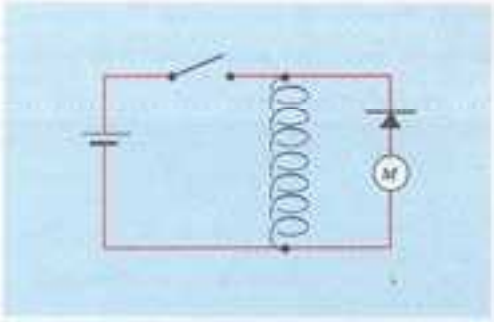


Fig. 22. *La bobine est enroulée autour de la carcasse d'un transformateur légèrement ouvert.*

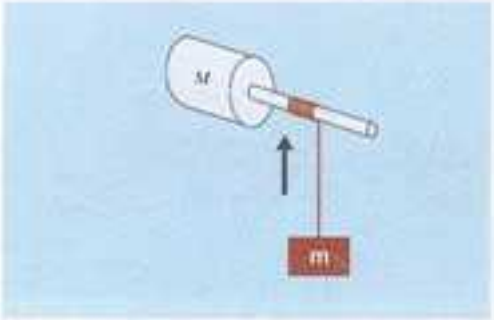


Fig. 23

• *Étincelles de rupture*

En ouvrant un circuit comportant une bobine de grande inductance, il se produit des étincelles au niveau de l'interrupteur (fig. 24).

Ces étincelles sont le plus souvent néfastes. Elles usent les contacts et créent des parasites électromagnétiques dans leur voisinage (crépitements dans les postes de radio). L'un des moyens utilisés pour les faire disparaître, consiste à utiliser un condensateur qui absorbe l'énergie magnétique.

Les échanges d'énergie entre une bobine et un condensateur sont étudiés au chapitre 9.

• *Allumage d'une lampe au néon*

Il existe des lampes au néon dont la tension d'amorçage est d'environ 70 V. Montées en dérivation sur une bobine alimentée par un générateur de 6 V (fig. 25) elles s'illuminent brièvement à chaque rupture du courant. La surtension temporaire dépasse donc 70 V.

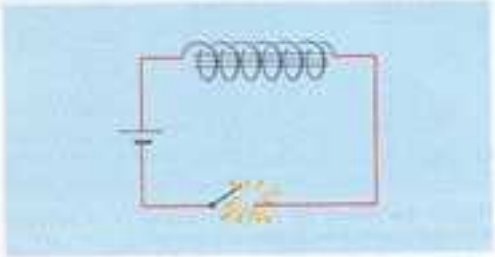


Fig. 24



Fig. 25

4 APPLICATIONS

Les phénomènes d'induction électromagnétique sont mis à profit pour engendrer des courants, faire varier la tension des courants alternatifs, réaliser un freinage électromagnétique, etc.

1. Alternateurs

Les alternateurs sont des générateurs de courants alternatifs. Ils reçoivent de l'énergie mécanique et fournissent de l'énergie électrique.

• *Principe*

En tournant devant des bobines en série, fixées sur le **stator**, des électro-aimants montés sur un **rotor** induisent une f.é.m. alternative dans les bobines de l'induit (fig. 26). Une version simplifiée de ce dispositif a déjà été donnée à la figure 14.

• *Fonctionnement*

Le rotor est mis en mouvement par une chute d'eau (centrales hydrauliques), ou par une turbine qui tourne sous l'effet de vapeur d'eau sous pression (centrales thermiques ou nucléaires).

Le sens des enroulements des bobines en série du rotor sont réalisés pour qu'il se forme des extrémités successivement nord et sud sur les pièces polaires. Ces bobines sont alimentées par un dispositif excitateur à balais frotteurs.

Le sens des enroulements de deux bobines fixes, voisines du stator, sont inversés. Ainsi, toutes les f.é.m. induites dans le stator s'ajoutent.

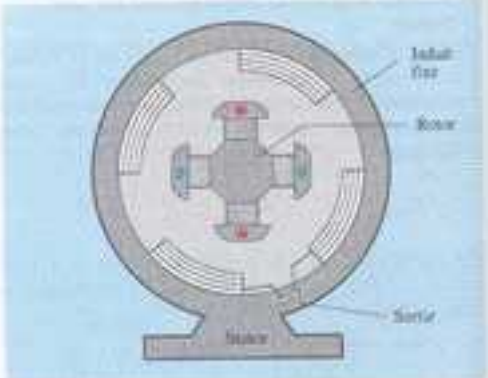


Fig. 26. ***Représentation schématique d'un alternateur à deux paires de pôles.***



Fig. 27. *Rotor d'un alternateur industriel (Gravelines).*

2. Courants de Foucault

Les courants de Foucault sont des courants induits qui apparaissent dans les conducteurs, lors des variations de flux magnétique.

a) Inconvénients

Les courants de Foucault prennent naissance dans les carcasses métalliques des moteurs, des transformateurs, des alternateurs...
L'échauffement par effet Joule qui en résulte constitue une perte d'énergie, ce qui **diminue le rendement** de ces appareils. Les courants de Foucault sont moins intenses dans les empilements en feuillets isolés que dans les masses métalliques compactes.

b) Mise à profit

Les courants de Foucault sont importants quand les variations de flux magnétiques sont rapides. Si c'est un mouvement de rotation qui les provoque, ils donnent lieu, conformément à la loi de Lenz, à des forces de **ralentissement** d'autant plus grandes que les rotations sont plus rapides. Cela est utilisé pour certains véhicules lourds, en faisant pénétrer l'entrefer d'un électro-aimant de part et d'autre d'un disque métallique solidaire des roues. Les forces de ralentissement, très intenses aux grandes vitesses, s'exercent sans que les roues puissent se bloquer puisqu'elles s'amenuisent quand la vitesse décroît.

3. Transformateurs

a) Principe

Deux bobines, sans aucun lien électrique entre elles, sont enroulées autour d'une carcasse ferromagnétique refermée sur elle-même (fig. 28). Elles comportent respectivement n_1 et n_2 spires.
Une tension sinusoïdale u_1, de valeur maximale U_1, est appliquée aux bornes de l'une des bobines, appelée primaire du transformateur. Cela induit un champ magnétique alternatif dans la carcasse de fer, où il se trouve canalisé.
Les variations de flux au niveau de l'autre bobine, appelée secondaire du transformateur, y induisent une f.é.m. sinusoïdale e_2, d'où une tension sinusoïdale u_2 aux bornes du secondaire, de valeur maximale U_2.
Lorsque le transformateur est en fonctionnement, des courants sinusoïdaux d'intensité i_1 et i_2 (valeurs maximales I_1 et I_2) passent dans le primaire et le secondaire. Les grandeurs précédentes sont liées approximativement par les relations suivantes :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Le rapport $\frac{n_2}{n_1}$ des nombres de spires est appelé rapport de transformation (voir Pour en savoir plus).
Le rendement des gros transformateurs est excellent puisqu'ils restituent par le secondaire environ 99 % de l'énergie qu'ils reçoivent au primaire.

b) Utilisation

• *Transformateurs élévateurs*
Les transformateurs élévateurs (de tension) comportent plus de spires au secondaire qu'au primaire. La tension maximale U_2 au secondaire est donc plus élevée que U_1.
Le **transport d'énergie** électrique à distance se fait commodément par des « fils électriques ». La résistance électrique de ces lignes ne peut pas être rendue très petite, car cela nécessiterait des gros câbles lourds et coûteux. Il en résulte des **pertes en lignes**, par effet Joule, lors du transport de l'énergie.

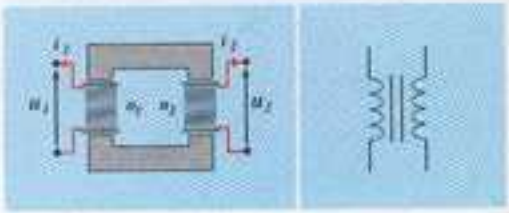
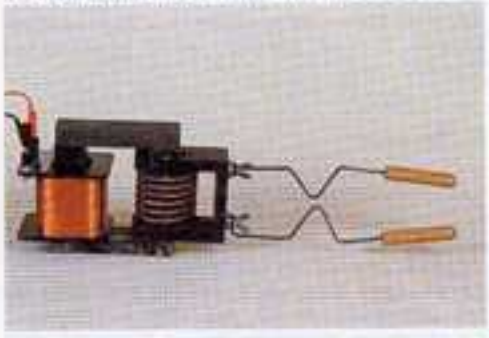


Fig. 28. *Transformateur et sa représentation symbolique.*

En courant continu, ces pertes sont proportionnelles au carré de l'intensité ($W = R.I^2.t$). En courant alternatif, elles sont proportionnelles au carré de l'intensité maximale. Avec un transformateur élévateur dont le rapport de transformation est égal à 30, l'énergie sera transportée avec une intensité 30 fois moindre, et les pertes seront $30^2 = 900$ fois plus faibles.
Pratiquement, E.D.F. utilise une succession de transformateurs élévateurs : l'énergie est transportée sous très haute tension (400 kV).

• *Transformateurs abaisseurs*
Les transformateurs abaisseurs comportent moins de spires au secondaire qu'au primaire. Ils délivrent une tension plus basse que celle qui leur est appliquée, ce qui est utile pour des questions de **sécurité** (220 V pour les usagers; 12 V pour les jouets d'enfants...).
Ces transformateurs présentent aussi l'intérêt de pouvoir fournir de **grandes intensités.** Les figures 29 montrent deux types d'application : la soudure par points et le four à induction.
La grande intensité qui passe dans le petit nombre de grosses spires suffit pour faire fondre les métaux en contact (soudure) ou dans la rigole conductrice constituant le secondaire (four).

• *Transformateurs d'isolement*
Leur rapport de transformation est égal à 1. Les tensions primaire et secondaire sont égales.
Ils permettent d'isoler un circuit, d'un autre.



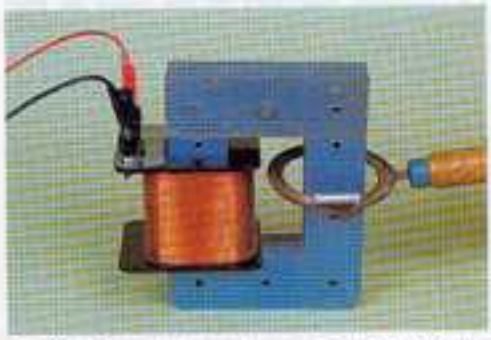


Fig. 29. ***Principe de la soudure en un point et des fours à induction.***

4. Autres applications

a) En radio-télévision

Chaque station envoie dans l'espace une onde électromagnétique « **porteuse** » de fréquence donnée (fig. 30). Cette onde progressive est constituée d'un champ électrique et d'un champ magnétique orthogonaux qui se propagent à la célérité de la lumière. Une telle onde monofréquence ne transporte que l'information de son « existence ». Elle est rendue plus riche d'informations par **modulation,** obtenue en superposant à la porteuse des variations d'amplitude ou de fréquence.
La modulation d'amplitude est réalisée par les caméras vidéo (ou les microphones en radio), par traitements électroniques assez complexes des signaux. La séquence terminale est l'induction dans l'antenne, par un transformateur, d'un courant oscillant qui module la porteuse.
Le champ électromagnétique arrive très affaibli sur l'antenne réceptrice, où il induit un très faible courant qui reproduit le signal modulé.
Les dispositifs électroniques internes aux appareils récepteurs les transforment en informations visibles ou sonores.

b) Bandes magnétiques

Les bandes magnétiques enregistrent les informations dans des zones successives où la bande devient plus ou moins aimantée. Ce sont les têtes d'enregistrement qui réalisent cette opération.
En défilant devant une tête de lecture, la bande y induit un courant par suite des variations du champ magnétique.

Tous ces exemples, dont la liste pourrait être encore allongée, montrent la variété et l'importance pratique des phénomènes d'induction électromagnétique.



Fig. 30

Fiche expérimentale

VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DE LA LOI DE FARADAY

1) Montage

Deux bobines b_1 et b_2 de 500 ou 1 000 spires sont disposées face à face (fig. 31). La bobine b_1 est alimentée par une source de tension triangulaire (fréquence 1 kHz environ) par l'intermédiaire d'un dipôle ohmique de résistance $R = 1$ kΩ.

La tension u_1 aux bornes de R est visualisée sur la voie 1 d'un oscilloscope. La tension u_2 aux bornes de b_2 est visualisée sur la voie 2.

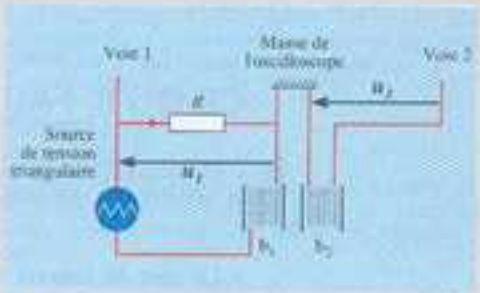


Fig. 31. ***Montage pour la vérification expérimentale de la loi de Faraday.***

2) Oscillogrammes (fig. 32)

La voie 1 montre une tension triangulaire, et la voie 2 une tension en créneaux.



Fig. 32. ***Oscillogrammes obtenus. La tension triangulaire visualise $\Phi(t)$, et la tension en créneaux la f.é.m. induite dans b_2.***

3) Interprétation

La bobine b_1 joue le rôle de circuit inducteur, la bobine b_2 celle de circuit induit.

La tension $u_1 = R \cdot i_1$ est proportionnelle au champ magnétique inducteur $B_1 = K' \cdot i_1$. Comme les aires sont invariables, le flux à travers b_1 est proportionnel à i_1. Ainsi, u_1 visualise le flux inducteur $\Phi(t)$.

La tension u_2 visualise, éventuellement au signe près selon la façon dont les enroulements des spires sont réalisés dans b_2, la f.é.m. induite dans b_2 : $u_2 = r \cdot i - e_2 = -e_2$ car b_2 ne débite pas ($i \approx 0$).

• Le flux inducteur (visualisé par u_1) est donc triangulaire.

• L'allure rectangulaire de u_2, qui visualise la f.é.m. induite, montre bien que cette f.é.m. est proportionnelle à $\frac{d\Phi}{dt}$, puisque la dérivée d'une fonction triangulaire est une fonction rectangulaire.

C'est la loi de Faraday.

Remarque
Une tension en créneaux est obtenue à la sortie d'un montage dérivateur à l'entrée duquel est appliquée u_1 (fig. 33).

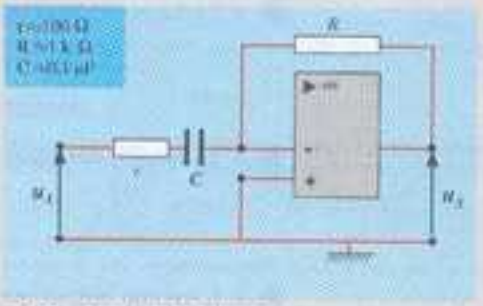


Fig. 33. ***Montage dérivateur :***

$$u_2 = -R \cdot C \cdot \frac{du_1}{dt}.$$

Un oscilloscope permet de visualiser u_1 et u_2.

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

• Un courant induit ne prend naissance dans un **circuit fermé** que s'il se produit des **variations du flux inducteur** à travers le circuit.

• Le **sens du courant induit** se détermine par la loi de Lenz : le **flux induit** et la **variation de flux inducteur** sont de signes opposés.

• La loi de Faraday donne la **f.é.m. d'induction** en fonction de la vitesse de **variation** du flux inducteur :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

• La **f.é.m.** d'induction et le courant induit sont de **même signe.**

• Le **flux propre** à travers un circuit est donné par $\varphi = L.i$, où L désigne **l'inductance** du circuit, qui s'exprime en **henry** (H).
Pour un solénoïde : $L = \mu_0 . \frac{N^2 . S}{\ell}$.

• La **f.é.m.** d'auto-induction est :

$$e = -L.\frac{di}{dt}.$$

• La tension aux bornes d'un dipôle **résistant et inductif** est donnée par :

$$u = R.i + L.\frac{di}{dt}.$$

• L'énergie magnétique emmagasinée dans une bobine est :

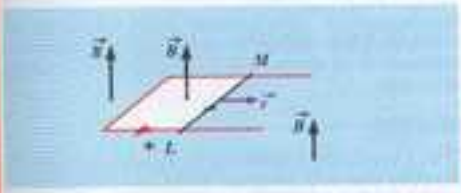
$$E_{mag} = \frac{1}{2} L.i^2.$$

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

Tige déplacée sur des rails horizontaux

Une tige LM de longueur ℓ est déplacée d'un mouvement uniforme de vitesse $\vec{v}$ sur deux rails horizontaux baignant dans un champ magnétique uniforme vertical pointant vers le haut.



1) Dans le cas de figure indiqué (circuit orienté dans le sens $\overrightarrow{LM}$), préciser les signes du flux inducteur, de sa variation, du courant induit et de la f.é.m. induite.

2) Les gains d'énergie de la tige sont comptés positivement.

a) Exprimer, en fonction des vecteurs $i.\vec{\ell}$, $\vec{B}$ et $\vec{v}$, l'énergie mécanique E_m reçue par la tige pendant un intervalle de temps dt.

b) L'énergie électrique E_e fournie par la tige pendant l'intervalle de temps dt s'exprime-t-elle par $E_e = e.i.dt$ ou par $E_e = -e.i.dt$?

c) La tige n'accumulant pas d'énergie, que peut-on dire de la somme $E_m + E_e$? En déduire une expression de la f.é.m., e, en fonction des vecteurs $\vec{\ell}$, $\vec{B}$ et $\vec{v}$.

SOLUTION

1) Avec l'orientation choisie, le vecteur-aire $\vec{S}$ pointe vers le haut. Le flux inducteur $\Phi = \vec{B}.\vec{S}$ est donc positif. L'aire du circuit augmente : la variation $\Delta\Phi$ de flux inducteur est positive. D'après la loi de Lenz, l'intensité du courant induit i est négative : le courant va de M vers L. La f.é.m. induite e, de même signe que i, est donc négative.

2) Pour maintenir la tige en mouvement uniforme, il faut lui appliquer (vers la droite) une force $\vec{F}$ opposée à la force de Laplace $\vec{F}' = i.\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ due au courant induit i (avec $i<0$, cette force pointe bien vers la gauche).

a) L'énergie E_m reçue par la tige est comptée positivement. Pendant l'intervalle de temps dt, la tige se déplace de $\vec{v}.dt$ et le travail de la force appliquée est $W = (-i.\vec{\ell} \wedge \vec{B}).\vec{v}.dt$. D'après les règles du produit vectoriel, $\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ pointe vers la droite, et son produit scalaire avec $\vec{v}$ est positif. Comme i est négatif, l'expression précédente est bien positive. En tenant compte de l'anticommutativité du produit vectoriel, l'énergie mécanique reçue s'écrit :

$$E_m = (i.\vec{B} \wedge \vec{\ell}).\vec{v}.dt$$

b) L'énergie électrique fournie par la tige est à compter négativement. Comme e et i sont négatifs, c'est la seconde expression qui convient :

$$E_e = -e.i.dt$$

c) La tige n'accumulant pas d'énergie, la somme de ce qu'elle reçoit et fournit est nulle : $E_m + E_e = 0$.

Par suite, $(i.\vec{B} \wedge \vec{\ell}).\vec{v}.dt = e.i.dt$, d'où :

$$e = (\vec{B} \wedge \vec{\ell}).\vec{v}$$

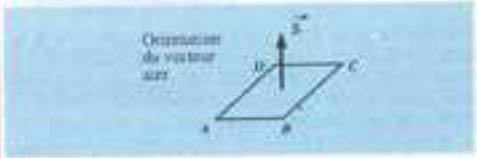
Le vecteur $\vec{B} \wedge \vec{\ell}$ pointe vers la gauche et son produit scalaire par $\vec{v}$ est négatif, comme il se doit.

EXERCICE 2

F.é.m. induite

La valeur du flux inducteur à travers une bobine plate de forme rectangulaire $ABCD$ évolue en fonction du temps comme l'indique le diagramme temporel ci-dessous.





L'orientation choisie pour la bobine est indiquée ci-dessus.

Représenter graphiquement la courbe indiquant l'évolution en fonction du temps de la f.é.m. induite dans la bobine.

SOLUTION

Lorsque le flux est croissant, ses variations sont positives. D'après le diagramme, il croît de 50 mWb en 5 ms : $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 10\ \text{Wb.s}^{-1}$. Or $e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, d'où :

$e = -10$ V.

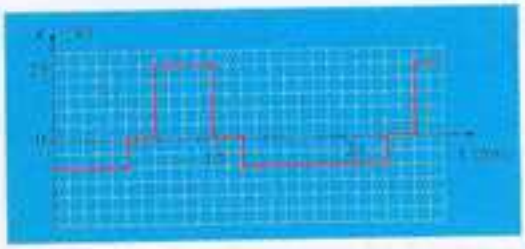
Lorsque le flux reste constant, il n'y a pas de f.é.m. induite : $e = 0$.

Le flux décroît de 100 mWb en 4 ms :

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -25\ \text{Wb.s}^{-1}, \quad \text{d'où} \quad e = 25\ \text{V}.$$

D'où le diagramme :

1. EXERCICES RESOLUS



EXERCICE 3

Courant induit

Un solénoïde assez long, comportant 1 000 spires par mètre, chacune de rayon $r = 5{,}0$ cm, est parcouru par un courant d'intensité $i = 0{,}1 \cos(1\,000t)$.

Une bobine circulaire plate, comportant 100 spires de rayon moyen $R = 8{,}0$ cm, entoure la région centrale du solénoïde.

1) Déterminer l'expression en fonction du temps du flux inducteur à travers la bobine plate.

2) La bobine plate constituant un circuit fermé de résistance 0,2 Ω, quelle est l'expression de l'intensité qui la parcourt?

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ SI

SOLUTION

1) Le champ magnétique pratiquement uniforme à l'intérieur du solénoïde est $B = \mu_0 . n . i$.

$$B = 4\pi \times 10^{-7} \times 1\,000 \times 0{,}1 \cos(1\,000t)$$
$$= 1{,}26 \times 10^{-4} \cos(1\,000t)$$

Orientant la spire plate dans le sens du courant **à la date $t = 0$** dans le solénoïde, le flux inducteur est positif pour $t = 0$. L'aire utile est celle où le champ varie, c'est-à-dire l'intérieur du solénoïde.

Cette aire utile vaut :

$$S = \pi . r^2 = 3{,}14 \times (5 \times 10^{-2})^2 = 7{,}85 \times 10^{-3}\ \text{m}^2.$$

Comme il y a 100 spires,

$$\Phi = N . B . S = \mathbf{9{,}90 \times 10^{-5} \cos(1\,000t).}$$

2) Dans le calcul de la f.é.m. $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, le signe − qui s'introduit par dérivation du cosinus disparaît à cause du signe − qui traduit la loi de Lenz :

$$e = 9{,}90 \times 10^{-5} \sin(1\,000t).$$

L'intensité du courant induit vaut donc :

$$i = \frac{e}{r} = \mathbf{0{,}49 \sin(1\,000t).}$$

L'intensité maximale de ce courant sinusoïdal est voisine de 0,5 A.

EXERCICE 4

Auto-inductance

Un fil en cuivre de longueur totale p, de diamètre d (vernis isolant compris) est enroulé en N spires jointives autour d'une pièce cylindrique en bois de diamètre D. Le diamètre moyen d'une spire est ainsi $(D + d)$. La longueur du solénoïde est désignée par X. La résistivité du cuivre vaut $\rho = 1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega.\text{m}$.

1) Exprimer l'inductance L de la bobine obtenue :

a) en fonction de p et X ;

b) en fonction de N, d et D.

2) Exprimer la résistance de la bobine précédente, en fonction de ρ, N, d et D.

3) Comment la résistance et l'auto-inductance se trouvent-elles modifiées lorsque toutes les dimensions linéaires de la bobine (D, d, X) sont simultanément doublées?

SOLUTION

1) *a*) Le solénoïde, constitué de N spires jointives de diamètre d, a pour longueur $X = N . d$. Chaque spire a pour aire $S = \dfrac{\pi . (D + d)^2}{4}$ et la longueur totale des N tours de fil est $p = N . \pi . (D + d)$.

L'inductance vaut :

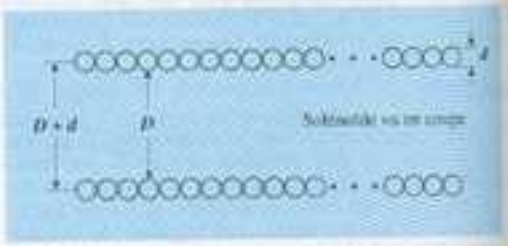
$$L = \mu_0 . \frac{N^2 . S}{X} = \mu_0 . N^2 . \left(\frac{\pi . (D + d)^2}{4}\right) . \frac{1}{N . d}$$

En y remplaçant $(D + d)$ par $\dfrac{p}{N . \pi}$, il vient :

$$L = \mu_0 . \frac{p^2}{4\pi . N . d},$$

et, en tenant compte de la valeur $4\pi \times 10^{-7}$ pour μ_0 :

$$\boldsymbol{L = 10^{-7} \frac{p^2}{X}.}$$



b) Avec $p = N . \pi . (D + d)$ et $X = N . d$, l'expression précédente devient :

$$\boldsymbol{L = 10^{-7} \pi^2 . N . \frac{(D + d)^2}{d}.}$$

2) La résistance $R = \dfrac{\rho . p}{s}$ s'exprime par :

$$R = \rho . \frac{N . \pi . (D + d)}{\frac{d^2}{4} . \pi} \qquad \boldsymbol{R = 4\rho . N . \frac{(D + d)}{d^2}.}$$

3) En doublant la longueur X du solénoïde et le diamètre d du fil, le nombre N de spires reste le même. D'après les rapports de diamètres qui interviennent dans les formules (D est aussi doublé), **l'inductance est multipliée par 2 et la résistance est divisée par 2.**

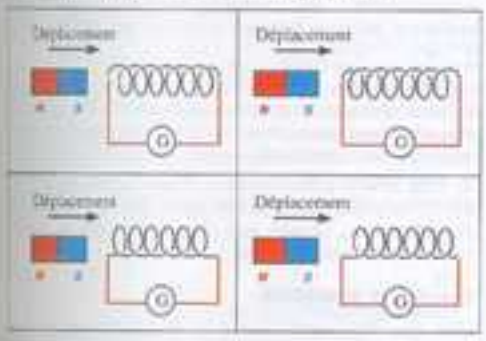
2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATION

Sans calculs

Exercice 1

Le galvanomètre dévie-t-il dans le même sens dans les cas des montages indiqués ci-dessous?



Préciser le sens du déplacement de l'aiguille du galvanomètre en supposant qu'elle dévie vers la droite lorsque le courant y pénètre par sa gauche.

Exercice 2

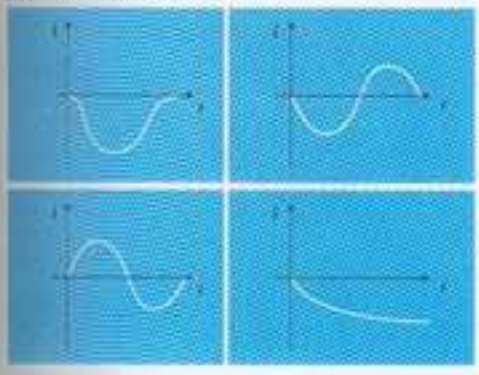
L'expérience présentée dans le cours à la figure 15 montre le retard à l'allumage d'une lampe. Elle ne met pas en évidence de retard à son extinction. Justifier.

Exercice 3

Un aimant droit vertical est lâché au-dessus d'une spire horizontale. Il la traverse dans sa région centrale.



Quelle est la courbe qui représente le mieux l'allure de l'évolution en fonction du temps de l'intensité du courant induit dans la spire?



Exercice 4

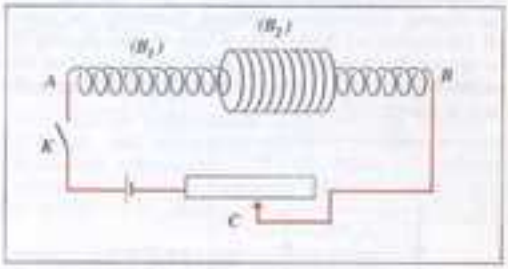
Le flux magnétique à travers une bobine plate varie-t-il linéairement :

1) Si un aimant droit dont la direction est orthogonale au plan de la bobine est approché à vitesse constante de la région centrale de la bobine?

2) Si une intensité variant linéairement en fonction du temps passe dans la bobine?

Exercice 5

Préciser le sens du courant induit dans la bobine formée B_2 quand on réalise successivement les opérations suivantes :



1) Fermer l'interrupteur K.

2) Introduire dans B_1 un noyau de fer doux.

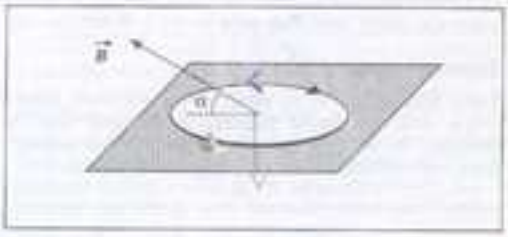
3) Déplacer le curseur C vers la gauche.

4) Ouvrir l'interrupteur K.

F.é.m. induite

*** Exercice 6**

1) Calculer le flux magnétique à travers la spire avec les données suivantes :



Bobine plate de 100 spires;
Rayon de chaque spire : 15 cm;
$\alpha = 30°$; $B = 0,05$ T.

Le champ magnétique est uniforme.

2) Quelle est la f.é.m. induite si le champ magnétique s'annule progressivement, régulièrement, en 0,05 s?

3) Quel est alors le sens du courant induit?

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 7

Un avion métallique vole horizontalement à mach 2 (600 $m.s^{-1}$ environ). Son envergure est de 25 m.

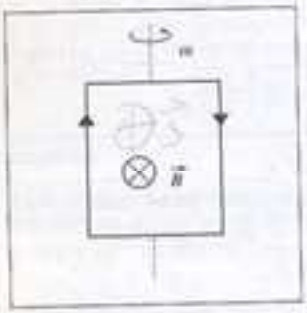
1) Quelle est la f.é.m. induite entre les extrémités des ailes?

2) Pourrait-on réaliser un tachymètre en reliant par des fils conducteurs un voltmètre aux extrémités des ailes?

La composante verticale du champ terrestre vaut 40 μT.

* Exercice 8

Un cadre rectangulaire vertical de hauteur h, de largeur a, comporte N spires de fil conducteur. Il plonge dans un champ magnétique uniforme horizontal de valeur B. Un moteur lui communique une vitesse de rotation ω autour de l'axe vertical passant par les milieux des côtés horizontaux. L'orientation du circuit est indiquée sur la figure.



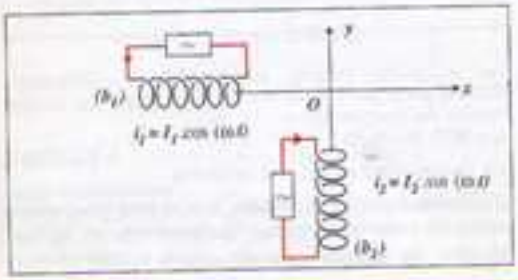
$a = 3$ cm;
$h = 5$ cm;
$N = 20$ spires;
$B = 0{,}15$ T;
$\omega = 20\pi$ rad.s^{-1}.

1) La figure représente la position du cadre à la date $t = 0$. Exprimer en fonction du temps l'écart angulaire θ entre le vecteur-aire et le vecteur-champ magnétique $\vec{B}$.

2) Déterminer l'expression du flux magnétique $\Phi(t)$ à travers le cadre, ainsi que celle de la f.é.m. induite $e(t)$.

Exercice 9

Deux bobines b_1 et b_2 horizontales ont leurs axes à angle droit (la figure ci-dessous est une vue de dessus). b_1 et b_2 sont parcourues par les courants dont les intensités sont données sur la figure.



Le champ créé en O par b_1 est dirigé selon Ox. Celui qui est créé en O par b_2 est selon Oy. Les valeurs maximales B_0 des champs créés par les deux bobines sont égales.

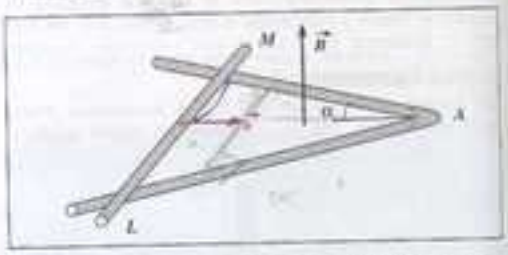
1) Représenter, en tenant compte des orientations indiquées sur les bobines et des sens des enroulements, les vecteurs-champs magnétiques créés par les deux bobines aux dates suivantes : $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4\omega}$; $t = \frac{\pi}{2\omega}$; $t = \frac{3\pi}{4\omega}$.

2) Montrer que le champ magnétique créé par les deux bobines équivaut en O à un « champ tournant » dont les caractéristiques seront précisées.

3) Une bobine plate circulaire, d'aire 5 cm^2, est placée en O, son axe étant dirigé selon Ox. Elle comporte $N = 20$ spires. Quelle est l'expression de la f.é.m. induite dans cette bobine?

* Exercice 10

Une tige LM de longueur ℓ repose sur deux rails horizontaux formant un écart angulaire égal à 2α. Elle est déplacée, à vitesse constante $\vec{v}$, en restant perpendiculaire à la bissectrice des deux rails. L'ensemble baigne dans un champ uniforme de vecteur $\vec{B}$ vertical pointant vers le haut.



1) A quelle distance d de A peut-on poser la tige pour que ses deux extrémités reposent sur les rails? La tige étant dans cette position, le point de l'espace qui coïncide avec son milieu O est pris comme origine. L'axe Ox passant par A est orienté de O vers A. x désigne l'abscisse du milieu de la tige LM en mouvement.

2) Calculer le flux magnétique à travers le circuit LMA en fonction de x, ℓ et α.

3) Déterminer l'expression de la f.é.m. induite dans le circuit.

Intensités de courants induits

Exercice 11

Une bobine plate circulaire souple, de 1 m de diamètre, de résistance 0,5 Ω comporte 100 spires. Déterminer l'intensité du courant induit dans les cas suivants :

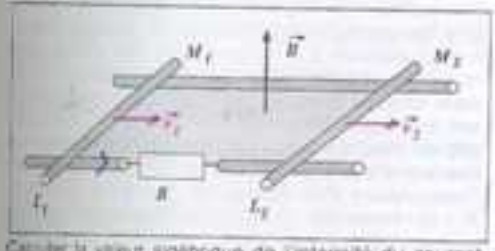
1) La bobine est placée perpendiculairement au méridien magnétique et son aire devient nulle en 0,05 s.

2. EXERCICES PROPOSÉS

2) La bobine est verticale, dans le plan méridien magnétique. Elle fait un demi-tour, à vitesse angulaire constante, autour de son diamètre horizontal en 0,1 s. Les composantes horizontale et verticale du champ magnétique terrestre valent respectivement 20 μT et 40 μT.

***Exercice 12**

Deux tiges L_1M_1 et L_2M_2 parallèles reposent sur deux rails horizontaux auxquels elles restent perpendiculaires. Elles sont déplacées aux vitesses respectives $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ en restant au contact des rails. Les rails et les tiges ont une résistance électrique nulle. Une résistance $R = 0{,}05\ \Omega$ est insérée sur l'un des rails, entre les deux tiges. L'ensemble baigne dans un champ uniforme vertical pointant vers le haut, de valeur $B = 0{,}2$ T.



Calculer la valeur algébrique de l'intensité du courant induit dans le cadre $L_1L_2M_2M_1$ dans les cas suivants :

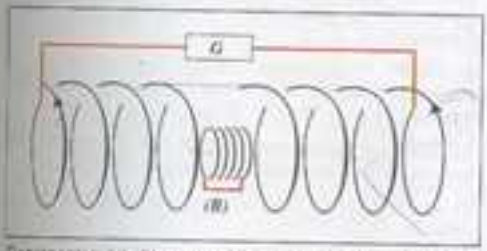
1) $v_1 = v_2 = 0{,}5\ m.s^{-1}$ vers la droite.

2) $v_1 = 0{,}5\ m.s^{-1}$ vers la droite, $v_2 = 0{,}5\ m.s^{-1}$ vers la gauche.

3) $v_1 = 0{,}5\ m.s^{-1}$ vers la droite, $v_2 = 0{,}25\ m.s^{-1}$ vers la gauche.

Exercice 13

Un solénoïde comportant $n_1 = 2\,000$ spires par mètre, chacune d'aire 20 cm², est alimenté par un générateur G. A l'intérieur du solénoïde, dans sa région centrale, se trouve une bobine plate (B), de même axe que le solénoïde, comportant $N = 300$ spires, chacune d'aire moyenne $S = 10\ cm^2$. La résistance de (B) est de 5 Ω. Elle est insérée dans le même sens (indiqué sur la figure) que le solénoïde.



Représenter graphiquement les courbes qui montrent l'évolution en fonction du temps de l'intensité du courant induit dans (B) dans les cas suivants :

1) L'intensité dans le solénoïde passe de $i = -0{,}5$ A à 2 en 1 ms.

2) L'intensité dans le solénoïde est « triangulaire » : elle est nulle aux dates $t = k.T$

(k entier et $T = 2 \times 10^{-3}$ s);

elle est maximale aux dates $t = \frac{(2k+1)}{2}.T$ et vaut alors $I_m = 200$ mA.

3) L'intensité dans le solénoïde est :

$$i = 0{,}3 \cos(3\,000t).$$

Auto-induction

Exercice 14

Un solénoïde de longueur $\ell = 0{,}40$ m, comportant 6 000 spires, chacune d'aire 15 cm², est parcouru par un courant. Calculer l'énergie magnétique qu'il emmagasine lorsque l'intensité passe de 0 à 1 A; de 1 A à 2 A; de 2 A à 3 A.

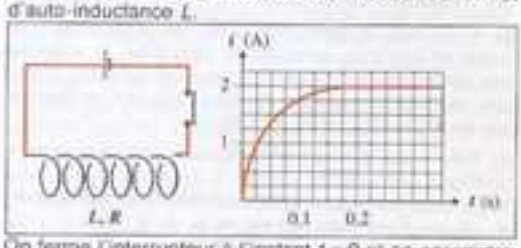
Exercice 15

Une bobine d'inductance $L = 0{,}5$ H, de résistance $R = 5\ \Omega$, est parcourue par un courant alternatif sinusoïdal d'intensité $i = 0{,}8 \cos(100\pi.t)$. Déterminer la tension aux bornes de la bobine. La mettre sous la forme $u = U_m.\cos(\omega.t + \varphi)$.

EXERCICES D'APRÈS BACCALAUREATS

***Exercice 16**

Un circuit se compose d'un générateur de f.é.m. $E = 20$ V et de résistance intérieure négligeable, d'un interrupteur et d'une bobine de résistance R et d'auto-inductance L.



On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et on enregistre à l'oscilloscope la représentation graphique de $i(t)$, où t est la durée comptée à partir de la fermeture du circuit et i l'intensité du courant.

Cette courbe présente, à l'instant $t = 0$, une tangente dont le coefficient directeur est 40 unités du SI. Au bout du temps $t = 0{,}2$ s, on peut considérer que le courant est établi, son intensité étant constante et égale à 2 A.

1) A l'aide de la représentation graphique, préciser comment varie qualitativement la f.é.m. d'auto-induction e.

2) Déterminer, à l'instant de la fermeture, lorsque l'intensité est encore pratiquement nulle, la f.é.m. d'auto-induction e.
En déduire l'auto-inductance L de la bobine.

3) Quelle est la f.é.m. d'auto-induction lorsque $t > 0{,}2$ s? En déduire la résistance de la bobine.

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES DESTINÉS A TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 19 — A.1.a.

Définir les expressions suivantes : circuit oscillant; pulsation propre; énergie magnétique; amortissement, entretien d'un circuit oscillant.

Exercice 20 — A.1.b.

La période des oscillations d'un oscillateur mécanique est-elle plutôt de l'ordre de la seconde ou de la milliseconde? Même question pour un circuit oscillant.

Exercice 21 — A.1.c.

La résistance d'un dipôle ohmique dépend-elle de la température du dipôle? de la fréquence du courant?

Exercice 22 — A.1. c.

Énoncer, sans formule la loi de conservation de l'énergie électromagnétique d'un circuit oscillant.

Exercice 23 — A.1.c.

Rappeler les propriétés du modèle d'amplificateur opérationnel en fonctionnement linéaire idéal.

Exercice 24 — A.2.b.

Suivre la même démarche que dans le chapitre 5 (page 92 : supposer connue l'expression de l'énergie magnétique et aboutir à celle de l'énergie potentielle) pour introduire l'expression $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ de l'énergie du condensateur chargé.

Exercice 25 — A.2.b.

Dessiner de mémoire le montage correspondant au circuit d'entretien des oscillations électriques d'un circuit oscillant.

Exercice 26 — A.2.b.

Démontrer la relation de conservation de l'énergie électromagnétique pour un circuit oscillant.

Exercice 27 — B.1.

Comparer les propriétés de l'*A.O.* idéal, à celle d'un *A.O.* (TL081 de préférence) réel, en demandant une photocopie du catalogue du constructeur à un marchand de matériel électronique.

Exercice 28 — B.2.

Trouver les incorrections :

1) Un circuit oscillant est réalisé en montant en série une résistance avec une capacité.

2) La période des oscillations d'un circuit oscillant est proportionnelle à la racine carrée du rapport de l'inductance sur l'inverse de la capacité.

3) L'inductance d'un circuit oscillant est l'analogue électrique de la masse d'un oscillateur mécanique.

4) La raideur d'un ressort est l'analogue mécanique de l'inverse de la capacité d'un circuit oscillant.

Exercice 29 — B.3.

Écrire l'équation différentielle à laquelle obéit la charge $q(t)$ d'un circuit oscillant non amorti. Vérifier qu'une solution du type $q = Q_0 . e^{-\gamma t} . \cos(\omega t + \varphi)$ convient à condition de prendre pour la pulsation ω une expression convenable, que l'on exprimera en fonction de $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L . C}}$ et de $\gamma = \frac{R}{2L}$. Cette pulsation existe-t-elle toujours? Que se passe-t-il physiquement quand elle devient imaginaire?

Exercice 30 — B.4.

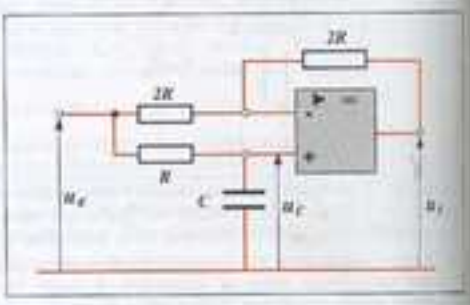
Préparer un exposé sur l'utilisation des circuits oscillants en radio et télévision.

Exercice 31 — C.1.b.

Reprendre l'étude du dispositif d'entretien des oscillations dans le cas où la résistance insérée entre la sortie s' du circuit intégré linéaire et l'entrée inverseuse est la moitié de celle qui est insérée entre s et l'entrée non inverseuse.

Exercice 32 — C.2.b.

1) Pour le montage indiqué ci-dessous, déterminer la relation donnant la tension d'entrée u_e en fonction de R, C, u_s et $\frac{du_s}{dt}$. Même question pour la tension de sortie u_s.



2) En supposant que la tension aux bornes du condensateur soit sinusoïdale ($u_C = U_C . \cos(\omega . t)$), exprimer u_e et u_s sous la forme $u_e = U_e . \cos(\omega . t - \varphi_1)$ et $u_s = U_s . \cos(\omega . t - \varphi_2)$. Comparer U_e à U_s et φ_1 à φ_2. Justifier le nom de déphaseur donné à ce montage.

2. EXERCICES PROPOSÉS

EXERCICES DESTINÉS À TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 20 — A.1.a.

Définir les termes suivants : « flux inducteur », « flux induit », « auto-inductance ».

Exercice 21 — A.1.a.

Quels sont les noms des unités de flux magnétique? d'inductance? de f.é.m. induite?

Exercice 22 — A.1.b.

Une bobine dont l'inductance vaut 1 H possède-t-elle une grande inductance?

Exercice 23 — A.1.c.

Sans vous référer au cours, écrivez l'énoncé de la loi de Lenz.

Exercice 24 — A.1.c.

Exprimer l'inductance d'un solénoïde long en fonction de sa longueur ℓ et de la longueur p de fil enroulé.

Exercice 25 — A.1.c.

Préciser toutes les circonstances où le flux inducteur à travers un circuit peut varier.

Exercice 26 — A.1.c.

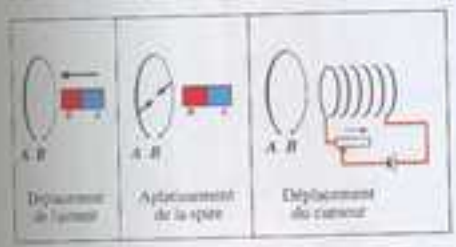
En quelle unité peut s'exprimer le rapport $\frac{L}{R}$ d'une inductance à une résistance. (Répondre en n'utilisant que les unités fondamentales m, kg, s...)

Exercice 27 — A.1.c.

Exprimer le volt à l'aide des unités fondamentales (m, kg, s, A...). Faire de même pour le weber par seconde. Conclusion?

Exercice 28 — A.2.b.

Déterminer le signe de la tension $u = V_A - V_B$ dans les circonstances indiquées sur les schémas ci-dessous.



Exercice 29 — B.1.

Préparer un exposé sur les travaux de Faraday.

Exercice 30 — B.2.

Faire un plan détaillé du cours en remplaçant chaque titre de paragraphe (1. 1), a)) par une phrase résumant l'essentiel du paragraphe.

Exercice 31 — B.3.

Une tige LM de longueur ℓ, orientée de L vers M, est déplacée orthogonalement à un champ vertical $\vec{B}$ ascendant uniforme.
Quelle est la signification physique des produits scalaires suivants :

$$(\vec{B} \wedge \vec{\ell}).\vec{v} \,?\quad (\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{\ell} \,?\quad (\vec{\ell} \wedge \vec{v}).\vec{B} \,?$$

Exercice 32 — B.3

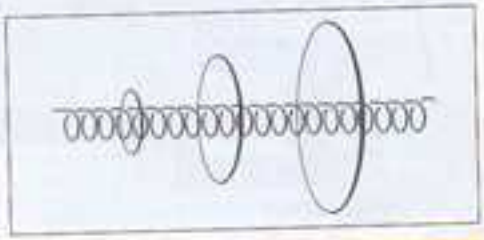
Lorsqu'on applique une tension constante à une bobine de résistance R et d'inductance L, le courant qui s'établit a une intensité donnée en fonction du temps selon la loi exponentielle : $i = I_{max}(1 - e^{-t/\tau})$, où τ désigne la « constante de temps » de la bobine $\left(\tau = \frac{L}{R}\right)$.
Tracer la courbe indiquant l'allure de l'évolution de $i(t)$.
Quelle est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $i(t)$ à la date $t = 0$? à la date $t = \tau$?
Au bout de combien de temps l'intensité atteint-elle une valeur égale à 99 % de sa valeur finale?

Exercice 33 — B.4.

Préparer des transparents pour rétroprojecteur pour montrer en classe l'évolution de la f.é.m., $e(t)$, induite dans une bobine circulaire qui tourne dans un champ uniforme autour d'un axe diamétral orthogonal au champ. La bobine sera représentée dans des positions successives se déduisant l'une de l'autre par rotation de 15°. La courbe $e(t)$ se construira peu à peu en insistant sur les variations qui se produisent d'une position à l'autre de la bobine.

Exercice 34 — C.1.b.

Un solénoïde très long est entouré de trois bobines « monospire » de rayons R, $2R$ et $3R$. Un courant variable passe dans le solénoïde. Les trois spires sont suffisamment éloignées les unes des autres pour être insensibles aux effets d'induction qu'elles pourraient mutuellement créer. Quelle doit être la relation entre les diamètres des fils constituant les trois spires pour qu'elles soient parcourues par le même courant induit?



Pour en savoir plus

THÉORIE SOMMAIRE DU TRANSFORMATEUR

1. Conventions

Les bobines étant orientées de telle sorte que les flux magnétiques qui les traversent soient de même signe, les sens des flèches associées aux tensions aux primaire et secondaire en résultent (fig. 34).

Les résistances des enroulements primaire et secondaire sont toujours faibles afin de limiter les pertes par effet Joule. Elles seront prises nulles en première approximation.

Enfin, la carcasse de fer, réalisée avec des feuillets, rend les pertes dues à l'existence des courants de Foucault assez faibles pour qu'il n'en soit pas tenu compte.

2. Rapport des tensions

Si φ désigne la valeur à la date t du flux magnétique, variable, à travers une spire, la relation $u = r.i - e$, générale avec les conventions adoptées, donne, avec $r_1 = r_2 = 0$:

$$u_1 = -e_1 = n_1.\frac{d\varphi}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = -e_2 = n_2.\frac{d\varphi}{dt}.$$

Par suite, le rapport des tensions variables vaut à chaque instant $\frac{u_2}{u_1} = \frac{n_2}{n_1}$.

Si le flux est sinusoïdal, $\varphi_m = \Phi.\sin(\omega.t)$ par exemple,

$$u_1 = n_1.\Phi_m.\omega.\cos(\omega.t)$$

et, $$u_2 = n_2.\Phi_m.\omega.\cos(\omega.t).$$

u_1 et u_2 ont donc la même phase (ici nulle) **et le rapport des tensions maximales vaut** $\frac{n_2}{n_1}$, comme indiqué dans le cours.

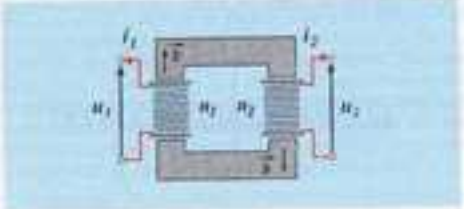


Fig. 34

3. Intensités

Le système constitué par les deux bobines reçoit, pendant un court intervalle de temps dt, les énergies $u_1.i_1.dt$ (au primaire) et $u_2.i_2.dt$ (au secondaire). Ces énergies sont à considérer algébriquement, positives quand elles constituent un gain pour le système.

Le transformateur n'accumule pas d'énergie électrique : il redonne en permanence ce qu'il reçoit. Par suite :

$$(u_1.i_1 + u_2.i_2).dt = 0 \quad \text{et} \quad u_2.i_2 = -u_1.i_1.$$

En tenant compte des expressions de u_1 et u_2, alors : $i_2 = -\frac{n_1}{n_2}.i_1$.

Les deux intensités sont en opposition.

Si l'une s'écrit $i_1 = I_{1m}.\cos(\omega.t - \alpha_1)$, l'autre est donnée par

$$i_2 = \frac{n_1}{n_2}.I_{1m}.\cos(\omega.t - \alpha_1 + \pi).$$

Le rapport des intensités maximales vaut :

$$\frac{I_{2m}}{I_{1m}} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Remarque :

La non-accumulation permanente d'énergie électrique dans le transformateur n'est pas si évidente. Il pourrait y avoir des phases d'accumulation d'énergie, puis de restitution. Dans ce cas, i_1 et i_2 ne seraient plus en opposition. Mais un oscilloscope montre que, dans les conditions ici adoptées, i_1 et i_2 sont bien en opposition. L'hypothèse de la non-accumulation d'énergie électrique permanente peut donc être retenue.



Fig. 35. *Transformateur Legrand.*

9 Circuits oscillants

1 Dipôle L, C.

2 Étude théorique du circuit oscillant.

3 Conservation de l'énergie électromagnétique.

4 Entretien des oscillations électriques



Oscilloscope performant.

1 DIPÔLE L, C

Un oscillateur électrique est un circuit dans lequel les électrons se déplacent en repassant périodiquement par une position moyenne d'équilibre.

1) *Montage*

Le montage de la figure 1 *a* permet de charger un condensateur de capacité C (en appuyant puis relachant l'interrupteur-poussoir K_1), puis de le décharger dans une bobine résistante et inductive (r, L) en maintenant l'interrupteur K_2 enfoncé. Un oscilloscope visualise la tension aux bornes du condensateur.

2) *Observations*

• En appuyant sur l'interrupteur K_1, l'oscillogramme montre que la tension aux bornes du condensateur devient instantanément égale à la f.é.m. du générateur : le condensateur s'est chargé.

• En relachant l'interrupteur K_1, puis en appuyant sur l'interrupteur K_2, le condensateur se décharge à travers la bobine. L'oscillogramme (fig. 1 *b*) montre que **la tension aux bornes du condensateur est oscillante.** Cela justifie le nom de **circuit oscillant** donné au dipôle L, C.

L'amplitude des oscillations électriques diminue au cours du temps. La courbe obtenue ressemble à celle des oscillations mécaniques amorties (chapitre 5). L'amortissement est dû à l'inévitable résistance de la bobine.

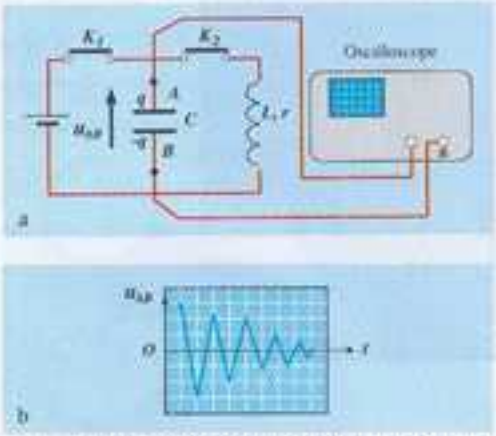


Fig. 1. ***Décharge oscillante d'un condensateur dans une bobine inductive.***

2 ÉTUDE THÉORIQUE DU CIRCUIT OSCILLANT

Dans cette première approche théorique, la résistance de la bobine sera supposée suffisamment petite pour être considérée comme nulle. Dans ces conditions les oscillations ne sont pas amorties.

1. Équation différentielle régissant les oscillations électriques

a) Dispositif théorique et conventions

Un condensateur de capacité C est chargé (fig. 2). Il se décharge dans une bobine purement inductive.

Le sens de la flèche associée aux tensions est lié à l'orientation du dipôle (fig. 3). Le produit $p = u.i$ est la puissance du dipôle. Avec cette convention, la puissance est positive lorsque le dipôle reçoit de l'énergie, négative quand il en fournit.

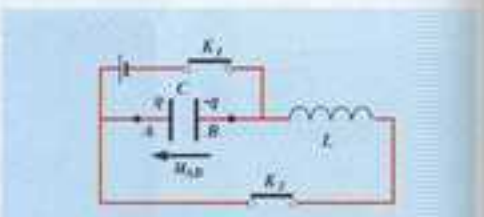


Fig. 2. ***Le condensateur se charge quand K_1 est seul fermé. Il se décharge dans la bobine quand K_2 est seul fermé.***

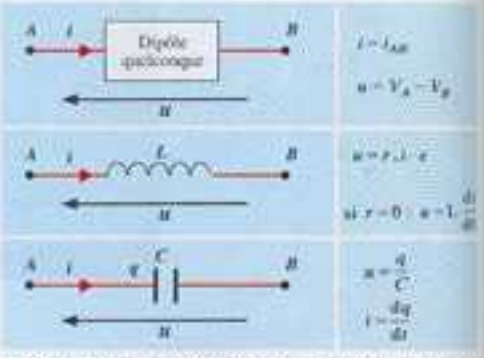


Fig. 3. ***Convention générale et son application aux cas de la bobine seulement inductive et au condensateur.***

• Pour une bobine inductive non résistante, la relation générale $u = r.i - e$ devient :

$u = L.\frac{di}{dt}$ puisque $r = 0$ et que $e = -L.\frac{di}{dt}$.

• Pour un condensateur, la relation entre sa charge q et sa tension aux bornes u_c est :

$$q = C.u_c$$

C, désigne la capacité du condensateur, qui s'exprime en farad (F).

D'où :
$$u = \frac{q}{C}$$

La charge q est celle de l'armature qui est désignée par la flèche qui sert à orienter le dipôle. Elle s'exprime en coulomb (C).

Quand le condensateur se charge ou se décharge, un courant d'intensité i, passe dans le circuit qui relie ses armatures.

Avec les conventions de la figure 4, la charge de l'armature A augmente (qu'elle soit positive ou négative), lorsque l'intensité est positive. i et dq ont donc le même signe et l'intensité algébrique est :

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

b) Mise en équation

Le condensateur est supposé initialement chargé.

Lorsque le circuit est fermé en appuyant sur l'interrupteur K_2, la tension $u_{AB} = u_L + u_C$ est nulle (fig. 4).

Par suite :

$$L.\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Or, $i = \frac{dq}{dt}$ donc : $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$; en remplaçant dans l'expression précédente, il vient :

$$L.\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}.q = 0 \quad \text{ou :} \quad L.\ddot{q} + \frac{1}{C}.q = 0$$

C'est une équation différentielle.

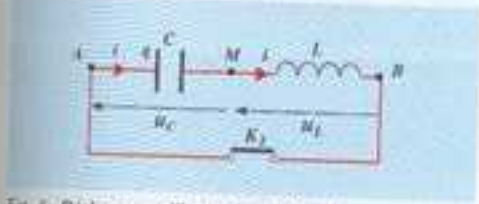


Fig. 4. Décharge oscillante du condensateur. L'interrupteur K_2 court-circuite les bornes A et B.

2. Résolution de l'équation

a) Recherche de la solution

L'équation précédente est formellement équivalente à celle qui a été obtenue pour un oscillateur mécanique non amorti (chapitre 5) :

$m.\frac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0$ et qui admet pour solution :

$$x(t) = X_m.\cos(\omega_0.t + \varphi).$$

Par analogie, cela suggère d'essayer pour la variable q, une solution sinusoïdale du type :

$$q(t) = Q_m.\cos(\omega_0.t + \varphi).$$

Si cette solution convient :

$$\frac{dq}{dt} = -\omega_0.Q_m.\sin(\omega_0.t + \varphi),$$

et : $\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega_0^2.Q_m.\cos(\omega_0.t + \varphi) = -\omega_0^2.q.$

En remplaçant dans l'équation différentielle :

$$L.\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}.q = 0,$$

il vient : $-L.\omega_0^2.q(t) + \frac{1}{C}.q(t) = 0.$

Cette équation est satisfaite à tout instant lorsque : $L.\omega_0^2 = \frac{1}{C}$.

La solution sinusoïdale envisagée convient donc, à condition que la constante ω_0, soit liée aux caractéristiques des dipôles par la relation :

$$L.C.\omega_0^2 = 1$$

b) Oscillations harmoniques

La constante ω_0, est appelée **pulsation propre** (ou naturelle) du circuit oscillant. Elle s'exprime en radian par seconde ($rad.s^{-1}$).

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$$

ω_0	en radian par seconde ($rad.s^{-1}$)
L	en henry (H)
C	en farad (F)

Dans l'expression, $q(t) = Q_m.\cos(\omega_0.t + \varphi)$, les constantes Q_m et φ dépendent des conditions initiales choisies par l'expérimentateur (charge initiale du condensateur et date origine). Q_m est **la charge maximale** du condensateur et φ **la phase** à la date $t = 0$.

c) Période et fréquence propres

La période propre des oscillations est égale à la période de la fonction sinusoïdale précédente, soit, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$:

$$T_0 = 2\pi.\sqrt{L.C}$$

La période s'exprime en seconde(s). L'inverse de la période propre est la **fréquence propre** :

$$N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi . \sqrt{L . C}}.$$

Elle s'exprime en hertz (Hz).
Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

CIRCUIT OSCILLANT HARMONIQUE	
Équation différentielle : $L . \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} . q = 0.$	
Solution : $q = Q_m . \cos(\omega_0 . t + \varphi)$	
$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L . C}}$	$T_0 = \frac{1}{N_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi . \sqrt{L . C}$
L en henry (H) q et Q_m en coulomb (C) C en farad (F) ω_0 en radian par seconde (rad.s^{-1}) T_0 en seconde (s) N_0 en hertz (Hz) φ en radian (rad)	

3. Lois horaires et diagrammes

En électricité, la variable utilisée est souvent $i(t)$. L'intensité s'obtient par dérivation de l'expression :

$$q(t) = Q_m . \cos(\omega_0 . t + \varphi),$$

soit :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\omega_0 . Q_m . \sin(\omega_0 . t + \varphi).$$

Pour éviter le signe $-$, $i(t)$ s'écrit :

$$i(t) = \omega_0 . Q_m . \cos\left(\omega_0 . t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i(t) = I_m . \cos\left(\omega_0 . t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

avec $I_m = \omega_0 . Q_m$, intensité maximale du courant.

L'**intensité** du courant est en **quadrature avance sur la charge** du condensateur.

Ceci peut être représenté par les diagrammes $q(t)$ et $i(t)$ (fig. 5).
L'intensité est nulle lorsque la charge est extrémale, elle est extrémale quand la charge est nulle.

3 CONSERVATION DE L'ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

1. Énergie emmagasinée dans une bobine et dans un condensateur

a) Énergie magnétique d'une bobine

L'expression de l'énergie magnétique emmagasinée dans une bobine d'auto-inductance L, parcourue par un courant d'intensité i, a été établie au chapitre 8 :

$$E_{mag} = \frac{1}{2} L . i^2.$$

Selon le paragraphe précédent, l'intensité i est telle que :

$$i = -\omega_0 . Q_m . \sin(\omega_0 . t + \varphi).$$

En remplaçant dans l'expression de l'énergie magnétique, il vient :

$$E_{mag} = \frac{1}{2} L . \omega_0^2 . Q_m^2 . \sin^2(\omega_0 . t + \varphi).$$

D'après la relation $L . \omega_0^2 . C = 1$, soit $L . \omega_0^2 = \frac{1}{C}$ on en déduit :

$$E_{mag} = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} . \sin^2(\omega_0 . t + \varphi).$$

En tenant compte de la relation :

$$2 \sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha),$$

cette expression devient :

$$E_{mag} = \frac{1}{4} \frac{Q_m^2}{C} . (1 - \cos(2\omega_0 . t + 2\varphi))$$

L'énergie magnétique se présente comme une fonction sinusoïdale du temps, de pulsation $2\omega_0$, de fréquence $2N_0$ et de période $\frac{T_0}{2}$.

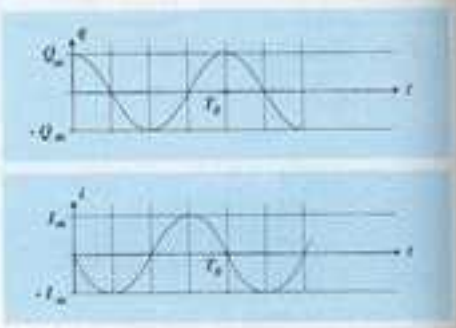


Fig. 5

b) Énergie électrique d'un condensateur

Les condensateurs ont été étudiés en classe de première. L'énergie électrique emmagasinée dans un condensateur de capacité C, lorsque sa charge est q, est donnée par :

$$E_{élec} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}.$$

En tenant compte de l'expression de la charge $q(t) = C.u(t)$, l'énergie du condensateur s'exprime aussi par les relations suivantes :

$$E_{élec} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}C.u^2 = \frac{1}{2}q.u.$$

Or, selon nos conventions, la charge q s'écrit :

$$q = Q_m.\cos(\omega_0.t + \varphi).$$

En remplaçant dans l'expression de l'énergie électrique, il vient :

$$E_{élec} = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}.\cos^2(\omega_0.t + \varphi).$$

En tenant compte de la relation :

$$2\cos^2\alpha = (1 + \cos 2\alpha),$$

cette expression s'écrit :

$$E_{élec} = \frac{1}{4}\frac{Q_m^2}{C}.\left(1 + \cos(2\omega_0.t + 2\varphi)\right).$$

L'énergie électrique se présente comme une fonction sinusoïdale du temps, de pulsation $2\omega_0$, de fréquence $2N_0$ et de période $\frac{T_0}{2}$.

c) Conservation de l'énergie électromagnétique

L'**énergie électromagnétique** d'un circuit oscillant est la somme de l'énergie magnétique de la bobine et de l'énergie électrique du condensateur :

$$E = \frac{1}{2}L.i^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}.$$

Soit :

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}.\left[\sin^2(\omega_0.t + \varphi) + \cos^2(\omega_0.t + \varphi)\right].$$

Les termes entre crochets sont indépendants du temps, car :

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Par suite :

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}.$$

L'énergie électromagnétique du circuit oscillant reste donc constante. En d'autres termes, **elle se conserve.**

Cette énergie constante E, est égale à l'énergie électrique maximale emmagasinée par le condensateur, $\frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}$, quand l'énergie magnétique est nulle. C'est aussi l'énergie magnétique maximale emmagasinée par la bobine, quand l'énergie électrique est nulle, car :

$$I_m = \omega_0.Q_m \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{L.C}$$

d'où : $E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2C}.\left(\frac{I_m}{\omega_0}\right)^2 = \frac{1}{2}L.I_m^2.$

Lors des oscillations, il y a transformation mutuelle des énergies électrique et magnétique.

2. Analogies électromagnétiques

Le comportement des oscillateurs mécaniques et électriques non amortis sont régis par deux équations différentielles analogues :

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0 \quad \text{et} \quad L.\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}.q = 0.$$

La variable q joue en électricité le rôle de la variable x en mécanique, l'inductance L celui de la masse m, etc. Ces analogies sont résumées dans le tableau p. 185.



Fig. 6. *Circuit oscillant dans une calculette. On reconnaît la bobine et le condensateur.*

4 ENTRETIEN DES OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES

1. Amortissement des oscillations

L'observation à l'oscilloscope a montré que les oscillations électriques s'amortissent.

a) Causes des pertes d'énergie

Les électrons libres qui oscillent dans les conducteurs autour de leurs positions statistiques d'équilibre sont en interaction avec les ions du réseau métallique. Dans la bobine, ces interactions correspondent à deux effets macroscopiques :

• *Les électrons* perdent de l'énergie au profit des ions du réseau, dont l'agitation thermique augmente. A notre échelle, cela se traduit par une élévation de température. En régime permanent, la bobine rayonne sous forme de **chaleur** cette énergie qu'elle reçoit (effet Joule). Il s'agit là d'un **phénomène dissipatif.**

• *L'énergie* reçue par les ions est perdue par les électrons, qui se trouvent ralentis. Cet effet se traduit à notre échelle par l'existence de la **résistance** électrique.

Ainsi, la résistance électrique de la bobine d'un circuit oscillant est la cause de phénomènes dissipatifs qui font diminuer l'énergie électromagnétique du circuit. Cette perte d'énergie est compensée par une apparition de **chaleur.**

b) Équation différentielle pour un oscillateur amorti

La figure 7 reprend le dispositif étudié précédemment en y insérant un dipôle ohmique de résistance réglable R.

La tension $u = u_{AB} = V_A - V_B$ aux bornes de la série est à chaque instant :

$$u = u_C + u_{RL} = \frac{q}{C} + R\,.\,i + L\,.\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Cette tension comme précédemment, est nulle quand l'interrupteur K_2 est enfoncé (court-circuit).

En choisissant comme variable $q(t)$, il vient, avec $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}$:

$$\frac{q}{C} + R\,.\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + L\,.\,\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = 0,$$

soit

$$L\,.\,\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\,.\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\,.\,q = 0.$$

Cette équation est identique à celle obtenue pour les oscillateurs mécaniques amortis :

$$m\,.\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \lambda\,.\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\,.\,x = 0$$

— la résistance électrique R, joue pour le circuit oscillant le rôle de la résistance mécanique λ, des oscillateurs mécaniques;

— l'inductance L, est l'analogue électrique de la masse m;

— l'inverse de la capacité est l'analogue de la constante de raideur k du ressort.

c) Étude expérimentale

• *Montage*

La figure 8 représente un montage utilisable pour visualiser à l'oscilloscope la tension u_C aux bornes du condensateur : A est relié à la voie 1 (ou Y_A) et M est branché à la masse de l'oscilloscope. La tension $u_C(t)$ montre l'évolution en fonction du temps de la charge $q(t)$ du condensateur, car $q = C\,.\,u_C$.

La résistance totale du circuit oscillant est égale à la somme des résistances r de la bobine et de la résistance R extérieure, réglable.

• *Oscillogrammes*

Selon les valeurs de la résistance R, les régimes de décharge suivants sont observés :

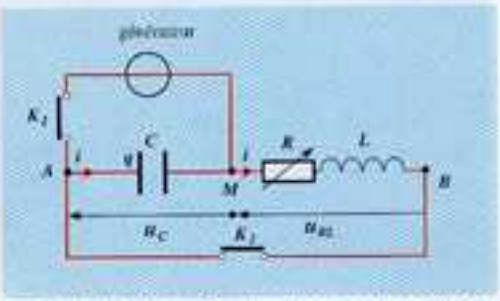


Fig. 7. ***Dipôle R, L, C série. Le mode d'amortissement dépend de la valeur de R.***

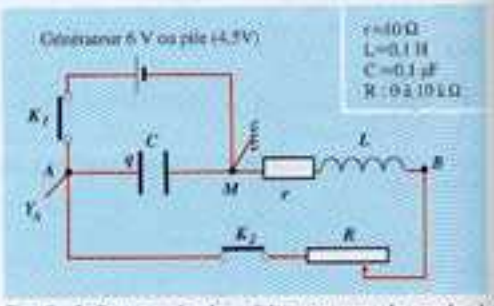


Fig. 8. ***Influence de la résistance sur le mode de décharge du condensateur.***

— **Si R est faible,** le régime est oscillatoire mais du fait de l'existence de l'amortissement électrique, l'amplitude des oscillations diminue et la période T est légèrement supérieure à la période propre T_0; le régime est *pseudo-périodique* (fig. 9).

— **Si R est élevée,** le régime est *« apériodique »* et amorti. Il n'y a plus d'oscillations. La tension aux bornes du condensateur décroît exponentiellement en fonction du temps, d'autant plus lentement que la résistance est plus grande (fig. 10 *a*).

— Entre ces cas extrêmes, il existe une valeur de la résistance, telle que les oscillations cessent. Cette résistance est appelée *résistance critique*. On démontre que c'est pour cette valeur que la décharge non oscillante est la plus rapide (fig. 10 *b*).

Au lieu d'appuyer successivement sur les interrupteurs K_1 et K_2, il est plus commode de remplacer l'ensemble {pile, K_1} de la figure 6 par un générateur de tension en créneaux (fig. 11 *a*) et de supprimer l'interrupteur K_2. Le condensateur subit alors automatiquement une succession de charges et de décharges. Si la résistance du circuit est inférieure à la résistance critique, l'allure de l'oscillogramme obtenu est donné à la figure 11 *b*.

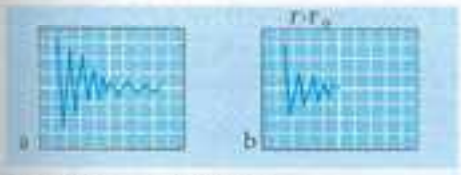


Fig. 9 ***Régimes pseudopériodiques.***
a) $R = 0$ ($r = 10\ \Omega$). *b)* $R = 1\ k\Omega$.

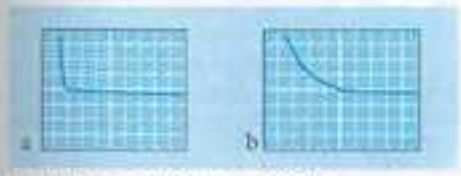


Fig. 10 ***Régimes apériodique et critique.***
a) $R = 10\ k\Omega$. *b)* $R = 2\ k\Omega$ *(critique).*



Fig. 11 ***Observation automatique de la décharge oscillante du condensateur.***
a) Tension appliquée au condensateur.
b) Décharges oscillantes du condensateur.

d) Interprétation énergétique

L'équation : $L.\frac{di}{dt} + R.i + \frac{q}{C} = u$, traduit l'additivité des tensions instantanées aux bornes des composants du dipôle. Désignant par dE l'énergie électrique reçue par le dipôle pendant un court intervalle de temps dt, la puissance $P = \frac{dE}{dt} = u.i$ du dipôle est :

$$\frac{dE}{dt} = L.i.\frac{di}{dt} + R.i^2 + \frac{q}{C}.i$$

Puisque $i = \frac{dq}{dt}$ l'expression précédente peut s'écrire :

$$dE = L.i.di + R.i^2.dt + \frac{q}{C}.dq.$$

Dans cette expression, $L.i.di$, peut s'interpréter comme la petite variation de :

$$E_{magn} = \frac{1}{2}.L.i^2.$$

$\left(\text{en effet } \frac{dE_{magn}}{dt} = L.i.\frac{di}{dt}\right)$.

De même $\frac{q}{C}.dq$ est la petite variation de $E_{élec} = \frac{1}{2}.\frac{q^2}{C}$.

L'équation précédente s'écrit donc :

$$dE = d(E_{magn}) + R.i^2.dt + d(E_{élec}),$$

soit, en regroupant les deux termes qui constituent l'énergie électromagnétique emmagasinée dans la bobine et le condensateur :

$$E_{charg} = E_{magn} + E_{élec}$$
$$dE = d(E_{charg}) + R.i^2.dt.$$

Dans le cas des oscillations amorties, il n'y a aucune source d'énergie électrique extérieure. Les deux extrémités du dipôle sont court-circuitées : $u = 0$ et $dE = 0$ à tout instant, par suite, $d(E_{charg}) = -R.i^2.dt$.

Cette expression, toujours négative montre que le dipôle amorti perd de l'énergie électromagnétique.

2. Entretien des oscillations électriques

Pour compenser les pertes d'énergie électromagnétique subies par le dipôle pendant un intervalle de temps dt, il faut une source d'énergie extérieure qui fournisse au dipôle une énergie : $dE = R.i^2.dt$. Cette source d'énergie doit fonctionner par « bouffées », fournissant davantage d'énergie lorsque l'intensité est extrémale.

En pratique un **amplificateur opérationnel** ($A.O.$) permet de réaliser automatiquement cette compensation.

a) Principe du montage (fig. 12)

Un dipôle constitué par une bobine de résistance R et d'inductance L, placé en série avec un condensateur de capacité C, est monté entre le fil de masse M du montage et le point S qui aboutit à l'entrée inverseuse e_- de l'amplificateur opérationnel. L'entrée inverseuse e_- de l'*A.O.* est liée à sa sortie s' par un dipôle ohmique de résistance R_1. L'entrée non inverseuse e_+ est liée d'une part à la sortie s' par un dipôle ohmique ayant lui aussi une résistance égale à R_1, et d'autre part au fil de masse par l'intermédiaire d'un rhéostat de résistance réglable R_0. La valeur maximale de R_0 doit être supérieure à la résistance R du dipôle R, L, C.

Comme d'habitude, l'alimentation de l'*A.O.* n'est pas représentée sur le schéma.

b) Choix des conventions et des orientations

Le potentiel du fil de masse est conventionnellement nul. Les tensions u_C aux bornes du condensateur, u_{R_0} aux bornes du rhéostat, et $u = V_S - V_M$ sont comptées à partir de la masse, d'où le sens indiqué pour les flèches associées. La flèche associée à la tension u_{RL} aux bornes de la bobine poursuit celle de u_C. L'orientation du dipôle R, L, C en résulte, conformément aux conventions habituelles. La partie du montage située à droite des points S et M, qui constitue le **système d'entretien** des oscillations, peut ainsi être considéré comme une source de tension u délivrant une intensité i positive quand elle sort du circuit d'entretien (fig. 13).

Les résistances d'entrées de l'*A.O.* sont pratiquement « infinies » : les courants d'entrées i_+ et i_- sont nuls.

Puisque $i_- = 0$, le courant passant dans la branche $s'Ae_-$ est aussi égal à i, d'où découle l'orientation de cette branche, ainsi que le sens de la flèche associée à la tension $R_1.i$ du dipôle ohmique branché selon $s'Ae_-$.

Puisque $i_+ = 0$, le courant i_1 qui passe dans R_0 passe aussi dans la branche $s'BN'$. Les orientations des conducteurs $s'BN'$ et $N'N$ résultent du sens choisi pour la flèche associée à :

$$u_0 = V_{N'} - V_N = R_0.i_1.$$

Le sens de la flèche associée à la tension $R_1.i_1$ en résulte.

c) Mise en équation

• Pour la maille $MSRLCM$ du dipôle R, L, C : $u - u_{RL} - u_C = 0$, d'où :

$$u = u_{RL} + u_C = R.i + L.\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

soit, puisque $i = \frac{dq}{dt}$:

$$u = R.\frac{dq}{dt} + L.\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} \qquad (1)$$

• Pour la maille $MSe_-e_+N'NM$:

$$u + \varepsilon - R_0.i_1 = 0, \qquad (2)$$

en désignant par ε la tension entre les bornes d'entrée de l'*A.O.*

• Pour la maille $e_-As'BN'e_+e_-$:

$$R_1.i - R_1.i_1 - \varepsilon = 0. \qquad (3)$$

d) Fonctionnement de l'A.O. en régime linéaire

En régime linéaire, la tension entre les bornes d'entrée de l'*A.O.* est nulle : $\varepsilon = 0$.

D'après (3), $R_1.(i - i_1) = 0$, d'où : $i = i_1$.

En reportant dans (2) : $u + 0 - R_0.i = 0$, d'où :

$$u = R_0.i.$$

La relation (1) s'écrit alors :

$$L.\frac{d^2q}{dt^2} + (R - R_0).\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Le dispositif d'entretien des oscillations équivaut à la mise en série avec la bobine d'une résistance $-R_0$: **il simule une résistance négative.**

Du point de vue énergétique, la tension $u = R_0.i$ correspond à une puissance :

$$P = u.i = R_0.i^2.$$

L'énergie fournie au dipôle R, L, C pendant un court intervalle de temps dt, est bien du type attendu : $dE = R_0.i^2.dt$.

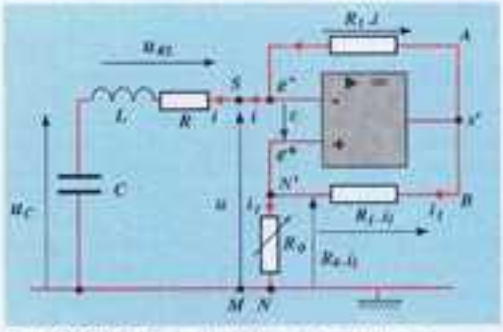


Fig. 12. *Choix des orientations et conventions.*

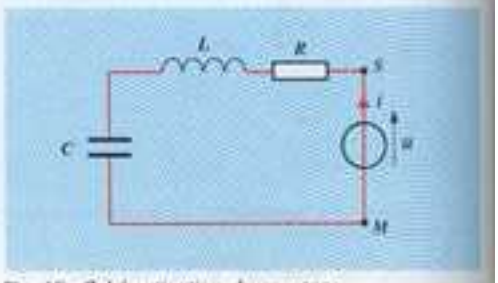


Fig. 13. *Schématisation du montage.*

• Si $R_g = R$, l'équation précédente devient celle d'un circuit oscillant non amorti, vibrant à la pulsation propre du dipôle R, L, C :

$$L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0.$$

Le dispositif d'entretien compense alors exactement, à chaque instant, l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance de la bobine inductive. Il y a entretien des oscillations.

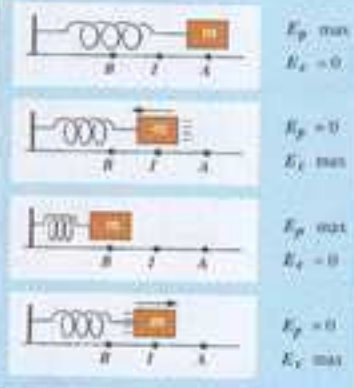
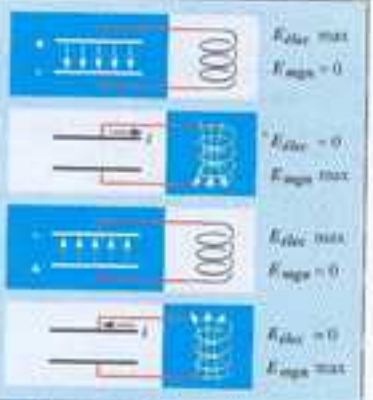
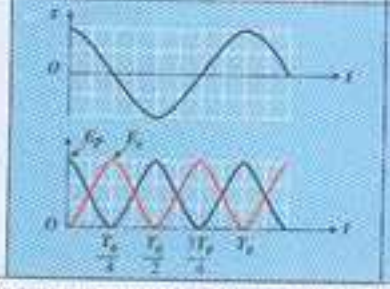
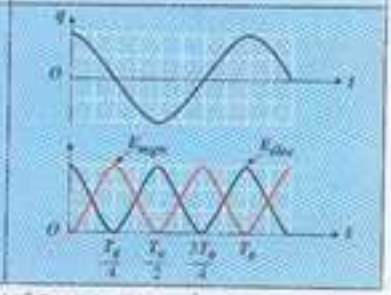
• Si $R_g < R$, l'équation devient celle d'un circuit oscillant amorti de résistance inférieure à R. Les oscillations ne peuvent pas prendre naissance dans ces conditions. Si elles existent, elles s'amortissent. Les pertes d'énergie ne sont pas assez compensées :

$$R_g \cdot i^2 \cdot t < R \cdot i^2 \cdot t$$

L'amplificateur opérationnel ne fournit pas assez d'énergie pour entretenir les oscillations.

• Si $R_g > R$, l'*A.O.* fournit plus d'énergie qu'il n'en faut pour entretenir les oscillations. Les oscillations deviennent de plus en plus amples, et l'*A.O.* peut atteindre la saturation. Il ne fonctionne plus en régime linéaire. Le signal de sortie n'est plus sinusoïdal : il présente de la distorsion.

La vérification expérimentale de ces propriétés fait l'objet de la fiche expérimentale.

	Oscillateurs mécaniques	Circuits oscillants
Équation différentielle	$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0$	$L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot q = 0$
Conservation de l'énergie	$\frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2 = E_{méca}$	$\frac{1}{2} L \cdot i^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = E_{élec}$
Grandeurs analogues	x ; $v = \frac{dx}{dt}$; $a = \frac{dv}{dt}$	q ; $i = \frac{dq}{dt}$; $\frac{di}{dt}$
	m ; k	L ; $\frac{1}{C}$
Évolution des systèmes		
Diagrammes temporels		

ANALOGIES DE COMPORTEMENT DES OSCILLATEURS MÉCANIQUES ET ÉLECTRIQUES

Fiche expérimentale

ENTRETIEN DES OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES

1) DONNÉES RELATIVES AU MONTAGE

La figure 14 donne le schéma d'un montage qui permet d'observer des oscillations électriques entretenues.
La partie gauche du montage est un dipôle série R, L, C. La bobine ($R = 10\ \Omega$, $L = 0,1$ H) en l'absence de fer) peut être remplacée par une petite bobine du commerce, moins encombrante, mais souvent de résistance plus élevée (il faut alors choisir un rhéostat de résistance R_0 qui lui soit supérieure).
La partie droite est constituée par un amplificateur opérationnel TL081 environné de résistances dont l'une, R_0, est réglable.
L'alimentation (−15 V, 0, +15 V) du circuit intégré n'est pas représentée sur le schéma. Elle doit évidemment être utilisée. C'est une qu'il faut commencer par brancher.
Des précisions sur ce montage sont données à la page 196.

2) FONCTIONNEMENT

a) Observation des oscillations entretenues

Relier les bornes du condensateur à l'oscilloscope.
Faire varier la résistance R_0 du rhéostat par valeurs croissantes, puis décroissantes.
Observer les déformations des oscillogrammes (fig. 15).
Interpréter.

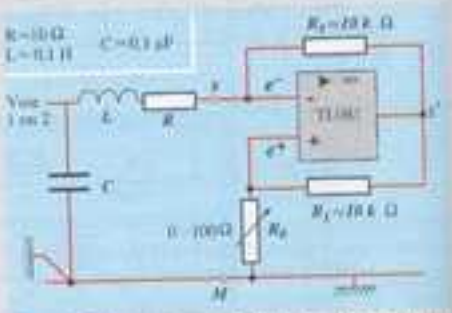


Fig. 14. *Montage pour l'entretien des oscillations électriques.*

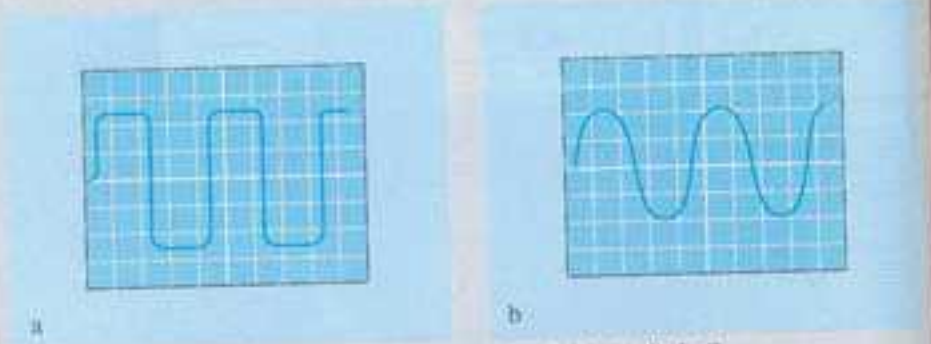


Fig. 15. *Oscillations entretenues d'un dipôle série R, L, C.*
a) $R_0 = 100\ \Omega > R$: oscillations non sinusoïdales. *b) $R_0 = 10\ \Omega = R$: oscillations sinusoïdales.*

b) Caractéristiques intensité-tension du dispositif d'entretien

Réaliser le montage indiqué à la figure 16. Le générateur + 15 V, − 15 V peut être celui qui alimente l'*A.O.* (dans ce cas, il est inutile de relier son point milieu à la masse du montage, car cette opération est déjà réalisée pour alimenter l'*A.O.*). Relever dans un tableau les couples de points (u, i). Tracer la courbe montrant l'évolution de u en fonction de i. Préciser le domaine de linéarité. Recommencer éventuellement les mesures en remplaçant les deux dipôles ohmiques $R_1 = 10\ k\Omega$ par des dipôles de résistances $R'_1 = 1\ k\Omega$. Comparer les domaines de linéarité.

Remarque : En remplaçant le générateur + 15 V, − 15 V et le potentiomètre par un générateur *BF* inséré comme indiqué à la figure 17, un oscilloscope utilisé en *XY* permet de visualiser la caractéristique $i \longrightarrow u$: brancher *S* en *X*, *T* en *Y* et *M* à la masse de l'oscilloscope.

3) UTILISATION D'UN OHMMÈTRE NUMÉRIQUE

Un ohmmètre numérique est un générateur de courant. Par exemple, utilisé sur le calibre 200 Ω, il impose un courant d'intensité constante égale à 1 mA et affiche en mV la tension aux bornes du dipôle ohmique branché à ses bornes (si cette tension vaut 150 mV, la résistance est de 150 Ω). Vérifier que l'ohmmètre numérique, branché directement entre les bornes *M* et *S* du circuit d'entretien des oscillations, indique une valeur négative pour la résistance. Intervertir les deux bornes de l'ohmmètre. La valeur de la résistance affichée est-elle encore négative? En pratique, elle ne sera pas exactement la même, car les deux résistances R_1 ne sont pas rigoureusement égales, et la tension de décalage de l'*A.O.* (« tension d'offset ») n'est pas corrigée.

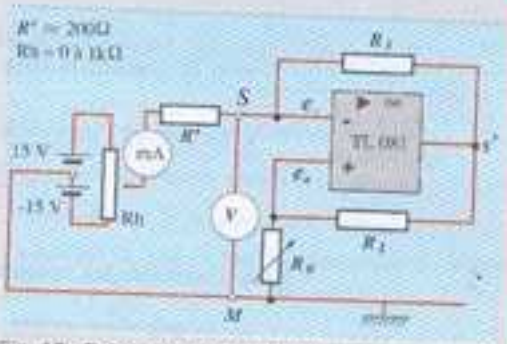


Fig. 16. ***Relevé de la caractéristique $i \longrightarrow u$ de l'amplificateur opérationnel.***

4) INFLUENCE DE LA CAPACITÉ

En changeant de condensateur, la fréquence propre des oscillations est modifiée ($L \cdot C \cdot \omega_0^2 = 1$). Dans quel sens une augmentation de la capacité fait-elle théoriquement varier la fréquence? Vérifier expérimentalement.

En principe, la résistance R_0 qui déclenche les oscillations quasi-sinusoïdales ne devrait pas dépendre de la capacité. Vérifier expérimentalement qu'il n'en est rien. En fait, la résistance électrique *R* de la bobine dépend de la fréquence des oscillations. Cette résistance augmente-t-elle ou diminue-t-elle lorsque la fréquence croît?

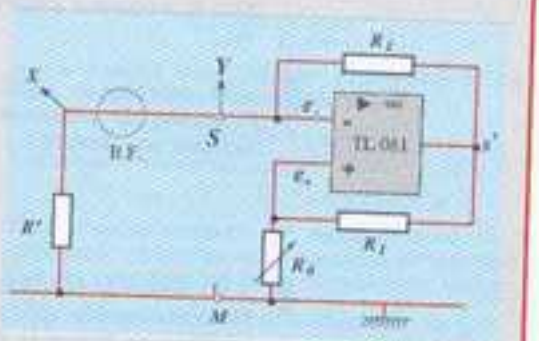


Fig. 17. ***Relevé à l'oscilloscope de la caractéristique $i \longrightarrow u$.***

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

• Retrouver rapidement **l'équation différentielle** régissant les oscillations d'un circuit oscillant :

$$L.\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C}=0$$

• Connaître l'expression de la **solution sinusoïdale** de l'équation précédente :

$$q = Q_m.\cos.(\omega_0.t+\varphi)$$

où Q_m est la **charge maximale** du condensateur, ω_0 la **pulsation propre** et φ la **phase** à la date $t=0$.

• Retrouver l'expression de l'**intensité** par dérivation :

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=Q_m.\omega_0.\cos\left(\omega_0.t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right).$$

• Connaître les relations donnant, pour un circuit oscillant non amorti :

— la **pulsation propre** $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L.C}}$;

— la **période propre** $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi.\sqrt{L.C}$,

d'où la **fréquence propre** $N_0=\frac{1}{T_0}$.

• Se rappeler la signification des expressions qui interviennent dans l'équation de **conservation de l'énergie** électromagnétique d'un **circuit oscillant non amorti :**

$$\frac{1}{2}L.i^2+\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=C^{te}.$$

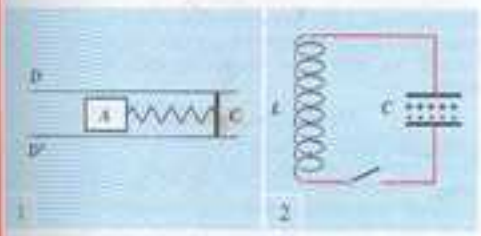
• Expliquer le fonctionnement d'un **amplificateur opérationnel** convenablement monté, qui permet d'**entretenir les oscillations** d'un circuit oscillant en jouant le rôle d'une « **résistance négative** ».

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

1) On considère un solide A, de masse m, glissant sans frottement entre deux glissières D et D'. On accroche à ce solide une extrémité d'un ressort de masse négligeable et de raideur k, l'autre extrémité étant reliée à un point fixe C (fig. *a*). On déplace le solide A de façon à provoquer l'allongement du ressort et on l'abandonne sans vitesse initiale. Il apparaît alors des oscillations mécaniques.

a) Établir l'équation différentielle du mouvement du solide A, en prenant comme variable l'élongation x du solide A.



b) En déduire la période des oscillations.

Application numérique : $m = 0{,}5$ kg et $k = 25$ N.m^{-1}.

2) On réalise le circuit (fig. *b*) comprenant une bobine de résistance négligeable, d'inductance L et un condensateur chargé de capacité C. On ferme le circuit.

a) Établir l'équation différentielle traduisant les oscillations électriques qui apparaissent dans le circuit en prenant pour variable la charge q d'une armature du condensateur.

b) En déduire la période des oscillations.

Application numérique : $L = 0{,}1$ H et $C = 10^{-9}$ F.

3) Faire apparaître dans un tableau récapitulatif les analogies électriques et mécaniques en citant les grandeurs électriques de la question 2) qui correspondent aux grandeurs mécaniques suivantes : masse m, raideur k, élongation x et vitesse v du solide A, énergie cinétique et énergie potentielle du système solide A-ressort.

SOLUTION

1) *a)* Puisque le mobile glisse sans frottement, l'effet de son poids est annulé par la réaction des glissières. La seule force active est la force de rappel élastique, de valeur algébrique : $F_x = -k.x$.

L'accélération a_x du mobile est donc telle que : $m.a_x = -k.x$.

soit : $$m.\frac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0.$$

b) Cette équation différentielle admet une solution : $x = X_m.\cos(\omega_0.t + \varphi)$.

Deux dérivations successives donnent :

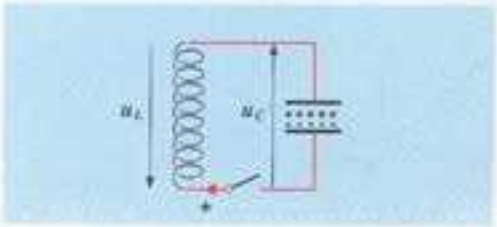
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -X_m.\omega_0^2.\cos(\omega_0.t + \varphi) = -\omega_0^2.x.$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, il vient $-m.\omega_0^2.x + k.x = 0$. L'équation est donc satisfaite pour $k = m.\omega_0^2$. La période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ est donc :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Application numérique : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}5}{25}} \approx$ **0,89 s.**

2) La flèche associée à la tension u_C aux bornes du condensateur est choisie pour que cette tension soit initialement positive. Le sens habituel d'orientation des circuits en résulte, ainsi que le sens de la flèche associée à la tension aux bornes de la bobine.



Lorsque l'interrupteur est fermé, le dipôle L, C est court-circuité et la somme $u_C + u_L$ est nulle.

Avec les conventions choisies, un courant d'intensité positive charge le condensateur : $i = \frac{dq}{dt}$.

La tension u_C aux bornes du condensateur s'exprime par : $u_C = \frac{q}{C}$.

La tension u_L aux bornes de la bobine est :

$$u_L = r.i - e = 0.i + L.\frac{di}{dt} = L.\frac{d^2q}{dt^2}.$$

La relation $u_C + u_L = 0$ se traduit par l'équation différentielle :

$$L.\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}.q = 0.$$

b) Par analogie avec l'équation différentielle du système mécanique, la période propre vaut :

$$T_0 = 2\pi.\sqrt{L.C}.$$

L'application numérique donne :

$$T_0 = 2\pi.\sqrt{0{,}1 \times 10^{-9}} \approx \mathbf{6{,}3 \times 10^{-5}}\ \mathbf{s}.$$

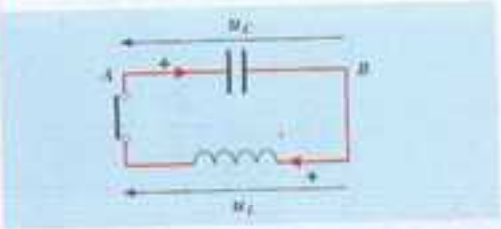
3) Le tableau demandé se déduit d'abord de la comparaison entre les deux équations différentielles, puis en examinant les combinaisons entre les grandeurs analogues, par exemple, l'analogue de $\frac{1}{2}m.v^2$ est l'énergie magnétique $\frac{1}{2}L.i^2$.

1. EXERCICES RESOLUS

Grandeurs mécaniques	m	A	x	v	$\frac{1}{2} m.v^2$	$\frac{1}{2} k.x^2$
Grandeurs électriques	L	$\frac{1}{C}$	q	i	$\frac{1}{2} L.i^2$	$\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$

EXERCICE 2

Un condensateur de capacité $C = 0,1\ \mu F$ est chargé sous tension $u_{AB} = 50$ V, puis déconnecté de la source. A la date $t = 0$, il commence à se décharger dans une bobine d'inductance $L = 50$ mH, de résistance très faible.



1) Calculer la pulsation, la fréquence et la période propres des oscillations électriques.

2) Calculer la charge maximale du condensateur.

3) Quelles sont les expressions indiquant en fonction du temps l'évolution de la charge q_A de l'armature du condensateur et de l'intensité dans le circuit oscillant? Représenter les diagrammes de $q_A(t)$ et $i(t)$.

SOLUTION

1) La pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$ vaut :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{50 \times 10^{-3} \times 0,1 \times 10^{-6}}} = 1,4 \times 10^4\ rad.s^{-1}.$$

La fréquence et la période propres s'en déduisent :

$$N_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 2,3 \times 10^3\ Hz \quad \text{et} \quad T_0 = \frac{1}{N_0} = 4,4 \times 10^{-4}\ s.$$

2) La charge maximale du condensateur est égale à sa charge initiale :

$$Q_m = C.u_{AB} = 0,1 \times 10^{-6} \times 50 = 5 \times 10^{-6}\ C.$$

3) La relation $q = Q_m.\cos(\omega_0.t + \varphi)$ donne la charge de l'armature désignée par la flèche qui sert à orienter le conducteur, ici q_A.

A la date $t = 0$, la charge de l'armature A est positive ($u_{AB} = +50$ V) et $q_A = Q_m = Q_m.\cos\varphi$. Par suite $\cos\varphi = 1$. Le plus simple est de choisir $\varphi = 0$ (modulo 2π) :

$$q_A = Q_m.\cos(\omega_0.t).$$

L'intensité est donnée par :

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = -Q_m.\omega_0.\sin(\omega_0.t).$$

Elle est nulle à la date $t = 0$, puis commence par être négative, ce qui est normal pour un condensateur qui débute sa décharge. Cette intensité peut s'écrire aussi :

$$i(t) = Q_m.\omega_0.\sin(\omega_0.t + \pi).$$

L'intensité maximale vaut :

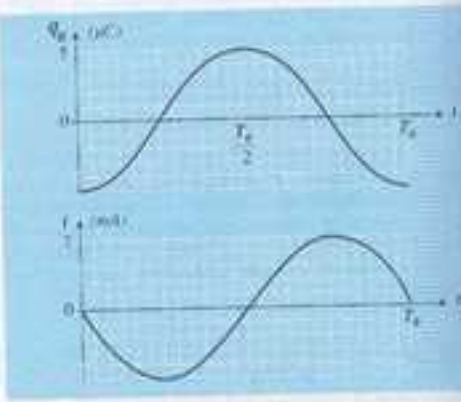
$$I_m = Q_m.\omega_0 = 5 \times 10^{-6} \times 1,4 \times 10^4 = 7,1 \times 10^{-2}\ A.$$

La charge q_B est l'opposée de q_A. Les deux fonctions sinusoïdales à représenter sont donc :

$$q_B = -Q_m.\cos(\omega_0.t) \quad \text{et} \quad I = -Q_m.\omega_0.\sin(\omega_0.t)$$

avec : $Q_m = 5\ \mu C$, $I_m = Q_m.\omega_0 = 71$ mA

et $T_0 = 4,4 \times 10^{-4}$ s.



Ces diagrammes montrent que la charge q_B est en quadrature avance sur l'intensité.

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATION

Sans calculs

Exercice 1

Deux dipôles L, C non résistants, d'inductances et de capacités différentes, peuvent-ils avoir la même fréquence d'oscillations? L'énergie électromagnétique est-elle la même si les condensateurs sont chargés initialement sous la même tension?

Exercice 2

Un circuit oscillant non résistant, a une période d'oscillations T. A la date $t = 0$, le condensateur possède sa charge maximale. A quelles dates l'énergie du circuit oscillant se trouve-t-elle uniquement sous forme d'énergie magnétique?

Exercice 3

A l'aide du dispositif d'entretien des oscillations utilisé dans le cours, les oscillations se déclenchent pour une résistance, R_0, du rhéostat, égale à 200 Ω. Observe-t-on des oscillations lorsque $R_0 = 100\ \Omega$? $R_0 = 400\ \Omega$? Ces oscillations sont-elles sinusoïdales?

Lois horaires

Exercice 4

Un circuit oscillant non amorti, d'inductance $L = 10$ mH et de capacité $C = 50$ pF est parcouru par un courant sinusoïdal d'intensité maximale $I_m = 0{,}10$ mA.

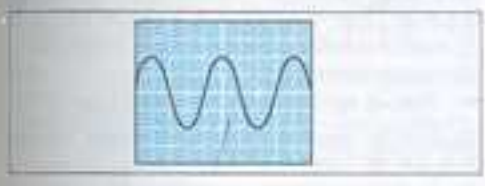
1) Faire un schéma du montage en indiquant les conventions utilisées.

2) Déterminer les lois horaires donnant l'intensité $i(t)$ dans le circuit, la charge $q(t)$ du condensateur, l'énergie magnétique $E_{mag}(t)$ de la bobine et $E_{élec}(t)$ du condensateur.

3) Représenter graphiquement l'évolution de ces grandeurs en fonction du temps.

Exercice 5

La figure ci-dessous représente l'oscillogramme de la tension aux bornes du condensateur ($C = 0{,}5$ µF) d'un circuit oscillant non amorti. Les réglages de l'oscilloscope sont : 1 µs/cm pour la vitesse de balayage et 2 V/cm pour la tension verticale.



Quelle est l'expression de l'intensité $i(t)$? (Préciser sur un schéma les conventions d'orientation utilisées.)

Exercice 6

L'énergie électrique d'un condensateur ($C = 0{,}1$ µF) monté en série avec une bobine non résistante est donnée (SI) en fonction du temps par :

$$E_{élec} = 0{,}005 \cos(4 \times 10^4 t)$$

Déterminer la valeur de l'inductance de la bobine et l'expression en fonction du temps de l'énergie magnétique de la bobine.

Exercice 7

Un condensateur de capacité $C = 1$ nF, initialement chargé, est relié à la date $t = 0$ à une bobine d'inductance L et de résistance R. Un oscilloscope permet d'étudier la tension u_C aux bornes du condensateur et donne la courbe ci-dessous.



La vitesse de balayage est réglée sur 0,5 µs/cm.

1) Déterminer, à partir de l'observation de cette courbe, la pseudo-période du phénomène. En déduire l'inductance de la bobine, en supposant que la pseudo-période est pratiquement égale à la période propre du circuit L, C, sans résistance.

2) Quel dispositif peut-on utiliser pour éviter l'amortissement des oscillations?

3) On ajoute une résistance r, extrêmement grande, en série avec la bobine. Comment la courbe est-elle modifiée?

Période, fréquence, pulsation

Exercice 8

L'équation différentielle régissant le comportement d'un circuit oscillant est :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 8 \times 10^4 q = 0.$$

La capacité du condensateur est de 0,5 µF.

1) Déterminer la pulsation, la fréquence et la période propres.

2) Quelle est l'inductance de la bobine?

Exercice 9

Avec une bobine dont l'inductance peut varier de 0,07 H à 1,0 H, et une batterie de condensateur dont la capacité peut varier de 0,5 µF à 15,5 µF, quelles sont les fréquences maximales et minimales des circuits oscillants réalisables?

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 10

La capacité d'un condensateur variable rotatif à air est donnée par la relation $C = 5 + 0{,}2\theta$ où θ désigne l'angle de rotation (exprimé en degré) des armatures mobiles ($0 < \theta < 180°$). La capacité est ainsi donnée en pF. Ce condensateur est commandé par la rotation d'un bouton sur un poste récepteur de radio. Il est associé à une bobine d'inductance L.

Quelles peuvent être les valeurs de L pour que le circuit oscillant L, C, vibre à la même fréquence que les grandes ondes radio (150 à 350 kHz), afin de les recevoir? Laquelle choisir?

Énergies

• Exercice 11

1) Un condensateur de capacité $C = 10\ \mu F$ est chargé sous une tension de 12 V. Quelle énergie emmagasine-t-il?

2) Le condensateur chargé est mis en relation avec une bobine d'inductance $L = 0{,}1$ H et avec un circuit d'entretien des oscillations. Quelle est l'intensité dans le circuit oscillant lorsque le circuit d'entretien compense exactement les pertes par effet Joule?

Exercice 12

Un condensateur de capacité $C = 2{,}5\ \mu F$ est associé à une bobine d'inductance $L = 4$ mH. Un dispositif d'entretien des oscillations permet de considérer que la résistance du circuit oscillant ainsi constitué est nulle. L'énergie initiale du condensateur chargé est de 20 µJ.

1) Représenter graphiquement l'évolution de l'énergie du condensateur en fonction de sa charge q.

Échelle : 1 cm pour 10^{-5} C en abscisses; 1 cm pour 2 µJ en ordonnées.

2) Représenter sur le graphique précédent la courbe montrant l'évolution de l'énergie électromagnétique du circuit oscillant.

3) Déterminer graphiquement l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine aux instants où l'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur vaut 5 µJ.

Exercice 13

Écrire l'équation de conservation de l'énergie d'un circuit oscillant non amorti. Quelle relation retrouve-t-on en dérivant cette relation par rapport au temps?

Exercice 14

Un condensateur de capacité $C = 0{,}5\ \mu F$ et une bobine d'inductance $L = 0{,}1$ H constituent un circuit oscillant non amorti. Représenter graphiquement les courbes indiquant l'évolution des énergies électrique, magnétique et électromagnétique :

1) en fonction de la charge $q(t)$,

2) en fonction du temps.

Analogies électromécaniques

Exercice 15

On désire que la période propre des oscillations verticales d'une automobile, de masse $m = 1$ t, reposant sur 4 ressorts identiques, soit à vide, égale à $T_0 = 1{,}3$ s (ce qui correspond à la période moyenne de la marche).

1) Déterminer la constante de raideur d'un ressort qui soutient le véhicule. De quelle distance d se déplace le centre d'inertie du véhicule quand 4 passagers, chacun de masse 100 kg, montent dans le véhicule? Si le véhicule et les passagers oscillent verticalement avec une amplitude égale à d, quelles sont les énergies cinétiques et potentielles maximales?

2) Des dispositifs électroniques permettent de simuler des condensateurs de capacités variables (de 0 à 250 µF par exemple) ou des inductances (de 0 à 250 H). Quelles valeurs de la capacité et de l'inductance pourraient conduire à la même période d'oscillations que la voiture chargée ou à vide? Quel intérêt y a-t-il à simuler électroniquement les oscillations verticales du véhicule?

EXERCICES D'APRÈS BACCALAURÉATS

Exercice 16

1) Une planche en bois de masse m est lancée sur l'eau, dans la direction Ox, avec une vitesse initiale v_0. Elle subit une force de freinage visqueux de valeur algébrique $F_x = -\lambda . v$. Montrer que, la poussée d'Archimède annulant l'effet du poids, l'équation différentielle qui régit sa vitesse est $m . \frac{dv}{dt} + \lambda . v = 0$.

Vérifier que l'expression $v = v_0 . e^{-k.t}$ convient comme solution pour cette équation. Exprimer k en fonction de λ et m. En déduire l'expression de $x(t)$, du type $A + B . e^{-k.t}$, en déterminant A, B et k en fonction de m, v_0 et λ. La date $t = 0$ est celle du lancement.

Application numérique :

$$m = 2\ \text{kg},\ v_0 = 1\ \text{m.s}^{-1};\ \lambda = 0{,}5\ \text{kg.s}^{-1}$$

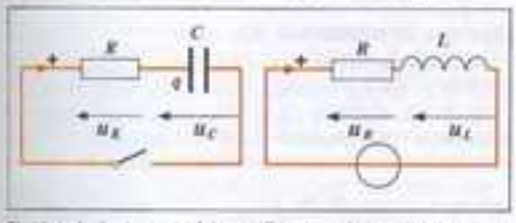
Au bout de combien de temps la vitesse n'est-elle plus que de 1 mm.s^{-1}?

2) Un condensateur de capacité C portant une charge initiale q_0 est relié à un dipôle ohmique de résistance R (fig. a). On ferme l'interrupteur à la date $t = 0$.

2. EXERCICES PROPOSES

Déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit la charge $q(t)$ du condensateur. Intégrer cette équation.

Application numérique : $q_0 = 2 \times 10^{-4}$ C; $C = 10$ µF; $R = 50\ \Omega$. Au bout de combien de temps la charge n'est-elle plus que le millième de la charge initiale?



3) Un générateur de f.é.m. E, sans résistance interne, alimente un dipôle série R, L (fig. *b*). Exprimer l'intensité dans le dipôle en fonction de E et R. A la date $t = 0$, le générateur est arrêté et la tension à ses bornes devient brusquement nulle. Écrire l'équation différentielle à laquelle obéit l'intensité du courant après cette date. Déterminer l'expression de l'intensité $i(t)$.

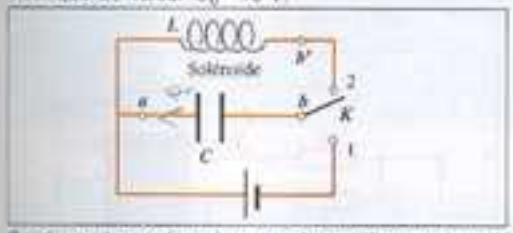
Application numérique : $L = 0{,}1$ H; $R = 50\ \Omega$; $E = 12$ V.

Au bout de combien de temps l'intensité n'est plus que le millième de l'intensité initiale?

* Exercice 17

1) Soit un solénoïde placé dans l'air comportant $N = 2\,000$ spires, de longueur $\ell = 50$ cm et de diamètre $D = 5$ cm. Établir l'expression littérale de l'auto-inductance, L, de ce solénoïde, puis calculer la valeur numérique de L. On supposera le champ magnétique uniforme à l'intérieur du solénoïde et on rappelle que la perméabilité de l'air est voisine de celle du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ SI.

2) On branche ce solénoïde dans le montage, représenté sur la figure, qui comporte : un condensateur de capacité $C = 0{,}5$ µF et une source de tension électrique de valeur $U_0 = 10$ V.



On charge le condensateur en plaçant l'interrupteur K en position 1 et on le fait ensuite se décharger dans le solénoïde en plaçant l'interrupteur dans la position 2.

a) Donner l'expression de l'intensité instantanée, i, du courant qui circule dans le solénoïde à partir de l'instant $t_0 = 0$ où l'on ferme l'interrupteur en position 2. Sur le schéma, on précisera les conventions d'orientation qui permettent de définir les valeurs algébriques des courants et des tensions.

On suppose que le circuit étudié ici a une résistance négligeable.

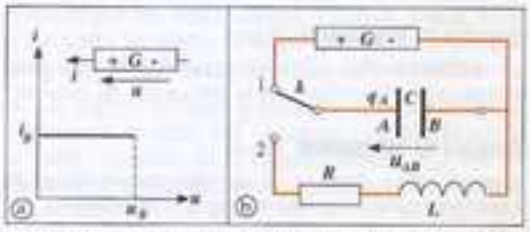
b) Déterminer la pulsation de l'oscillateur électrique ainsi réalisé.

3) Montrer que l'énergie emmagasinée dans le circuit constitué par le condensateur et le solénoïde est globalement constante.

Ceci est-il possible dans la réalité? Pourquoi?

Exercice 18

Un générateur de courant G, possède la caractéristique représentée figure *a*. Il délivre un courant d'intensité constante I_0 pour toute valeur de u inférieure à $U_0 = 12$ V.

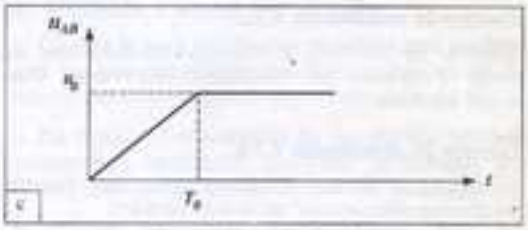


1) Lorsque K est en position 1 (fig. *b*), le condensateur de capacité $C = 10$ µF se charge par l'intermédiaire du générateur de courant; les variations de la tension u_{AB} aux bornes du condensateur, en fonction du temps, sont données par la figure *c*.

a) Quelle est la charge Q_0 prise par le condensateur lorsque $t \geq T_0$ (régime permanent)?

b) Quelle est alors l'énergie emmagasinée par le condensateur?

2) Établir pour $0 < t \leq T_0$ la relation entre I_0, t, C et u_{AB}. Déduire de cette relation et de la figure la valeur de I_0.



$U_0 = 12$ V; $T_0 = 60$ ms.

3) Le condensateur C étant chargé, on bascule K en 2, à une date qu'on choisira comme nouvelle date origine.

Établir la relation entre q_A, $\frac{dq_A}{dt}$, $\frac{d^2 q_A}{dt^2}$, R, L et C.

4) *a*) Dans l'hypothèse où R est très faible, le circuit est le siège d'oscillations électriques faiblement amorties de pseudo-période $T = 8{,}0$ ms. En déduire la valeur de l'inductance L de la bobine.

b) Dans l'hypothèse où R est très grande, donner l'allure de $q_A(t)$ pour $t > 0$. Comment peut-on qualifier cette décharge?

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES DESTINÉS À TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 19 A.1.a.

Certains symboles européens des portes logiques comportent un petit rond juxtaposé au carré qui représente la porte. Trouver la signification de ce petit rond.

Exercice 20 A.1.a.

La tension aux bornes du dipôle ohmique constituant un dipôle *R, C*, est donnée par $u_R(t) = (E - U_0).e^{-t/\tau}$. Expliciter la signification de toutes les lettres intervenant dans cette formule.

Exercice 21 A.1.a.

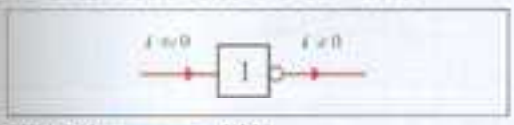
Quelle est l'unité du SI de constante de temps?

Exercice 22 A.1.b.

Quels sont les ordres de grandeur (1 µA ou 10 mA) des courants d'entrée et de sortie d'une porte logique?

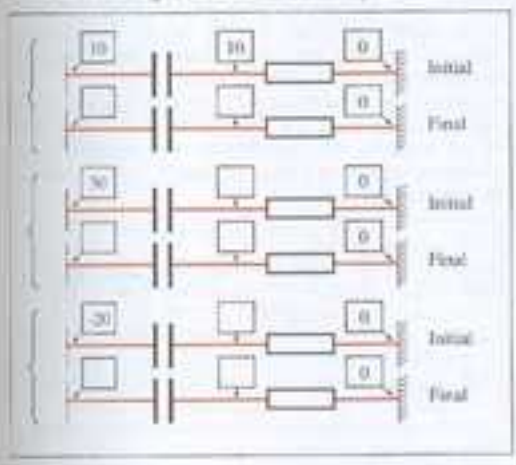
Exercice 23 A.1.c.

I n'entre pratiquement aucun courant dans une porte NON, alors qu'il peut en sortir un (ou y entrer). Cela est-il en contradiction avec la loi des nœuds?



Exercice 24 A.2.b.

Les figures ci-dessous représentent un dipôle *R, C*, dans différents états. Le passage d'un état initial à l'état final suivant (quand le système n'évolue plus) s'effectue sans modification de la tension d'alimentation (à gauche sur le schéma).



Le passage d'un état final à l'état initial suivant a lieu par brusque modification de la tension d'alimentation. Les valeurs des potentiels sont indiquées (en V) dans les cases.

Reproduire le tableau en remplissant les cases donnant les potentiels aux points indiqués.

Exercice 25 B.1.

Chercher dans une encyclopédie la constitution d'une « puce » de circuit intégré.

Exercice 26 B.1.

Se procurer chez un vendeur de composants électroniques la notice relative à un circuit intégré (quadruple porte CMOS 4011 B par exemple). Dans le cours, les basculements des portes ont été supposés instantanés. Est-ce rigoureusement exact?

Exercice 27 B.2.

Résumer en moins de 100 mots, sans formules, le fonctionnement d'un multivibrateur astable de type *R, C*, à inverseurs logiques.

Exercice 28 B.3.

Un dipôle *R, C*, est soumis à une tension en créneaux qui applique entre ses bornes une tension E_1 pendant une durée t_1, puis une tension $E_2 < E_1$ pendant une durée t_2. La tension aux bornes du condensateur évolue selon la loi :

$$u_c = U_i.e^{-t/\tau} + U_f.(1 - e^{-t/\tau}),$$

avec $U_i = E_1$ ou E_2.

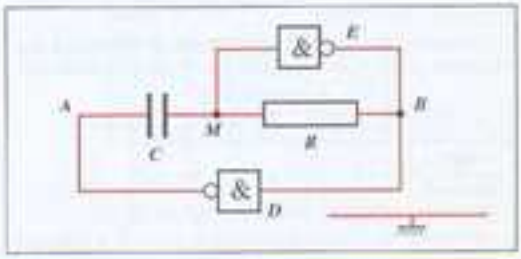
1) Exprimer la tension $u_R(t) = U_1 - u_c$ aux bornes du dipôle ohmique.

2) A la date $t = 0$, le générateur de tension passe à l'état haut et la tension aux bornes du condensateur vaut $U_0 < E_1$. Exprimer la tension U_1 aux bornes du condensateur à la date t_1 de passage à l'état bas. Cette date étant choisie comme nouvelle origine, exprimer la tension U_0 aux bornes du condensateur à la date t_2 de passage à l'état haut.

3) Lorsque le régime permanent est atteint, les tensions successives minimales U_{min} aux bornes du condensateur restent constantes, ainsi que les tensions maximales U_{max}.
Exprimer ces tensions U_{min} et U_{max} en fonction de E_1, E_2, t_1 et t_2. (Remarquer que $U_{min} = U_0 = U_2$ et $U_{max} = U_1$.) Exprimer de même la moyenne des deux tensions.

Exercice 29 B.4.

Le schéma de montage ci-dessous correspond-il à celui d'un multivibrateur astable?



2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES DESTINÉS A TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 19 — A.1.a.

Définir les expressions suivantes : circuit oscillant; pulsation propre; énergie magnétique; amortissement, entretien d'un circuit oscillant.

Exercice 20 — A.1.b.

La période des oscillations d'un oscillateur mécanique est-elle plutôt de l'ordre de la seconde ou de la milliseconde? Même question pour un circuit oscillant.

Exercice 21 — A.1.c.

La résistance d'un dipôle ohmique dépend-elle de la température du dipôle? de la fréquence du courant?

Exercice 22 — A.1. c.

Énoncer, sans formule la loi de conservation de l'énergie électromagnétique d'un circuit oscillant.

Exercice 23 — A.1.c.

Rappeler les propriétés du modèle d'amplificateur opérationnel en fonctionnement linéaire idéal.

Exercice 24 — A.2.b.

Suivre la même démarche que dans le chapitre 5 (page 92 : supposer connue l'expression de l'énergie magnétique et aboutir à celle de l'énergie potentielle) pour introduire l'expression $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ de l'énergie du condensateur chargé.

Exercice 25 — A.2.b.

Dessiner de mémoire le montage correspondant au circuit d'entretien des oscillations électriques d'un circuit oscillant.

Exercice 26 — A.2.b.

Démontrer la relation de conservation de l'énergie électromagnétique pour un circuit oscillant.

Exercice 27 — B.1.

Comparer les propriétés de l'*A.O.* idéal, à celle d'un *A.O.* (TL081 de préférence) réel, en demandant une photocopie du catalogue du constructeur à un marchand de matériel électronique.

Exercice 28 — B.2.

Trouver les incorrections :

1) Un circuit oscillant est réalisé en montant en série une résistance avec une capacité.

2) La période des oscillations d'un circuit oscillant est proportionnelle à la racine carrée du rapport de l'inductance sur l'inverse de la capacité.

3) L'inductance d'un circuit oscillant est l'analogue électrique de la masse d'un oscillateur mécanique.

4) La raideur d'un ressort est l'analogue mécanique de l'inverse de la capacité d'un circuit oscillant.

Exercice 29 — B.3.

Écrire l'équation différentielle à laquelle obéit la charge $q(t)$ d'un circuit oscillant non amorti. Vérifier qu'une solution du type $q = Q_0 . e^{-\gamma t} . \cos(\omega t + \varphi)$ convient à condition de prendre pour la pulsation ω une expression convenable, que l'on exprimera en fonction de $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L . C}}$ et de $\gamma = \frac{R}{2L}$. Cette pulsation existe-t-elle toujours? Que se passe-t-il physiquement quand elle devient imaginaire?

Exercice 30 — B.4.

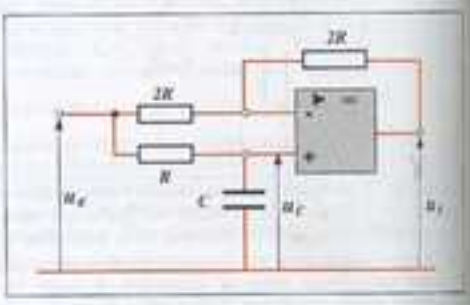
Préparer un exposé sur l'utilisation des circuits oscillants en radio et télévision.

Exercice 31 — C.1.b.

Reprendre l'étude du dispositif d'entretien des oscillations dans le cas où la résistance insérée entre la sortie s' du circuit intégré linéaire et l'entrée inverseuse est la moitié de celle qui est insérée entre s et l'entrée non inverseuse.

Exercice 32 — C.2.b.

1) Pour le montage indiqué ci-dessous, déterminer la relation donnant la tension d'entrée u_e en fonction de R, C, u_s et $\frac{du_s}{dt}$. Même question pour la tension de sortie u_s.



2) En supposant que la tension aux bornes du condensateur soit sinusoïdale ($u_C = U_C . \cos(\omega . t)$), exprimer u_e et u_s sous la forme $u_e = U_e . \cos(\omega . t - \varphi_1)$ et $u_s = U_s . \cos(\omega . t - \varphi_2)$. Comparer U_e à U_s et φ_1 à φ_2. Justifier le nom de déphaseur donné à ce montage.

L'AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL

1. Rappel des propriétés de l'amplificateur opérationnel

L'amplificateur opérationnel est aussi appelé **circuit intégré linéaire.**

a) Rôles des huit pattes

Sur les huit pattes, cinq seulement sont ici utilisées : les **deux entrées** (pattes 2 et 3), la **sortie** (6), et les deux bornes **d'alimentation** +15 V (7), −15 V (4). La patte 8 n'est pas utilisée. Les pattes n°s 1 et 5 ne serviront pas ici. L'amplificateur 741 est moins performant que le TL081, mais les pattes ont le même rôle : ils peuvent être interchangés (fig. 18).

b) Notations

La figure 19 schématise les deux entrées e_- (inverseuse) et e_+ (non inverseuse) de l'amplificateur opérationnel, et sa sortie s'. L'alimentation est ici représentée en estompé; elle ne figure pas en général sur les schémas en vue de les alléger. Les tensions d'entrée et de sortie sont déterminées par rapport au fil de masse. Les numéros (2, 3, 7, 4, 6) indiqués sont ceux des « pattes » de l'amplificateur.

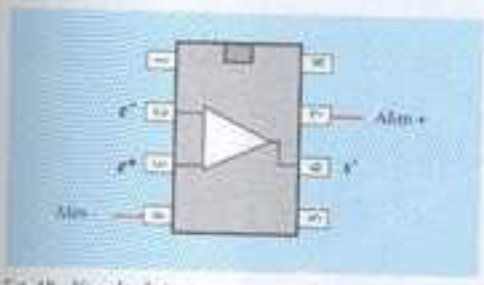


Fig 18. *Vue de dessus.*

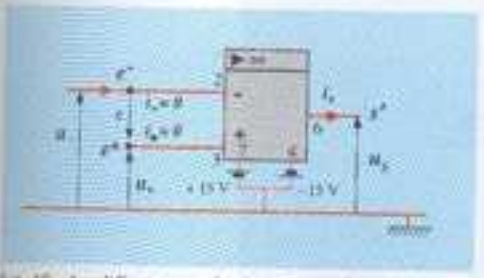


Fig 19. *Amplificateur opérationnel en fonctionnement idéal.*

c) Fonctionnement idéal

Le tableau suivant résume les régimes de fonctionnement de l'amplificateur opérationnel.

$i_+ = i_- = 0$ dans tous les cas.
régime linéaire : $u_+ = u_-$ (à 0,1 mV près) $\varepsilon = 0 \quad u_s = A_0 \cdot \varepsilon$
régime saturé : $u_s = U_{sat} > 0$ si $u_+ > u_-$ $u_s = -U'_{sat} < 0$ si $u_+ < u_-$

• Bien que les courants i_+ et i_- qui entrent ou sortent par les deux bornes d'entrée soient nuls, l'intensité de sortie i_s n'est pas nulle en général par suite de l'intervention de l'alimentation.

• Le régime linéaire s'instaure souvent automatiquement lorsque des « boucles » relient la sortie s' aux entrées de l'amplificateur. A_0 est le facteur d'amplification en tension en l'absence de boucles. Il est élevé, de l'ordre de 10^5.

• Les tensions u_s de saturation sont limitées par l'alimentation. En fonctionnement idéal :

$$U_{sat} = +U_{alim} (+15\ \text{V}),$$

et : $$-U'_{sat} = -U_{alim} (-15\ \text{V}).$$

En réalité, les valeurs absolues de ces tensions de saturation haute et basse sont légèrement inférieures aux tensions d'alimentation (environ 1 V de moins) et ne sont pas nécessairement symétriques.

2. Méthode d'étude des circuits

• **Choisir le sens des flèches associées aux tensions** aux bornes des différents dipôles liés au fil de masse en faisant partir les flèches de ce fil.

• **En déduire l'orientation de ces dipôles** selon la convention habituelle qui rend le produit $u.i$ positif lorsque le dipôle reçoit de l'énergie.

• **Achever les choix d'orientations** pour les dipôles non liés à la masse, en relation avec les choix précédents.

• Tenir compte de la **loi des nœuds** pour désigner les courants (i, i', $i_1 + i_2$, i_e...). Cela procure souvent un gain de temps.

• **Écrire les lois des mailles,** en les choisissant pour que tous les dipôles intervenant fassent partie au moins une fois de l'une des mailles choisies. En tournant sur la maille, les tensions abordées par la pointe de la flèche qui leur est associée sont affectées du signe « − ».

• **Résoudre** les systèmes obtenus.

Pour en savoir plus

RÉALISATION D'UN DISPOSITIF D'ENTRETIEN DES OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES

La figure 20 indique le schéma possible du montage d'un dispositif d'entretien des oscillations. Les deux diodes placées du côté de l'alimentation sont destinées à se protéger contre une erreur de branchement.
Les valeurs indiquées peuvent varier dans d'assez larges limites.

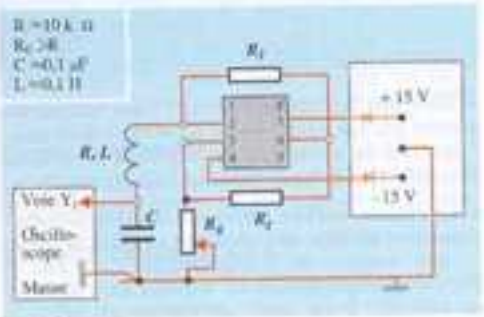


Fig. 20

ÉNERGIE D'UN CONDENSATEUR CHARGÉ

L'énergie dE reçue par un dipôle quelconque, pendant un intervalle de temps dt suffisamment court pour que la tension u aux bornes du dipôle et l'intensité i du courant ne changent pratiquement pas, est $dE = u.i.dt$. A condition de prendre les conventions habituelles, cette énergie est positive quand le dipôle est en train de recevoir de l'énergie (u et i de même signe).

Charger un condensateur revient à prélever des charges positives sur une armature (B par exemple, qui devient alors négative) et à les transférer sur l'autre armature (A) (fig. 21). Après chaque transfert, le champ électrique $\vec{E}$ entre les armatures augmente. Ce champ électrique est de plus en plus difficile à vaincre, et l'énergie nécessaire pour transférer dq de (B) vers (A) est de plus en plus grande.
Le transfert de dq pendant l'intervalle de temps dt équivaut à un courant $i = \frac{dq}{dt}$ dans les fils reliés aux armatures. Dans le cas du condensateur, l'énergie dE qu'il reçoit à chaque transfert s'exprime donc par $dE = u_C.dq$. Mais la charge actuelle q, de l'armature (A), est proportionnelle à la tension : $q = C.u_C$. Par suite, $dE = \frac{q}{C}.dq$.

L'énergie électrique reçue par le condensateur s'obtient en faisant la somme de toutes les énergies élémentaires :

$$E = \int_0^Q \frac{1}{C}.q.dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$E_{élec} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}.$$

En réalité, ce sont des électrons qui arrivent sur l'armature (B), d'autres quittant (A). L'énergie leur est en général fournie par un générateur.

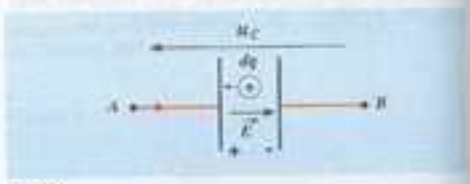


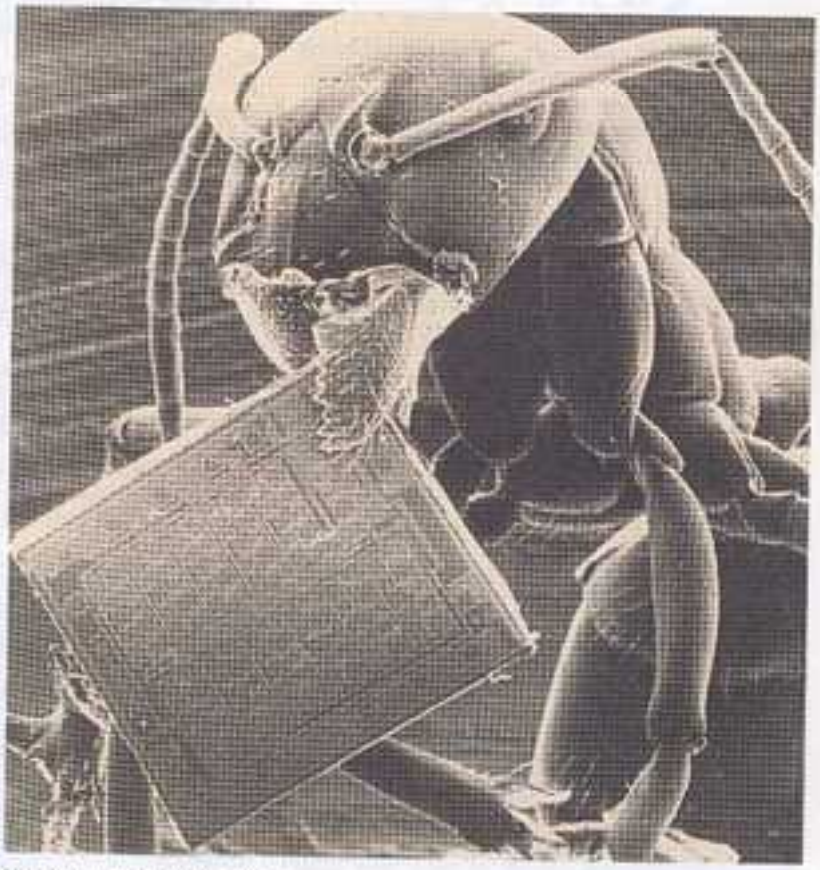
Fig. 21

10 Multivibrateur astable

1 Dipôle série *R*, *C*, attaqué par une tension en créneaux.

2 Porte logique NON.

3 Multivibrateur astable.



Une fourmi tenant une « puce ».

Calculatrices, ordinateurs, téléviseurs, téléphones, automobiles... sont équipés de circuits intégrés divers.

1 DIPÔLE SÉRIE *R, C* ATTAQUÉ PAR UNE TENSION EN CRÉNEAUX

1. Équation différentielle régissant un dipôle série *R, C*

a) Montage

Un dipôle série R, C, (fig. 1) est alimenté par un générateur délivrant une tension en créneaux (fig. 2). Ce générateur est soit en « état haut » ($u_g = E$) soit en « état bas » ($u_g = 0$).

b) Tension aux bornes du condensateur

La tension aux bornes du dipôle R, C, est :

$$u_g = u_R + u_C.$$

Les tensions aux bornes de R et C sont :

$$u_R = R \cdot i \quad \text{et} \quad u_C = \frac{q}{C}$$

où q, désigne la charge de l'armature reliée au point A.
Si la charge de cette armature augmente ($dq > 0$), l'intensité i du courant est positive. Par suite :

$$i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

et : $u_g = u_R + u_C = R \cdot i + u_C = R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C$.

La tension aux bornes du condensateur obéit donc à la relation suivante :

$$u_C + R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} = u_g.$$

Puisque u_g est une tension en créneaux, elle vaut soit 0, soit E. Quand elle est égale à E, le condensateur se charge. Il se décharge quand elle est nulle.

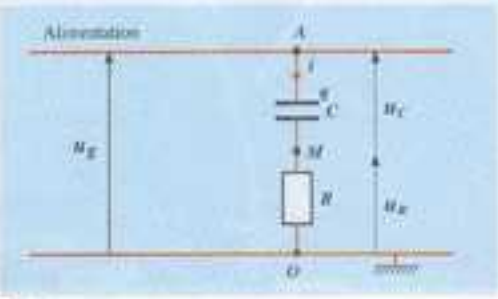


Fig. 1

2. Résolution de l'équation

a) Conditions initiales et finales

L'équation différentielle précédente, convient aussi bien pour la charge du condensateur (avec $u_g = E$), que pour sa décharge ($u_g = 0$). La date de début de charge ou de décharge est choisie comme date origine. A cette date, le condensateur peut n'être pas complètement déchargé s'il entame une phase de charge, ni complètement chargé s'il débute une décharge. La tension à ses bornes à la date $t = 0$ est désignée par u_{C_0}.

• Charge

Pendant la charge, la tension aux bornes du dipôle R, C reste constante :

$$u_C + u_R = E > u_{C_0}.$$

Pendant la charge, u_C augmente et $u_R = E - u_C$ diminue. En fin de charge, l'intensité i du courant s'annule, ainsi que la tension $u_R = R \cdot i$ aux bornes du dipôle ohmique. La tension aux bornes du condensateur en fin de charge complète est : $u_{C_f} = E$.

• Décharge

La décharge se produit lorsque la tension aux bornes du dipôle R, C, est nulle : $u_C + u_R = 0$.

Au début de la décharge, $u_C = u_{C_1}$ ($u_{C_1} = E$ si le condensateur est complètement chargé), et $u_R = -u_{C_1} = R \cdot I$.

Il s'établit un courant qui décharge le condensateur.

A la fin de la décharge $i = 0$, et $u_R = R \cdot i$, s'annule avec i.

b) Solution de l'équation

• Charge

L'équation différentielle de charge du condensateur :

$$u_C + R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} = E,$$

admet pour $u_C(t)$ une solution qui est une fonction exponentielle du temps, du type :

$$u_C(t) = A + B \cdot e^{k \cdot t}.$$

A et B sont des constantes qui dépendent des conditions initiales et finales, et k est une constante à déterminer.

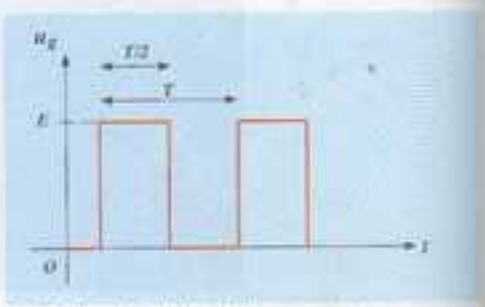


Fig. 2. *Tension d'alimentation « en créneaux ».*

La dérivée de $u_C(t)$ a pour expression :

$$\frac{du_C}{dt} = k.B.e^{k.t},$$

ce qui, remplacé dans l'équation différentielle, donne :

$$A + B.e^{k.t} + R.C.k.B.e^{k.t} = E.$$

Cette expression ne peut être indépendante du temps que si $B.e^{k.t}.(1 + R.C.k) = 0$ à tout instant, ce qui nécessite : $k = -\frac{1}{R.C}$.

La solution de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$u_C(t) = A + B.e^{-t/R.C}.$$

Au bout d'un temps « infini », la charge est achevée ($u_C = E$). L'équation précédente donne $u_C = A$ (car $e^{-\infty} = 0$). Donc :

$$A = E \quad \text{et} \quad u_C(t) = E + B.e^{-t/R.C}.$$

A la date $t = 0$, $u_C = u_{C_1}$. L'équation précédente donne : $u_{C_1} = E + B$ (car $e^0 = 1$).
Avec $B = u_{C_1} - E$, la solution devient :

$$u_C(t) = E + (u_{C_1} - E).e^{-t/R.C}.$$

Elle s'écrit aussi :

$$u_C(t) = u_{C_1}.e^{-t/R.C} + E.(1 - e^{-t/R.C}). \quad (1)$$

Ce résultat n'est pas à mémoriser.

▪ **Décharge**

Pour la décharge, l'équation différentielle est :

$$u_C + R.C.\frac{du_C}{dt} = 0.$$

Il suffit de remplacer E par 0, dans l'équation (1), qui devient ainsi :

$$u_C(t) = u_{C_1}.e^{-t/R.C}.$$

Plus généralement, la solution :

$$u_C(t) = u_{C_1}.e^{-t/R.C} + E.(1 - e^{-t/R.C})$$

convient pour toutes les situations, tant pour la charge ($u_{C_1} < E$) que pour la décharge ($E = 0$).

c) Constante de temps du dipôle R, C

La constante $\tau = R.C$ intervient dans l'équation différentielle $u_C + R.C.\frac{du_C}{dt} = u_g$ et dans sa solution. Elle s'exprime en seconde afin que $R.C.\frac{du_C}{dt}$ soit, comme u_C et u_g, en volt. Elle est appelée **constante de temps** du dipôle R, C.

$\tau = R.C$
R en ohm (Ω) C en farad (F) τ en seconde (s)

En faisant intervenir la constante de temps τ, la solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$u_C(t) = u_{C_1}.e^{-t/\tau} + E.(1 - e^{-t/\tau}).$$

L'exposant $-\frac{t}{\tau}$ est un rapport de deux durées, donc sans unité.

Théoriquement, la charge du condensateur est de durée infinie. La tension aux bornes d'un condensateur initialement non chargé ($u_{C_1} = 0$) évolue en fonction du temps selon :

$$u_C(t) = E.(1 - e^{-t/\tau}).$$

Le terme $e^{-t/\tau}$ devient rapidement négligeable vis-à-vis de l'unité. Par exemple, $e^{-t/\tau}$ est égal à 0,01 lorsque $-\frac{t}{\tau} = \ln 0{,}01$, soit $t = 4{,}6\tau$.

La charge, à travers un dipôle ohmique, d'un condensateur initialement non chargé, peut être considérée comme achevée au bout d'un intervalle de temps de l'ordre de 5τ.
Il en va de même pour la décharge.

d) Tension aux bornes du dipôle ohmique

La tension $u_R(t)$ aux bornes du dipôle ohmique se déduit de $u_C(t)$ par $u_C + u_R = u_g$ ($u_g = E$ ou 0). Un calcul immédiat donne, pour la charge :

$$u_R(t) = (E - u_{C_1}).e^{-t/\tau},$$

et pour la décharge :

$$u_R(t) = -u_{C_1}.e^{-t/\tau}.$$

L'intensité dans le dipôle R, C, s'en déduit :

$$i(t) = \frac{u_R(t)}{R}.$$

La figure 3 résume les différentes équations.

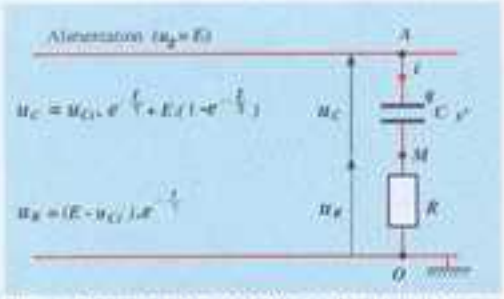


*Fig. 3. **Charge ou décharge d'un condensateur à travers un dipôle ohmique.** Les formules indiquées conviennent aussi bien pour la charge que pour la décharge ($E = 0$).*

3. Évolution des tensions aux bornes des dipôles *C* et *R*

La situation la plus simple, qui sera la seule envisagée ici, est celle où le condensateur qui se charge est initialement non chargé ($u_{C_0} = 0$).

a) Condensateur

L'évolution en fonction du temps de la tension aux bornes d'un condensateur pendant la charge est :

$$u_C = E.(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{(fig. 4)}$$

et pendant la décharge : $u_C = E.e^{-t/\tau}$ (fig. 5).



Fig. 4. ***Charge du condensateur.***

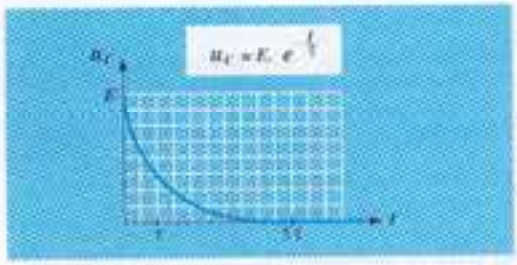


Fig. 5. ***Décharge du condensateur.***

b) Dipôle ohmique

Pendant la charge du condensateur, $u_g = E$ et $u_R = E.e^{-t/\tau}$.

Pendant la décharge, $u_g = 0$ et $u_R = -E.e^{-t/\tau}$.

c) Ensemble du circuit

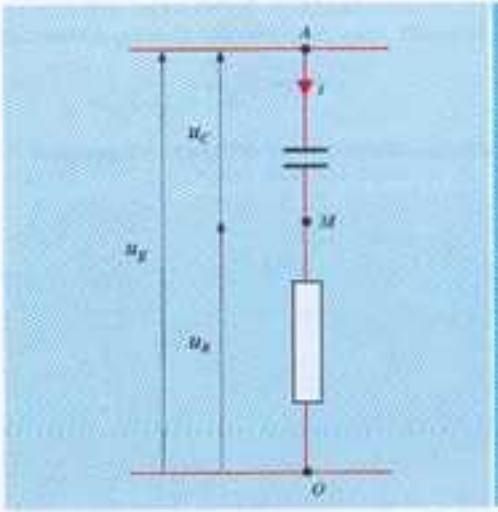
La figure 6 montre l'évolution des fonctions $u_C(t)$, $u_R(t)$ et $u_g(t)$, dans l'hypothèse où la période T de la tension en créneaux, est suffisamment grande pour que le condensateur puisse être considéré comme complètement chargé ou complètement déchargé à la fin de chacune des phases de son évolution $\left(\frac{T}{2} > 5\tau\right)$.

4. Évolution des potentiels aux différents points du circuit

a) Comportement comparé du dipôle ohmique et du condensateur

La figure 6 montre que la tension aux bornes du dipôle ohmique présente des discontinuités aux instants où le générateur de tension en créneaux passe de l'état bas à l'état haut (ou inversement). Il n'en va pas de même pour la tension aux bornes du condensateur : la courbe montrant l'évolution de $u_C(t)$ possède aux mêmes instants des points anguleux, mais elle n'est pas discontinue. C'est une succession des courbes des figures 4 et 5. Cette différence de comportement peut s'interpréter comme suit :

• *La charge du condensateur ne peut pas subir de brusques variations.* Cela supposerait en effet qu'il perde (ou gagne) une charge dq notable pendant un intervalle de temps nul, d'où une intensité infinie, interdite par la présence du dipôle ohmique. Si la charge ne peut pas subir



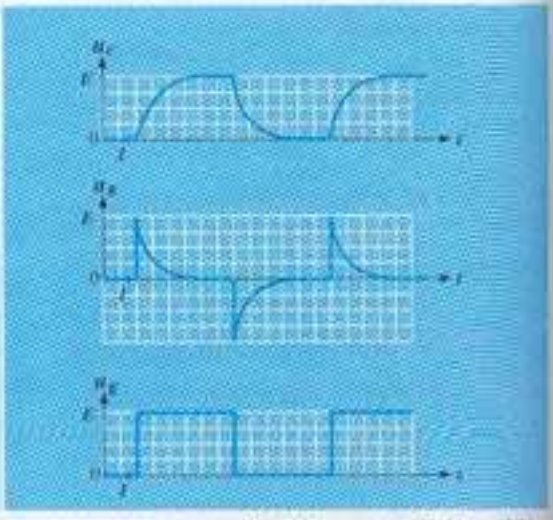


Fig. 6. ***Évolution des tensions aux bornes des différents dipôles. A tout instant, $u_g = u_C + u_R$ ($= 0$ ou E). Contrairement à u_C, u_R présente des discontinuités.***

$u_C = E.e^{-t/\tau}$ $\quad$ $u_C = E.(1 - e^{-t/\tau})$
$u_R = -E.e^{-t/\tau}$ $\quad$ $u_R = E.e^{-t/\tau}$
$u_g = 0$ $\quad$ $u_g = u_C + u_R = E$

de discontinuités, il en va de même pour la tension $u_C = \frac{q}{C}$.

> Une brusque variation du potentiel de l'une des armatures d'un condensateur se répercute immédiatement sur l'autre armature qui subit la même variation de potentiel.

• *L'intensité du courant peut varier brusquement.* Lorsque le condensateur est chargé, l'intensité du courant est nulle. Si le générateur passe à l'état bas, la tension u_g à ses bornes devient nulle. Le condensateur, chargé, joue maintenant le rôle d'un générateur de f.é.m. initiale $|E|$, d'où l'existence d'un brusque courant d'intensité $|i| = \frac{|E|}{R}$, qui diminue ensuite.
De même, si le condensateur non chargé et la résistance sont mis brusquement sous tension E, l'intensité du courant passe brusquement de 0 à $i = \frac{E}{R}$. Le condensateur non chargé se comporte comme un court-circuit.

b) Évolution des potentiels

Le potentiel du fil de masse est choisi nul par convention. Ce potentiel reste nul quelles que soient les circonstances: $V_O = 0$.
Or, $u_R = V_M - V_O$, d'où : $V_M = u_R$. Pour l'alimentation, $V_A = u_g$ (0 ou E).
L'étude commence lorsque le générateur est dans son état bas et le condensateur déchargé : point I de la figure 6. Ainsi tous les potentiels sont nuls.
Les différentes étapes sont à suivre sur la figure 7.

• **Étape 1**
Le générateur passe à l'état haut : $V_A = E$.
La brusque élévation de potentiel de l'armature A se répercute immédiatement sur l'autre armature. D'où :

$$V_M = V_A = E.$$

Une tension apparaît donc aux bornes du dipôle ohmique, mais pas aux bornes du condensateur.

• **Étape 2**
Le générateur reste à l'état haut. La tension aux bornes du dipôle ohmique y fait passer un courant (positif, de M vers O). Le condensateur se charge progressivement et s'oppose de plus en plus au passage du courant : la tension entre M et O diminue. Le potentiel de M, V_M, passe de E à O pendant cette étape.

• **Étape 3**
Le générateur retourne à l'état bas : $V_A = 0$.
Le potentiel de l'armature A passe brusquement de E à O.
Cette brusque diminution de potentiel ($-E$), se répercute immédiatement sur l'armature M, dont le potentiel passe de 0 à $-E$.

• **Étape 4**
Le générateur reste à l'état bas. Un courant négatif (de O vers M) prend naissance. Le condensateur se décharge et la tension u_C à ses bornes diminue de E à 0.
Corrélativement, le potentiel V_M croît de $-E$ à 0.
A la fin de cette étape, la situation est la même qu'au départ et le cycle recommence.
La vérification expérimentale des propriétés précédentes fait l'objet de la fiche expérimentale p. 208.

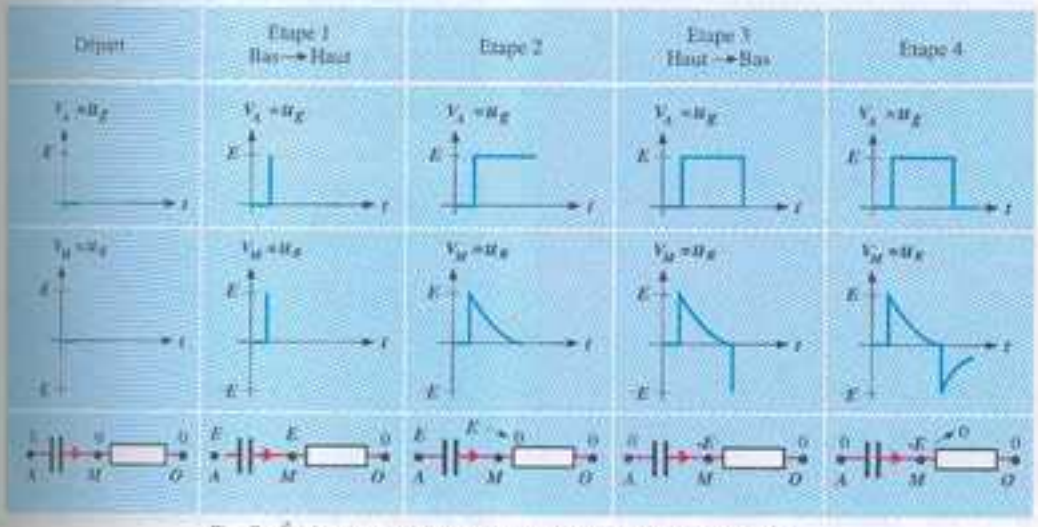


Fig. 7. Évolution des potentiels aux différents points du dipôle.

2 PORTE LOGIQUE NON

Une porte logique est un dispositif électronique qui donne à sa sortie un signal électrique dont l'état (haut ou bas), dépend du signal d'entrée. Ce paragraphe a pour objet d'étudier la plus simple de ces portes, qui réalise la « fonction logique » NON.

1. Entrée, sortie et alimentation d'une porte NON

Une porte NON (fig. 8) ne comporte qu'une seule borne d'entrée, e, et une seule borne de sortie, s. La tension, u_e, appliquée à l'entrée e, commande la tension de sortie u_s. Entre les bornes e et s, un circuit intégré contenant des composants miniaturisés (transistors, diodes...) réalise la transformation désirée du signal d'entrée.

Comme tout circuit électronique, la porte ne peut fonctionner que si elle est alimentée par une source d'énergie dont le pôle − sert d'origine des potentiels.
Habituellement, pour ne pas surcharger les schémas, l'alimentation n'est pas représentée.
La figure 9 donne les symboles d'une porte NON.

2. Fonctionnement d'une porte NON

a) Caractéristique de transfert

La caractéristique de transfert est la représentation graphique de l'évolution de la tension de sortie u_s en fonction de la tension d'entrée u_e.

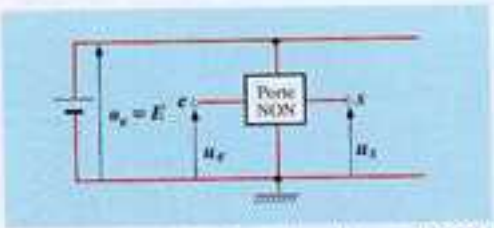


Fig. 8. ***Entrée, sortie et alimentation d'une porte NON.*** *L'intensité débitée par l'alimentation est faible.* $u_e = E$ *(f. é. m. du générateur).*

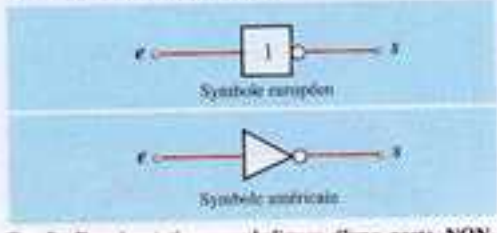


Fig. 9. ***Représentations symboliques d'une porte NON.***

Dans le cas de la porte NON (fig. 10) :

— **une tension d'entrée** u_e inférieure à une certaine tension U_s dite « de basculement » commande une **tension de sortie** u_s égale à la tension d'alimentation : $u_s = E$;

— **une tension d'entrée** u_e supérieure à la « tension de basculement » U_s commande une **tension de sortie** u_s **nulle** : $u_s = 0$.

Ces propriétés sont résumées dans le tableau suivant :

u_e	u_s
$< U_s$	E
$> U_s$	0

La tension de basculement U_s est voisine de $\frac{E}{2}$.

b) États logiques d'une porte NON

Une tension d'entrée supérieure à U_s est dite à l'état haut, qui se représente par un « état logique » 1. Une tension d'entrée inférieure à U_s est dite à l'état bas, qui se représente par un « état logique » 0.
Quant à la tension de sortie, elle ne peut être qu'égale à 0 ou E, c'est-à-dire en l'état logique 0 ou 1.
Les états logiques d'une porte NON sont donnés par le tableau suivant, appelé aussi **table de vérité** :

e	s	
0	1	(entrée à l'état bas, sortie à l'état haut)
1	0	(entrée à l'état haut, sortie à l'état bas)

En d'autres termes, une tension d'entrée haute, donne une tension de sortie NON haute; une tension d'entrée basse, donne une tension de sortie NON basse. Cela justifie la dénomination de porte NON. Le système est **inverseur**.

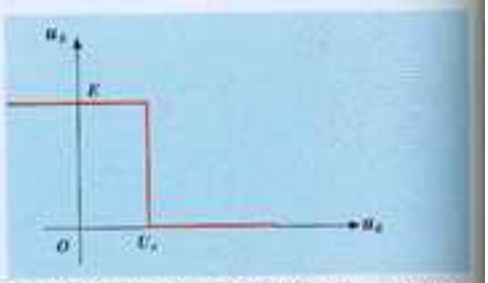


Fig. 10. ***Caractéristique de transfert d'une porte NON.*** *U_s est la tension de basculement. Elle a même valeur qu'elle soit atteinte par valeur croissante ou décroissante.*

c) Modélisation du fonctionnement des portes

Une bonne partie du fonctionnement des inverseurs peut être compris en adoptant le modèle suivant.

– **Résistance d'entrée** : extrêmement grande (pratiquement infinie).

– **Résistance de sortie** : pratiquement nulle.

– **Basculements instantanés** de l'état haut vers l'état bas, et inversement. Ces basculements ont lieu pratiquement simultanément à l'entrée et à la sortie.

– **Tension de basculement** : $U_c = \frac{E}{2}$. Le basculement état bas-état haut, et le passage inverse, se produisent pour la même valeur U_c de la tension d'entrée.

1. Réalisation pratique d'une porte NON

a) État d'une porte NON-ET

Une porte logique NON-ET comporte deux entrées e_1 et e_2, et une sortie s. Elle est aussi notée $\overline{\text{ET}}$ (qui se lit « E barre » ou « non ET »). Sa représentation symbolique est donnée à la figure 11.

D'après le tableau qui donne ses états (fig. 12), la sortie d'une porte NON-ET n'est à l'état bas (0) que si ses entrées se trouvent toutes les deux à l'état haut (1); sinon, la sortie est à l'état haut.

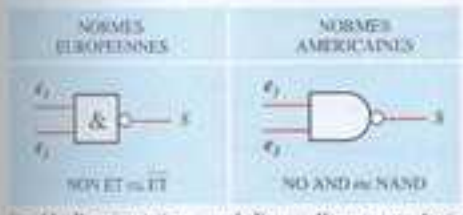
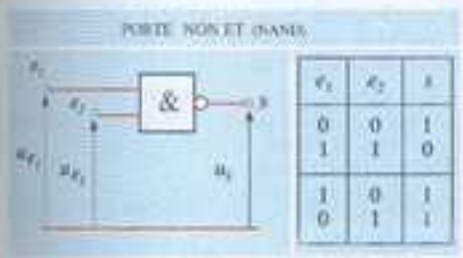


Fig. 11. Représentations symboliques d'une porte logique NON-ET ou NAND ou $\overline{\text{ET}}$.



e_1	e_2	s
0	0	1
1	1	0
1	0	1
0	1	1

Fig. 12. Tableau des états d'entrée et de sortie d'une porte NON-ET.

b) Transformation en porte NON

Lorsque les deux entrées d'une porte $\overline{\text{ET}}$ sont réunies, elles se trouvent simultanément soit dans l'état haut, soit dans l'état bas. La porte n'a plus qu'une seule entrée (fig. 13). Seules, les deux premières lignes du tableau sont à prendre en considération. Leur examen montre qu'il s'agit maintenant d'une porte NON.

L'un des intérêts de cette transformation est que les circuits intégrés assurant la fonction NAND ont d'assez nombreuses applications. Ils sont fabriqués en grande série, peu coûteux, et plus courants que les portes NON.

D'autres portes assurant des fonctions logiques diverses (NI, OU exclusif…) peuvent aussi être transformées en portes NON. Elles sont proposées en exercices.

La Fiche expérimentale p. 209 a pour objet l'étude d'une porte NON.



Fig. 13. Porte $\overline{\text{ET}}$ transformée en porte NON.

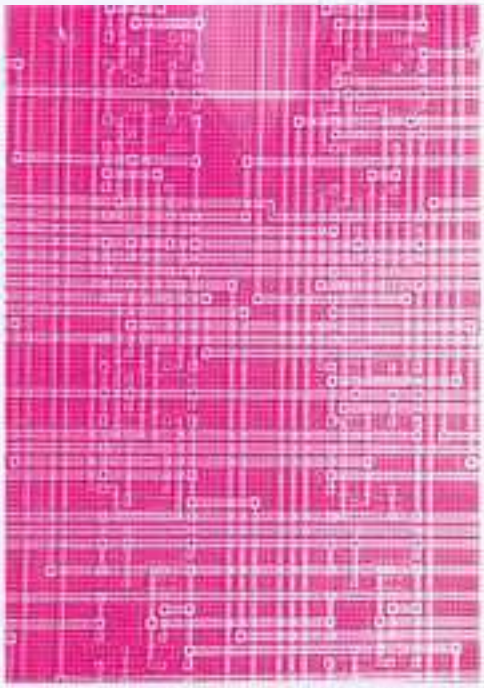


Fig. 14. Circuit intégré comportant des portes logiques, vu au microscope électronique.

3 MULTIVIBRATEUR ASTABLE DE TYPE *R, C,* A INVERSEURS LOGIQUES

1. Rôle et constitution de ce multivibrateur

Un *multivibrateur* est un générateur de signaux périodiques non sinusoïdaux. Il est *astable* lorsqu'il engendre les vibrations de lui-même, sans être déclenché par des commandes extérieures. Il est de *type R, C,* quand le système utilisé pour le faire évoluer est constitué d'une résistance et d'une capacité. Enfin, il est à inverseurs logiques lorsqu'il contient des portes logiques NON qui assurent les basculements de tension.

La figure 15 indique le montage théorique d'un tel multivibrateur.

La réalisation pratique de ce multivibrateur est donnée dans Pour en savoir plus.

La tension de sortie $u_s(t)$ du multivibrateur étudié ici est une tension en créneaux de période réglable par modification de R ou C. Cette période varie légèrement avec les paramètres extérieurs (température..) mais peut être considérée comme constante avec une bonne approximation. L'appareil constitue donc une **horloge électronique.**

2. Étude du fonctionnement du multivibrateur

a) Principe

Les notations utilisées sont indiquées à la figure 16.

• Les résistances d'entrée sont pratiquement infinies : aucun courant ne circule dans les fils branchés sur les entrées des portes. Au contraire, grâce à l'alimentation, du courant peut circuler dans les fils reliés aux sorties des portes. Par suite, le courant ne peut passer, dans un sens ou dans l'autre, que selon le trajet s_1CMNs_2.

• Le fil de masse, relié au pôle − de l'alimentation, sert par convention d'origine des potentiels. Toutes les tensions évaluées à partir du fil de massse sont donc numériquement égales aux potentiels des points considérés.

• Lorsque la sortie d'une porte NON est dans l'état haut, son potentiel est égal à E.

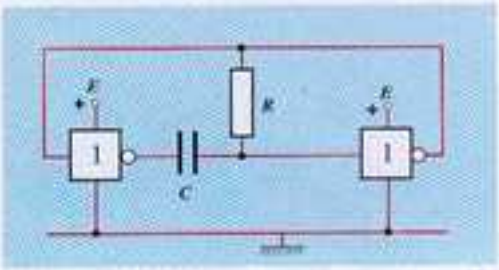


Fig. 15. ***Principe du montage du multivibrateur astable.***

Lorsqu'elle est dans l'état bas, son potentiel est nul.

• L'entrée e_1 de NON 1 est toujours au même potentiel que la sortie s_2 de NON 2, car elles sont reliées par un simple fil passant par N.

Les potentiels de e_1 et s_2 ne peuvent donc être que E ou 0, celui de s_1 étant alors 0 ou E : si s_1 est à l'état haut, s_2 est à l'état bas, et inversement.

• En revanche, le potentiel de l'entrée e_2, égal à celui de M, est évolutif par suite de la présence du condensateur.

En supposant le condensateur initialement non chargé, s_1 à l'état haut (donc e_1 et s_2 bas) et e_2 à l'état haut, le système évolue ensuite de la façon suivante :

— Courant d'intensité positive, qui charge le condensateur et passe de M vers N à travers le dipôle ohmique.

— Décroissance de ce courant de charge et, par suite, de la tension $u_R = V_M - V_N = R\,.\,i$; N est au potentiel O comme s_2. Par suite, le potentiel haut de M diminue.

— Lorsque le potentiel en M atteint en décroissant la tension U_s la porte NON 2 bascule : s_2 passe à l'état haut (de même e_1), et le potentiel de s_1 passe de E à O.

— La chute de tension en s_1 se répercute immédiatement en M (ou e_2), qui passe de U_s à $U_s - E$.

— Le sens du courant s'inverse : le condensateur se décharge, jusqu'à ce qu'un autre basculement se produise : le système est **astable.**

b) Mise en équation

Il s'agit d'établir l'équation différentielle à laquelle obéit le dipôle R, C, environné des deux portes NON.

Avec les conventions indiquées :

$$u_R = R\,.\,i = R\,.\frac{dq}{dt} = R\,.\,C\,.\frac{du_C}{dt}.$$

Pour la maille (masse − s_1MNs_1 − masse) :

$$u_{s_1} - u_C - u_R - u_{s_2} = 0,$$

d'où : $$u_C + u_R = u_{s_1} - u_{s_2}.$$

Deux cas sont à envisager :

• *La sortie s_1 est dans l'état bas :* $u_{s_1} = 0$.

L'entrée e_1 de la porte NON 1 est donc dans l'état haut, ainsi que la sortie s_2 : $u_{s_2} = E$.

Dans ce cas, $u_C + u_R = -E$.

• *La sortie s_1 est dans l'état haut :* $u_{s_1} = E$.

L'entrée e_1 de la porte NON 1 est donc dans l'état bas, ainsi que la sortie s_2 : $u_{s_2} = 0$.

Dans ce cas, $u_C + u_R = E$.

Puisque $u_R = R\,.\,C\,.\frac{du_C}{dt}$, l'équation différentielle cherchée est :

$$u_C + R\,.\,C\,.\frac{du_C}{dt} = \pm E.$$

Cette équation est analogue à celle qui a été obtenue pour un dipôle R, C, soumis à une tension en créneaux (p. 198). Ici, les tensions possibles aux bornes du dipôle R, C, sont E et $-E$, alors qu'elles étaient précédemment E et 0.

c) Méthode d'étude

Chaque phase de fonctionnement peut être étudiée par la séquence suivante :

1) Chercher dans quels états se trouvent l'entrée e_1 et les sorties s_1 et s_2 des portes NON pendant la phase étudiée. L'état de e_2 est évolutif.

2) Déterminer la tension u_{RC} aux bornes du dipôle R, C. Elle est égale à $u_{s_1} - u_{s_2}$ et vaut $\pm E$ selon l'état des portes.

3) Chercher la tension initiale u_{C1} aux bornes du condensateur. La tension finale qu'atteindrait le condensateur s'il n'y avait pas basculement, est selon les cas, $u_{Cf} = \pm E$. En déduire l'expression de la tension $u_C(t)$, d'après la relation $u_C = u_{C1} \cdot e^{-t/\tau} + u_{Cf} \cdot (1 - e^{-t/\tau})$, donnée au début de ce chapitre.

4) En déduire l'évolution de $u_{e_2}(t) = u_{s_1} - u_C$.

5) Déterminer la date de la prochaine transition, qui se produit lorsque u_{e_2} atteint la valeur U_r.

6) Calculer la tension finale u_{Cf} du condensateur, qui a lieu au basculement quand $u_{e_2} = U_r$. Cette tension sera la tension initiale de la phase suivante.
Chercher les états des portes à l'instant de la transition, et immédiatement après.
Les raisonnements sont à suivre sur la figure 16 p. 205 ou p. 207.

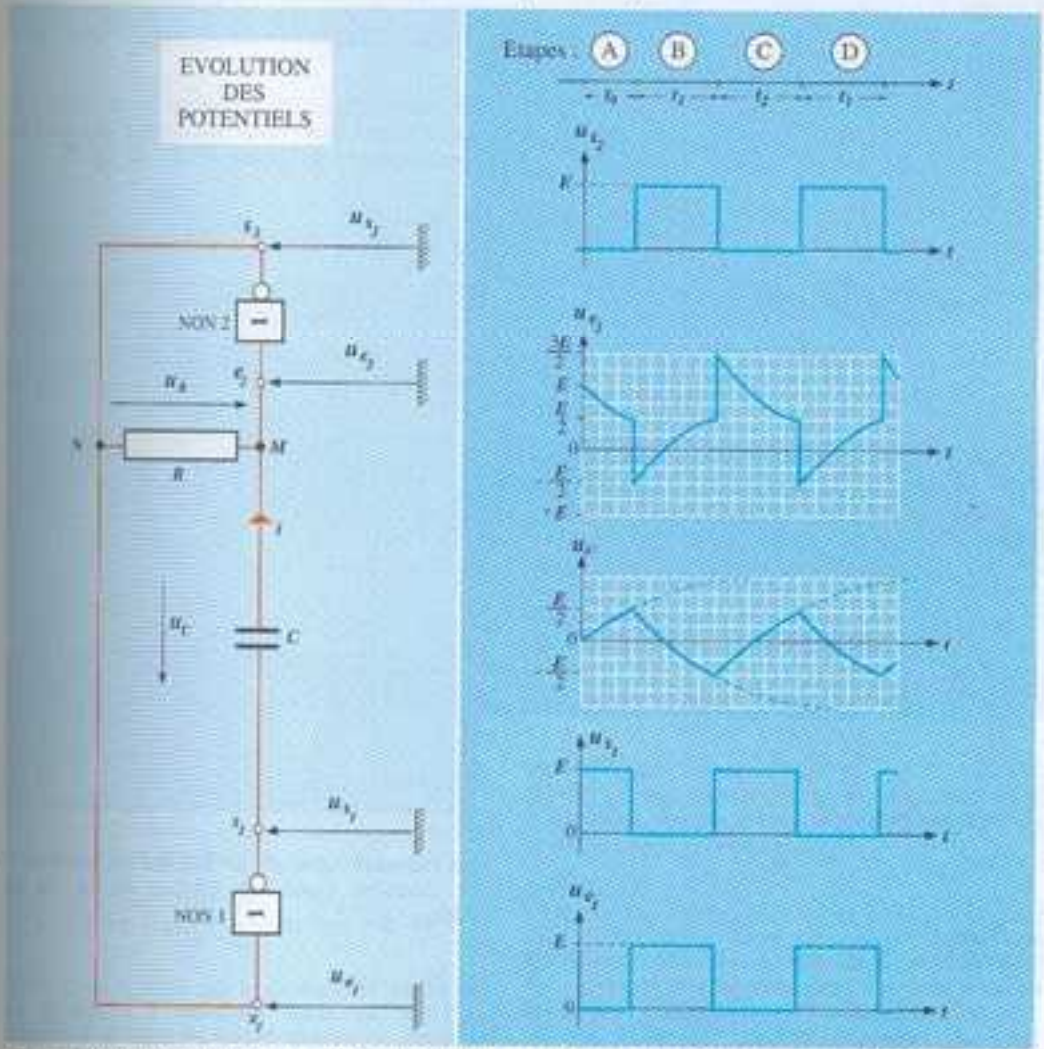


Fig. 16 *Evolution des potentiels aux différents points du circuit. Le potentiel de basculement est supposé égal à* $\frac{E}{2}$. *Le signal d'horloge peut être prélevé en* e_1, *en* s_1 *ou en* s_2.

d) Diverses phases du fonctionnement

• *État initial*
Les portes sont alimentées. Le condensateur non chargé ($u_{C_0} = 0$) et le dipôle ohmique sont insérés à la date $t = 0$. La sortie s_1 est supposée ici dans un état haut.

• *Étape A*
Le lecteur est invité, à titre d'exercice, à utiliser la méthode proposée pour vérifier la validité des résultats indiqués dans les tableaux suivants.

1	u_{e_1}	u_{s_1}	u_{e_2}	u_{s_2}
	0	E	E	0
2	$u_{BC} = u_{s_1} - u_{e_2} = E$			
3	$u_{C_0} = 0$ $u_C = E.(1 - e^{-t/\tau})$			
4	$u_{e_2} = u_{s_1} - u_C = E.e^{-t/\tau}$			
5	$t_0 = \tau.\ln\dfrac{E}{U_r}$			
6 à t_0	u_{e_1}	u_{s_1}	u_{e_2}	u_{s_2}
	0	E	U_r	0
à $t_0 + \varepsilon$	E	0	$U_r - E$	E

Le seul point délicat pour remplir ce tableau est relatif à la transition de la ligne 6. Lorsque la sortie e_1 de la porte NON 1 passe brusquement de E à 0, cette baisse de potentiel est répercutée immédiatement et intégralement sur l'autre armature, dont le potentiel passe brusquement de U_r à $U_r - E$.

La tension finale du condensateur est donnée par :

$$u_C + u_{e_2} = u_{s_1} = E.$$

Le basculement a lieu pour $u_{e_2} = U_r$, donc :

$$u_{C_1} = E - U_r.$$

• *Étape B*
Elle débute à la date t_0, choisie maintenant comme nouvelle origine ($t = 0$).
Les valeurs initiales correspondent à la dernière ligne du tableau précédent. La valeur u_{C_1} est celle que prend la tension u_C à la fin de la phase A (à la date t_0). La méthode conduit aux résultats suivants :

1	u_{e_1}	u_{s_1}	u_{e_2}	u_{s_2}
	E	0	$U_r - E$	E
2	$u_{BC} = -E$			
3	$u_{C_1} = E - U_r$ $u_C = (2E - U_r).e^{-t/\tau} - E$			
4	$u_{e_2} = -u_C = E - (2E - U_r).e^{-t/\tau}$			
5	$t_1 = \tau.\ln\dfrac{2E - U_r}{E - U_r}$			
6 à t_1	u_{e_1}	u_{s_1}	u_{e_2}	u_{s_2}
	E	0	U_r	E
à $t_1 + \varepsilon$	0	E	$U_r + E$	0

Là encore, l'élévation brusque de potentiel à la sortie s_1 est répercutée sur l'autre armature du condensateur, qui passe de U_r à $U_r + E$.

• *Étape C*
En procédant comme précédemment, il vient :

1	u_{e_1}	u_{s_1}	u_{e_2}	u_{s_2}
	0	E	$U_r + E$	0
2	$u_{BC} = E$			
3	$u_{C_2} = -U_r$ $u_C = E - (E + U_r).e^{-t/\tau}$			
4	$u_{e_2} = E - u_C = (E + U_r).e^{-t/\tau}$			
5	$t_2 = \tau.\ln\dfrac{E + U_r}{U_r}$			
6 à t_2	u_{e_1}	u_{s_1}	u_{e_2}	u_{s_2}
	0	E	U_r	0
à $t_2 + \varepsilon$	E	0	$U_r - E$	E

La dernière ligne de ce tableau est identique à la dernière ligne du tableau de la fin de l'étape A.

• *Étape D*
L'étape est donc identique à l'étape B. La tension u_{e_2} initiale diffère ici de celle du premier tableau (étape A) qui correspond à une phase transitoire de mise en fonctionnement du système.

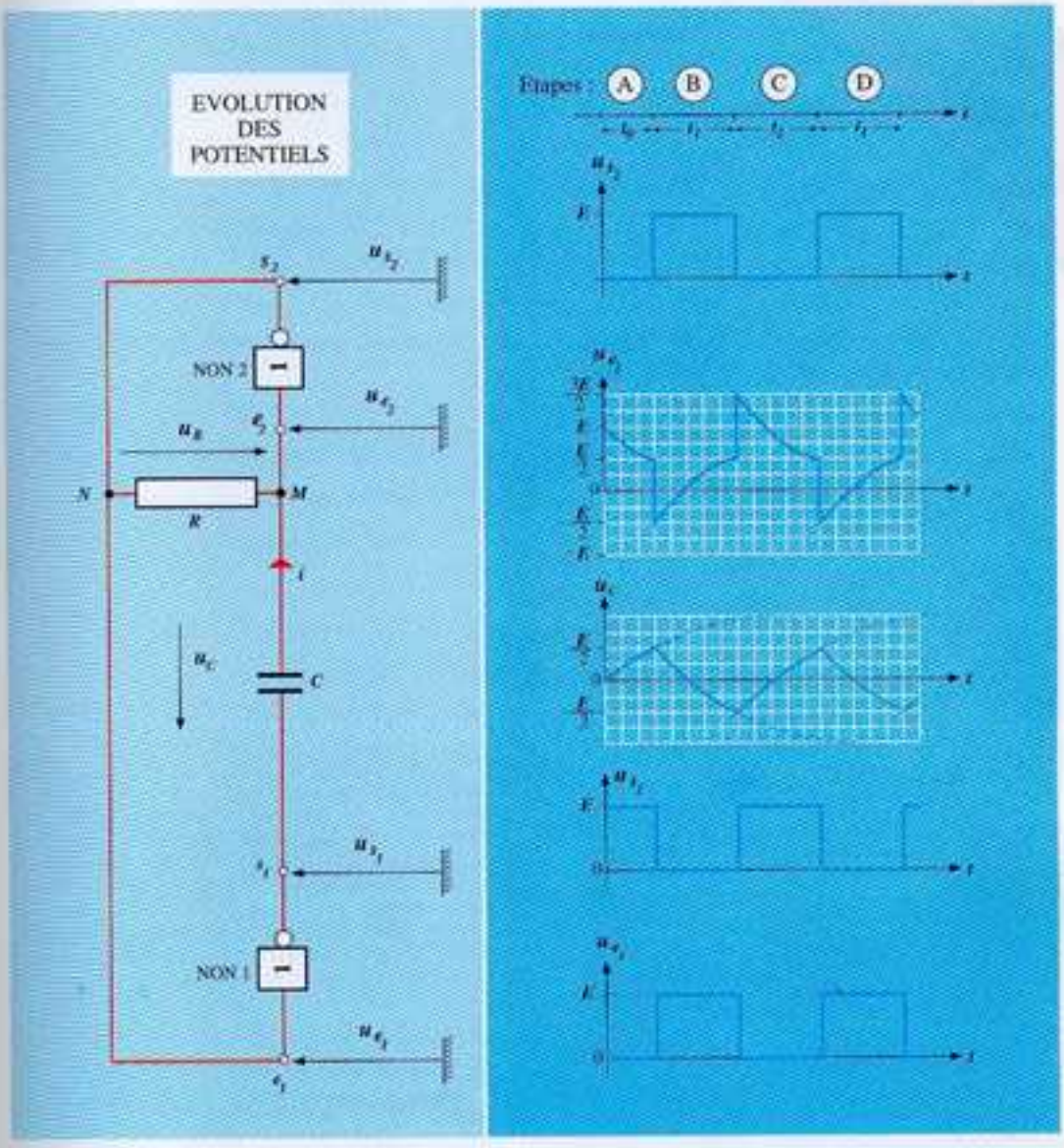


Fig. 16

3. Période du multivibrateur

La période du multivibrateur s'obtient en ajoutant les deux durées t_1 et t_2 des deux phases non transitoires précédentes :

$$T = \tau . \left(\ln \frac{2E - U_r}{E - U_r} + \ln \frac{E + U_r}{U_r} \right).$$

Cette formule n'est pas à mémoriser.

Dans le cas où $U_r = \frac{1}{2} E$, elle se simplifie en $T = 2\tau . \ln 3 = 2{,}2\tau$. La figure 16 est réalisée en se plaçant dans ce cas particulier.

Par exemple, pour $R = 10\ \text{k}\Omega$ et $C = 10\ \text{nF}$, $T \approx 22\ \mu\text{s}$, soit une fréquence de 45 kHz environ. La vérification de ces propriétés fait l'objet de la fiche expérimentale p. 210.

Remarque :
Cette dernière relation peut s'obtenir plus simplement car charge et décharge du condensateur sont symétriques. Le temps de décharge de la phase B est, en faisant une translation des potentiels de E, tel que :

$$u = \frac{3}{2} E . e^{-t/\tau} = \frac{E}{2}.$$

D'où $t = \tau . \ln 3$.

La période est le double, soit $T = 2\tau . \ln 3$.

Fiche expérimentale

Réponse d'un dipôle *R*, *C*, à une tension en créneaux

1) Montage

Brancher en série un condensateur de capacité $C = 1$ nF et un dipôle ohmique de résistance $R = 100$ kΩ. Les relier à un générateur de tension « en créneaux » ⎍, réglé sur 1 kHz et une tension de sortie $E = 10$ V (fig. 17).

2) Oscillogrammes

a) L'interrupteur K étant ouvert, relier à l'oscilloscope la borne O à la masse, et la borne A à la voie 1.
L'évolution en fonction du temps de la tension « en créneaux » est ainsi visualisée sur l'oscilloscope.

b) Relier le point A à la voie 1, le point M à la masse et le point O' à la voie 2 inversée. Fermer l'interrupteur K. Régler les voies 1 et 2 sur la même sensibilité. L'oscilloscope visualise alors, simultanément :
— la tension $u_C(t) = v_{AM} = V_A - V_M$ sur la voie 1 ;
— l'opposée de la tension $u_{OM} = V_O - V_M$ sur la voie 2 inversée, soit $u_R(t) = v_{MO'} = V_M - V_{O'}$.

Les oscillogrammes ont l'allure d'une succession d'exponentielles.
Interpréter les courbes en se référant à l'étude théorique.

c) Décalquer sur l'écran les deux courbes $u_C(t)$ et $u_R(t)$.
Construire point par point les sommes $u_C + u_R$. Interpréter.

3) Constante de temps du dipôle

a) Débrancher la voie 2.
Étudier l'influence de la fréquence de la tension en créneaux délivrée par le générateur sur la tension u_C. Interpréter.

b) Régler la fréquence pour obtenir une décharge pratiquement complète du condensateur quand le générateur est dans l'état bas ($E = 0$). Régler l'oscilloscope pour étaler la courbe de décharge (fig. 18). Déterminer la constante de temps τ par deux méthodes.
— Placer contre l'écran une feuille de papier tangente à la courbe en début de décharge. Elle coupe l'axe des temps à l'abscisse τ.
— Montrer que l'abscisse t_0 du point d'ordonnée $\frac{E}{2}$ est $t_0 = \tau . \ln 2$.

c) Comparer les résultats à la valeur du produit $R . C$.

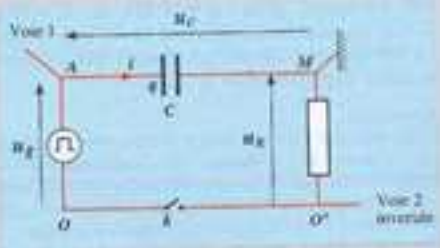


Fig. 17. *Dipôle série R, C, alimenté par une tension en créneaux.*



Fig. 18. *Détermination de la constante de temps. Le point d'ordonnée $\frac{E}{2}$ est obtenu à la date $t_0 = \tau . \ln 2$ après la date $t = 0$ du début de la décroissance.*

Fiche expérimentale

CARACTÉRISTIQUES STATIQUES D'UNE PORTE NON

Pour toutes les manipulations proposées dans cette fiche, ne pas dépasser 6 V pour les alimentations. Les voltmètres utilisés doivent être de grande résistance.

La porte NON peut être l'une des quatre portes NON-ET d'un circuit CMOS 4011 (p. 221) dont les deux bornes d'entrée sont liées. Les trois autres entrées sont à relier à l'alimentation + par l'intermédiaire de résistances de quelques centaines de kΩ.

1) Relevé de la caractéristique de transfert

Le principe du montage est indiqué à la figure 19.

Relever les couples de valeur (u_e, u_s). Tracer la caractéristique. A partir de quelle tension u_e la sortie peut-elle être considérée comme à l'état haut ? à l'état bas ?

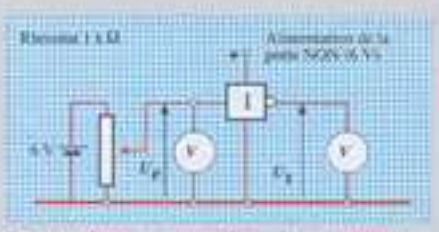


Fig. 19. *Montage pour relever la caractéristique de transfert $u_s = f(u_e)$.*

2) Caractéristique de sortie à l'état haut

Réaliser le montage indiqué à la figure 20. L'entrée est au potentiel 0 : la sortie est dans l'état haut.

Le milliampèremètre est à utiliser sur le calibre 10 mA. Le rhéostat est protégé par une résistance de 100 Ω.

Tracer la caractéristique $i_s = f(u_s)$.

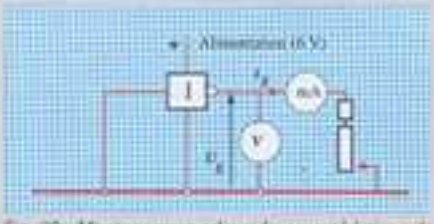


Fig. 20. *Montage pour relever la caractéristique de sortie haute $i_s = f(u_s)$.*

3) Caractéristique de sortie à l'état bas

Réaliser le montage indiqué à la figure 21. L'entrée est au potentiel 6 V. La sortie est donc dans l'état bas. Tracer la caractéristique de sortie $i_s = f(u_s)$.

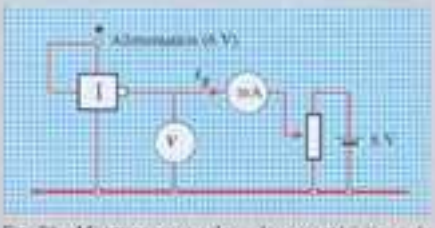


Fig. 21. *Montage pour relever la caractéristique de sortie basse $i_s = f(u_s)$.*

Fiche expérimentale

PROPRIÉTÉS D'UN MULTIVIBRATEUR

1) Travaux préliminaires

• Repérer sur la plaquette les deux bornes d'alimentation et **commencer par alimenter** le multivibrateur en respectant les polarités (6 V suffisent en principe).

• Repérer les entrées et les sorties des deux portes NON qui sont utilisées. A défaut de plaquette, réaliser le montage conformément aux indications fournies dans « Pour en savoir plus ».

• Installer le dipôle *R*, *C*. Le dipôle ohmique peut être constitué d'un résistor ($R' \approx 1$ kΩ) en série avec un rhéostat de résistance *R* réglable de 0 à 100 kΩ. Placer en série un condensateur de capacité $C \approx 50$ pF (fig. 22).

• Insérer, entre le point *M* et l'entrée e_2 de la porte NON 2, un dipôle ohmique de résistance $R_p \approx 10$ kΩ au moins. Cette résistance est destinée à protéger le circuit intégré contre des tensions trop élevées $\frac{3E}{2}$ ou négatives $-\frac{E}{2}$.

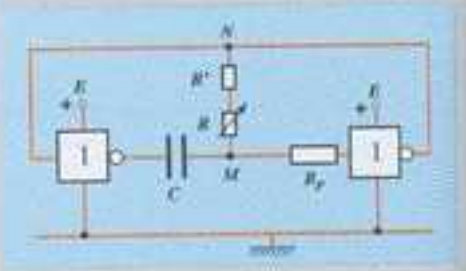


Fig. 22. ***Montage du multivibrateur.*** *La résistance R_p limite la tension à l'entrée de la seconde porte.*

2) Oscillogrammes

• Observation du signal d'horloge

Relier la masse du montage à la masse de l'oscilloscope (ce branchement est valable pour toute la suite de la manipulation), et l'entrée e_1 à la voie 1 ou 2.
Observer le signal d'horloge (fig. 23). Vérifier que le signal prélevé sur s_2 est le même.
Faire varier la résistance du rhéostat et observer les modifications de la fréquence des créneaux.



Fig. 23. ***Tension en créneaux délivrée par le multivibrateur astable.***

• Fonctionnement de la porte NON 1

Relier l'entrée e_1 de NON 1 à la voie 1 de l'oscilloscope et s_1 à la voie 2. Observer les signaux en opposition (fig. 24). Inverser la voie 2. La coïncidence est-elle parfaite?

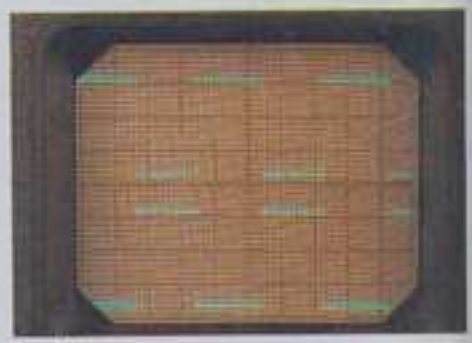


Fig. 24

• Évolution du potentiel en *M*

Relier s_1 en s_2 à la voie 1 et *M* à la voie 2. Interpréter les oscillogrammes (fig. 25).

Décalquer les courbes de s_1 et de *M* sur l'écran et construire leur différence point par point pour obtenir u_c. Pour quelle raison ne peut-on pas observer directement la tension u_c à l'oscilloscope?



Fig. 25. ***Évolution des potentiels en M et s_2. Le potentiel en s_2 est « en créneaux ».***

• Vérification de la formule de la période

— Mesurer la période *T* et la résistance du rhéostat.

— Comparer la valeur expérimentale à la valeur théorique.

3) Modification du rapport cyclique du signal d'horloge

En principe, pour un potentiel de basculement égal à la moitié de la tension d'alimentation, les durées haute et basse du signal d'horloge sont les mêmes. Remplacer *R* et *R'* par le dispositif indiqué à la figure 26.

Observer la modification du « rapport cyclique » (rapport des durées haute et basse) en déplaçant le curseur du rhéostat *Rh*. Interpréter le fonctionnement du dispositif. Entre quelles valeurs les constantes de temps peuvent-elles varier?

Vérifier et montrer par le calcul, que la période n'est pas modifiée.

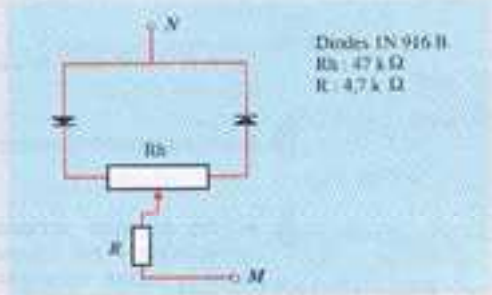


Fig. 26.

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

- Retrouver rapidement l'**équation différentielle** régissant la charge ou la décharge d'un condensateur à travers un dipôle ohmique :

$$u_C + R.C.\frac{du_C}{dt} = u_g$$

($u_g = E$ ou 0 dans le cas d'une tension en créneaux).

- La constante de temps d'un dipôle R, C, est : $\tau = R.C$.

- Une **brusque variation de potentiel** sur l'une des armatures d'un condensateur est immédiatement répercutée sur l'autre armature, qui subit la même variation de potentiel.

- Hors des durées de basculement, lorsque l'entrée d'une **porte** NON est à l'état haut, sa sortie est à l'état bas, et inversement.

- Un **multivibrateur astable** de type R, C, délivre un **signal d'horloge** en créneaux. Ses inverseurs logiques changent périodiquement d'état haut ou bas par suite de l'évolution non instantanée du potentiel au point situé entre le condensateur et le dipôle ohmique.

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

Un dipôle R, C, est constitué par un dipôle ohmique de résistance $R = 100\ k\Omega$ en série avec un condensateur de capacité $C = 1\ nF$. Il est relié à un générateur de tension en créneaux de f.é.m. $E = 10\ V$ pendant une demi-période, nulle pendant la demi-période suivante.

1) Calculer la constante de temps τ du dipôle. Écrire l'équation différentielle à laquelle obéit la tension u_c aux bornes du condensateur :

a) pendant les demi-périodes où la f.é.m. est E ;

b) pendant les demi-périodes où la f.é.m. est nulle.

2) La date $t = 0$ est choisie à un instant où la f.é.m. passe brusquement de la valeur E à 0. La tension aux bornes du condensateur à cette date est U_0.

a) Vérifier que $u_c = U_0 . e^{-t/\tau}$ est une solution de l'équation différentielle obtenue. Au bout de quel intervalle de temps la tension u_c n'est-elle plus que le centième de sa valeur initiale ?

b) Quelle est l'expression de l'intensité dans le dipôle pendant la décharge ?

3) La date $t = 0$ est maintenant choisie à un instant où la f.é.m. passe brusquement de la valeur 0 à E. Le condensateur est supposé initialement déchargé.

a) Vérifier que $u_c = U_1 . (1 - e^{-t/\tau})$ est dans ces conditions solution de l'équation différentielle. Que représente U_1 ?

b) Quelle est l'expression de l'intensité dans le dipôle pendant la charge ?

4) Application : La fréquence de la tension en créneaux est de 500 Hz. A la date $t = 0$, cette tension en créneaux passe brusquement de 0 à $E = 10\ V$, et le condensateur n'est pas chargé. Représenter sur le même graphique l'évolution en fonction du temps, pour trois périodes de la source de tension :

– de la tension en créneaux u_g ;

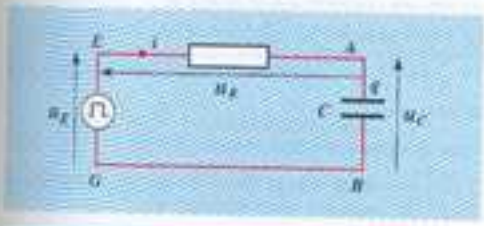
– de la tension u_c aux bornes du condensateur ;

– de l'intensité du courant.

SOLUTION

1) La constante de temps du dipôle vaut :

$$\tau = R . C = 10^5 \times 10^{-9} \qquad \boldsymbol{\tau = 10^{-4}\ s.}$$



Avec les conventions indiquées sur la figure, la relation $u_g - u_R - u_c = 0$ s'écrit :

$$u_g = R . i + u_c$$

et, puisque, $q = C . u_c$ et $i = \frac{dq}{dt} = C . \frac{du_c}{dt}$:

$$u_g = R . C . \frac{du_c}{dt} + u_c = \tau . \frac{du_c}{dt} + u_c$$

a) Si $u_g = E$, alors : $\quad \boldsymbol{\tau . \frac{du_c}{dt} + u_c = E ;} \qquad (1)$

b) Si $u_g = 0$, alors : $\quad \boldsymbol{\tau . \frac{du_c}{dt} + u_c = 0.} \qquad (2)$

2) a) Si $u_c = U_0 . e^{-t/\tau}$ alors $\frac{du_c}{dt} = -\frac{1}{\tau} . U_0 . e^{-t/\tau}$.

En remplaçant dans l'équation (2) précédente, il vient :

$$-U_0 . e^{-t/\tau} + U_0 . e^{-t/\tau} = 0.$$

La solution proposée convient donc.

La tension u_c vaut $\frac{U_0}{100}$ à la date t telle que : $0{,}01 = e^{-t/\tau}$. D'où, en prenant les logarithmes népériens des deux membres :

$$t = 4{,}6\tau \quad \text{soit} \quad \boldsymbol{t = 4{,}6 \times 10^{-4}\ s.}$$

b) De $u_g = R . i + u_c$, on tire :

$$R . i + u_c = R . i + U_0 . e^{-t/\tau} = 0,$$

d'où : $\qquad \boldsymbol{i = \left(-\frac{U_0}{R}\right) . e^{-t/\tau}.}$

Cette intensité, initialement négative, tend exponentiellement vers zéro.

3) a) Si $u_c = U_1 . (1 - e^{-t/\tau})$, alors, $\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{\tau} . U_1 . e^{-t/\tau}$.

En remplaçant dans l'équation (1) précédente, il vient :

$$U_1 . e^{-t/\tau} + U_1 . (1 - e^{-t/\tau}) = E.$$

Par suite, $\boldsymbol{U_1 = E.}$

U_1 représente la tension haute appliquée aux bornes du dipôle R, C.

La solution de l'équation différentielle s'écrit donc :

$$\boldsymbol{u_c = E . (1 - e^{-t/\tau}).}$$

b) De $u_g = R . i + u_c$, on tire :

$$E = R . i + u_c = R . i + E . (1 - e^{-t/\tau}),$$

d'où : $\qquad \boldsymbol{i = \frac{E}{R} . e^{-t/\tau}.}$

Cette intensité, initialement positive, tend exponentiellement vers zéro.

4) Pour une fréquence $N = 500$ Hz, la période de la tension en créneaux vaut $T = \frac{1}{N} = 2 \times 10^{-3}$ s, soit 20τ.

• Pendant une demi-période (10τ), le condensateur aura donc le temps de se charger pratiquement complètement, la tension à ses bornes atteignant la valeur $E = 10$ V.

1. EXERCICES RESOLUS

D'après les questions 3) *a*) et 3) *b*), les fonctions à représenter ont pour expressions numériques :

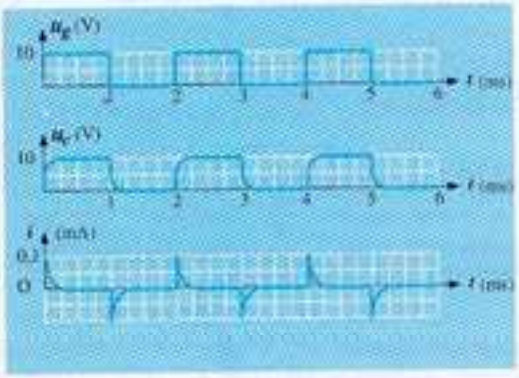
$u_c = 10(1 - e^{-10\,000t})$ et $i = 0{,}1e^{-10\,000t}$

(i en mA car $E = 10$ V et $R = 100$ kΩ).

• Pendant la seconde demi-période, le condensateur a pratiquement le temps de se décharger totalement. D'après la question 2), les fonctions à représenter ont pour expressions numériques :

$u_c = 10e^{-10\,000t}$ et, en mA, $i = -0{,}1e^{-10\,000t}$

• Les situations précédentes se reproduisent aux périodes suivantes. D'où les diagrammes :



EXERCICE 2

Un dipôle R, C, est constitué par un dipôle ohmique de résistance $R = 100$ kΩ en série avec un condensateur de capacité $C = 1$ nF. Il est relié à un générateur de tension en créneaux de f.é.m. $E = 10$ V pendant une demi-période, nulle pendant la demi-période suivante. La fréquence des créneaux est $N = 5$ kHz.

1) Comparer la constante de temps τ du dipôle, à la période T des créneaux.

2) La tension aux bornes du condensateur évolue en fonction du temps selon la loi :

$$u_c(t) = U_{c0} \cdot e^{-t/\tau} + E \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

a) Que représentent U_{c0} et E ? Cette expression de $u_c(t)$ est-elle valable aussi bien pour la charge que pour la décharge du condensateur ?

b) Quelle est l'expression de l'intensité $i(t)$ dans le dipôle R, C ?

3) La date $t = 0$ est choisie à un instant où la f.é.m. passe brusquement de la valeur 0 à E. La tension aux bornes du condensateur à cette date est nulle.

a) Quelles sont les tensions aux bornes du condensateur aux dates où le générateur change d'état (haut ou bas) ? Les calculs seront limités aux changements qui se produisent pendant les trois premières périodes de la source. La date de chaque passage à l'état haut ou bas sera choisie à chaque fois comme date $t = 0$.

b) Même question pour les intensités.

4) Représenter sur le même graphique l'évolution en fonction du temps, pour trois périodes de la source de tension :

— de la tension en créneaux u_E ;

— de la tension u_c aux bornes du condensateur ;

— de l'intensité du courant.

Comparer les résultats à ceux qui ont été obtenus dans l'exercice résolu n° 1.

SOLUTION

1) La constante de temps du dipôle vaut :

$$\tau = R \cdot C = 10^5 \times 10^{-9} \quad \boldsymbol{\tau = 10^{-4}\ s.}$$

La période de la tension en créneaux est :

$$T = \frac{1}{N} = \frac{1}{5\,000} = \mathbf{2 \times 10^{-4}\ s = 2\tau.}$$

La période T est trop petite pour que le condensateur puisse atteindre sa charge maximale $Q = C \cdot E$.

2) *a*) A la date $t = 0$, $u_c(0) = U_{c0}$. U_{c0} représente donc la tension aux bornes du condensateur à la date $t = 0$. De même, E représente la tension aux bornes du condensateur lorsque t tend vers l'infini. L'expression $u_c(t) = U_{c0} \cdot e^{-t/\tau} + E \cdot (1 - e^{-t/\tau})$ convient aussi bien pour la charge (lorsque $U_{c0} < E$) que pour la décharge ($E < U_{c0}$).

b) La tension aux bornes du dipôle R, C, reste constante : $u_R + u_c = E$ (E pouvant être maximal ou nul). Par suite, $R \cdot i(t) + u_c(t) = E$, et, en tenant compte de l'expression de $u_c(t)$:

$$\boldsymbol{i(t) = \frac{E - U_{c0}}{R} \cdot e^{-t/\tau}}$$

3) *a*) En une demi-période de durée τ, la tension aux bornes du condensateur n'atteint pas la valeur $E = 10$ V, mais seulement :

$$u_c = 10(1 - e^{-1}) = 6{,}3\ \text{V}.$$

Cette tension est la tension initiale pour la demi-période suivante, pendant laquelle $E = 0$. Le condensateur ne se décharge pas totalement. Sa tension finale est :

$$\boldsymbol{u_c = 6{,}3e^{-1} = 2{,}3\ V.}$$

A la fin de la charge suivante :

$u_c = U_{c0} \cdot e^{-t/\tau} + E \cdot (1 - e^{-t/\tau}) = 2{,}3e^{-1} + 10(1 - e^{-1})$,

d'où :

$$\boldsymbol{u_c = 7{,}2\ V.}$$

Pour la décharge suivante, $u_c = 7{,}2e^{-1} = \mathbf{2{,}6\ V.}$

Pour les charge et décharge suivantes, des calculs analogues donnent **7,3 V** et **2,7 V.**

b) Les intensités se calculent d'une façon analogue :

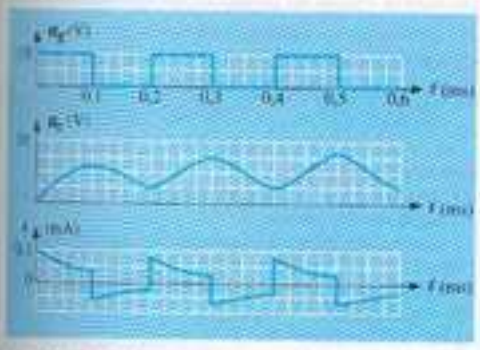
$i = \frac{E}{R} = 0{,}10$ mA au départ et $\boldsymbol{I = 0{,}10e^{-1} = 0{,}04\ mA}$ à la date $t = \tau$.

Pour la demi-période suivante ($E = 0$), $i = -\frac{U_{c0}}{R} \cdot e^{-\cdots}$

d'où : $\boldsymbol{I = -0{,}06\ mA}$ en début de phase, et **−0,02 mA** en fin de seconde demi-période, etc.

1. EXERCICES RESOLUS

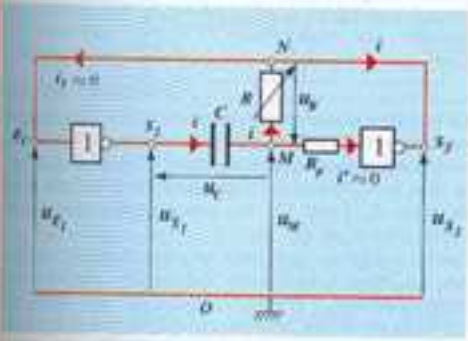
4) Les résultats sont résumés sur les diagrammes ci-dessous.



Les figures ci-dessus correspondent à un régime transitoire auquel succède un régime permanent, pratiquement atteint ici au bout de trois périodes.
Dans le cas de l'exercice résolu n° 1, le condensateur oscillait entre une charge maximale $Q = C.E$ et 0. Ici, l'amplitude des oscillations électriques est plus faible. L'intensité est soit positive, soit négative, mais ne tend plus vers zéro à la fin des phases de charge ou de décharge.

EXERCICE 3

Un multivibrateur astable de type R, C, comporte deux inverseurs dont les entrées et les sorties se trouvent, en dehors des courtes durées de commutation, soit dans un état haut (tension E), soit dans un état bas (tension nulle). On admet que le dispositif bascule à chaque fois que la tension u_M indiquée sur la figure passe par la valeur $U_s > 0$ ($U_s < E$).



Initialement, le condensateur est supposé non chargé et la sortie s_1 est supposée à l'état haut. Il a été justifié dans le cours que les durées des étapes successives d'évolution du multivibrateur sont :

$$t_0 = R.C.\ln\frac{E}{U_s} \quad \text{(phase d'amorçage)},$$

$$t_1 = R.C.\ln\frac{2E - U_s}{E - U_s} \quad \text{et} \quad t_2 = R.C.\ln\frac{E + U_s}{U_s}$$

1) Rappeler la signification des lettres utilisées dans cette formule.

2) Calculer les durées des diverses phases avec les données suivantes :

$E = 10$ V ; $U_s = 4$ V ; $R = 10$ kΩ ; $C = 10$ nF.

3) Calculer la période et la fréquence du signal d'horloge délivré par le multivibrateur. Sur quelles bornes peut-il être prélevé ?

SOLUTION

1) Dans les relations rappelées dans l'énoncé, R représente la résistance du dipôle ohmique, C la capacité du condensateur, U_s est la tension de basculement des portes NON et E la tension d'alimentation. Enfin, ln désigne le logarithme népérien.

2) La constante de temps du dipôle vaut $\tau = R.C$ soit : $\tau = 10^4 \times 10^{-8} = \mathbf{10^{-4}}$ **s.**
Les durées valent respectivement

$$t_0 = R.C.\ln\frac{10}{4} = \mathbf{0{,}92 \times 10^{-4}}\ \mathbf{s},$$

$$t_1 = R.C.\ln\frac{18}{6} = \mathbf{0{,}98 \times 10^{-4}}\ \mathbf{s},$$

$$t_2 = R.C.\ln\frac{14}{4} = \mathbf{1{,}25 \times 10^{-4}}\ \mathbf{s}.$$

Les durées ne sont pas ici égales, car la tension de basculement est supposée différente de $\frac{E}{2}$.

3) La période vaut $T = t_1 + t_2 = \mathbf{2{,}23 \times 10^{-4}}$ **s.**

La fréquence du signal d'horloge est $N = \frac{1}{T} = \mathbf{4{,}5}$ **kHz.**

Ce signal peut être prélevé à l'entrée e, ou à la sortie s_2, qui donnent deux signaux identiques. Il peut aussi être prélevé en s_1 ; il est alors en opposition avec les précédents.

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATION

Dipôles *R, C*

Exercice 1

Comparer les constantes de temps des dipôles séries *R, C*, suivants :

- $R = 100\ \Omega$; $C = 1$ nF ; • $R = 100$ kΩ ; $C = 1$ nF ;
- $R = 2\ \Omega$; $C = 50$ µF (électrolytique).

Exercice 2

Le condensateur d'un dipôle série *R, C* a pour capacité $C = 10$ nF. Le dipôle est brusquement soumis à une tension constante E, et la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur évolue selon la loi $u_c = 20e^{-1000t}$ (SI).

1) Quelle est la résistance du dipôle?

2) Représenter graphiquement la courbe traduisant l'évolution de $u_c(t)$.

Exercice 3

Un dipôle *R, C*, ($R = 10$ kΩ ; $C = 50$ nF) est soumis à une tension $E = 10$ V.

1) Quelle est la charge finale de l'armature du condensateur reliée au pôle + du générateur?

2) La charge de cette armature, à la date $t = 0$ où la tension E est appliquée, est $q_0 = -0{,}1$ µC. A quelle date cette charge est-elle nulle?

3) A quelle date la charge vaut-elle 0,4 µC?

Exercice 4

La vitesse de balayage d'un oscilloscope est réglée sur 0,5 µs par division afin d'observer la tension aux bornes du condensateur d'un dipôle *R, C*. La tension aux bornes du condensateur commence à décroître exponentiellement en un point qui coïncide avec une ligne verticale de l'écran. La tension ne vaut plus que $\frac{E}{5}$ sur la ligne verticale située deux graduations plus loin. Quelle est la constante de temps du dipôle?

Exercice 5

Réponse d'un dipôle série R, C, à une impulsion rectangulaire.

1) Un dispositif électronique délivre une tension $u_g(t)$ dont les caractéristiques sont les suivantes :

- $u_g(t) = 0$ pour $t < 0$; • $u_g(t) = 0$ pour $t > T$;
- $u_g(t) = E$ pour $0 \leqslant t \leqslant T$.

La tension E est constante pendant la durée T de l'impulsion, mais cette valeur constante dépend de la durée selon la loi $E = \frac{K}{T}$ avec $K = 10^{-3}$ V.s.

Représenter graphiquement l'allure de la tension dans les cas suivants :

$$T = 5 \times 10^{-3}\ \text{s} ; \quad T = 10^{-4}\ \text{s} ; \quad T = 10^{-5}\ \text{s}.$$

2) Le dispositif précédent alimente un dipôle série de résistance R et de capacité C. On rappelle que la tension aux bornes d'un condensateur qui se charge ou se décharge est donnée par :

$$u_c(t) = U_{ci} \cdot e^{-t/\tau} + U_{cf} \cdot (1 - e^{-t/\tau}),$$

où U_{ci} et U_{cf} désignent les tensions initiale et finale aux bornes du condensateur (U_{cf} est donc aussi la tension appliquée aux bornes du dipôle *R, C*).

Le condensateur est supposé non chargé à la date $t = 0$.

Établir les équations donnant $u_c(t)$ en fonction de K, T et de la constante de temps τ du dipôle *R, C*, pendant la charge du condensateur, puis sa décharge.

3) *Application numérique* : $R = 1$ kΩ, $C = 1$ µF.

Représenter graphiquement l'allure des courbes montrant l'évolution de $u_c(t)$ dans les cas suivants :

$$T = 5 \times 10^{-3}\ \text{s} ; \quad T = 10^{-3}\ \text{s} ; \quad T = 10^{-4}\ \text{s}.$$

Exercice 6

Un condensateur est monté en série avec un dipôle ohmique de résistance *R*.

1) Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la charge q du condensateur (celle de l'armature désignée par la flèche qui oriente le conducteur), dans les cas suivants.

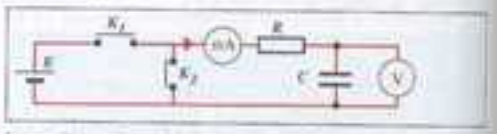
a) Le condensateur est initialement non chargé. Le dipôle *R, C* est soumis à une tension E à partir de la date $t = 0$.

b) Le dipôle *R, C* est sous tension E et se trouve court-circuité à la date $t = 0$. On cherchera pour q une solution du type $q = A + B \cdot e^{\alpha t}$.

2) En déduire l'expression de l'intensité $i(t)$, de la tension $u_R(t)$ et de la tension $u_c(t)$.

Exercice 7

Un condensateur électrochimique de capacité $C = 10$ mF, initialement non chargé, est placé en série avec un dipôle ohmique de résistance $R = 1$ kΩ. Ces composants sont insérés dans le montage représenté ci-dessous. K_1 et K_2 sont des interrupteurs poussoir. Le générateur a pour f.é.m. $E = 10$ V. Sa résistance interne est négligeable vis-à-vis des autres résistances.



Le milliampèremètre a une résistance négligeable vis-à-vis de *R*. Celle du voltmètre est $R_v = 200$ kΩ.

1) L'interrupteur K_1 est maintenu enfoncé à partir de la date $t = 0$. Préciser l'expression de la tension $u_c(t)$ du type $A \cdot (1 - e^{-t/\tau})$, en précisant les valeurs des constantes A et τ.

Faire un tableau indiquant les valeurs de u_c, toutes les 5 s, pour t variant de 0 à $t = 60$ s. Représenter graphiquement l'évolution de $u_c(t)$. Au bout de combien de temps peut-on considérer que le condensateur est totalement chargé? Quelle est alors l'intensité qui passe dans le voltmètre?

2) L'interrupteur K_1 est relâché. Au bout de combien de temps peut-on considérer que le condensateur s'est déchargé dans le voltmètre?

3) Le condensateur étant non chargé, K_1 est maintenu enfoncé pendant une minute, lâché, et K_2 est aussitôt enfoncé. Quelle indication donne le milliampèremètre? Au bout de combien de temps peut-on considérer que le condensateur est déchargé?

2. EXERCICES PROPOSES

Multivibrateur astable

• Exercice 13

La période du signal d'horloge délivré par un multivibrateur astable est donnée par la relation :

$$T = \tau_+ \left(\ln \frac{2E - U_t}{E - U_t} + \ln \frac{E + U_t}{U_t} \right)$$

1) Rappeler la signification des lettres utilisées dans cette formule.

2) Calculer la période d'un multivibrateur dont le dipôle ohmique a pour résistance $R = 100$ kΩ et le condensateur une capacité $C = 5$ nF, dans le cas où la tension de basculement vaut 6 V. Le multivibrateur est alimenté sous 10 V.

3) Déterminer les durées des signaux d'horloge hauts et bas.

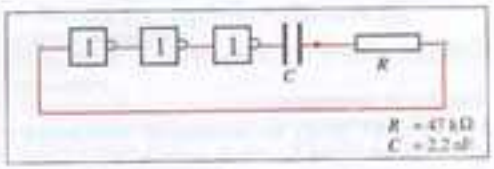
Exercice 14

Quelles capacités peut-on choisir pour réaliser une horloge fonctionnant à la fréquence $N = 100$ kHz, la résistance étant supérieure à $R = 10$ kΩ?

Exercice 15

Expliquer le fonctionnement du dispositif représenté ci-dessous :

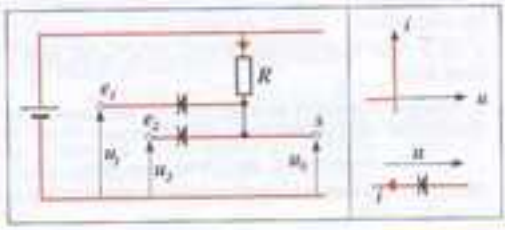
La tension de basculement étant $U_t = \frac{E}{2}$, calculer la période du signal d'horloge. Préciser en quels points il peut être prélevé.



Montages divers

• Exercice 16

Le dispositif ci-dessous comporte deux diodes parfaites, c'est-à-dire dont les caractéristiques $u \longrightarrow i$ ont l'allure indiquées ci-dessous.



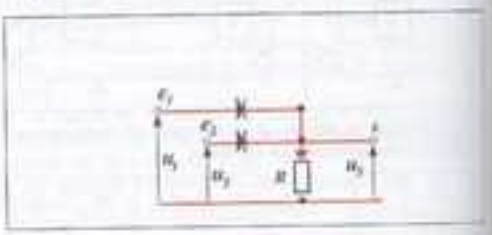
Les tensions d'entrée u_1 et u_2 sont soit nulles (état bas), soit égales à la f.é.m. E du générateur (état haut).

1) Former le tableau des quatre états possibles des entrées, et de l'état correspondant de la sortie (0 ou E).

2) Quelle est la porte logique ainsi réalisée? (Chercher dans les données relatives aux exercices précédents).

Exercice 17

Le dispositif ci-dessous comporte deux diodes parfaites (caractéristiques indiquées dans l'exercice précédent).



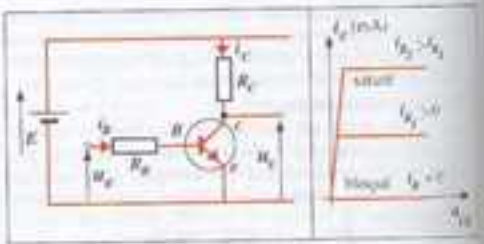
Les tensions d'entrée u_1 et u_2 sont soit nulles (état bas), soit égales à la f.é.m. E du générateur (état haut).

1) Former le tableau des quatre états possibles des entrées, et de l'état correspondant de la sortie (0 ou E).

2) Quelle est la porte logique ainsi réalisée? (Chercher dans les données relatives aux exercices précédents).

Exercice 18

Le montage représenté ci-dessous utilise un transistor *NPN*. L'alimentation est une source de tension $E = 6$ V.



1) Le transistor est bloqué ($i_B = i_C = 0$). Que vaut alors la tension de sortie u_s?

2) Le transistor est saturé ($i_C = 5$ mA et $R_C = 1,2$ kΩ). Que vaut alors la tension u_s?
Dans ces conditions, $R_B = 5,3$ kΩ, $i_B = 1$ mA et $u_{BE} = 0,7$ V. Que vaut alors la tension d'entrée u_e?

3) Former un tableau des états d'entrée et de sortie hauts ou bas. Quel rôle joue ce montage?

2. EXERCICES PROPOSES

P disperse la lumière et l'on obtient dans le plan focal image de L_2 le spectre des radiations émises par l'étoile.

Les caractéristiques du prisme sont les suivantes :

– angle : $A = 6°$;

– indice n du verre en fonction de la longueur d'onde λ de la lumière :

Radiation	λ en nm	n
F	486,1	1,8100
D	589,3	1,7875
C	656,3	1,7786

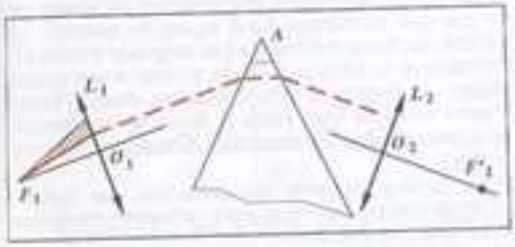
1) On rappelle que, pour un prisme de petit angle A et pour une incidence faible, la déviation D peut être considérée comme constante et égale à : $(n-1)\,A$ où n est l'indice du verre.
Calculer l'angle α que doit faire l'axe optique de L_1 avec la direction de l'étoile, pour que l'image de celle-ci correspondant à la radiation jaune D se forme au foyer principal de L_2.

2) Calculer la distance séparant, dans le plan focal de L_2 les images de l'étoile correspondant aux radiations F et C.
En déduire la dispersion moyenne en $nm \cdot mm^{-1}$.
Que faudrait-il modifier dans ce montage pour que la dispersion soit plus importante ?

Exercice 8

Un prisme est éclairé par un faisceau cylindrique de lumière blanche.

1) Pour obtenir ce faisceau cylindrique on éclaire une fente fine F_1, parallèle à l'arête du prisme avec une source de lumière blanche. Cette fente sert d'objet à une lentille convergente mince dont la vergence est $C_1 = 5\delta$. Quelle doit être la distance de la fente à la lentille ?
On admet que la lentille est un achromat parfait, c'est-à-dire que sa distance focale est indépendante de la longueur d'onde de la lumière qui l'éclaire.



2) Pour la raie D du sodium ($\lambda = 589{,}3$ nm) le faisceau émergent est parallèle à l'axe optique de la lentille L_2 de vergence $C_2 = 5\delta$. Où converge-t-il après traversée de L_2 ?

3) En admettant que le pouvoir dispersif $\frac{dD}{dn}$ du prisme est constant pour le domaine du visible et égal à 1,544 rad/unité d'indice, calculer la distance qui sépare les images qui correspondent aux radiations bleue et rouge dans le plan focal image de L_2.

4) Tracer l'allure des faisceaux lumineux à travers le prisme et la lentille L_2 pour les radiations violette et rouge.

Données : indices correspondant aux radiations extrêmes du visible : $n_v = 1{,}520$, $n_r = 1{,}513$.

Exercice 9

Mesure du pouvoir dispersif d'un verre

1) La figure représente la courbe de dispersion d'un prisme en verre de type « flint ».
A partir de cette courbe, déterminer graphiquement les coefficients A et B de la formule usuelle :

$$n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$$

Pour cela tracer la courbe $n = f\left(\frac{1}{\lambda_0^2}\right)$.

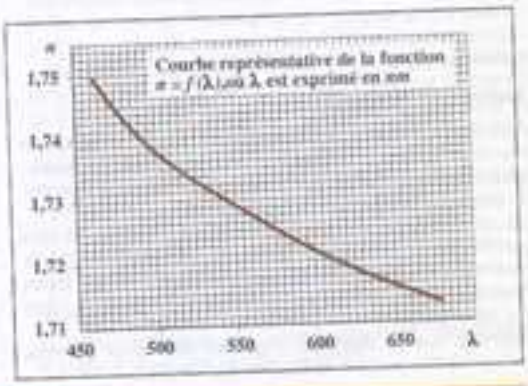
2) On définit la **constringence** d'un verre par la relation :

$$\gamma = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

$\lambda_C = 0{,}656$ µm, raie rouge de l'hydrogène ;
$\lambda_D = 0{,}589$ µm, raie jaune du sodium ;
$\lambda_F = 0{,}486$ µm raie bleue de l'hydrogène.

a) Déterminer sur la courbe les indices correspondant aux longueurs d'ondes précédentes.

b) En déduire la constringence du verre utilisé pour construire le prisme.



2. EXERCICES PROPOSES

* Exercice 10

Étude d'un objectif achromatique

Il se compose de deux lentilles minces collées L_1 et L_2.

L_1 est biconvexe et taillée dans un verre de constringence 60,3 et dont l'indice pour la raie D du sodium vaut 1,518 2.

L_2 est taillée dans un verre de constringence 35,6 et dont l'indice pour la raie D vaut 1,625 9.

La distance focale de l'objectif pour la raie D doit être de 750 mm.

Calculer les distances focales de L_1 et L_2.

La constringence d'un verre est définie comme :

$$\gamma = \frac{n_D - 1}{n_F - n_c}$$

n_D : indice pour la raie jaune du sodium,
n_F : indice pour la raie bleue de l'hydrogène,
n_c : indice pour la raie rouge de l'hydrogène.

Fentes d'Young

Exercice 11

1) Deux fentes d'Young sont distances de 0,2 mm. L'écran d'observation est à 1 m. La 3e frange brillante est à 7,5 mm de la frange centrale. Calculer la longueur d'onde de la lumière utilisée.

2) Même question en supposant que c'est la 3e frange sombre qui est à 7,5 mm de la frange centrale.

Franges de diffraction d'une fente

Exercice 12

Pour évaluer la largeur d'une fente fine F, on regarde à travers cette fente, disposée contre l'œil, une source S monochromatique ($\lambda = 546$ nm), rectiligne, placée à 10 m de l'observateur. La fente et la source sont verticales. La source est au zéro d'une règle graduée en centimètres qui s'étend horizontalement à droite et à gauche de S. L'œil, diaphragmé par F, voit se peindre sur la règle les franges de diffraction de la fente.

Les deux premières franges d'intensité nulle bordant le maximum central coïncident avec les divisions ±27 cm de la règle.

Quelle est la largeur de la fente?

Réseau

Exercice 13

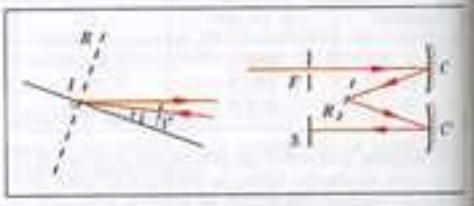
Pour mesurer la longueur d'onde λ, d'une radiation monochromatique, on utilise un réseau par transmission comportant 500 traits par millimètre, disposé sur la platine d'un goniomètre.

Le collimateur est éclairé avec la radiation λ, et l'on pointe les positions du minimum de déviation de la raie dans le spectre du second ordre, pour deux inclinaisons du réseau symétriques par rapport à l'axe du collimateur.

Sachant que la distance angulaire des deux pointés est $\alpha = 64°$, calculer la longueur d'onde λ.

Exercice 14

1) On considère un réseau par réflexion comportant 500 traits par millimètre; l'angle d'incidence i et l'angle de diffraction i' sont supposés très voisins. Déterminer approximativement les valeurs de $i = i'$ correspondant aux divers ordres possibles pour la raie D du sodium telle que $\lambda = 589$ nm.



2) L'appareil comprend un collimateur C (miroir) et un objectif de chambre C' (également un miroir) dont les longueurs focales sont égales à 1 m. Déterminer la distance Δx, qui sépare dans le spectre du premier ordre, les deux images monochromatiques de la fente d'entrée pour les deux raies D_1 et D_2 du sodium dont la différence de longueur d'onde est $\Delta\lambda = 0,6$ nm.

3) Quel nombre de traits suffit-il théoriquement de donner au réseau pour que l'on puisse séparer les raies D_1 et D_2?

Exercice 15

1) On utilise un réseau par transmission de 570 traits par millimètre sous incidence normale. Le faisceau incident est un faisceau de rayons parallèles. On observe le faisceau diffracté avec une lunette. On vise dans la direction du faisceau diffracté correspondant à la raie verte du spectre d'ordre deux. Quel est l'angle de déviation D pour cette raie?

2) La lunette est centrée sur la raie verte. Son champ angulaire est 10° de part et d'autre de l'axe optique. Peut-on voir la raie correspondant à la radiation jaune dans le spectre d'ordre deux?

Données : λ_{vert} : 546,1 nm; λ_{jaune} : 579,1 nm.

Exercice 16

1) Un réseau comportant 400 traits/mm est éclairé par un faisceau cylindrique sous incidence normale. La lumière est monochromatique de longueur d'onde λ_0. On observe le faisceau diffracté à l'aide d'une lunette réglée sur l'infini. La lunette vise au départ l'image d'ordre zéro; de quel angle α faut-il la faire tourner pour viser l'image correspondant au maximum d'ordre quatre?

2) La lumière incidente est cette fois une lumière polychromatique de longueurs d'ondes comprises entre 400,0 et 800,0 nm.

Montrer que dans la direction α déterminée au 1) on reçoit aussi des faisceaux diffractés correspondant aux longueurs d'ondes λ_1, λ_2 différentes de λ_0. Calculer λ_1 et λ_2.

Donnée : $\lambda_0 = 546,1$ nm.

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 17

Un réseau plan par transmission portant $n = 500$ traits par mm sur une longueur $\ell = 5$ cm est éclairé par un ensemble, appelé collimateur, formé par une fente F placée au foyer d'une lentille L de distance focale 1 m. La lumière transmise est reçue par une lentille L', identique à L au foyer de laquelle est disposée une plaque photographique.

a) Faire le croquis du montage utilisé.

b) La lumière employée étant la raie D_1 ($\lambda = 589,0$ nm) et le réseau étant normal aux rayons incidents, on photographie l'image directe (ordre zéro) de la fente, puis on fait tourner la chambre photographique d'un angle α, autour d'un axe situé dans le plan du réseau et parallèle à ses traits de façon à photographier l'image d'ordre $k = 3$. Calculer α.

c) Calculer la distance linéaire, sur la plaque des 2 images du doublet du sodium $D_1 = 589,0$ nm, $D_2 = 589,6$ nm dans le 3e ordre.

2) Le réseau est maintenant employé sous une incidence quelconque en lumière monochromatique.

a) Établir la formule fondamentale donnant la direction des maxima de lumière.

b) On appelle pouvoir dispersif le rapport $\frac{di'}{d\lambda}$, de la variation angulaire di' des rayons diffractés, pour une variation correspondante $d\lambda$, de la longueur d'onde.

Calculer $\frac{di'}{d\lambda}$ en fonction de n, k et i'.

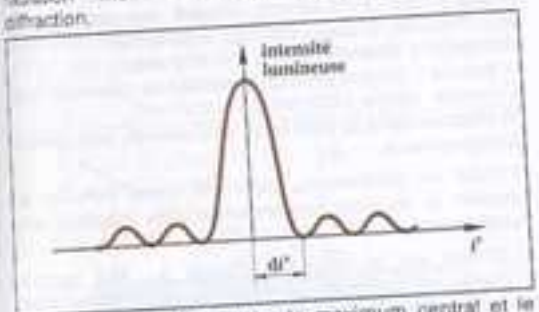
c) Un spectre est qualifié de normal si le rapport $\frac{di'}{d\lambda}$ est constant. A quelle condition doit satisfaire i' pour qu'il en soit ainsi? Quelle valeur doit-on donner alors à l'angle i?

Application numérique :

$k = 3$; $n = 500$ traits/mm; $\lambda = 589,0$ nm.

Faire un croquis du montage.

3) L'image d'une fente très fine éclairée par une radiation monochromatique est une figure de diffraction.



La distance angulaire entre le maximum central et le premier minimum nul est : $di' = \frac{\lambda}{\ell . \cos i'}$

λ longueur d'onde de la lumière utilisée;
ℓ largeur du réseau;
i' angle de diffraction.

Si on admet que 2 radiations sont vues distinctes lorsque le maximum de l'une correspond au premier minimum nul de l'autre, calculer la limite théorique de résolution du réseau $\frac{\lambda}{d\lambda}$ dans le 3e ordre.

Application : Quelle est, dans la partie centrale du spectre du 3e ordre ($\lambda = 589,0$ nm) la différence de 2 longueurs d'onde des 2 radiations que le réseau permet de séparer?

Exercice 18

Un réseau, par transmission, à 400 traits par millimètre a une longueur de trois centimètres.

1) Calculer son nombre total de traits N.

2) Il est éclairé normalement par un faisceau cylindrique. Déterminer la direction α, selon laquelle la radiation de longueur d'onde $\lambda = 589,3$ nm est diffractée dans l'ordre un (maximum principal d'ordre un).

3) On considère une radiation de longueur d'onde λ' voisine de λ (on pose $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$) pour laquelle la différence de marche pour les rayons transmis par le premier trait et le dernier trait est $(N + 1).\lambda'$ dans l'ordre un, pour la direction précédente α. Calculer $\Delta\lambda$.

4) Comparer les expressions des différences de marche pour des rayons transmis séparés par $\frac{N}{2}$ raies dans le cas des radiations de longueur d'onde λ et λ'. Que conclure quant à l'amplitude somme des rayons transmis par les N traits, pour la radiation de longueur d'onde λ et pour la radiation de longueur d'onde λ' (direction α, ordre un).

5) Déduire de ce qui précède, si le réseau permet de séparer deux radiations dont les longueurs d'onde sont infiniment voisines, autrement dit quelle sera l'ordre de grandeur de l'amplitude de l'onde diffractée pour une radiation de longueur d'onde comprise entre λ et λ'?

Exercice 19

Un réseau plan comportant $n = 800$ traits par mm est utilisé par transmission.

1) Démontrer la formule reliant l'angle d'incidence i, à l'angle de diffraction i', pour une longueur d'onde donnée λ, et pour un maximum principal d'ordre k.

2) Le réseau est éclairé par un faisceau parallèle de lumière blanche ($400 \text{ nm} \leqslant \lambda \leqslant 800$ nm) sous une incidence de 30°.

Donner les directions i' des maximas principaux d'ordre 2 pour les longueurs d'onde extrêmes :

$\lambda_1 = 400$ nm et $\lambda_2 = 800$ nm.

3) En déduire la dispersion angulaire moyenne $\frac{\Delta i'}{\Delta\lambda}$ dans l'ordre 2.

4. Y a-t-il risque de chevauchement du spectre d'ordre 2 avec les ordres voisins?

2. EXERCICES PROPOSES

Multivibrateur astable

• Exercice 13

La période du signal d'horloge délivré par un multivibrateur astable est donnée par la relation :

$$T = \tau_+ \left(\ln \frac{2E - U_t}{E - U_t} + \ln \frac{E + U_t}{U_t} \right)$$

1) Rappeler la signification des lettres utilisées dans cette formule.

2) Calculer la période d'un multivibrateur dont le dipôle ohmique a pour résistance $R = 100$ kΩ et le condensateur une capacité $C = 5$ nF, dans le cas où la tension de basculement vaut 6 V. Le multivibrateur est alimenté sous 10 V.

3) Déterminer les durées des signaux d'horloge hauts et bas.

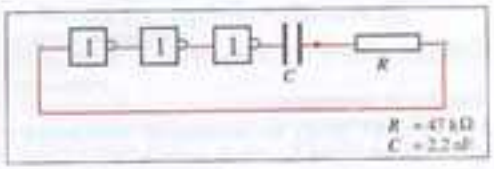
Exercice 14

Quelles capacités peut-on choisir pour réaliser une horloge fonctionnant à la fréquence $N = 100$ kHz, la résistance étant supérieure à $R = 10$ kΩ?

Exercice 15

Expliquer le fonctionnement du dispositif représenté ci-dessous :

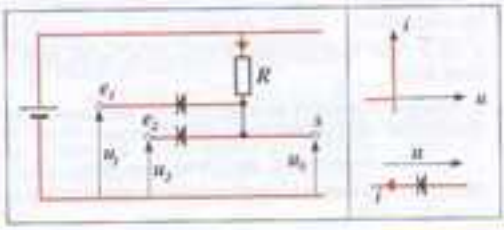
La tension de basculement étant $U_t = \frac{E}{2}$, calculer la période du signal d'horloge. Préciser en quels points il peut être prélevé.



Montages divers

• Exercice 16

Le dispositif ci-dessous comporte deux diodes parfaites, c'est-à-dire dont les caractéristiques $u \longrightarrow i$ ont l'allure indiquées ci-dessous.



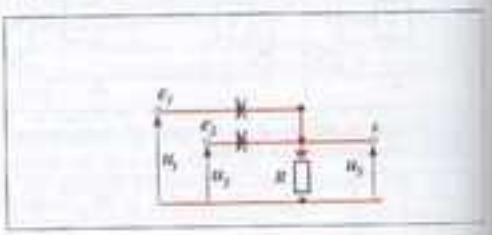
Les tensions d'entrée u_1 et u_2 sont soit nulles (état bas), soit égales à la f.é.m. E du générateur (état haut).

1) Former le tableau des quatre états possibles des entrées, et de l'état correspondant de la sortie (0 ou E).

2) Quelle est la porte logique ainsi réalisée? (Chercher dans les données relatives aux exercices précédents).

Exercice 17

Le dispositif ci-dessous comporte deux diodes parfaites (caractéristiques indiquées dans l'exercice précédent).



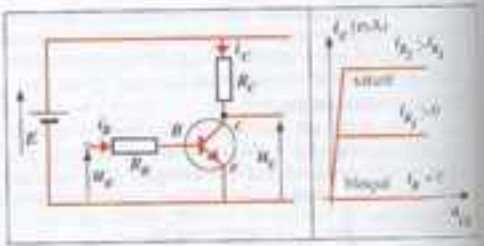
Les tensions d'entrée u_1 et u_2 sont soit nulles (état bas), soit égales à la f.é.m. E du générateur (état haut).

1) Former le tableau des quatre états possibles des entrées, et de l'état correspondant de la sortie (0 ou E).

2) Quelle est la porte logique ainsi réalisée? (Chercher dans les données relatives aux exercices précédents).

Exercice 18

Le montage représenté ci-dessous utilise un transistor *NPN*. L'alimentation est une source de tension $E = 6$ V.



1) Le transistor est bloqué ($i_B = i_C = 0$). Que vaut alors la tension de sortie u_s?

2) Le transistor est saturé ($i_C = 5$ mA et $R_C = 1,2$ kΩ). Que vaut alors la tension u_s?
Dans ces conditions, $R_B = 5,3$ kΩ, $i_B = 1$ mA et $u_{BE} = 0,7$ V. Que vaut alors la tension d'entrée u_e?

3) Former un tableau des états d'entrée et de sortie hauts ou bas. Quel rôle joue ce montage?

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES DESTINÉS À TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 19 A.1.a.

Certains symboles européens des portes logiques comportent un petit rond juxtaposé au carré qui représente la porte. Trouver la signification de ce petit rond.

Exercice 20 A.1.a.

La tension aux bornes du dipôle ohmique constituant un dipôle *R, C*, est donnée par $u_R(t) = (E - U_0).e^{-t/\tau}$. Expliciter la signification de toutes les lettres intervenant dans cette formule.

Exercice 21 A.1.a.

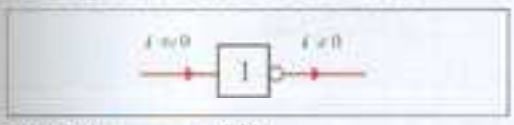
Quelle est l'unité du SI de constante de temps?

Exercice 22 A.1.b.

Quels sont les ordres de grandeur (1 µA ou 10 mA) des courants d'entrée et de sortie d'une porte logique?

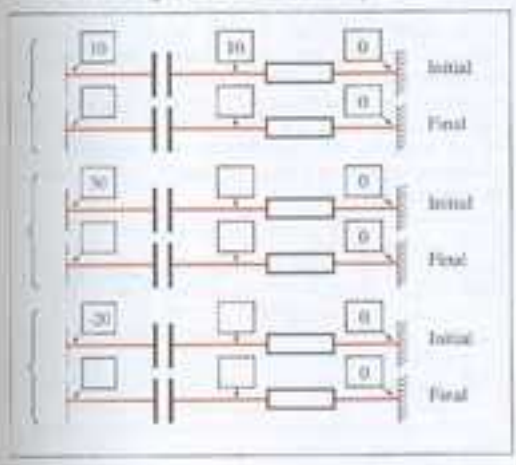
Exercice 23 A.1.c.

I n'entre pratiquement aucun courant dans une porte NON, alors qu'il peut en sortir un (ou y entrer). Cela est-il en contradiction avec la loi des nœuds?



Exercice 24 A.2.b.

Les figures ci-dessous représentent un dipôle *R, C*, dans différents états. Le passage d'un état initial à l'état final suivant (quand le système n'évolue plus) s'effectue sans modification de la tension d'alimentation (à gauche sur le schéma).



Le passage d'un état final à l'état initial suivant a lieu par brusque modification de la tension d'alimentation. Les valeurs des potentiels sont indiquées (en V) dans les cases.

Reproduire le tableau en remplissant les cases donnant les potentiels aux points indiqués.

Exercice 25 B.1.

Chercher dans une encyclopédie la constitution d'une « puce » de circuit intégré.

Exercice 26 B.1.

Se procurer chez un vendeur de composants électroniques la notice relative à un circuit intégré (quadruple porte CMOS 4011 B par exemple). Dans le cours, les basculements des portes ont été supposés instantanés. Est-ce rigoureusement exact?

Exercice 27 B.2.

Résumer en moins de 100 mots, sans formules, le fonctionnement d'un multivibrateur astable de type *R, C*, à inverseurs logiques.

Exercice 28 B.3.

Un dipôle *R, C*, est soumis à une tension en créneaux qui applique entre ses bornes une tension E_1 pendant une durée t_1, puis une tension $E_2 < E_1$ pendant une durée t_2. La tension aux bornes du condensateur évolue selon la loi :

$$u_c = U_i.e^{-t/\tau} + U_f.(1 - e^{-t/\tau}),$$

avec $U_i = E_1$ ou E_2.

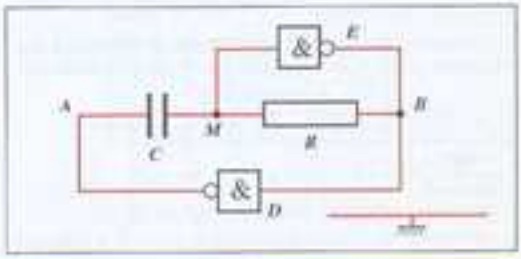
1) Exprimer la tension $u_R(t) = U_1 - u_c$ aux bornes du dipôle ohmique.

2) A la date $t = 0$, le générateur de tension passe à l'état haut et la tension aux bornes du condensateur vaut $U_0 < E_1$. Exprimer la tension U_1 aux bornes du condensateur à la date t_1 de passage à l'état bas. Cette date étant choisie comme nouvelle origine, exprimer la tension U_0 aux bornes du condensateur à la date t_2 de passage à l'état haut.

3) Lorsque le régime permanent est atteint, les tensions successives minimales U_{min} aux bornes du condensateur restent constantes, ainsi que les tensions maximales U_{max}.
Exprimer ces tensions U_{min} et U_{max} en fonction de E_1, E_2, t_1 et t_2. (Remarquer que $U_{min} = U_0 = U_2$ et $U_{max} = U_1$.) Exprimer de même la moyenne des deux tensions.

Exercice 29 B.4.

Le schéma de montage ci-dessous correspond-il à celui d'un multivibrateur astable?

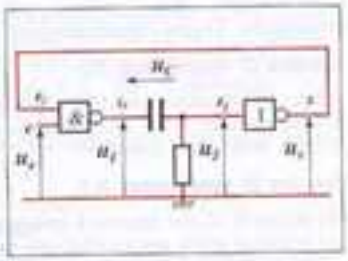


2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 30 C.1.b.

Le dispositif ci-dessous contient deux portes logiques, l'une **NON-ET** et l'autre **NON**, alimentées sous tension E. La porte NON-ET possède deux entrées, e et e_1, et une sortie s_1. Le tableau des états de la porte NON-ET est indiqué ci-dessous. La tension de basculement est $U_c = \frac{1}{2}E$. En dehors des périodes de basculement, les potentiels des entrées et de la sortie de la porte NON-ET sont soit 0, soit E.

e	e_1	s_1
0	0	E
0	$>U_c$	E
$>U_c$	0	E
$>U_c$	$>U_c$	0



1) Initialement, le condensateur n'est pas chargé et la tension u_1 à la sortie de la porte NON-ET est nulle. Compléter le tableau suivant en indiquant les valeurs (0 ou E) des tensions demandées.

u_1	u_C	u_2	u_e	u_{e_1}	u_s
0	0				

Le dispositif évolue-t-il?

2) A la date $t = 0$, l'entrée e est mise à la masse pendant un court intervalle de temps, ce qui fait basculer la porte NON-ET. Compléter le tableau suivant en y marquant les valeurs des potentiels immédiatement après la mise à la masse temporaire de e.

e	s_1	e_2	s	e_1
0 puis E				

Montrer que le système évolue.
Au bout de combien de temps un nouveau basculement se produit-il?

Application numérique : $R = 1$ MΩ, $C = 2$ µF.

3) Compléter le tableau suivant en y indiquant les potentiels juste avant et juste après ce basculement.

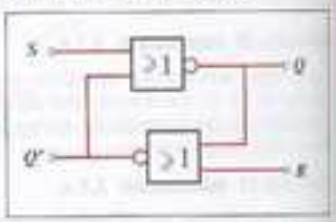
	e	s_1	e_2	s	e_1
Avant					
Après					

4) Comment faire évoluer ultérieurement le système?

Exercice 31 C.2.b.

Une « bascule RS » comporte deux entrées logiques S (« Set » : mettre dans un état) et R (« Reset » : replacer dans l'état initial) et deux sorties logiques Q et Q'.
Elle peut être réalisée avec deux portes **NI** :

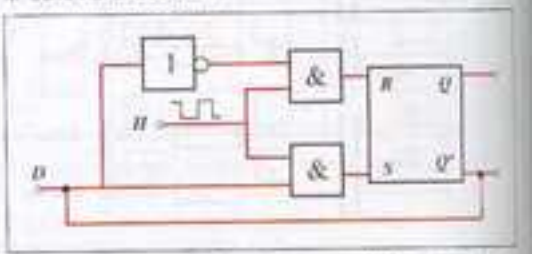
Fonction NI		
e_1	e_2	s
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Le tableau donne les états logiques correspondant à la fonction NI.
1) Reproduire et compléter le tableau suivant en y indiquant les états logiques correspondant à Q'. Rayer dans le tableau les états impossibles et comparer les états qui restent pour Q et Q'.

R	S	Q	Q'
1	1	0 1	
1	0	0 1	
0	1	0 1	
0	0	0 1	

2) Dans l'état initial, R, S et Q sont à l'état bas. Quel est l'état de Q'?
3) A partir de l'état précédent, R est porté temporairement à l'état haut, puis revient à l'état bas. Quelles sont les conséquences pour les sorties Q et Q'?
4) A partir de l'état $R = S = Q = 0$, S est porté *temporairement* à l'état haut. Quelles sont les conséquences pour les sorties Q et Q'?
5) A partir de l'état $R = S = Q' = 0$, quel est l'effet d'une mise temporaire de S à l'état haut? de R à l'état haut?
6) La bascule RS précédente est associée à un inverseur logique et à deux portes ET, comme l'indique le schéma ci-dessous :



Un signal d'horloge de fréquence N, fourni par un multivibrateur astable, pénètre en H, qui passe ainsi par une succession d'états bas et hauts. Étudier ce qui se produit à la sortie Q.

Fiche expérimentale

Pour en savoir plus

QUADRUPLE PORTE NON-ET CMOS

Circuit intégré CMOS 4011 est connu dans le ...merce sous le nom de « quadruple porte ...ND ». Il comporte 14 pattes (fig. 27).

Constitution du circuit intégré

...puce

...14 pattes du circuit intégré utilisé aboutissent, ...intérieur du boîtier, à une « puce » (fig. 28), ...ée ainsi en raison de ses faibles dimensions. ...e puce comporte quelques dizaines de ...sistors, diodes, résistors... de très petite taille. ...circuit intégré 4011 a été construit selon la ...chnique CMOS » (couples de transistors dits « à ...e de champ », **C**omplémentaires, constitués ...**M**étal, d'un **O**xyde et de **S**emi-conducteurs).

...quatre portes $\overline{ET}$ (ou NAND)

...r le constructeur, la puce a été fabriquée afin ...le comporte quatre « portes logiques » qui sont ...entées à la figure 29 selon les normes ...ervées.

...btention de deux portes NON

...obtenir les deux portes NON, il suffit d'utiliser ...thode indiquée précédemment p. 203. Les ...s 1 et 2, reliées entre elles, constituent l'entrée ...première porte, dont la sortie est la patte 3. ...attes 5 et 6 reliées forment l'entrée de la ...de porte dont la sortie est la patte 4. Les ...autres portes resteront ici non utilisées. ...es portes logiques pourraient être utilisées ...façon analogue pour obtenir le même résultat ...exercices).



Fig. 27. ***Quadruple porte NAND. Circuit intégré de la famille CMOS (série B).***

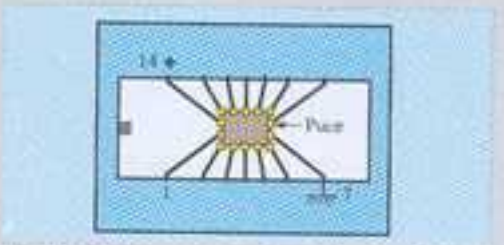


Fig. 28. ***La puce constitue la partie active du circuit intégré.***
Dimensions : 1,5 mm × 1,5 mm × 0,2 mm.

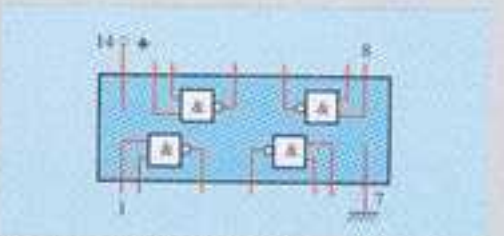


Fig. 29. ***Les quatre portes $\overline{ET}$ du circuit intégré 4011. Les pattes 7 et 14 sont réservées à l'alimentation.***

11 Circuits en régime sinusoïdal forcé

1 Dipôle série *R*, *L*, *C*, attaqué par une tension sinusoïdale.

2 Résonance d'intensité.

3 Puissance moyenne.



Le transfert électrique de la centrale aux circuits et moteurs industriels et domestiques.

Les courants alternatifs sinusoïdaux sont faciles à produire par des machines tournantes et sont aisément transportables à distance dans des conditions économiques satisfaisantes. Ils sont utilisables de façons souples et abondantes. C'est ce qui fait leur succès pratique.
Sur l'exemple du dipôle série R, L, C, ce chapitre montre comment un tel dipôle réagit à une sollicitation sinusoïdale.

1 RÉPONSE D'UN DIPÔLE SÉRIE *R, L, C,* À UNE ATTAQUE SINUSOÏDALE

Le principe de la production des courants alternatifs sinusoïdaux a été donné au chapitre 8 (alternateurs).
Un dipôle L, C, constitue un circuit oscillant de pulsation propre ω_0, telle que $L.C.\omega_0^2 = 1$. Ses oscillations sont amorties du fait de l'inévitable résistance du dipôle (chapitre 9).
Maintenant, le problème à résoudre est le suivant :
Un dipôle série R, L, C, est soumis à une tension sinusoïdale $u = U_m.\cos(\omega.t)$. En général, la pulsation imposée ω, diffère de la pulsation propre ω_0. Le dipôle devient le siège d'oscillations électriques de fréquence différente de sa fréquence propre : il subit des « oscillations forcées ». Quelle est l'intensité dans le dipôle?

1. Étude expérimentale

a) Montage

Le dipôle R, L, C, à étudier est formé d'une bobine résistante (R) et inductive (L), sans fer, associée en série à un condensateur de capacité C (fig. 1).
L'alimentation est constituée par un générateur basse fréquence (G.B.F.) qui délivre une tension sinusoïdale de fréquence réglable, de quelques hertz à quelques kilohertz.

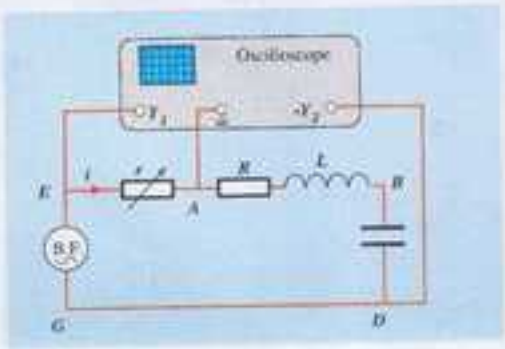


Fig. 1. ***Montage pour l'étude à l'oscilloscope d'un dipôle R, L, C.***

Un oscilloscope permet de visualiser les tensions aux bornes des dipôles. Un dipôle ohmique auxiliaire, de résistance r, est placé en série avec le dipôle à étudier. La tension $u_r = r.i$ à ses bornes donne l'évolution en fonction du temps de l'intensité $i = \frac{u_r}{r}$.

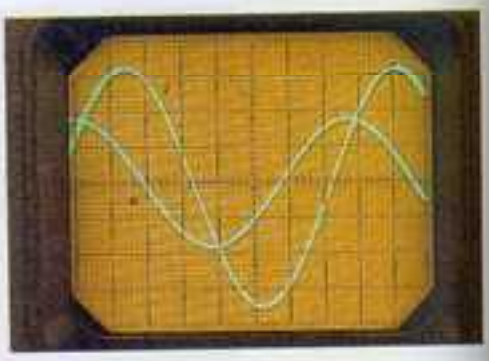
Le point A étant relié à la masse de l'oscilloscope, et le point E à la voie 1, Y_1 visualise $u_r = V_E - V_A$. La voie 2 **inversée** donne :

$$u_{RLC} = -(V_D - V_A).$$

b) Oscillogrammes

La figure 2 montre les oscillogrammes obtenus pour deux fréquences différentes imposées par le générateur.
Ces oscillogrammes mettent en évidence les résultats suivants :

- l'intensité du courant est sinusoïdale, de fréquence égale à celle qui est imposée par le générateur ;
- la tension et l'intensité présentent un décalage horaire qui dépend de la fréquence ;
- l'amplitude de l'intensité dépend de la fréquence.



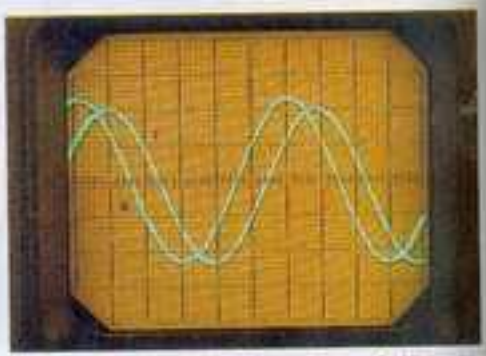


Fig. 2. ***Oscillogrammes de la tension et de l'intensité : u et i sont sinusoïdaux mais n'ont pas la même phase.***

c) Phase de l'intensité par rapport à la tension

Sur les oscillogrammes, l'axe des abscisses joue le rôle d'axe des temps car la vitesse de balayage (de gauche à droite) est constante.

Les sinusoïdes qui représentent l'évolution de $u(t)$ et $i(t)$ sont en général décalées.

Lorsque $u(t)$ atteint son maximum avant $i(t)$, la tension $u(t)$ est dite en avance sur l'intensité $i(t)$, ou, ce qui revient au même, i est en retard sur u.

D'une façon générale, en posant :

$$u(t) = U_m . \cos(\omega . t),$$

il est d'usage d'écrire l'intensité sous la forme :

$$i(t) = I_m . \cos(\omega . t - \varphi),$$

avec $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

L'intensité i est en retard sur la tension u, si $\varphi > 0$. L'intensité i est en avance sur la tension u, si $\varphi < 0$ (fig. 3).

Si la date $t = 0$ est choisie à un instant où l'intensité passe par sa valeur maximale, l'intensité est de la forme :

$$i = I_m . \cos(\omega . t).$$

Dans ces conditions :

$u = U_m . \cos(\omega . t + \varphi)$ et $i = I_m . \cos(\omega . t)$

φ est appelée **phase** de u par rapport à i, ou avance de phase de u par rapport à i, ou encore retard de phase de i par rapport à u. La phase de i par rapport à u est $-\varphi$.

d) Mesure à l'oscilloscope

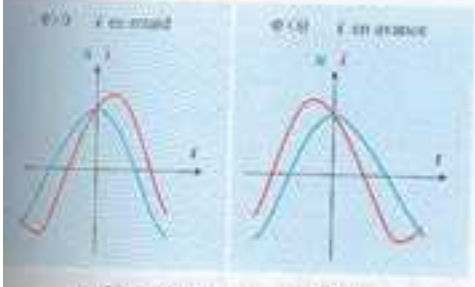
L'oscilloscope permet de **mesurer** :

– la tension maximale U_m, appliquée au dipôle série R, L, C;

– l'intensité maximale I_m traversant le dipôle;

– la fréquence commune à la tension et à l'intensité, en tenant compte de la vitesse de balayage;

– la phase de la tension par rapport à l'intensité.



$u = U_m . \cos(\omega . t)$ (bleu)

$i = I_m . \cos(\omega . t - \varphi)$ (rouge)

Fig. 3. *Avance ou retard de phase de i par rapport à u.*

2. Étude théorique

a) Mise en équation

La figure 4 rappelle les propriétés des constituants R, L, C, du dipôle.

Les lois valables pour le courant continu s'appliquent à chaque instant aux courants alternatifs, pour les fréquences relativement basses (inférieures à 100 MHz pour fixer les idées).

En particulier, l'intensité instantanée i est la même en tous points d'un circuit série. De même, les tensions instantanées aux bornes de dipôles en série s'ajoutent. Cette loi d'additivité des tensions instantanées, appliquée au cas du dipôle R, L, en série avec le condensateur C, donne $u = u_1 + u_2$ (fig. 5).

Par suite : $u = R . i + L . \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$.

b) Forme trigonométrique de l'équation

Comme c'est la tension appliquée qui est supposée connue, il semble naturel de l'écrire sous la forme $u(t) = U_m . \cos(\omega . t)$.

L'intensité cherchée doit être du type :

$$i(t) = I_m . \cos(\omega . t - \varphi).$$

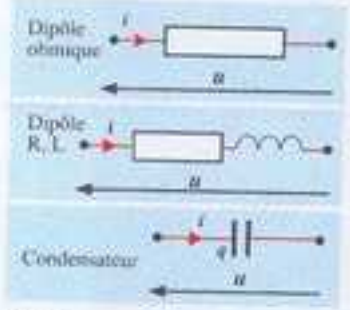
Une autre façon équivalente d'aborder le problème est de décrire la tension appliquée sous la forme $u = U_m . \cos(\omega . t + \varphi)$ et l'intensité comme $i = I_m . \cos(\omega . t)$.

Dans les deux cas, φ désigne la phase de u par rapport à i.

Les deux inconnues à déterminer sont I_m et φ.

Les calculs sont plus simples en adoptant le second point de vue, ce qui sera fait ici.

L'équation $u = L . \frac{di}{dt} + R . i + \frac{q}{C}$ est à résoudre.



$u = R . i$

$u = R . i + L . \frac{di}{dt}$

$q = C . u$

$i = \frac{dq}{dt}$

Fig. 4

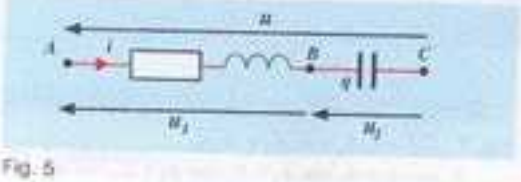


Fig. 5

Si $i = I_m . \cos(\omega . t)$, alors :

$$\frac{di}{dt} = -I_m . \omega . \sin(\omega . t) = I_m . \omega . \cos\left(\omega . t + \frac{\pi}{2}\right).$$

et : $$q = \int i . dt = \frac{I_m}{\omega} . \sin(\omega . t) + C^{te}.$$

La constante d'intégration est nulle si le condensateur n'est pas chargé avant de brancher le courant sinusoïdal, donc :

$$q = \frac{I_m}{\omega} . \sin(\omega . t),$$

soit : $$q = \frac{I_m}{\omega} . \cos\left(\omega . t - \frac{\pi}{2}\right).$$

L'équation $u = L . \frac{di}{dt} + R . i + \frac{q}{C}$ devient donc :

$$U_m . \cos(\omega . t + \varphi) = L . \omega . I_m . \cos\left(\omega . t + \frac{\pi}{2}\right) + R . I_m . \cos(\omega . t) + \frac{I_m}{C . \omega} . \cos\left(\omega . t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Il s'agit donc de transformer une somme de trois fonctions trigonométriques en une seule. Cela est aisément réalisable en utilisant la **méthode dite de Fresnel.**

c) *Vecteurs de Fresnel associés aux fonctions trigonométriques*

La méthode de Fresnel consiste à associer à la fonction trigonométrique $A . \cos(\omega . t + \varphi)$ un vecteur géométrique représenté par une flèche de longueur A formant avec un axe Ox un écart angulaire égal à φ (fig. 6).

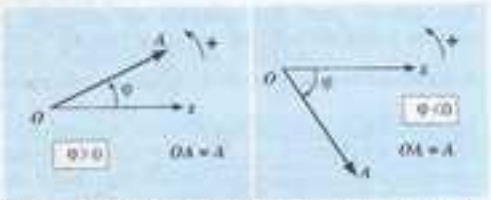


Fig. 6. ***Vecteur de Fresnel $\overrightarrow{OA}$ associé à la fonction trigonométrique*** $A . \cos(\omega . t + \varphi)$.

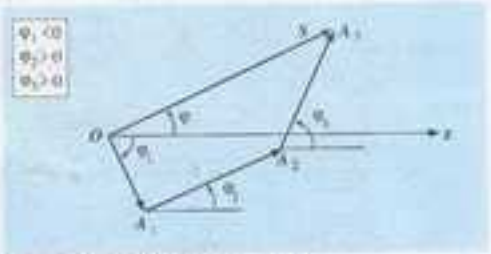


Fig. 7. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3}$,
$S . \cos\varphi = A . \cos\varphi_1 + B . \cos\varphi_2 + C . \cos\varphi_3$.

Une somme telle que :

$$A . \cos(\omega . t + \varphi_1) + B . \cos(\omega . t + \varphi_2) + C . \cos(\omega . t + \varphi_3) = S . \cos(\omega . t + \varphi$$

s'interprète comme la projection de la somme vectorielle :

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{S},$$

ce qui conduit par construction géométrique ou par calcul trigonométrique à S et φ (fig. 7).

La méthode s'étend aux cas où il y a plus de trois fonctions sinusoïdales de même fréquence.

d) *Solution de l'équation trigonométrique*

La figure 8 montre la construction de Fresnel utilisée pour l'équation qui traduit l'additivité des tensions instantanées :

$$U_m . \cos(\omega . t + \varphi) = R . I_m . \cos(\omega . t) + L . \omega . I_m . \cos\left(\omega . t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_m}{C . \omega} . \cos\left(\omega . t - \frac{\pi}{2}\right)$$

• U_m est représentée par l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés ont pour valeurs : $R . I_m$ et $\left(L . \omega - \frac{1}{C . \omega}\right) . I_m$.

Par suite :

$$U_m = I_m . \sqrt{R^2 + \left(L . \omega - \frac{1}{C . \omega}\right)^2}.$$

Le rapport, $\frac{U_m}{I_m} = Z$ est appelé **impédance** du dipôle :

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(L . \omega - \frac{1}{C . \omega}\right)^2}}$$

L'impédance s'exprime en ohm (Ω).

L'impédance dépend de la pulsation du courant.

On peut écrire : $\boxed{U_m = Z . I_m}$

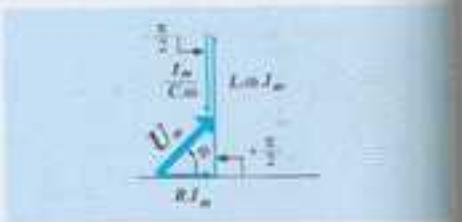


Fig. 8. ***Construction de Fresnel pour déterminer U_m et φ.*** *La figure représente* $R . I_m . \cos(\omega . t)$, $L . \omega . I_m . \cos\left(\omega . t + \frac{\pi}{2}\right)$ *et* $\frac{I_m}{C . \omega} . \cos\left(\omega . t - \frac{\pi}{2}\right)$.

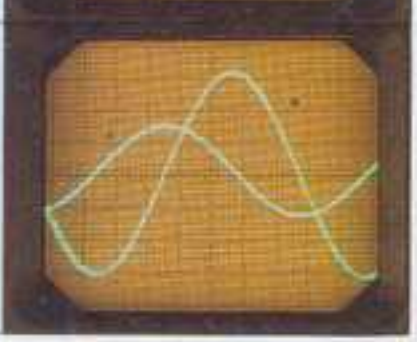
• La phase φ s'obtient dans le même triangle, en grandeur et signe, par :

$$\tan \varphi = \frac{L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}}{R}$$

L'expression $X = \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right)$ est appelée réactance du dipôle, $L \cdot \omega$ étant la réactance d'induction et $-\frac{1}{C \cdot \omega}$, la réactance de capacité. Ainsi, $\tan \varphi = \frac{X}{R}$.

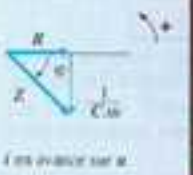
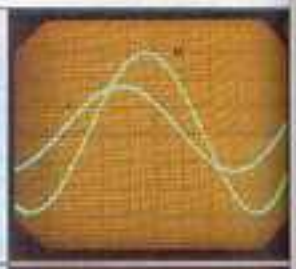
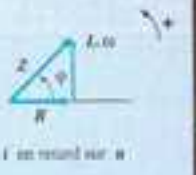
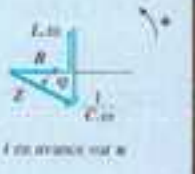
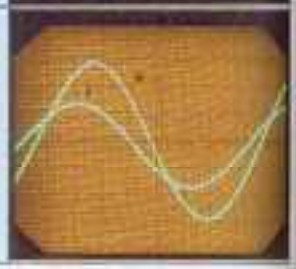
2. Cas particuliers.

• Le tableau suivant présente le rôle de chacun des composants, pris seul :

		$u = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$ $\quad i = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi)$	
Dipôle R	$Z = R$ $\varphi = 0$	 même phase pour u et i	
Dipôle L	$Z = L \cdot \omega$ $\varphi = +\frac{\pi}{2}$	 i en quadrature retard sur u	
Dipôle C	$Z = \frac{1}{C \cdot \omega}$ $\varphi = -\frac{\pi}{2}$	 i en quadrature avance sur u	

Dans les cas limites où le circuit ne comporte qu'une inductance pure $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ ou une capacité seule $\left(\varphi = -\frac{\pi}{2}\right)$, la tension u et l'intensité i sont en quadrature.

• Le tableau ci-dessous, envisage certaines associations en série de dipôles R, L, C :

	$u = U_m.\cos(\omega.t)$	$i = I_m.\cos(\omega.t - \varphi)$	
Dipôle R, C série	$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2.\omega^2}}$ $\varphi < 0$		
Dipôle R, L série	$Z = \sqrt{R^2 + L^2.\omega^2}$ $\varphi > 0$		
Dipôle R, L, C série à effet capacitif prépondérant	$Z = \sqrt{R^2 + \left(L.\omega - \frac{1}{C.\omega}\right)^2}$ $\varphi < 0$		

Tous ces résultats se retrouvent à partir des expressions de Z et φ.

Remarques :

• L'absence de condensateur revient à considérer un condensateur plan dont les armatures se touchent. La capacité $C = \varepsilon_0.\frac{S}{e}$ est alors infinie, car l'épaisseur e est nulle. Par suite, dans les formules $\frac{1}{C} = 0$.

• Pour des raisons d'homogénéité, R, $L.\omega$ et $\frac{1}{C.\omega}$ s'expriment en ohm (Ω), ainsi d'ailleurs que l'impédance et la réactance.

• La construction de Fresnel est basée sur l'additivité des tensions instantanées. Il n'y a pas additivité des tensions maximales.

• En divisant les longueurs de toutes les flèches du diagramme de Fresnel par I_m, la construction donne directement l'impédance Z à partir de R, $L.\omega$ et $\frac{1}{C.\omega}$ (fig. 9).

• La phase φ peut s'obtenir également par la relation :

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

Dans cette expression le signe de φ n'est pas déterminé, puisque $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$.

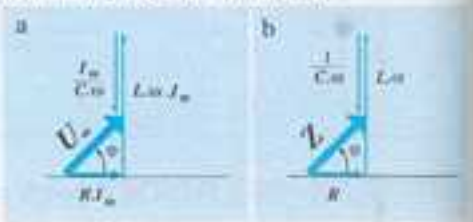


Fig. 9. ***Construction de Fresnel pour les tensions et pour les impédances.***

2 RÉSONANCE D'INTENSITÉ

1. Propriétés d'un circuit à la résonance

a) Définition

L'impédance $Z = \sqrt{R^2 + \left(L.\omega - \frac{1}{C.\omega}\right)^2}$ d'un dipôle série R, L, C, dépend de la fréquence N (ou de la pulsation $\omega = 2\pi.N$) imposée par le générateur. Elle tend vers l'infini aux très basses fréquences $\left(\text{à cause du terme } \frac{1}{C.\omega}\right)$ ainsi qu'aux très hautes fréquences (terme $L.\omega$). Par suite l'intensité $I_m = \frac{U_m}{Z}$, tend vers zéro à très basse ou très haute fréquences.

L'intensité est la réponse du dipôle à une excitation sinusoïdale en tension, fournie par le générateur considéré comme **excitateur**.

Il y a **résonance lorsque la réponse du dipôle est maximale.**

b) Pulsation conduisant à la résonance d'intensité

L'impédance : $Z = \sqrt{R^2 + \left(L.\omega - \frac{1}{C.\omega}\right)^2}$,

est une grandeur positive, fonction de ω. Elle est minimale lorsque $L.\omega = \frac{1}{C.\omega}$ ou :

$$L.C.\omega^2 = 1$$

La pulsation correspondante est donc égale à la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$.

Si le générateur B.F. délivre une tension sinusoïdale d'amplitude U_m constante, la réponse en intensité $I_m = \frac{U_m}{Z}$ est alors maximale.

Ainsi : **pour un dipôle R, L, C, la résonance d'intensité se produit lorsque la pulsation imposée par le générateur est égale à la pulsation propre du dipôle ($\omega = \omega_0$).**

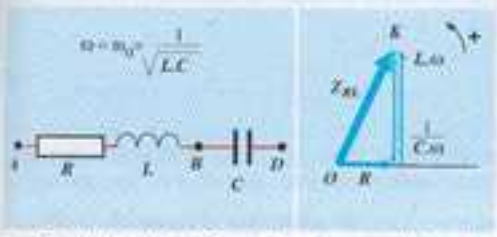


Fig. 10. ***Dipôle R, L, C, à la résonance d'intensité.***

c) Propriétés

A la résonance d'intensité :

— l'impédance est minimale et alors égale à R ;

— l'amplitude I_m de l'intensité est maximale et égale à $\frac{U_m}{R}$;

— la réactance $X = L.\omega - \frac{1}{C.\omega}$ est nulle ;

— l'intensité i et la tension u instantanées sont en phase ($\varphi = 0$) ;

— la construction de Fresnel (fig. 10) montre que l'impédance Z_{RL}, de la bobine et celle du condensateur Z_C peuvent être considérablement plus élevées que R. Par suite, les tensions $U_{mC} = Z_C.I_m$ et $U_{mRL} = Z_{RL}.I_m$ peuvent être bien plus grandes que la tension délivrée par le générateur, qui vaut alors $U_m = R.I_m$. Il y a risque de **surtensions** locales aux bornes du condensateur ou de la bobine, qui peuvent détruire les appareils s'ils n'ont pas été convenablement choisis.

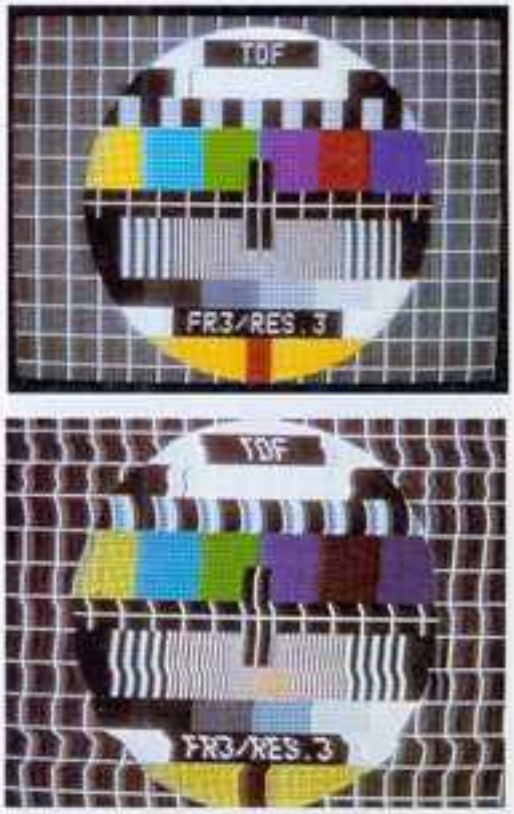


Fig. 11. *La sélection à la réception d'un canal TV se fait en faisant varier la fréquence propre du circuit du récepteur de façon à la rendre égale à celle de l'émetteur du canal choisi.*

d) Vérification expérimentale

• *Montage*

Le dipôle R, L, est constitué par une bobine sans fer ($R \approx 10\ \Omega$; $L \approx 0{,}1$ H) montée en série avec un condensateur ($C \approx 0{,}5\ \mu$F). L'ensemble est protégé par un dipôle ohmique de résistance $r = 100\ \Omega$ qui permet aussi de visualiser l'intensité (fig. 12). L'oscilloscope est branché avec la voie 2 inversée.

• *Oscillogrammes*

La figure 12 donne trois oscillogrammes caractéristiques, pour trois valeurs de ω :

$\omega < \omega_0$,

$\omega = \omega_0$ (résonance)

$\omega > \omega_0$.

Sur l'écran, il est possible de déterminer à chaque fois ω, U_m (qui doit rester constante) et $I_m = \frac{U_m}{r}$, ainsi que φ en tenant compte des réglages de l'oscilloscope.

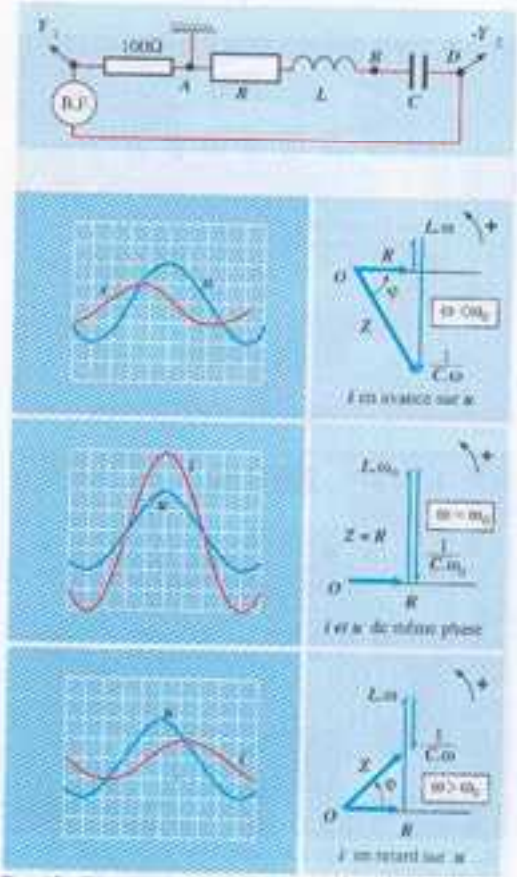


Fig. 12. *Passage par la résonance d'un dipôle série R, L, C.*

2. Bande passante

a) Courbe de résonance

• *Étude théorique*

La courbe de résonance est la représentation graphique de l'évolution, à tension maximale U_m constante, de la réponse en intensité en fonction de la pulsation ω imposée par le générateur B.F. : $I_m = f(\omega)$.

Son expression théorique est :

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L.\omega - \frac{1}{C.\omega}\right)^2}}$$

Il est commode de faire intervenir la « pulsation réduite », $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, et de poser : $I_0 = \frac{U_m}{R}$.

I_0 est alors la valeur maximale de l'amplitude I_m de l'intensité instantanée, $i = I_m . \cos(\omega . t)$.

En tenant compte de $\frac{1}{C} = L.\omega_0^2$, l'expression précédente de I_m devient en divisant numérateur et dénominateur par R :

$$I_m = \frac{\frac{U_m}{R}}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}.\left(L.\omega - \frac{L.\omega_0^2}{\omega}\right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + \frac{L^2.\omega_0^2}{R^2}.\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

soit, en posant $Q = \frac{L.\omega_0}{R}$:

$$I_m = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2.\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}.$$

Q est appelé **facteur de qualité** du dipôle.

• *Propriété de la courbe $I_m = f(x)$* (fig. 13).

La courbe présente un pic assez marqué au voisinage de la résonance ($x = 1$). Deux points A et B de même ordonnée I_m, quelconque, ont pour abscisses x et son inverse $\frac{1}{x}$. En effet, I_m n'est pas modifiée par le changement de x en $\frac{1}{x}$.

La courbe de résonance n'est pas symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$ (passant par le sommet).

b) Influence de la résistance sur la réponse

En insérant en série un dipôle ohmique de résistance r dans le circuit précédent, la résistance totale devient $R' = R + r$. La pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$ de résonance d'intensité, n'est pas

modifiée, mais le facteur de qualité $Q=\frac{L.\omega_0}{R'}$ demeure, ainsi que $I_0=\frac{U_m}{R'}$ (fig. 14).

Dans le cas où la résistance est élevée, la courbe est aplatie et la résonance est dite « floue ». au contraire, lorsque le pic est nettement marqué, la résonance est dite « aiguë ».

La résonance est d'autant plus aiguë que la résistance du dipôle *R, L, C,* est plus petite.

c) Largeur de bande à 3 décibels

• *Le dipôle R, L, C, en tant que filtre passe-bande*

Le dipôle *R, L, C,* peut être considéré comme un filtre de fréquences, en ce sens que l'intensité maximale n'est notable qu'au voisinage du pic de résonance, lorsque la pulsation de la tension appliquée est voisine de celle qui conduit à la résonance d'intensité.

• *Limites conventionnelles du filtre*

Par convention, la bande passante est délimitée par les deux fréquences qui conduisent à une intensité égale à $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ (fig. 15). La largeur de bande ainsi définie est dite « à 3 décibels » (3 dB).

La bande passante est étroite dans le cas où la résonance est aiguë.

• *Détermination de la largeur de la bande à 3 dB*

D'après l'expression :

$$I_m=\frac{I_0}{\sqrt{1+Q^2.\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$$

l'intensité maximale vaut $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ lorsque :

$$Q^2.\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=1, \quad \text{soit :} \quad \left(x-\frac{1}{x}\right)=\pm\frac{1}{Q}.$$

La largeur Δx, de bande réduite vaut donc : $\Delta x=\frac{1}{Q}$

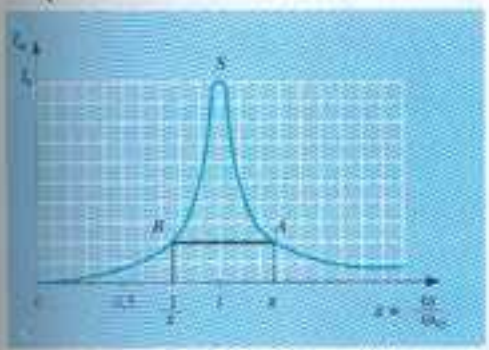


Fig. 13. ***Courbe de résonance. Si x est l'abscisse de A, celle de B (de même ordonnée) est*** $\frac{1}{x}$.

Or, $\Delta x=\Delta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)=\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$. Par suite, la largeur de bande en pulsation est $\Delta\omega=\frac{\omega_0}{Q}$.

Enfin, puisque $\omega=2\pi.N$ et $\omega_0=2\pi.N_0$ alors $\Delta\omega=2\pi.\Delta N$. **La largeur de bande ΔN en fréquence est donc $\Delta N=\frac{N_0}{Q}$** où N_0 désigne la fréquence de résonance.

• *Applications*

La résonance aiguë est recherchée dans les cas où il est souhaitable de disposer d'appareils sélectifs, par exemple pour les récepteurs radio qui doivent capter une émission sans que les voisines empiètent sur elle. Dans ce cas, le circuit oscillant du récepteur est réglé en résonance aiguë sur la fréquence de l'onde porteuse choisie (environ 200 kHz pour les « grandes ondes »). L'accord est obtenu en tournant un bouton qui fait varier la capacité du circuit oscillant récepteur.

Au contraire, les chaînes « haute fidélité » doivent laisser passer toutes les fréquences pour restituer les timbres des voix et des instruments de musique : les courbes de réponse des étages successifs d'amplification doivent donc être aussi plates que possible, dans le domaine des fréquences sonores (20 Hz à 20 kHz environ).

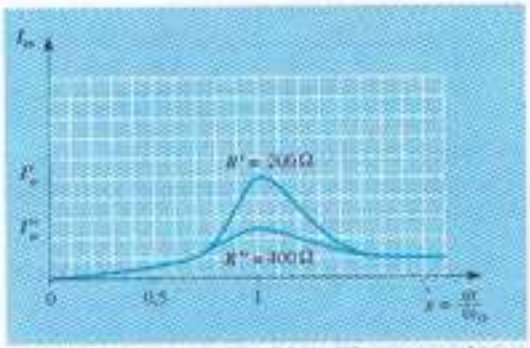


Fig. 14. ***La résonance est d'autant plus prononcée que la résistance est plus petite.***

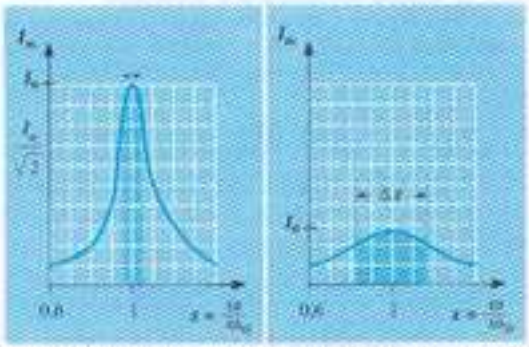


Fig. 15. ***La bande passante est étroite lorsque la résonance est aiguë.***

3. Facteur de qualité d'un dipôle *R, L, C*

La résonance est aiguë lorsque la bande passante est étroite, c'est-à-dire quand le facteur de qualité Q est de valeur élevée, ce qui suppose un dipôle R, L, C, peu amorti. Le dipôle est alors sélectif : il répond dans un faible domaine de fréquence encadrant la fréquence de résonance. Ainsi le circuit répond bien quand Q est élevé. Cela justifie le nom de facteur de qualité donné à Q.

a) Diverses expressions

Le facteur de qualité a été introduit précédemment par l'expression :

$$Q = \frac{L \cdot \omega_0}{R}$$

A la résonance $L \cdot \omega_0 = \frac{1}{C \cdot \omega_0}$ d'où :

$$Q = \frac{1}{R \cdot C \cdot \omega_0}.$$

Il est aussi lié à la largeur de bande passante par : $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{N_0}{\Delta N}$.

D'où les expressions :

$$Q = \frac{L \cdot \omega_0}{R} = \frac{1}{R \cdot C \cdot \omega_0} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{N_0}{\Delta N}$$

b) Facteur de surtension

A la résonance, la tension maximale aux bornes du condensateur est :

$$U_{m_C} = \frac{I_m}{C \cdot \omega_0} = \frac{R \cdot I_m}{R \cdot C \cdot \omega_0} = \frac{U_m}{R \cdot C \cdot \omega_0} = Q \cdot U_m$$

où U_m désigne l'amplitude de la tension d'alimentation du dipôle R, L, C.

A la résonance d'intensité, la tension maximale aux bornes du condensateur est Q fois plus élevée que la tension maximale d'alimentation.

Pour cette raison, Q est aussi appelé **facteur de surtension** du dipôle.

Remarque :

Si le facteur de qualité, Q, est grand : $\frac{L \cdot \omega_0}{R} \gg 1$, soit $L \cdot \omega_0 \gg R$, alors la tension aux bornes de la bobine $U_{m_L} = L \cdot \omega_0 \cdot I_m$ s'écrit en multipliant haut et bas par R :

$$U_{m_L} = \frac{L \cdot \omega_0}{R} \cdot R \cdot I_m = Q \cdot U_m.$$

Dans ce cas il existe une surtension aux bornes de la bobine égale à celle qui existe aux bornes du condensateur.

3 PUISSANCE MOYENNE

Une lampe à incandescence, alimentée « alternatif », brille continûment, comme si elle était soumise à une tension continue.
L'objectif de ce paragraphe est de préciser compléter cette analogie de comportement « alternatif » et « en continu ».

1. Puissance instantanée

a) Définition

• En régime continu, l'énergie reçue par circuit pendant la durée t est $E_{élec} = U \cdot I \cdot t$, la puissance est $P = U \cdot I$.

• En régime sinusoïdal, la tension et l'intens varient en fonction du temps, mais les lois courant continu sont valables telles quelles, elles sont appliquées pendant une durée extrêmement courte.
Pendant cette brève durée la petite quanti d'énergie électrique $dE_{élec}$ reçue alors par dipôle est :

$$dE_{élec} = u \cdot i \cdot dt.$$

Le quotient $\frac{dE}{dt} = u(t) \cdot i(t)$ est appelé **puissan électrique instantanée** $p(t)$ du dipôle :

$p = u \cdot i$	p en watt (W) u en volt (V) i en ampère (A)

b) Puissance moyenne

En général, pour un dipôle R, L, C, la tens et l'intensité n'ont pas la même phase :

$$u(t) = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t),$$

et : $$i(t) = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi).$$

La puissance à la date t s'écrit :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

$$p(t) = U_m \cdot I_m \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi).$$

En tenant compte de l'identité :

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right],$$

elle s'écrit :

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m \cdot I_m \cdot \left[\cos\varphi + \cos(2\omega \cdot t - \varphi)\right],$$

ou :

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m \cdot I_m \cdot \cos\varphi + \frac{1}{2} U_m \cdot I_m \cdot \cos(2\omega \cdot t - \varphi)$$

Cette expression contient deux termes :

l'un, $\frac{1}{2} U_m . I_m . \cos \varphi$, est constant, l'autre, $\frac{1}{2} U_m . I_m . \cos(2\omega . t - \varphi)$, évolue sinusoïdalement en fonction du temps, avec une pulsation 2ω, entre les valeurs $\pm \frac{1}{2} U_m . I_m$ et sa valeur moyenne est nulle.

$p(t)$ oscille autour de la valeur $\frac{1}{2} U_m . I_m . \cos \varphi$.

Cette dernière expression est appelée **puissance moyenne** du dipôle alimenté sous tension alternative.

Remarque :
Pour une résistance, la puissance moyenne est égale à :

$$\frac{1}{2} U_m . I_m = \frac{1}{2} R . I_m^2 = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{R}$$

($\cos \varphi = 1$ et $U_m = R . I_m$).

2. Intensité et tension efficaces

a) *Intensité efficace*

Dans le cas particulier du dipôle ohmique, $\varphi = 0$ et $u = R . i$.

La puissance instantanée qu'il reçoit est :

$$p = u . i = R . i^2.$$

Cette énergie ne reste pas dans le dipôle : elle est rayonnée sous forme de chaleur ou de lumière dans le milieu extérieur.

Le diagramme de la figure 16 montre que le dipôle ohmique reçoit de l'énergie par « bouffées », à raison de deux bouffées par période du courant. A la fréquence industrielle (50 Hz), cela fait une bouffée à chaque centième de seconde.

L'intensité du courant continu qui, traversant le dipôle pendant la même durée que le courant variable, le conduirait à recevoir et rayonner la même énergie électrique, est appelée **intensité efficace** du courant alternatif.

L'intensité I du courant continu qui conduirait à la puissance $R . I^2$ égale à la puissance moyenne $p = \frac{1}{2} R . I_m^2$ du courant alternatif est donc telle que :

$$R . I^2 = \frac{1}{2} R . I_m^2,$$

Cette intensité, l'intensité efficace, est donc :

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Plus généralement si l'intensité varie périodiquement en fonction du temps, la puissance instantanée est $p = R . i^2$ et la puissance moyenne est

$$p = \frac{1}{T} \int_0^T R . i^2 . dt.$$

L'intensité efficace qui, par définition, produirait une puissance $R . I^2$ égale :

$\left(R . I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T R . i^2 . dt \right)$, est telle que :

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 . dt.$$

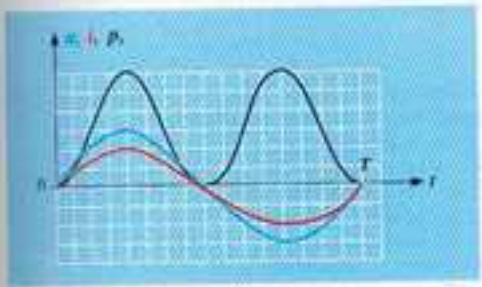


Fig. 16. Évolution de $u(t)$, $i(t)$ et $p(t)$ dans le cas d'un dipôle ohmique.

b) *Tension efficace*

Pour un dipôle ohmique de résistance R, la tension efficace U est celle qui en moyenne créerait la même puissance que la tension alternative sinusoïdale :

$$p = \frac{U^2}{R} = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{R},$$

d'où :

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Remarques :

- Les appareils industriels et domestiques ne « connaissent » que la puissance moyenne, c'est pourquoi ampèremètres et voltmètres ne mesurent que les valeurs efficaces. Pour l'intensité et la tension, leurs valeurs moyennes sont nulles et seules leurs valeurs efficaces ont un intérêt pratique.

- Les installations domestiques sont alimentées en général sous une tension de 220 V. Il s'agit de la tension efficace. La tension maximale vaut donc $200\sqrt{2} = 311$ V.

- En partant de la construction de Fresnel des tensions maximales, il suffit de diviser les longueurs des flèches par $\sqrt{2}$ pour obtenir les valeurs efficaces.

- L'expression de définition de l'impédance : $U_m = Z . I_m$, devient, en divisant les deux membres par $\sqrt{2}$:

$U = Z . I$	U en volt (V) Z en ohm (Ω) I en ampère (A)

c) Mesure des intensités et des tensions efficaces

L'oscilloscope permet de mesurer U_m qui, divisé par $\sqrt{2}$, donne la tension efficace.

Les appareils magnétoélectriques et numériques courants ne donnent les valeurs efficaces correctes que si les grandeurs sont sinusoïdales.

d) Mesure directe des puissances moyennes

La figure 17 donne le principe d'un **wattmètre électrodynamique** destiné à mesurer directement la puissance moyenne.

3. Facteur de puissance

a) Expression de la puissance moyenne

La valeur moyenne de la puissance a été établie précédemment :

$$P = \frac{1}{2} U_m . I_m . \cos \varphi.$$

Cette expression s'écrit, en faisant intervenir les valeurs efficaces U et I :

$P = U . I . \cos \varphi$	P en watt (W) U en volt (V) i en ampère (A) $0 \leqslant \cos \leqslant 1$

Cette puissance moyenne s'appelle parfois *puissance active*.

Remarque :

Le produit $U . I$ est appelé *puissance apparente*. Il s'exprime en voltampère (VA) pour le distinguer de la puissance moyenne exprimée en watt (W).

b) Expression du facteur de puissance

Le facteur cos φ, par lequel il faut multiplier la puissance apparente pour obtenir la puissance moyenne, est appelé **facteur de puissance** du dipôle en régime sinusoïdal :

$\cos \varphi = \frac{R}{Z}$	R en ohm (Ω) Z en ohm (Ω)

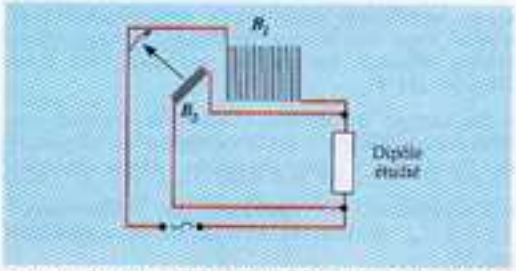


Fig. 17. *Principe d'un wattmètre électrodynamique. Pour que la mesure soit la plus exacte possible, il faut que la résistance de la bobine B_1 soit négligeable devant celle du dipôle et celle de la bobine B_2 très grande.*

c) Cas particuliers

• *Dipôle ohmique :* $\varphi = 0$ ($\cos \varphi = 1$), d'où :

$$P_R = U . I = R . I^2.$$

• *Condensateur :* $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ($\cos \varphi = 0$), d'où $P_C = 0$.

Le condensateur restitue pendant une demi-période l'énergie qu'il a accumulée pendant la demi-période précédente. La puissance moyenne est nulle.

• *Bobine purement inductive :*

$$\varphi = \frac{\pi}{2} (\cos \varphi = 0), \quad \text{d'où} \quad P_L = 0.$$

L'énergie magnétique accumulée pendant une demi-période est là aussi restituée pendant la demi-période suivante. La puissance moyenne est nulle.

• *Dipôle série R, L, C :* $\varphi \neq 0$ $\left(\cos \varphi = \frac{R}{Z}\right)$ d'où : $P_{RLC} = U . I . \frac{R}{Z}$.

Or $U = Z . I$, donc $P_{RLC} = R . I^2$.

L'énergie moyenne consommée résulte uniquement de l'effet Joule.

d) Amélioration du cos φ

Une installation industrielle a besoin de disposer d'une certaine énergie pour faire fonctionner les moteurs de l'usine. En fonctionnement permanent, la puissance moyenne est constante. Les moteurs de l'usine contiennent des bobinages : l'intensité n'a pas en général la même phase que la tension ($\varphi > 0$).

L'intensité dans les fils conducteurs de l'usine est : $I = \frac{P}{U . \cos \varphi}$.

Cette intensité sera, pour P et U données, d'autant plus faible que le cos φ sera plus proche de l'unité.

L'E.D.F. installe des lignes de résistance r, pour amener le courant au compteur de l'usine. Ce compteur enregistre l'énergie consommée.

Les pertes en ligne correspondent à une puissance :

$$P = r . I^2 = \frac{r . P^2}{U^2 . \cos^2 \varphi}$$

Elles seront quatre fois plus faibles si le cos φ peut être deux fois plus grand.

Pour augmenter cos φ, il faut diminuer φ.

Cela peut être réalisé à l'aide de condensateurs qui compenseront plus ou moins les effets d'inductance. Cependant, ces condensateurs doivent souvent avoir des capacités élevées; ils sont coûteux. L'industriel a le choix entre engager cette dépense ou payer une taxe supplémentaire à E.D.F. qui pénalise en cas de cos $\varphi < 0{,}8$.

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

• Retrouver sur un oscillogramme quelle est, des deux courbes représentant $u(t) = U_m . \cos(\omega . t)$ et $i(t) = I_m . \cos(\omega . t - \varphi)$, celle qui est en avance (ou en retard) de phase sur l'autre.

• Établir l'**équation différentielle** à laquelle obéit un dipôle R, L, C, auquel est appliquée une tension sinusoïdale $u(t)$:

$$u = R . i + L . \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}.$$

• Connaître les relations qui permettent de déterminer la solution $i(t)$ de l'équation précédente :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L . \omega - \frac{1}{C . \omega}\right)^2}; \quad U = Z . I; \quad \tan \varphi = \frac{L . \omega - \frac{1}{C . \omega}}{R}.$$

• R, Z, $L\omega$ et $\frac{1}{C . \omega}$ s'expriment en ohm (Ω).

• Utiliser la **construction de Fresnel** des tensions et des impédances.

• Connaître les propriétés d'un dipôle série R, L, C, à la **résonance d'intensité** :

— pulsation imposée ω, égale à la **pulsation propre** $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L . C}}$;

— **réponse en intensité** $I_0 = \frac{U_m}{Z}$ maximale;

— **phase** de la tension par rapport à l'intensité : $\varphi = 0$;

— **impédance** minimale ($Z = R$).

• La **largeur de bande** passante à 3 dB, en pulsation, est $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$, où Q désigne le **facteur de qualité** (ou de surtension) du dipôle :

$$Q = \frac{L . \omega_0}{R}.$$

• L'**intensité et la tension efficaces** d'un courant alternatif sont liées aux intensités et tensions maximales par :

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

• La **puissance moyenne** d'un dipôle série alimenté sous tension sinusoïdale est :

$$P = U . I . \cos \varphi,$$

où $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$ désigne le **facteur de puissance** du dipôle.

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

1) Un dipôle de résistance $R = 10\ \Omega$ et d'auto-inductance $L = 0{,}1$ H est placé en série avec un condensateur de capacité $C = 0{,}1\ \mu$F. L'ensemble est alimenté sous tension $u = 10 \cos 500t$. Quelle est l'expression de l'intensité instantanée?

2) La tension appliquée est maintenant :

$$u = 10 \cos(\omega . t).$$

a) Quelle pulsation ω conduirait à la résonance d'intensité?

b) Quelles seraient alors les tensions maximales aux bornes de la bobine et du condensateur?

c) Interpréter les résultats sur une construction de Fresnel.

SOLUTION

1) A la pulsation $\omega = 500$ rad.s^{-1}, l'impédance du dipôle vaut :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L.\omega - \frac{1}{C.\omega}\right)^2} = \sqrt{10^2 + \left(50 - \frac{1}{5 \times 10^{-4}}\right)^2} = 19\,950\ \Omega.$$

L'intensité maximale est $I_m = \frac{U_m}{Z} = 5 \times 10^{-4}$ A. La phase de la tension par rapport à l'intensité est donnée par : $\tan \varphi = \frac{L.\omega - \frac{1}{C.\omega}}{R} = -1995$. Pratiquement, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. L'effet de la capacité l'emporte largement sur l'effet inductif ($\frac{1}{C.\omega} = 20$ kΩ et le dipôle se comporte comme un condensateur à cette basse fréquence). L'intensité instantanée a donc pour expression :

$$i = 5 \times 10^{-4} \cos\left(500t + \frac{\pi}{2}\right).$$

2) *a*) La pulsation qui conduit à la résonance d'intensité vaut :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}} = 10^4\ \text{rad.s}^{-1}.$$

b) A la pulsation ω_0, l'intensité maximale dans le dipôle est :

$$I_m = \frac{U_m}{R} = \frac{10}{10} = 1{,}0\ \text{A}.$$

La réactance d'induction vaut : $L.\omega_0 = 1$ kΩ et la résistance du dipôle est négligeable vis-à-vis d'elle :

$$Z_{RL} = \sqrt{R^2 + L^2.\omega_0^2} \approx L.\omega_0.$$

La tension maximale aux bornes de la bobine est donc :

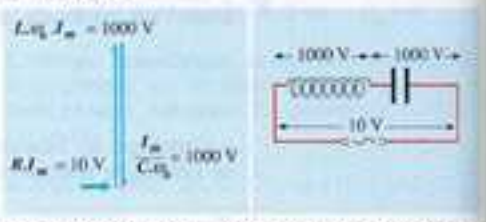
$$U_m \approx L.\omega_0.I_m = 1000\ \text{V}.$$

La tension maximale aux bornes du condensateur est :

$$U_m = \frac{1}{C.\omega}.I_m = 1000\ \text{V}.$$

Ainsi, à la résonance d'intensité, la tension maximale aux bornes des dipôles R, L, et C est ici cent fois plus élevée que la tension maximale 10 V aux bornes de l'ensemble R, L, C. Ces surtensions peuvent être dangereuses. Cet exemple montre bien qu'il n'y a pas additivité des tensions maximales.

c) La construction de Fresnel correspondant au cas étudié est indiquée ci-dessous, avec le montage et les tensions maximales aux bornes du dipôle R, L, C et de R, L, C.

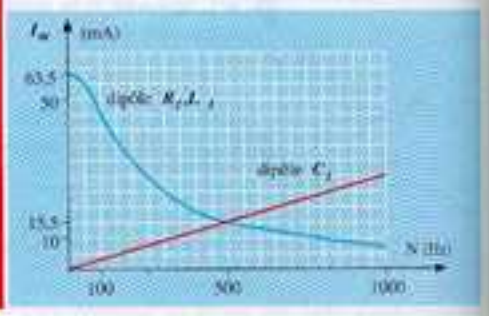


En principe les flèches représentant les tensions aux bornes de L et C devraient être 100 fois plus longues que celle qui représente la tension aux bornes de R. La tension aux bornes de la bobine est représentée par une flèche joignant l'origine de la flèche $R.I_m$ à l'extrémité de celle qui donne $L.\omega_0.I_m$. Elle est pratiquement confondue avec celle qui représente $L.\omega_0.I_m$.

EXERCICE 2

On dispose de trois dipôles :
— un dipôle C_1, constitué par un condensateur de capacité C_1;
— un dipôle R_1, L_1, constitué par une bobine de résistance R_1 et d'inductance L_1;
— un dipôle R_2, L_2, C_2, constitué par une bobine de résistance R_2 et d'inductance L_2, montée en série avec un condensateur de capacité C_2.

En appliquant aux bornes de chaque dipôle la tension $u = 10 \cos(\omega . t)$ fournie par un générateur de fréquence N réglable, on établit la courbe de réponse en intensité maximale I_m sur un intervalle de fréquence (0-1 000 Hz). La valeur maximale de I_m est de 63,5 mA pour le dipôle R_1, L_1, et pour le dipôle R_2, L_2, C_2.

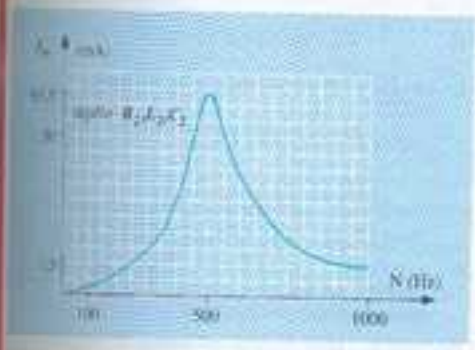


1. EXERCICES RESOLUS

A. Dipôles C_1 et R_1, L_1.

Déduire des deux courbes de réponse les valeurs numériques de C_1, R_1 et L_1. Justifier brièvement les résultats.

B. Dipôle R_2, L_2, C_2.



1) Déduire de la courbe de réponse la valeur de la fréquence de résonance N_0. Calculer numériquement R_2.

2) Déterminer graphiquement les limites N_1 et N_2 de la bande passante. En déduire la largeur de la bande passante et la valeur du facteur de qualité Q du dipôle.

3) Calculer les valeurs de la capacité C_2 et de l'inductance L_2.

C. Comparer R_1 à R_2, L_1 à L_2 et C_1 à C_2.

On constate que la courbe de réponse du circuit R_2, L_2, C_2 présente avec les deux autres courbes des parfaites similitudes. Justifier cette observation.

SOLUTION

A) Dipôles C_1 et R_1, L_1.

• Pour le dipôle C_1. L'intensité maximale est :

$$I_m = U_m . C_1 . \omega = 2\pi . U_m . C_1 . N$$

La représentation graphique de l'évolution en fonction de N est donc une droite passant par l'origine. D'après les données, cette droite passe par le point (500 Hz; $15,5 \times 10^{-3}$ A).

Il en suit :

$$C_1 = \frac{I_m}{2\pi . N . U_m} = \frac{15,5 \times 10^{-3}}{2\pi \times 500 \times 10} = 4,9 \times 10^{-7} \text{ F}$$

$$\boldsymbol{C_1 = 0,5\ \mu F.}$$

• En courant continu (fréquence nulle), l'impédance :

$$Z = \sqrt{R_1^2 + L_1^2 . \omega^2}$$

du dipôle R_1, L_1, est égale à sa résistance R_1.

Pour $N = 0$, alors, $R_1 = \dfrac{U_m}{I_m} = \dfrac{10}{63,5 \times 10^{-3}} = 157\ \Omega$.

$$\boldsymbol{R_1 = 157\ \Omega.}$$

A la fréquence 500 Hz, l'impédance du dipôle est :

$$Z_1 = \frac{U_m}{I_m} = \frac{10}{15,5 \times 10^{-3}} = 645\ \Omega.$$

La réactance d'induction est donc :

$$X_1 = L_1 . \omega = \sqrt{Z_1^2 - R_1^2} = 626\ \Omega.$$

D'où : $L_1 = \dfrac{X_1}{\omega} = \dfrac{626}{1\,000\pi} = 0,199$ H.

$$\boldsymbol{L_1 = 0,2\ H.}$$

B) Dipôle R_2, L_2, C_2.

1) La fréquence de résonance est celle qui donne le pic de la réponse :

$$\boldsymbol{N_0 = 500\ Hz.}$$

A la résonance, l'impédance est minimale, égale à la résistance R_2 du dipôle.

Pour $N = 500$ Hz, $R_2 = \dfrac{U_m}{I_m} = \dfrac{10}{63,5 \times 10^{-3}} = 157\ \Omega$.

$$\boldsymbol{R_2 = 157\ \Omega.}$$

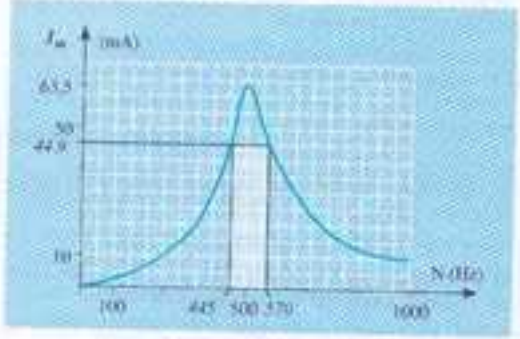
2) Les limites N_1 et N_2 de la bande passante sont celles pour lesquelles l'intensité maximale est divisée par $\sqrt{2}$, soit :

$$I_m = \frac{63,5}{\sqrt{2}} = 44,9\text{ mA.}$$

A cette intensité correspondent deux fréquences lues sur le graphique : $N_1 = 445$ Hz et $N_2 = 570$ Hz. La largeur de bande passante est $\boldsymbol{\Delta N = N_2 - N_1 = 125\ Hz.}$

Le facteur de qualité, $Q = \dfrac{N_0}{\Delta N}$, vaut donc :

$$\frac{500}{125} = 4. \qquad \boldsymbol{Q = 4,0.}$$



3) Le facteur de qualité est défini par $Q = \dfrac{L_2 . \omega_0}{R_2}$,

d'où : $L_2 = \dfrac{Q . R_2}{\omega_0} = \dfrac{4 \times 157}{1\,000\pi}$, soit : $\boldsymbol{L_2 = 0,20\ H.}$

1. EXERCICES RESOLUS

A la résonance, la réactance $X_2 = L_2 \cdot \omega_0 - \frac{1}{C_2 \cdot \omega_0}$ est nulle. Par suite, $C_2 = \frac{1}{L_2 \cdot \omega_0^2} = \frac{1}{0{,}2 \times (1\,000\pi)^2}$

$$C_2 = 0{,}5\ \mu F.$$

C) Les résistances, inductances et capacités sont sensiblement égales deux à deux pour les trois dipôles.
Aux fréquences élevées, le terme $L \cdot \omega$ devient prépondérant dans l'expression de l'impédance :

$$Z \approx L \cdot \omega.$$

La réponse du circuit est donc semblable à celle d'une bobine inductive seule.

Aux basses fréquences, c'est le terme $\frac{1}{C \cdot \omega}$ qui est le plus important, et le circuit répond comme un condensateur seul.

EXERCICE 3

L'intensité, dans un appareil électroménager assimilable à une bobine R, L, vaut $I = 2{,}0$ A lorsqu'il est alimenté sous la tension : $u = 220\sqrt{2}\cos(100\pi \cdot t)$. Sa puissance électrique moyenne est alors de 220 W.

1) Déterminer sa puissance apparente, son facteur de puissance $\cos \varphi_1$ et l'expression de l'intensité i_1 dans le dipôle.

2) Afin de porter le facteur de puissance à la valeur $\cos \varphi_2 = 0{,}9$, on insère en série un condensateur de capacité C. Quelle doit être cette capacité? Que devient l'intensité instantanée?

SOLUTION

1) L'intensité efficace dans l'appareil vaut $I = 2$ A. La tension efficace est $U = 220$ V. Sa puissance apparente est donc : $\boldsymbol{U \cdot I = 440\ VA.}$

Sa puissance moyenne est $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi_1 = 220$ W. Par suite, $\boldsymbol{\cos \varphi_1 = 0{,}5.}$
Puisque $u(t)$ est de la forme $U_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$, alors i_1 est à rechercher sous la forme :

$$i_1 = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi_1).$$

φ_1 est positif car l'appareil est assimilable à un dipôle R, L. De $\cos \varphi_1 = 0{,}5$, on tire $\varphi_1 = 1{,}05$ rad. D'où :

$$\boldsymbol{i_1 = 2\sqrt{2}\cos(100\pi \cdot t - 1{,}05).}$$

2) La situation peut être analysée sur une construction de Fresnel. L'impédance de l'appareil est :

$$Z_{RL} = \frac{U}{I} = \frac{220}{2} = 110\ \Omega.$$

Avec le condensateur en série, l'impédance devient Z' représentée par OF ou OF' sur la construction. Il y a en effet deux possibilités pour obtenir $\cos \varphi_2 = 0{,}9$: $\varphi_2 = 0{,}45$ rad ou $-0{,}45$ rad. La seconde hypothèse conduit à une flèche plus longue pour représenter $\frac{1}{C \cdot \omega}$, donc à une capacité plus faible et moins onéreuse. C'est elle qui sera retenue ici ($\varphi_2 < 0$).

Par projections orthogonales, il vient :

$$Z_{RL} \cdot \cos \varphi_1 = Z' \cdot \cos \varphi_2$$

et $$Z_{RL} \cdot \sin \varphi_1 - Z' \cdot \sin \varphi_2 = \frac{1}{C \cdot \omega}$$

En éliminant Z' entre ces deux équations :

$$Z_{RL} \cdot \sin \varphi_1 - Z_{RL} \cdot \cos \varphi_1 \cdot \tan \varphi_2 = \frac{1}{C \cdot \omega},$$

$$C = \frac{1}{Z_{RL} \cdot \omega \cdot (\sin \varphi_1 - \cos \varphi_1 \cdot \tan \varphi_2)}.$$

Avec $\omega = 100\pi$, $Z_{RL} = 110\ \Omega$, $\cos \varphi_1 = 0{,}5$, d'où $\sin \varphi_1 = 0{,}866$, $\cos \varphi_2 = 0{,}9$ d'où $\tan \varphi_2 = -0{,}48$, l'application numérique donne $\boldsymbol{C = 26\ \mu F}$, ce qui constitue une grande capacité.

Remarque : pour $\varphi_2 > 0$, on trouve $\boldsymbol{C' = 46\ \mu F.}$

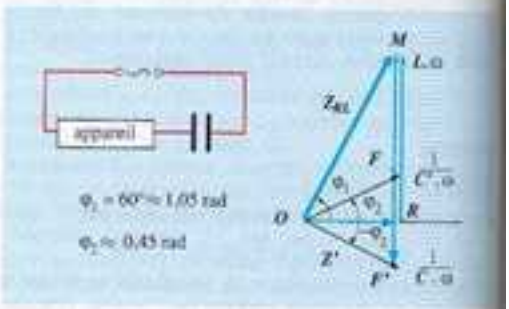
La nouvelle impédance vaut :

$$Z' = Z_{RL} \cdot \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} = 110 \times \frac{0{,}5}{0{,}9} = 61\ \Omega.$$

L'intensité maximale vaut maintenant :

$$I_m = \frac{U_m}{Z'} = 220\,\frac{\sqrt{2}}{61} = 5{,}1\ A.$$

Donc $$\boldsymbol{i = 5{,}1\cos(100\pi \cdot t + 0{,}45).}$$



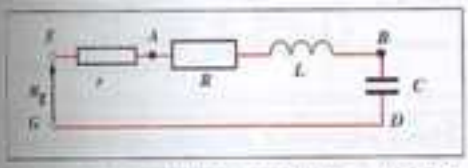
2. EXERCICES PROPOSÉS

EXERCICES D'APPLICATION

Phases

Exercice 1

Soit le dispositif ci-dessous, pour lequel : $r = 10\ \Omega$, $R = 50\ \Omega$, $L = 0{,}10$ H, $C = 0{,}1\ \mu$F ; $u = 10 \cos(1\,000t)$.



Déterminer les expressions donnant les expressions instantanées de $i(t)$, $u_{r(t)}$, u_{AB}, u_{BD}, u_{EB} et u_{AD}.

*Exercice 2

L'intensité dans un dipôle série R, L, C, est :

$$i = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi).$$

La tension appliquée est : $u = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$.

1) Exprimer $\tan\varphi$ en fonction de $Q = \dfrac{L \cdot \omega_0}{R}$ et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

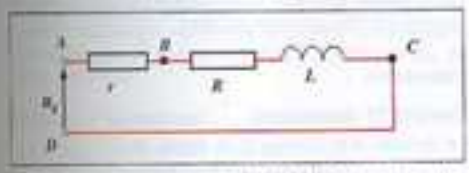
2) Représenter graphiquement la courbe montrant l'évolution de $\tan\varphi$ en fonction de x.

3) Dans quelle région de la courbe l'effet de l'inductance l'emporte-t-il sur l'effet de la capacité?

Construction de Fresnel

*Exercice 3

Un générateur de tension $u = 24 \cos(500t)$ (unités du SI) alimente un conducteur ohmique de résistance $r = 10\ \Omega$, monté en série avec une bobine de résistance R et d'auto-inductance L. Les tensions mesurées aux bornes de r et de la bobine valent respectivement $U_r = 6{,}0$ V et $U_{bobine} = 20$ V.



1) Construire soigneusement, à la règle et au compas, les vecteurs de Fresnel associés aux tensions.

2) Mesurer au rapporteur la phase de $u(t)$ par rapport à $i(t)$. Déterminer l'expression de l'intensité instantanée.

3) Décrire la construction précédente et réaliser la construction de Fresnel des impédances. A partir de mesures au double décimètre, déterminer la résistance et l'auto-inductance de la bobine.

Exercice 4

Une bobine de résistance $R = 40\ \Omega$, de réactance d'induction $L \cdot \omega = 60\ \Omega$, est placée en série avec un condensateur de réactance de capacité :

$$-\frac{1}{C \cdot \omega} = -30\ \Omega.$$

L'ensemble est alimenté par une source de tension $u = 20 \cos(630t)$.

1) Réaliser la construction de Fresnel des tensions correspondant à ce montage.

2) En déduire l'impédance du dipôle série R, L, C, ainsi constitué.

3) Déterminer l'intensité efficace dans le dipôle R, L, C.

4) Quelle autre capacité, mise à la place de la précédente, conduirait à la même intensité efficace?

Impédances

Exercice 5

Quelle fonction $f(Z)$, de l'impédance, faut-il porter en ordonnées, et quelle fonction $g(\omega)$, de la pulsation, faut-il porter en abscisses, pour obtenir des droites $f(Z) = g(\omega)$ dans le cas des dipôles suivants alimentés sous tension efficace constante : R; L; C; R, L; R, C? Préciser les caractéristiques (coefficient directeur, intersections avec les axes, ...) des droites obtenues.

Exercice 6

Alimentée par un générateur de tension alternative sinusoïdale de tension efficace $U = 2$ V et de pulsation $\omega = 10\,000$ rad.s^{-1}, une bobine de résistance $R = 40\ \Omega$, d'inductance $L = 8$ mH est montée en série avec un condensateur de capacité $C = 2\ \mu$F.

1) Calculer l'impédance de ce dipôle R, L, C.

2) Calculer l'intensité efficace dans le dipôle.

*Exercice 7

Pour déterminer les caractéristiques d'une bobine, on réalise les opérations suivantes :

— alimentation sous tension constante : $U = 6{,}0$ V; l'intensité vaut alors 0,30 A;

— alimentation sous tension alternative :

$u = 10 \cos(500t)$; l'intensité efficace vaut alors 0,28 A.

1) Déterminer l'impédance et l'inductance de la bobine.

2) Un condensateur est branché en série avec la bobine précédente. La résonance d'intensité s'obtient pour $\omega_0 = 5\,000$ rad.s^{-1}. Quelle est la capacité du condensateur?

2. EXERCICES PROPOSES

Réponses en intensité

Exercice 8

Un condensateur variable rotatif a une capacité donnée en fonction de l'angle de rotation θ ($0 < \theta < 180°$) par $C = 10\theta$. Cette relation donne C en picofarad ($1\ pF = 10^{-12}\ F$).
Ce condensateur, associé à une bobine de résistance $R = 1\ \Omega$ et d'inductance $L = 1$ mH, constitue le circuit oscillant d'un poste récepteur de radio. Le circuit est accordé sur un poste émetteur quand la fréquence du circuit oscillant est égale à celle de l'onde porteuse.

1) Établir l'expression donnant la fréquence N_0 de résonance, en fonction de θ.

2) Le signal reçu dans l'antenne induit dans le circuit oscillant une f.é.m. efficace de 10 µV. Quelle est l'intensité du courant à la résonance d'intensité?

3) Quelle doit être la variation ΔC, de capacité, pour que, partant de la résonance, les fréquences deviennent égales aux fréquences limites de la bande passante à 3 dB, afin de ne plus recevoir l'émission? De quel angle faut-il tourner le bouton du condensateur pour qu'il en soit ainsi?

Application numérique : $\theta = 100°$.

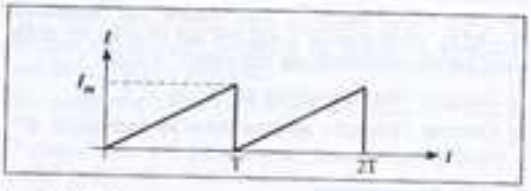
Valeurs efficaces

* Exercice 9

Une tension $u = 4{,}5 \cos(4\,000t)$ (unités SI) est appliquée aux bornes d'un dipôle R, C. ($R = 10\ \Omega$; $C = 0{,}1\ \mu F$). Calculer l'intensité efficace du courant.

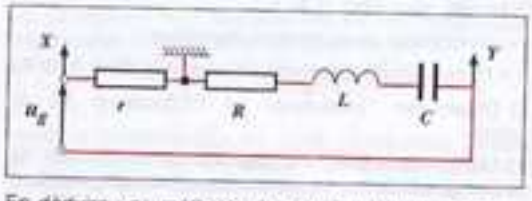
Exercice 10

Calculer l'intensité efficace d'un courant qui évolue en fonction du temps « en dents de scie ».



Exercice 11

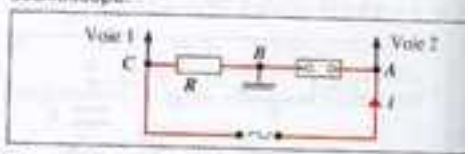
Pour le montage représenté ci-dessous, l'oscilloscope est utilisé en *XY*. Qu'observe-t-on sur l'écran à la résonance?



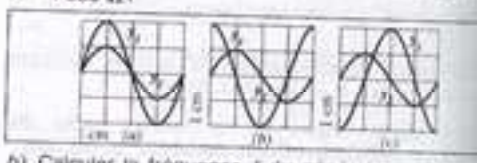
En déduire une méthode de contrôle de la résonance du circuit.

Exercice 12

Un circuit est constitué d'un conducteur ohmiq
d'un dipôle *AB* et d'un générateur de te
alternative sinusoïdale, de tension efficace con
et de fréquence *N*. Il est relié aux bornes
oscilloscope.



Grâce à un dispositif approprié, on visualise s
voie 1, la tension $u_{BC} = -(v_C - v_B)$.
Le dipôle *AB* est constitué de l'un des appa
suivants : un conducteur ohmique, une bobine
résistance négligeable ou un condensateur.
1) L'aspect de l'écran est celui des figures ci-dess
Donner dans les trois cas, en justifiant la répons
nature du dipôle *AB*.
2) *a*) Quelle est l'impédance de ces trois dip
sachant que la sensibilité verticale, 5 V.cm^{-1}, e
même sur les deux voies et que la résistance *BC*
$R = 1\,000\ \Omega$?



b) Calculer la fréquence *f* du générateur, la base
temps étant réglée sur la position 0,5 ms.cm^{-1}.
c) Calculer dans les trois cas la valeur de la grand
caractéristique du dipôle *AB*.
d) Déterminer, dans le cas (c) l'expression
l'intensité instantanée en fonction du temps, sach
que $v_A - v_B$ passe par un maximum à l'instant zé
3) Le dipôle *AB* est maintenant constitué des t
dipôles précédents montés en série. La fréquen
restant la même, quel sera l'aspect des courbes s
l'écran? Retrouvera-t-on l'un des trois cas précéden
Si oui, lequel?
Dans quelle situation particulière se trouve le circ
Quelle est l'impédance de *AB*?

Puissance

* Exercice 13

La tension aux bornes d'un dipôle est :

$$u = 127\sqrt{2} \cos(314t).$$

L'intensité du courant est $i = \sqrt{2} \cos(314t - 0{,}6)$.
Quels sont pour ce dipôle le facteur de puissance
puissance apparente et la puissance moyenne?

Exercice 14

La puissance mécanique d'un moteur électrique e
de 1 kW. Ce moteur restitue sous forme mécaniq
90 % de l'énergie électrique qu'il reçoit. Il fonctionn
sous 220 V et son facteur de puissance est 0,8.
Quelle est l'intensité qui le parcourt?

2. EXERCICES PROPOSÉS

Exercice 15

1) Un industriel a besoin, pour faire fonctionner ses moteurs, d'une puissance $P = 8\,000$ kW. L'ensemble de son installation a un cos φ égal à 0,8. E.D.F. assure à l'arrivée du compteur de l'usine une tension égale à $U = 16$ kV.

a) Quelle est l'intensité en ligne?

b) Quelle serait-elle si le facteur de puissance de l'installation valait 0,95?

2) La résistance de la ligne d'amenée de l'énergie électrique a pour résistance $r = 5\ \Omega$. Quel est, dans les deux cas précédents, le rapport de la puissance perdue en ligne à la puissance fournie à l'usine? Comment minimiser ces pertes?

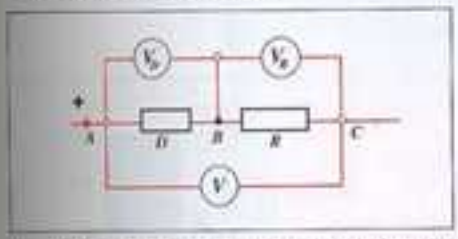
Facteur de puissance

Exercice 16

Exprimer le facteur de puissance d'un dipôle R, L, C, en fonction du facteur de qualité Q et de la pulsation réduite $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$. Combien vaut le facteur de puissance aux limites de la bande passante à 3 dB?

Exercice 17

Un dipôle AB est branché en série avec un dipôle ohmique de résistance R connue.



L'ensemble est alimenté sous une tension de valeur efficace U. Trois voltmètres sont branchés en dérivation aux bornes de l'ensemble (V), du dipôle étudié (V_D) et du dipôle ohmique (V_R).

Établir l'expression qui donne le facteur de puissance en fonction de R et des indications U, U_D et U_R des trois voltmètres.

* Exercice 18

Un moteur est alimenté sous tension :

$$u = 220\sqrt{2}\cos(100\pi . t).$$

Sa puissance mécanique est de 300 W.

1) Le rendement énergétique du moteur est de 85 %. Quelle est la puissance électrique moyenne mise en jeu?

2) L'intensité dans le moteur est $I = 2$ A. Quel est son facteur de puissance?

3) Quelle doit être la capacité d'un condensateur qui, branché en dérivation sur le moteur, porterait son facteur de puissance à la valeur 1?

Facteur de qualité

Exercice 19

Déterminer le facteur de qualité d'un dipôle R, L, C, série pour lequel $R = 10\ \Omega$, $L = 50$ mH et $C = 0{,}5\ \mu$F.

Exercice 20

1) Exprimer, à la résonance d'intensité se produisant pour une pulsation ω_0, la tension maximale U_{mR} aux bornes de la bobine R, L, d'un dipôle R, L, C, série, en fonction de la valeur maximale U_m de la tension appliquée au dipôle R, L, C, et du facteur de qualité Q du dipôle. Que devient cette relation si $L . \omega_0 \gg R$?

2) Exprimer la tension maximale U_{mC} aux bornes du condensateur en fonction de U_m et Q. Interpréter ces résultats.

Exercice 21

1) Exprimer, en fonction du facteur de qualité Q et de la pulsation ω_0 à la résonance, les pulsations ω_1 et ω_2 qui limitent la bande passante à 3 dB.

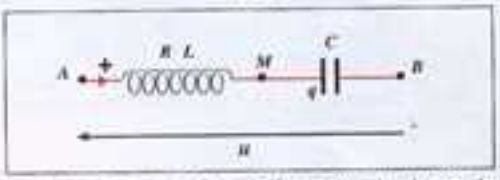
2) Même question pour la bande délimitée par $I = \dfrac{I_0}{2}$. I_0 désignant l'intensité maximale à la résonance.

* Exercice 22

La tension appliquée à un dipôle série constitué par une bobine R, L et un condensateur C est :

$$u = U\sqrt{2}\cos(\omega . t + \varphi).$$

La pulsation est égale à $\dfrac{1}{\sqrt{L . C}}$



La date $t = 0$ est choisie de façon que la charge du condensateur s'exprime par :

$$q = Q_m . \cos(\omega . t).$$

1) Exprimer l'intensité $i(t)$ qui parcourt le dipôle R, L, C, en fonction de Q_m, ω et t.

2) Établir l'expression de $u(t) = u_{AB}$. Quelle est la phase de u par rapport à i?

3) Soient U, U_R et U_C les tensions efficaces aux bornes du dipôle R, L, C, de la bobine et du condensateur. Exprimer le rapport $Q = \dfrac{U_C}{U}$ en fonction de R, L et ω.

4) Calculer les énergies E emmagasinées dans le dipôle R, L, C, E_B et E_C emmagasinées dans la bobine et le condensateur. Montrer que E est constante. La comparer à l'énergie E_J dissipée par effet Joule pendant une période. Exprimer le rapport $\dfrac{E}{E_J}$ en fonction de Q. En déduire une interprétation de Q.

Application numérique : Pour l'ensemble de l'exercice : $R = 10\ \Omega$; $L = 0{,}1$ H; $C = 0{,}5\ \mu$F.

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES DESTINÉS A TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 23 — A.1.a.

Quel est le nom de l'unité qui sert à exprimer l'impédance et la réactance d'un dipôle *R, L, C*?

Exercice 24 — A.1.b.

La fréquence des oscillations électriques est-elle plutôt de l'ordre du kHz ou du Hz?

Exercice 25 — A.1.c.

Pour un dipôle *R, L, C*, en quelle unité du SI s'expriment $\sqrt{L.C}$? $R.C$? $\frac{L}{R}$? $\frac{L.\omega}{R}$? $\frac{1}{R.C.\omega}$? $\frac{R}{Z}$?

Exercice 26 — A.1.c.

Un dipôle *R, L, C* série, dont la résistance est supposée constante et indépendante de la fréquence, est constitué par une bobine d'inductance réglable et d'une capacité réglable. Il est alimenté par une tension sinusoïdale de tension efficace constante et de fréquence réglable. Préciser sur quels facteurs on peut jouer pour augmenter l'impédance du dipôle. (Ne faire varier qu'un seul paramètre à la fois.)

Exercice 27 — A.2.b.

Un dipôle série *R, L, C*, est constitué par une bobine de résistance $R = 400\ \Omega$ et d'inductance $L = 100$ mH, et d'un condensateur de capacité $C = 0{,}1\ \mu$F. Il est alimenté sous une tension $u = 14{,}1 \cos(2 \times 10^4 t)$. Déterminer l'expression de l'intensité instantanée dans le dipôle. Calculer son facteur de puissance et son facteur de qualité.

Exercice 28 — B.2.

Préparer un exposé expliquant à des élèves de la classe de sixième en quoi consiste la bande passante d'un dipôle *R, L, C*.

Exercice 29 — B.3

A la tension alternative $u = U_m.\cos(\omega.t + \varphi)$, on associe le complexe $\underline{U} = U_m.(\cos\varphi + j.\sin\varphi)$, où j désigne $\sqrt{-1}$ (j, et non par i comme en mathématiques pour ne pas confondre avec une intensité instantanée).

1) Quel est le complexe $\underline{I}$ associé à l'intensité $i = I_m.\cos(\omega.t)$.

2) Quels sont les module et argument de l'« impédance complexe » $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$?

3) Quels sont les complexes associés à une capacité pure et à une impédance pure?

4) Représenter les affixes dans le plan complexe. Qu'obtient-on?

Exercice 30 — B.4.

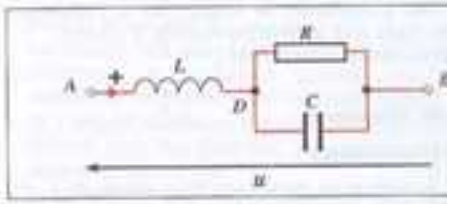
Préparer un montage mettant en évidence d sonore, la résonance d'intensité pour un *R, L, C*, à l'aide d'un haut-parleur.

Exercice 31 — C.1.b.

Pour le dipôle *AB* représenté ci-dessous :

$$u_{DB} = U.\cos(\omega.t)$$

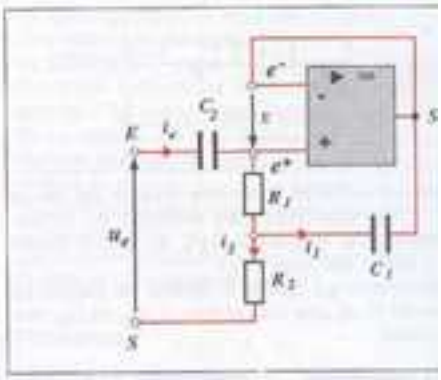
1) Exprimer la tension $u(t) = u_{AB}$ et l'intensité $i(t)$ en fonction de *R, L, C* et ω.



2) A quelle condition $i(t)$ et $u(t)$ ont-ils la phase?

Exercice 32 — C.2.b.

Le montage représenté ci-dessous fait inter amplificateur opérationnel supposé parfait, de densateurs C_1 et C_2, et deux résistors de rés R_1 et R_2. On pose $i_e = \frac{dq}{dt}$.



Pour les applications numériques :

$C_1 = 10\ \mu$F; $C_2 = 1$ pF ; $R_1 = R_2 = 10$ kΩ.

1) En utilisant les lois des nœuds et des maille l'équation différentielle du second ordre, à co constants (à exprimer en fonction des val résistances et des capacités), à laquelle variable φ.

2) Pour quelle pulsation ω_0 et quelle fréquen a-t-il résonance pour l'intensité? Déterminer de qualité Q du montage et sa largeur en f de bande passante à 3 dB.

12 Lentilles minces

1 Caractéristiques des lentilles minces.

2 Objet et image.

3 Position et grandeur de l'image.

4 Vergence d'une lentille.



Différents modèles de lentilles.

Leur invention semble remonter au treizième siècle.
Dès documents de 1301 mentionnent des « vitreos ab oculis ad legendum », et un tableau de cette époque représente un moine étudiant muni de lunettes pincées sur le nez.
Plus près de nous, Galilée, au début du dix-septième siècle, avait assemblé des lentilles et construit la longue vue qui lui permit d'observer les cratères de la Lune et les taches solaires.
Aujourd'hui leur usage est courant : verres correcteurs de la vue, loupes, microscopes, lunettes astronomiques, projecteurs, caméra... Et l'appareil photographique est devenu un objet familier.

1 CARACTÉRISTIQUES DES LENTILLES

1. Lentille mince sphérique. Axe principal. Centre optique

a) Lentille sphérique

Une lentille sphérique est un milieu transparent limité par deux **surfaces sphériques** (fig. 1 *a* et 1 *b*) ou par une surface sphérique et une surface plane (fig. 1 *c*).
Les calottes sphériques, de centres C_1 et C_2, sont caractérisées par leurs rayons de courbure R_1 et R_2.

b) Classification

Les diverses sortes de lentilles sont classées en deux catégories :
— lentilles à **bords minces** (fig. 2 *a*);
— lentilles à **bords épais** (fig. 2 *b*),
selon que l'épaisseur $e = S_1S_2$ de la lentille en son milieu, est supérieure ou inférieure à celle du bord.

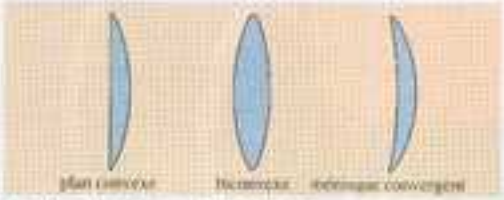


Fig. 2 *a*. *Lentilles à bords minces.*



Fig. 2 *b*. *Lentilles à bords épais.*

c) Axe principal

L'**axe principal** d'une lentille sphérique est la droite passant par les centres C_1 et C_2 ou la droite issue du centre C_2 et perpendiculaire à la face plane (fig. 1). Il est appelé aussi *axe optique*.
C'est un axe de symétrie de révolution de la lentille.

d) Lentille mince

Une lentille est dite **mince**, si l'épaisseur $e = S_1S_2$ mesurée sur l'axe principal, est négligeable par rapport aux dimensions des rayons de courbure de la lentille.

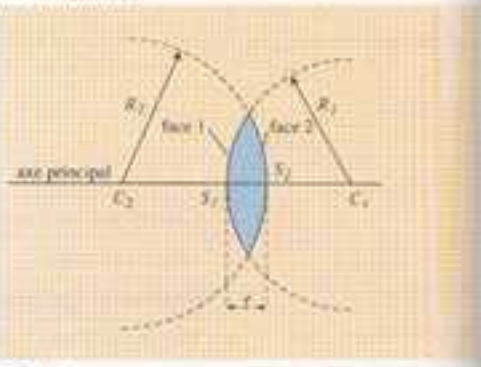


Fig. 1 *a*

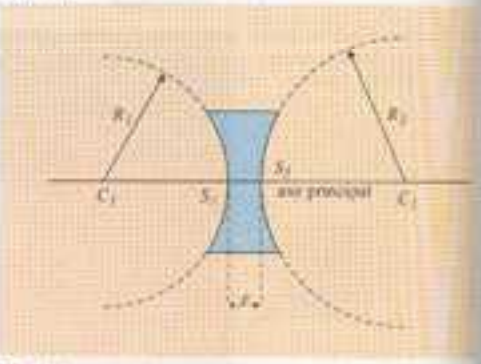


Fig. 1 *b*

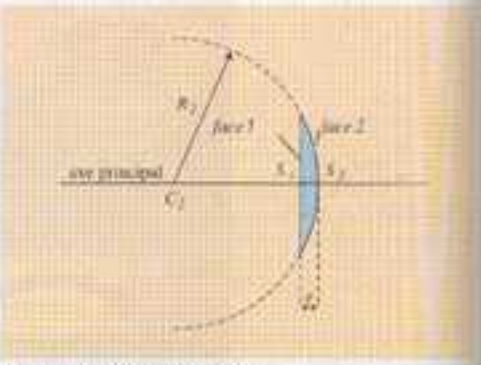


Fig. 1 *c*. ***Lentilles sphériques.***
L'indice 1 est relatif à la face 1.
L'indice 2 est relatif à la face 2.

Dans ce cas les points S_1 et S_2 sont assimilés à un seul point O.
Il en découle la représentation conventionnelle d'une lentille mince :
— les lentilles à bords minces sont schématisées comme l'indique la figure 3 *a*;
— les lentilles à bords épais selon le schéma de la figure 3 *b*.

a) Centre optique

Pour une lentille mince, le point O est appelé **centre optique.** C'est l'intersection de son axe principal avec la lentille mince.
L'expérience montre (fig. 4 *a* et 4 *b*) que **tout rayon lumineux passant par le centre optique n'est pas dévié** et conserve la même support, que la lentille soit à bords épais ou à bords minces, et quelle que soit l'incidence du rayon sur la lentille.
L'étude qui suit ne concernera que les lentilles minces.



Fig. 3. *Schémas conventionnels des lentilles minces.*

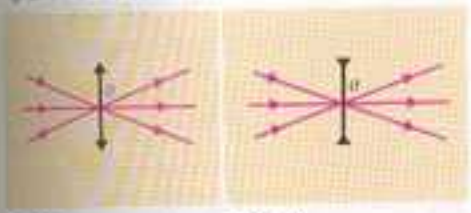


Fig. 4 *a* Fig. 4 *b*

Tout rayon lumineux qui traverse une lentille en passant par son centre optique n'est pas dévié.

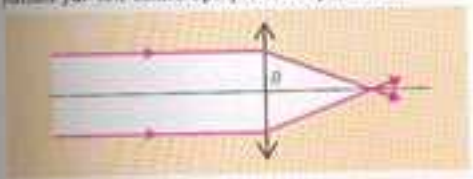


Fig. 5 *a*

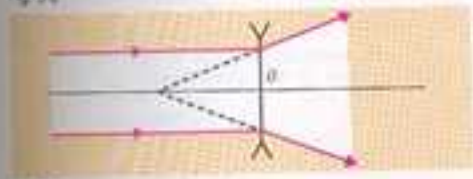


Fig. 5 *b*

Un faisceau de rayons parallèles, ici à l'axe principal, frappe une lentille mince au voisinage de son centre optique, le faisceau qui en sort converge dans le cas d'une lentille à bords minces et diverge pour une lentille à bords épais.

2. Lentilles convergentes et lentilles divergentes

a) Propriétés

Lorsqu'un faisceau de rayons parallèles frappe une lentille mince :
— les rayons sortants convergent si la lentille est à **bords minces** (fig. 5 *a*) : la **lentille** est dite **convergente;**
— les rayons sortants divergent si la lentille est à **bords épais** (fig. 5 *b*) : la **lentille** est dite **divergente.**
C'est sous ces vocables que les lentilles seront classées par la suite.

b) Interprétation de la déviation d'un rayon lumineux

Le raisonnement sera fait sur une lentille plan convexe ou plan concave pour simplifier.

Un rayon lumineux frappant en I une lentille sous un angle d'incidence nul (fig. 6 *a* et 6 *b*) pénètre dans le milieu d'indice de réfraction $n > 1$, sans être dévié (cours de première).
Au point d'émergence I', l'angle d'émergence i que fait le rayon II' avec la normale, n'est plus nul, et le rayon subit une **réfraction** à sa sortie dans l'air, d'indice $n = 1$.

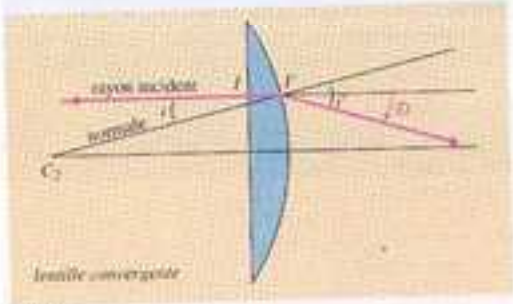


Fig. 6 *a*



Fig. 6 *b*

Pour mieux discerner le cheminement du rayon lumineux à travers la lentille, l'épaisseur de celle-ci a été accusée. La déviation subie par le rayon lumineux est mesurée par l'angle D.
Une lentille convergente rabat le rayon lumineux vers l'axe principal, une lentille divergente l'en éloigne.

L'angle de réfraction i' du rayon émergent satisfait la relation de Descartes :

$$n \cdot \sin i = 1 \cdot \sin i'.$$

Comme $n > 1$, l'angle i' est supérieur à l'angle i, le rayon émergent subit une **déviation,** vers l'axe principal dans le cas d'une lentille convergente, et l'éloignant de l'axe pour une lentille divergente.
Ce raisonnement se généralise à deux calottes sphériques.

3. Foyers principaux. Distance focale

a) Foyer principal image

Un ensemble de rayons lumineux parallèles à l'axe principal, et qui traverse une lentille convergente, se concentre à la sortie en un point F' de l'axe principal (fig. 7 *a*).
Ce point est appelé **foyer principal image.**
Il est **réel** puisque les rayons lumineux émergents passent par ce point.
Dans le cas d'une lentille divergente (fig. 7 *b*), les rayons émergents divergent et leurs prolongements semblent provenir d'un point F' appelé encore **foyer principal image,** mais cette fois il est **virtuel** parce que la lumière n'y passe pas réellement.
Cette propriété est vérifiée pour les deux types de lentilles, quelle que soit la face d'entrée de la lumière.

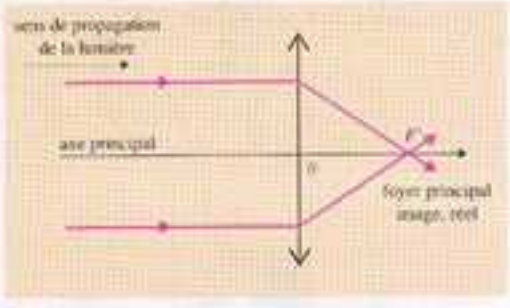


Fig. 7 *a*

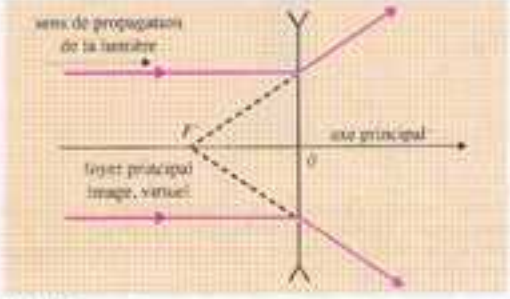


Fig. 7 *b*

b) Foyer principal objet

De même, il existe un point F, sur l'axe principal, tel que tout rayon incident passant par F émerge de la lentille parallèlement à son axe principal. Ce point F est appelé **foyer principal objet.** Il est réel (fig. 8 *a*) si la lentille est convergente, il est virtuel (fig. 8 *b*) si la lentille est divergente.

c) Distance focale

L'expérience montre que les distances $d(O, F)$ et $d(O, F')$ sont égales.
On appelle distance focale f**, la grandeur** $\overline{OF'}$ dans le repère $(O, \vec{i})$ (fig. 9) où O, l'origine, est confondue avec le centre optique de la lentille et $\vec{i}$ est sur l'axe principal dans le sens de propagation de la lumière.

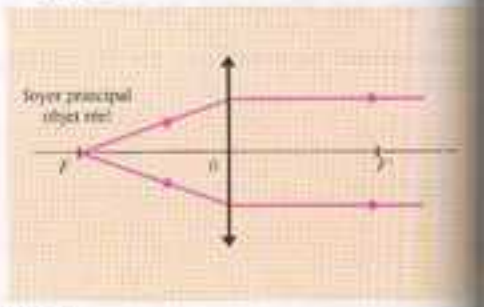


Fig. 8 *a*

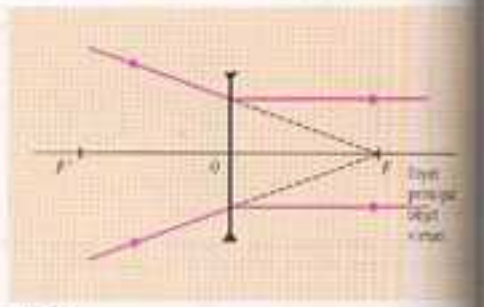


Fig. 8 *b*

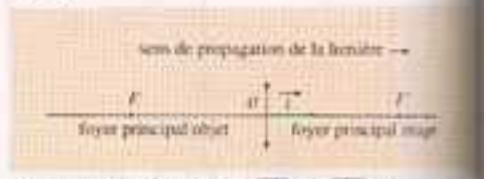


Fig. 9 *a. Distance focale :* $\overline{OF'} = -\overline{OF} = f$*;* $f > 0$*, pour une lentille convergente.*



Fig. 9 *b. Distance focale :* $\overline{OF'} = -\overline{OF} = f$*;* $f < 0$*, pour une lentille divergente.*

e signe de la grandeur $\overline{OF'}$ dépend des deux ypes de lentilles :

$\overline{OF'} > 0$ **si la lentille est convergente** (fig. 9 *a*),

$\overline{OF'} < 0$ **si la lentille est divergente** (fig. 9 *b*).

i la lumière se propage dans l'autre sens, ou i on permute les faces de la lentille, on retrouve es mêmes résultats.

Dans les systèmes optiques, la distance focale eut varier de quelques millimètres à quelques nètres (fig. 10).

4. Plans focaux

a) *Plan focal image*

Un faisceau de rayons parallèles inclinés sur l'axe principal d'une lentille mince convergente (fig. 11 *a*), en émerge, en convergeant en un point F'_1, appelé *foyer secondaire image*, distinct du point F'.

Aux différentes incidences i, de faibles valeurs, correspondent des foyers secondaires images différents, et l'ensemble de ces foyers est situé dans un plan appelé **plan focal image**.

Ce plan est perpendiculaire en F' à l'axe principal de la lentille.

Pour une lentille convergente le plan focal image est réel, et pour une lentille divergente il est virtuel (fig. 11 *b*).

b) *Plan focal objet*

Il existe également un plan focal objet (fig. 12 *a* et 12 *b*).

Des rayons lumineux issus d'un point F_1 de ce plan émergent de la lentille parallèlement à la droite F_1O.

Le point F_1 est appelé *foyer secondaire objet*.

Tous les foyers secondaires objet sont dans le **plan focal objet** qui est perpendiculaire en F à l'axe principal de la lentille.

Ce plan focal objet est réel pour une lentille convergente et virtuel pour une lentille divergente.

Les deux plans focaux objet et image sont symétriques par rapport au plan de la lentille mince.



Fig. 10. *L'objectif d'un microscope a une distance focale de quelques millimètres.*
L'objectif d'une lunette astronomique peut avoir une distance focale de plusieurs mètres.

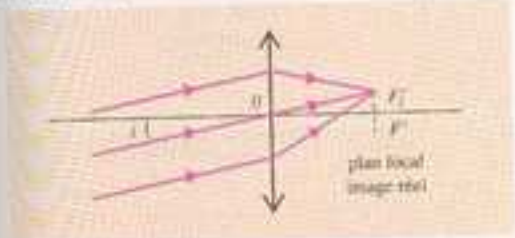


Fig. 11 *a*. *Lentille convergente.*

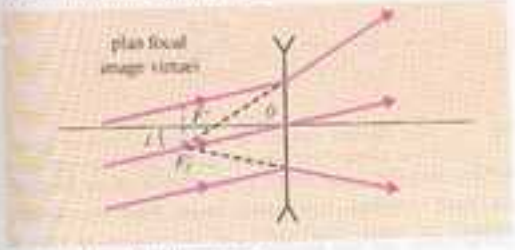


Fig. 11 *b*. *Lentille divergente.*

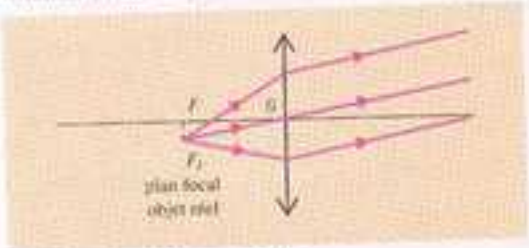


Fig. 12 *a*. *Lentille convergente.*

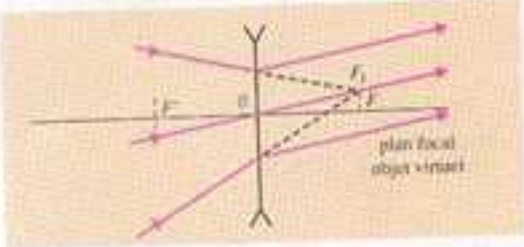


Fig. 12 *b*. *Lentille divergente.*

2 OBJET ET IMAGE

1. Mise en évidence expérimentale

Une petite lampe, considérée comme ponctuelle, placée en A, envoie des rayons lumineux sur une lentille convergente L (fig. 13). Les rayons sortant de la lentille convergent tous en un point A'. Le point A est appelé **point objet** et le point A' son **point image.**

La position du point A' dépend de celle du point A. Par rapport à la lentille, *les points A et A' sont dits conjugués.*

2. Réalité et virtualité

a) Image réelle, image virtuelle

L'image A' (fig. 14) peut être recueillie sur un écran placé en A' : on dit alors que A' est une **image réelle.**

Une image est réelle si tous les rayons sortant de la lentille passent réellement par le point de convergence.

Par contre dans l'exemple de la figure 15, l'image du point A ne peut être recueillie sur un écran placé en A', car aucune lumière n'y arrive. Mais, un observateur placé en O_1, voit à travers la lentille le point lumineux comme s'il était en A' : on dit alors que A' est une **image virtuelle.**

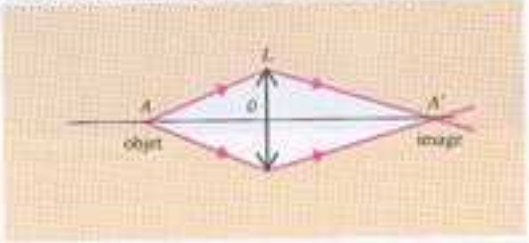


Fig. 13

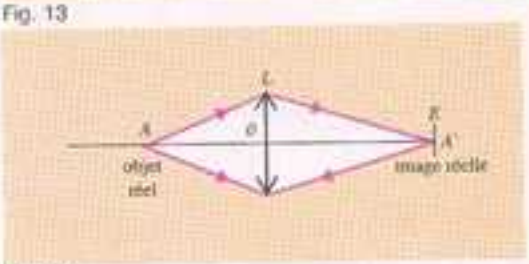


Fig. 14

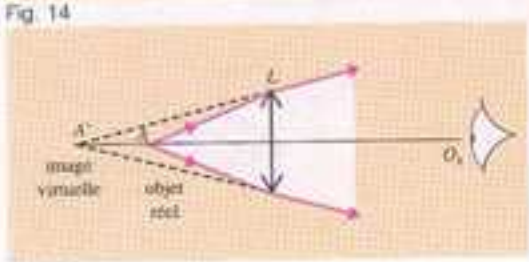


Fig. 15

Une image est virtuelle si les rayons sortant de la lentille ne passent pas réellement par le point de convergence de leurs supports.

Le fait que l'image A' soit réelle ou virtuelle dépend de la position de l'objet A par rapport à la lentille.

b) Objet réel, objet virtuel

• Dans les exemples précédents le point A était qualifié d'**objet réel** (fig. 13, 14, 15).

Ce point peut être la source lumineuse ponctuelle précédente (lampe) ou bien être le point réel de convergence des rayons sortant d'une autre lentille λ, elle-même éclairée par une source lumineuse (fig. 16).

• Par contre, dans l'exemple de la figure 17, une lentille λ, donne encore un faisceau convergent en A, mais la deuxième lentille L est placée entre λ et le point A. Elle fait converger les rayons en A', image de A à travers la lentille λ.

Le point A est appelé **objet virtuel** et A' son image réelle.

La figure 18 illustre ceci.

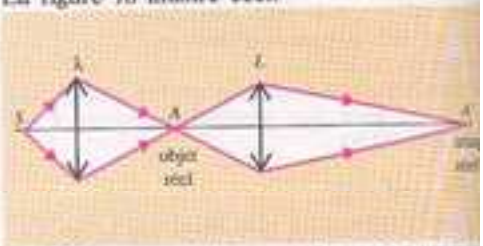


Fig. 16. *Au cours de la propagation de la lumière, le point A est image réelle de S dans λ, et il devient objet réel vis-à-vis de la lentille L.*

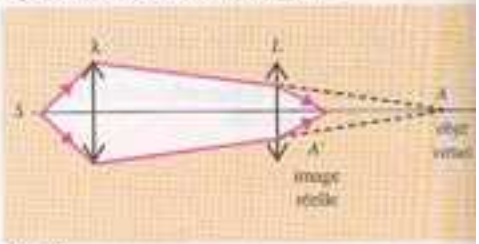


Fig. 17

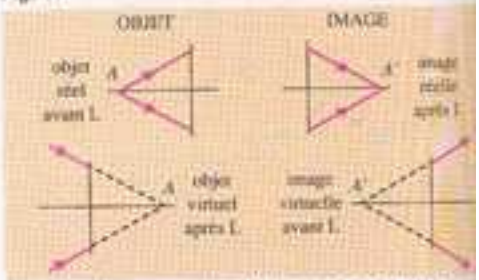


Fig. 18. *Un moyen simple de savoir si objet et image sont réel ou virtuel est de les situer par rapport à la lentille dans le sens de la propagation de la lumière. Le trait vertical représente aussi bien une lentille convergente qu'une lentille divergente.*

1. Construction de l'image donnée par une lentille mince

a) *Objet ponctuel hors de l'axe*

La construction de l'image B', d'un objet ponctuel B, situé hors de l'axe principal d'une lentille convergente L (fig. 19), est obtenue en traçant la marche de **deux rayons** issus de B choisis parmi les trois cas particuliers connus :
– le rayon passant par le centre optique O de la lentille et qui n'est pas dévié;
– le rayon passant par le foyer principal objet F et qui ressort de la lentille parallèlement à son axe principal;
– le rayon parallèle à l'axe principal de la lentille et qui ressort en passant par son foyer principal image F'.
Le point B' est à l'intersection de ces rayons émergents.
Dans le cas le plus simple, où B et B' sont réels, tous les rayons issus du point objet B et pénétrant dans la lentille, en ressortent en convergeant au point B' image de B (fig. 20).
D'autres cas moins simples seront rencontrés au fil du cours et des exercices; à chaque fois le lecteur est invité à construire la marche du faisceau lumineux correspondant.

b) *Objet étendu dans un plan de front*

Un objet AB placé perpendiculairement à l'axe principal d'une lentille est dit dans un **plan de front.** Le point A est par exemple situé sur l'axe principal.

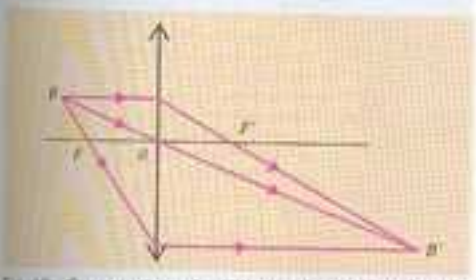


Fig. 19. *Construction de l'image ponctuelle B' de l'objet ponctuel B donnée par la lentille L. Ici l'objet est réel et l'image aussi.*

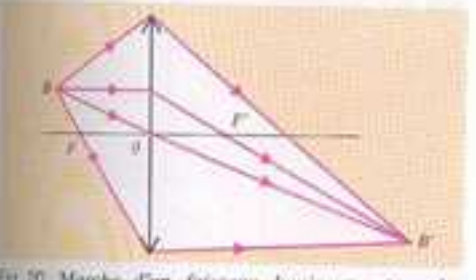


Fig. 20. *Marche d'un faisceau lumineux : tous les rayons issus de B et pénétrant dans la lentille convergent en B'.*

Dans la suite on se limitera au cas d'objet toujours placé dans un plan de front.
Dans l'expérience de la figure 21, une lentille donne d'un objet (la flèche), une image réelle recueillie sur l'écran.

La construction de l'image $A'B'$, de l'objet AB, est obtenue en traçant d'abord l'image B' de B, comme précédemment, puis en abaissant la perpendiculaire issue de B' sur l'axe principal. L'image A' de A est la projection de B' sur cet axe (fig. 22).

A titre d'exercice, la figure 23, donne la construction de l'image virtuelle $A'B'$, de l'objet réel AB, obtenue avec une lentille divergente, ainsi que la marche du faisceau lumineux.
Par convention, une image virtuelle ou un objet virtuel est représenté en pointillés.

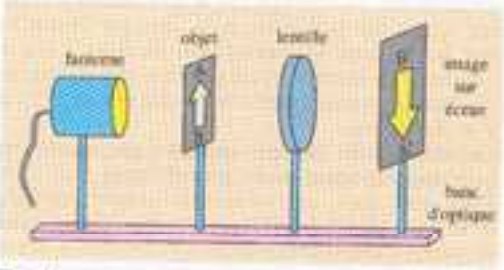


Fig. 21

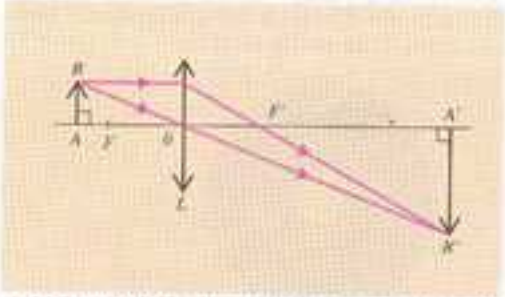


Fig. 22. *La lentille convergente L donne de l'objet AB situé dans un plan de front l'image $A'B'$ dans le plan de front conjugué.*

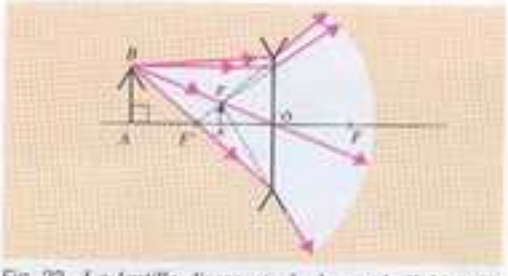


Fig. 23. *La lentille divergente L donne de l'objet AB réel, l'image $A'B'$ virtuelle.*

4. Obtention d'une bonne image

Une image est dite bonne si elle est *nette*, *non déformée* et *non irisée*.

a) Difficultés expérimentales

• Une lentille convergente donne d'une grille fortement éclairée par une lanterne, une image sur un écran.

Si un large faisceau lumineux pénètre dans la lentille de grand diamètre (on dit grande ouverture), l'image ne peut être obtenue nette. Mais en installant devant la lentille un **diaphragme** (fig. 24) (écran muni d'une ouverture circulaire), qui ne découvre que la partie centrale de la lentille au voisinage de son centre optique, l'image obtenue est nette, mais moins lumineuse (fig. 25).

Le diamètre d de la partie non obturée de la lentille est appelé **diamètre d'ouverture.**

• L'expérience, reprise dans les mêmes conditions, mais avec un objet de grandes dimensions, ne conduit pas à une bonne image, car elle n'est pas nette à la fois au centre et aux bords dans un même plan de front : il y a *courbure de champ;* et de plus des déformations de l'image peuvent apparaître (fig. 26 et 27) : il y a *distorsion.*

Ces défauts de l'image, apportés par la lentille, sont appelés **aberrations géométriques.**

Elles sont dues au fait que la convergence de la lentille est plus forte sur ses bords que dans sa partie centrale (fig. 28).

Une lentille divergente apporte également des aberrations à l'image qu'elle donne d'un objet par suite de l'inégalité de la divergence entre ses bords et sa partie centrale.

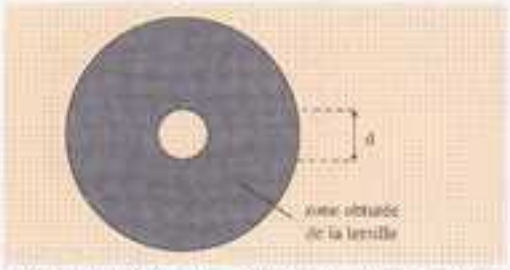


Fig. 24. *Diaphragme : écran muni d'une ouverture circulaire, de diamètre d'ouverture d.*

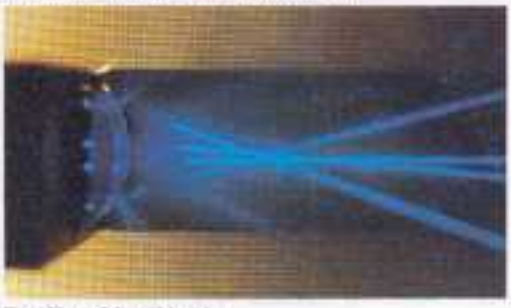


Fig. 28 a. *L'expérience.*



Fig. 25. *Image nette de la partie centrale de la grille*

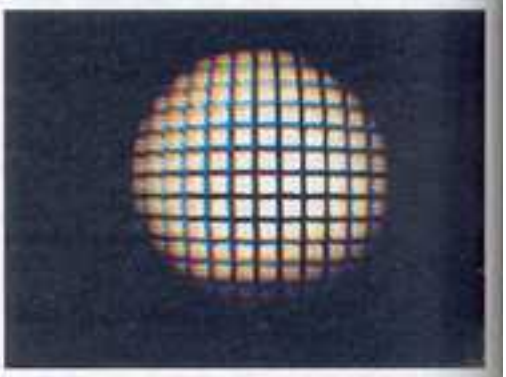


Fig. 26. *Déformation de l'image de la grille : distorsion en « barillet ».*

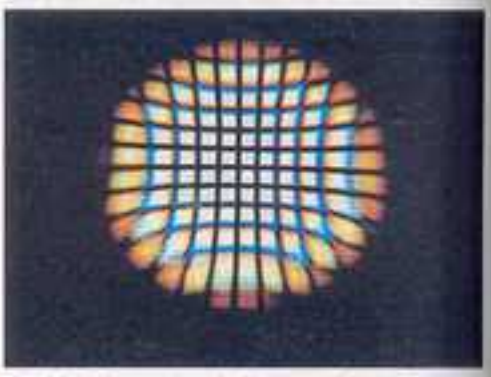
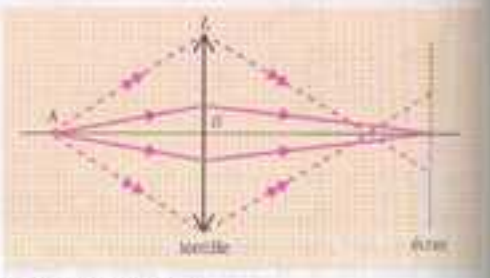


Fig. 27. *Déformation de l'image de la grille : distorsion en « coussinet ».*



b. *Sa schématisation.*

b) Conditions de Gauss

L'expérience vient de montrer que c'est la largeur et l'orientation des faisceaux lumineux à travers la lentille, qui influent sur la qualité de l'image.

Mais en appliquant les conditions énoncées par Gauss la qualité de l'image peut être satisfaisante.

Le faisceau incident doit frapper la lentille au voisinage de son centre optique.

L'angle des rayons incidents avec l'axe principal de la lentille doit être faible.

Pour satisfaire ces conditions il faut donc :
— des systèmes optiques centrés de **faible ouverture** ou **diaphragmés** (fig. 29);
— des objets plans de **faible étendue**, situés dans un plan perpendiculaire à l'axe principal de la lentille et **centrés sur cet axe.**

c) Une autre aberration

Enfin l'image peut présenter des irisations dues à la *dispersion* de la lumière dans la lentille (fig. 30), ce phénomène sera étudié au chapitre 14. Ces aberrations dites **chromatiques** peuvent être corrigées.

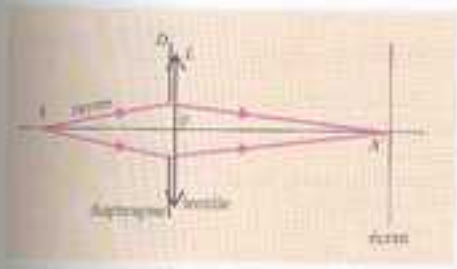


Fig. 29. Le diaphragme permet d'obtenir sur l'écran une image nette si l'objet est sur ou près de l'axe et si les rayons incidents sont peu inclinés sur l'axe.

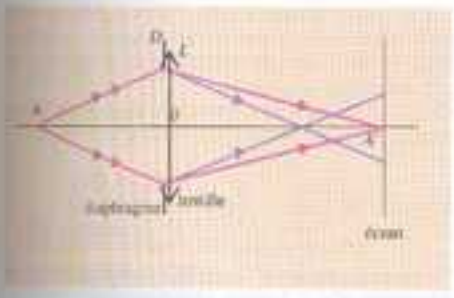


Fig. 30. L'image obtenue sur l'écran est bordée de violet.

3 POSITION ET GRANDEUR DE L'IMAGE

Une lentille mince convergente L, de distance focale f, donne de l'objet AB une image $A'B'$ (fig. 31).

Soit le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tel que l'origine soit au centre optique de la lentille et $\vec{i}$ selon son axe principal dans le sens de la propagation de la lumière.

1. Relation de grandissement

Le grandissement γ est donné par le quotient :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \gamma$$

Les deux grandeurs du quotient sont exprimées dans la même unité de longueur, par suite, γ n'a pas d'unité.

γ est *positif* si l'image est *droite* par rapport à l'objet;

γ est *négatif* si l'image est *renversée* par rapport à l'objet.

La relation de grandissement est obtenue en considérant les deux triangles rectangles semblables OAB et $OA'B'$ (fig. 31) :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

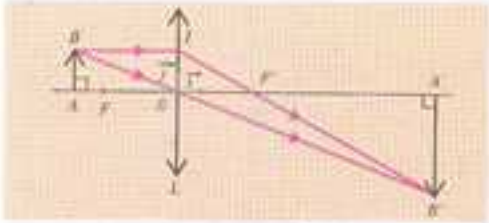


Fig. 31. *Ici le grandissement* $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ *est négatif.*

2. Relation de conjugaison

En considérant les deux triangles rectangles semblables $F'OI$ et $F'A'B'$ et en remarquant que $OI = AB$ il vient :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

$$= \frac{\overline{F'O} + \overline{OA'}}{\overline{F'O}}$$

$$= 1 + \frac{\overline{OA'}}{\overline{F'O}}.$$

En tenant compte de la relation de grandissement, $\gamma = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$, et en écrivant $\overline{F'O} = -\overline{OF'}$ on obtient :

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = 1 - \frac{\overline{OA'}}{\overline{OF'}}.$$

En divisant par $\overline{OA'}$ il vient :

$$\frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OF'}}$$

soit :

$$\boxed{-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}}}$$

Ces trois grandeurs sont exprimées dans la même unité de longueur, le mètre (m).
Avec l'orientation $O, \vec{i}$ choisie :
$\overline{OA'}$ est *positif* si l'image est *réelle*,
négatif si elle est *virtuelle*.
$\overline{OA}$ est *négatif* si l'objet est *réel*,
positif s'il est *virtuel*.

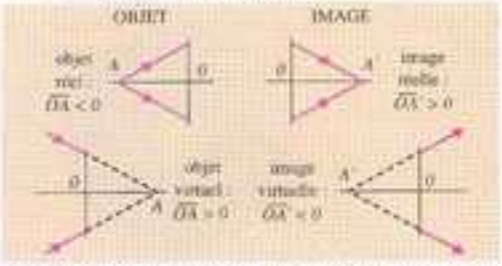


Fig. 32. *Le trait vertical est une lentille mince convergente ou divergente* | = ↕ *ou* ↕

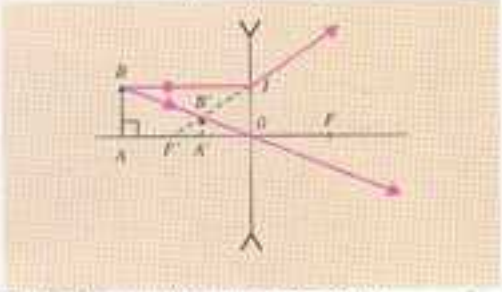


Fig. 33. *Le grandissement est ici positif.*

Remarque :
Le tableau (fig. 32) est la forme algébrisée du précédent tableau (fig. 18).
Le lecteur est invité à vérifier ces relations dans le cas de l'image donnée par une lentille divergente et dont la construction est réalisée à la figure 33, à s'exercer à résoudre quelques exercices pour se familiariser avec ces conventions et à consulter l'exercice résolu n° 1.

4 VERGENCE D'UNE LENTILLE

1. Définition

La relation de conjugaison fait apparaître l'inverse de la distance focale.
Cette grandeur est nommée **vergence** et symbolisée par C.

$$\boxed{C = \frac{1}{\overline{OF'}}}$$

distance focale en mètre (m)
vergence en dioptrie (δ)

Son signe est celui de la distance focale donc,
$C > 0$ si la lentille est *convergente* et
$C < 0$ si la lentille est *divergente*.
Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs de C pour des systèmes optiques courants.

Système optique	Distance focale (m)	Vergence (δ)
Objectif de microscope	5×10^{-3}	200
Verre correcteur de la vue (myopie)	-2	$-0{,}5$
Loupe	4×10^{-2}	25
Objectif de lunette astronomique	10	0,1

2. Expression de la vergence

La vergence d'une lentille mince sphérique peut être déterminée à partir des rayons de courbure $\overline{OC_1}$ et $\overline{OC_2}$ de ses faces, et de l'indice n de réfraction de son verre.
On montre que son expression, dans le cas d'une lentille plongée dans l'air (indice $n = 1$) est :

$$C = (n-1).\left(\frac{1}{\overline{OC_1}} - \frac{1}{\overline{OC_2}}\right)$$

OC_1 et OC_2 en mètre (m)
C en dioptrie (δ)

l'exercice résolu n° 3 établit l'expression de la vergence d'une lentille plan-convexe.
Les figures 34 *a*, *b*, *c* donnent trois exemples d'application numérique de cette relation.

3. Vergence d'un système de lentilles minces accolées

Considérons le système de deux lentilles minces accolées L_1, L_2, de vergences C_1 et C_2 et d'axes principaux confondus, elles sont dites *coaxiales* (fig. 35).

Elles ont *même* centre optique O.

Le système optique a une vergence C, qui peut se calculer de la façon suivante :

La lentille L_1, donne d'un objet A à l'infini sur son axe principal, une image A', situé au foyer principal F_1' puisque :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OF_1'}} = \frac{1}{\overline{OF_1'}}$$

avec $\overline{OA} = \infty$.

Le point A' est objet virtuel pour la lentille L_2, qui en donne l'image A'', telle que :

$$\frac{1}{\overline{OA''}} = \frac{1}{\overline{OA'}} + \frac{1}{\overline{OF_2'}}$$

$$\frac{1}{\overline{OA''}} = \frac{1}{\overline{OF_1'}} + \frac{1}{\overline{OF_2'}},$$

Mais A'' peut être considéré comme l'image du point A à l'infini donnée par le système optique des deux lentilles accolées donc, A'' est situé au foyer F'' du système :

$$\frac{1}{\overline{OF''}} = \frac{1}{\overline{OF_1'}} + \frac{1}{\overline{OF_2'}}$$

$$C = C_1 + C_2,$$

Ce résultat se généralise à n lentilles minces accolées, d'où le **théorème des vergences :**

> La vergence d'un système de lentilles minces coaxiales et accolées est égale à la somme algébrique des vergences des lentilles composantes.

$$C = \sum_{i=1}^{i=n} C_i$$

Le système optique obtenu peut être :
— convergent : $C > 0$,
— divergent : $C < 0$,
— équivalent à une lame à faces parallèles, telle une vitre : $C = 0$.

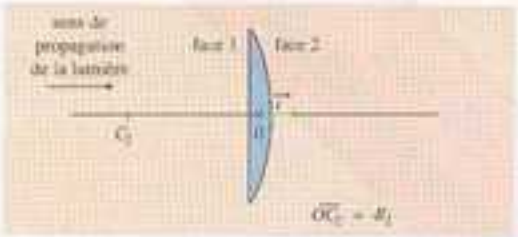


Fig. 34 a. *Une lentille mince plan convexe de rayon de courbure $R = 50$ cm et d'indice $n = 1,5$ a une vergence : $C = (1,5-1)\times\left(0-\frac{1}{-0,5}\right) = 1$ δ, et une distance focale $f = 1$ m.*

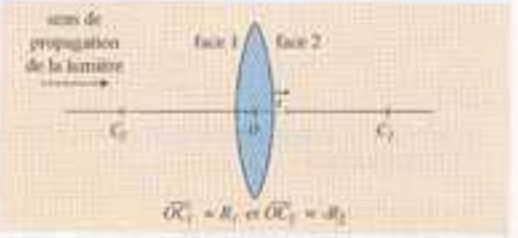


Fig. 34 b. *Une lentille mince biconvexe de rayons de courbure $R_1 = R_2 = 50$ cm et d'indice $n = 1,5$ a une vergence $C = (1,5-1)\times\left(\frac{1}{0,5}+\frac{1}{0,5}\right) = 2$ δ et une distance focale $f = 0,5$ m.*

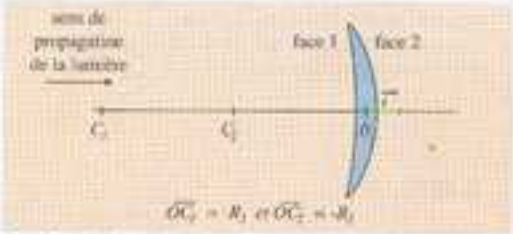


Fig. 34 c. *Une lentille mince ménisque convergent de rayons de courbure $R_1 = 20$ cm et $R = 10$ cm et d'indice $n = 1,5$ a une vergence :*

$$C = (1,5-1)\times\left(\frac{-1}{0,2}+\frac{1}{0,1}\right) = 2,55$$

et une distance focale $f = 0,4$ m.

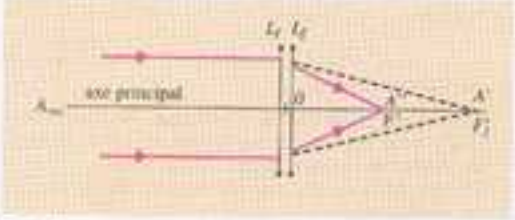


Fig. 35

Fiche expérimentale

VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DE LA RELATION DE CONJUGAISON

1) EXPÉRIENCES

Un objet plan AB, est placé devant une lentille mince convergente de distance focale f. Celle-ci en donne une image $A'B'$, recueillie sur un écran. Rechercher l'image la plus nette possible et mesurer avec soin la distance objet-lentille : p et la distance image-lentille : p' (fig. 36).

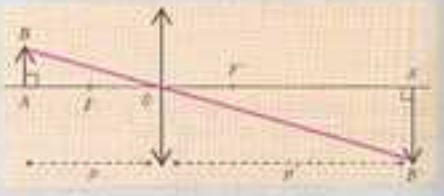


Fig. 36.

Donner à p différentes valeurs et mesurer les valeurs correspondantes de p'. Dresser un tableau des mesures obtenues.

p	
p'	

2) RÉSULTATS

a) Principe

Dans la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

noter : $-\overline{OA} = p$, $\overline{OA'} = p'$, et $\overline{OF'} = -\overline{Of} = f$.

En utilisant la relation de conjugaison et le graphique (fig. 37), où les valeurs d'un couple p et p' sont portées sur les axes, démontrer que $y = f$, donc que le point M a pour coordonnées f et f.

b) Construction

Construire alors sur le graphique les segments $[CC']$ pour toutes les valeurs p et p' du tableau et vérifier qu'ils sont concourants en M.
On en déduit ainsi une vérification de la relation de conjugaison.

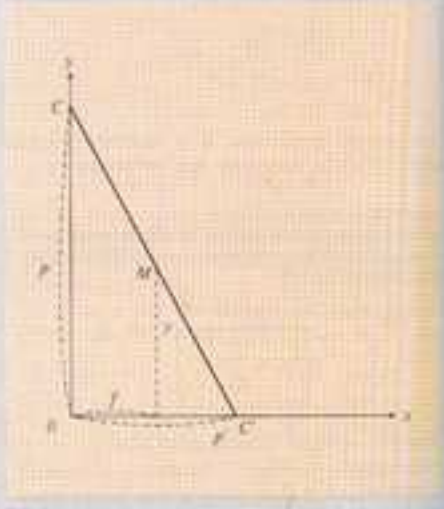


Fig. 37

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

- Définir l'axe principal d'une lentille sphérique mince et son centre optique.

- Connaître les propriétés du centre optique, du foyer principal image, du foyer principal objet d'une lentille mince.

- Définir la distance focale d'une lentille $\overline{OF'} = f$ et distinguer lentille convergente $f > 0$ et divergente $f < 0$.

- S'exercer à construire l'image donnée par une lentille mince, d'un objet, et à distinguer leur nature réelle ou virtuelle.

- Connaître les conditions de Gauss qui permettent d'obtenir avec une lentille une image satisfaisante d'un objet.

- Appliquer les relations de grandissement :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

et de conjugaison :

$$-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}}.$$

- Retenir la définition de la vergence :

$$C = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

et son unité la dioptrie (δ).

- Appliquer le théorème des vergences à l'association de plusieurs lentilles minces accolées : $C = \sum_{i}^{n} C_i$.

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

Un timbre poste est observé à travers une lentille convergente de distance focale 8 cm, faisant office de **loupe.** Le timbre de dimensions (3 cm × 2 cm) est situé à 6 cm de la lentille supposée mince.

1) Déterminer les caractéristiques de l'image : position, nature, grandeur et sens par rapport à l'objet.

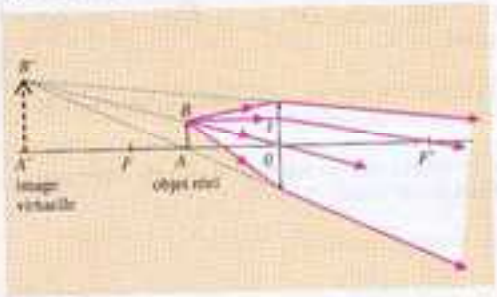
2) Tracer la marche du faisceau lumineux issu d'un point de l'objet et pénétrant dans la lentille de diamètre d'ouverture $d = 4$ cm.

SOLUTION

1) Caractéristiques de l'image

La distance focale $\overline{OF'} = f = 8$ cm, et la distance lentille-objet $\overline{OA} = -6$ cm puisque l'objet réel est placé *avant* la lentille.

La construction de l'image B' du point B de l'objet est obtenue avec deux rayons : BO passant par le centre optique O, et BI parallèle à l'axe principal et passant ensuite par F' foyer principal image; les supports des rayons émergeant de la lentille convergent en B'.



De la relation de conjugaison on tire la position et la nature de l'image :

$$\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

Soit :
$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}} + \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{24}$$

$$\overline{OA'} = -24 \text{ cm}$$

donc **l'image est virtuelle,** puisque $\overline{OA'}$ est négatif, et elle est située à **24 cm avant la lentille.**

De la relation de grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

il vient :
$$\gamma = \frac{-24}{-6} = 4.$$

Le grandissement est positif donc **l'image** du timbre est **droite** par rapport à l'objet, et elle est **quatre fois plus grande** que l'objet soit (12 cm × 8 cm).

2) La marche du faisceau lumineux issu du point B et pénétrant dans la lentille est tracée en couleur.

Pour voir l'objet agrandi à travers la lentille, l'observateur place son œil dans le faisceau lumineux émergent de la lentille.

EXERCICE 2

Un timbre poste est observé à travers une lentille de vergence -4δ.

1) Montrer que cette lentille donne toujours d'un objet réel une image virtuelle.

2) Construire l'image $A'B'$ de l'objet AB.

3) Où situer l'objet par rapport à la lentille pour que l'image qu'elle en donne ait le grandissement 0,5 ?

SOLUTION

1) L'image est virtuelle

De la relation de conjugaison : $\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$

il vient : $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}} + \frac{1}{\overline{OA}}$

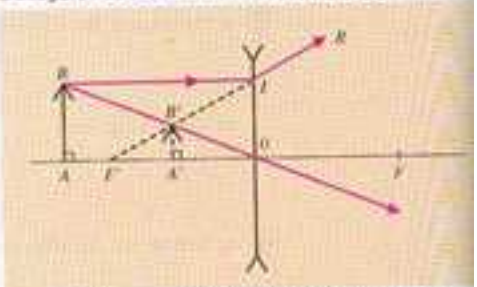
Or, $\frac{1}{\overline{OF'}} = C = -4$ et l'objet est réel, donc $\overline{OA} < 0$, par suite $\frac{1}{\overline{OA'}} < 0$, $\overline{OA'}$ est toujours négatif donc l'image est virtuelle.

Une lentille divergente donne toujours d'un objet réel une image virtuelle.

2) Construction de l'image

Du point objet B hors de l'axe, on construit deux rayons particuliers : BO qui passe par le centre optique et n'est pas dévié, et BI parallèle à l'axe principal. Le rayon IR émerge de la lentille en divergent, et son prolongement passe par F'.

L'image B' de B est à l'intersection de BO et de $F'I$.



***A'B'* est l'image virtuelle de l'objet réel *AB*.**

3) Situation de l'objet

Le grandissement est : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$

De la relation de grandissement $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

on tire : $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{1}{2}$ soit $\overline{OA'} = \frac{\overline{OA}}{2}$

En reportant dans la relation de conjugaison il vient :

$$\frac{2}{\overline{OA}} = -4 + \frac{1}{\overline{OA}} \quad \text{soit :} \quad \overline{OA} = -25 \text{ cm}$$

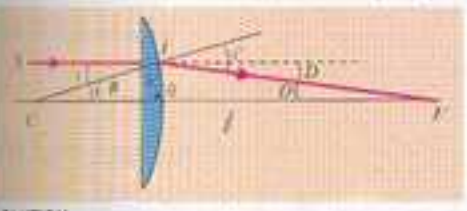
donc l'objet AB est situé dans le plan focal image de la lentille divergente.

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 3

Montrer que l'expression de la vergence d'une lentille mince plan convexe, de rayon de courbure R, et d'indice n, est donnée par : $C = (n-1)\cdot\frac{1}{R}$.

On considérera le rayon SI parallèle à l'axe principal de la lentille, à la distance h de celui-ci, qui pénètre par sa face plane et se réfracte par sa face sphérique.



SOLUTION

Le rayon lumineux SI pénètre dans la lentille d'indice n et subit une réfraction en I. La relation entre les angles d'incidence i et de réfraction i' est :

$$n \cdot \sin i = 1 \cdot \sin i'$$

Comme ces angles sont petits : $n \cdot i = i'$.

La déviation du rayon lumineux après sa traversée de la lentille est :

$$D = i' - i = n \cdot i - i = i \cdot (n-1) \qquad (1)$$

Le rayon lumineux SI est parallèle à l'axe principal à la distance h de celui-ci et il se réfracte en passant par le foyer principal image F'.

Dans le triangle OIF', $\tan D \approx \frac{h}{f'} = D$ (petit angle).

Dans le triangle CIO, $\tan i \approx \frac{h}{R} = i$.

et d'après (1) $\frac{h}{f'} = \frac{h}{R} \cdot (n-1)$,

en divisant par h il vient : $\boldsymbol{C = (n-1)\cdot\frac{1}{R}}$.

EXERCICE 4

1) Sachant que le diamètre apparent d'un objet de dimension $AB = d$, est l'angle α, sous lequel il est vu par un observateur à la distance D de l'objet, calculer le diamètre apparent de la Lune vue depuis la Terre.
Données : Diamètre de la Lune $d = 3{,}45 \times 10^3$ km; distance Terre-Lune $D = 3{,}8 \times 10^5$ km.

2) Ce corps céleste est maintenant observé à travers une **lunette astronomique.** Celle-ci est constituée d'une lentille convergente L_1 de grande distance focale f_1' (appelée objectif) et d'une lentille L_2 convergente de plus petite distance focale f_2' servant de loupe (appelée oculaire). Les deux lentilles sont coaxiales. L'image donnée par la lunette est située à l'infini.

a) Déterminer l'image A_1B_1 donnée par l'objectif, puis sa position par rapport à l'oculaire.

b) Calculer le diamètre apparent α' sous lequel est vue la Lune par l'observateur et comparer α' au diamètre apparent de la Lune à « l'œil nu ».
Données : $f_1' = 5$ m et $f_2' = 10$ cm.

SOLUTION

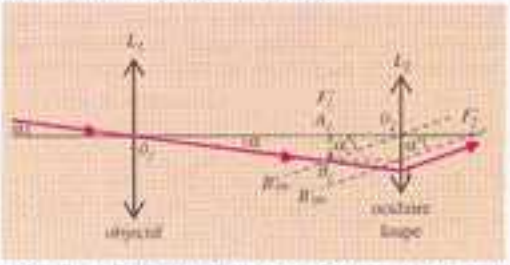
1) Diamètre apparent de la Lune

Il est donné par l'expression : $\tan \alpha = \frac{d}{D}$.

Si α est petit, $\tan \alpha \approx \alpha$ (en rad) d'où :

$$\alpha = \frac{d}{D} = \frac{3{,}45 \times 10^3}{3{,}8 \times 10^5} = \mathbf{0{,}009\ rad = 31'.}$$

2) a) Détermination de l'image A_1B_1



L'objectif (lentille L_1), donne de l'objet réel AB, situé à l'infini ($\overline{O_1A} = -3{,}8 \times 10^5$ km), une image réelle renversée A_1B_1, située dans son plan focal image ($\overline{O_1A_1} = \overline{O_1F_1'} = 5$ m) et si la lunette pointe le corps céleste AB de telle sorte que le point A soit sur l'axe principal de l'objectif, l'image A_1 du point A est sur l'axe principal.
La grandeur de cette image ne peut être déterminée à partir de la relation de grandissement, puisque $\overline{O_1A}$ est infini, mais elle est obtenue dans le triangle rectangle $O_1A_1B_1$:

$$\tan \alpha = \frac{A_1B_1}{O_1F_1'} = \frac{A_1B_1}{f_1'},$$

d'où : $A_1B_1 = f_1' \cdot \tan \alpha$. Or α étant petit, $\tan \alpha \approx \alpha$ et,

$$A_1B_1 = f_1' \cdot \alpha = \mathbf{4{,}5\ cm.}$$

Pour l'oculaire (lentille L_2), A_1B_1 situé avant la lentille L_2, est un objet réel.
Cette lentille en donne une image $A'B'$ à l'infini.
Par conséquent l'objet A_1B_1 est situé dans le plan focal objet de la lentille L_2 soit : $\boldsymbol{-\overline{O_2A_1} = \overline{O_2F_2'}}$.

b) Diamètre apparent de la Lune vue à travers la lunette

Le diamètre apparent de l'image correspond à l'angle α'.
Il peut être déterminé dans le triangle rectangle $O_2F_2'J$ ou $O_2A_1B_1$ puisque $A'B'$ est l'image vue par l'observateur et que les angles $\widehat{O_2F_2'J} = \widehat{A_1O_2B_1} = \alpha'$:

$$\tan \alpha' = \frac{A_1B_1}{O_2F_2'} = \frac{A_1B_1}{f_2'}$$

$$\tan \alpha' = \frac{f_1' \cdot \tan \alpha}{f_2'} = \frac{5 \times 0{,}009}{0{,}10} = 0{,}45, \quad \boldsymbol{\alpha' = 24°.}$$

La comparaison des angles α et α' donne :

$$\frac{\tan \alpha'}{\tan \alpha} = \frac{f_1'}{f_2'} = \frac{5}{0{,}1} = 50$$

Ce quotient est appelé *grossissement* de la lunette astronomique.

2. EXERCICES PROPOSES

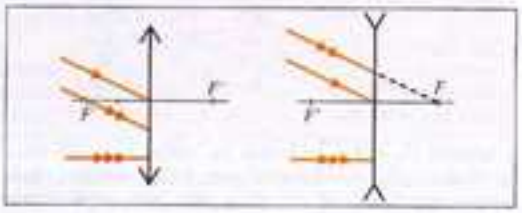
EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Schématiser une lentille plan convexe, plan concave et un ménisque convergent. Qu'appelle-t-on rayons de courbure? axe principal? lentille mince?

Exercice 2

Tracer la marche des rayons lumineux après leur traversée de la lentille mince convergente puis divergente (les deux points sont les foyers principaux).



Exercice 3

Définir la distance focale et la vergence d'une lentille mince, préciser les unités de ces grandeurs.

Exercice 4

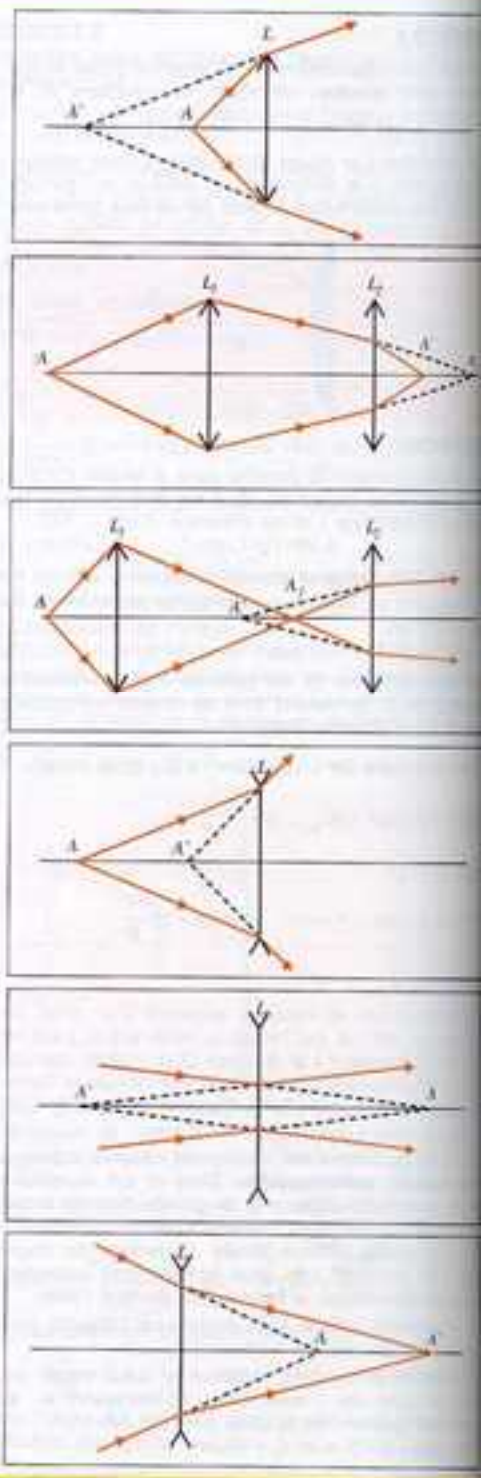
Interpréter à l'aide de la loi de Descartes la déviation subie par un rayon lumineux qui traverse une lentille plan convexe puis une lentille plan concave.

Exercice 5

Qu'est-ce qu'une bonne image? Citer les conditions de Gauss et les moyens mis en œuvre pour qu'une lentille mince donne d'un objet une bonne image.

Exercice 6

Un timbre poste est observé à travers une lentille convergente qui en donne une image virtuelle.
Il est ensuite observé à travers une lentille divergente. Dans quel cas l'image est-elle plus petite que l'objet? (Justifier par une construction.)



Objet et image; leur nature

Exercice 7

Rechercher pour chacune des lentilles le point objet et le point image qu'elle en donne, et préciser leur nature (réelle ou virtuelle).

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 8

Construire l'image $A'B'$ d'un objet AB donnée par une lentille convergente de distance focale f dans les cas suivants :

$\overline{OA} = -3f$; $-2f$; $-1,5f$; $-f$; $-0,5f$; $+0,5f$; f ; $2f$.

A est sur l'axe principal de la lentille.
Echelle : $f = 2$ cm et $AB = 1$ cm.

Exercice 9

Reprendre l'exercice précédent avec une lentille divergente.

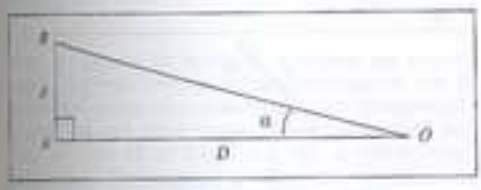
Exercice 10

On dispose de deux lentilles minces coaxiales séparées par la distance $d = 10$ cm : une lentille convergente L_1 de distance focale $f_1 = 20$ cm et une lentille divergente L_2 de distance focale $f_2 = -10$ cm.
Un faisceau lumineux parallèle à leurs axes principaux arrive sur l'une d'elles.
Construire sa marche à travers le système optique des deux lentilles. Que remarquez-vous ?

Diamètre apparent

Par définition, le diamètre apparent d'un objet de dimension $AB = d$ est l'angle α sous lequel il est vu par un observateur O à la distance D de l'objet.

on a $\alpha = \frac{d}{D}$ *(ces deux longueurs ayant même unité), et* $\alpha = \frac{d}{D}$ *(α en rad) si l'angle est faible.*



Exercice 11

Calculer le diamètre apparent du Soleil puis de la Lune vus de la Terre. Comparer leurs valeurs et expliquer l'éclipse possible du Soleil par la Lune.

Données :

	Rayon (km)	Distance à la Terre (km)
Soleil	7×10^5	$1,5 \times 10^8$
Lune	1 740	$3,8 \times 10^5$

Exercice 12

Calculer le diamètre apparent de la Terre observée depuis la Lune. Rayon terrestre = 6 400 km.

Exercice 13

L'étoile la plus proche de la Terre, Proxima du Centaure, est située à 4×10^{13} km et son diamètre vaut celui du Soleil. Calculer son diamètre apparent. L'œil ne peut distinguer, on dit séparer deux points, que si leur diamètre apparent est supérieur à 1', comment voit-on cette étoile ?

Exercice 14

La tour Eiffel observée depuis l'une des collines qui dominent Paris a une hauteur de 2 cm à 50 cm de l'œil d'un observateur. Sa hauteur réelle étant 300 m, à quelle distance de la Tour était l'observateur ?

Exercice 15

Une lentille convergente donne d'un objet réel situé à 40 cm devant elle, une image réelle de même dimension. Après avoir effectué la construction, calculer la valeur de la distance focale de la lentille.

Exercice 16

Un objet réel de 1 cm de haut est placé à 30 cm d'une lentille convergente de distance focale $f = 20$ cm. Déterminer l'image qu'elle en donne.

Exercice 17

Une lentille divergente de distance focale 10 cm donne d'un objet virtuel une image réelle deux fois plus grande et située dans le plan focal objet de la lentille. Où est situé l'objet ?

*** Exercice 18**

La loupe

1) Calculer le diamètre apparent α d'un petit objet AB de 3 mm de haut observé à « l'œil nu », s'il est situé à 25 cm de l'œil.

2) Il est maintenant observé à travers une lentille convergente faisant office de loupe de distance focale 5 cm. S'il est situé à 4 cm de la lentille déterminer les caractères de l'image qu'elle en donne.

3) Calculer le diamètre apparent α' de l'image observée par l'œil situé contre la lentille.

4) Comparer ces deux diamètres apparents et calculer le quotient $\frac{\alpha'}{\alpha}$ appelé grossissement G de la loupe.

5) Même question en situant l'objet dans le plan focal objet de la lentille.
Quel est le grossissement le plus fort ?

2. EXERCICES PROPOSES

Focométrie

• Exercice 19

Afin de mesurer la distance focale f_1 d'une lentille mince divergente L_1, on l'accole à une lentille mince convergente L_2, de distance focale $f_2 = 10$ cm et on place devant ce système optique un objet AB de telle sorte que son image $A'B'$ obtenue sur un écran, ait la même dimension que AB.
La distance des plans de front de l'objet et de l'image est alors 80 cm.

1) En déduire la valeur de f_1.

2) Qu'aurait-on obtenu si à la lentille L_1, on avait accolé une lentille L'_2, de distance focale $f'_2 = 20$ cm?

• Exercice 20

Méthode de Bessel
Afin d'obtenir la distance focale d'une lentille convergente celle-ci est placée sur un banc d'optique portant une règle graduée de 0 à 150 cm.
Un objet lumineux AB est placé devant la graduation 0 et un écran à la graduation 150.
On déplace la lentille sur le banc et pour une certaine position, il se forme sur l'écran une image nette $A'B'$, plus grande que l'objet. En déplaçant la lentille de la distance d vers l'écran, il se forme sur celui-ci, une image nette $A''B''$ plus petite que l'objet.

1) Construire l'image de l'objet dans ces deux cas, puis montrer que sa distance focale est donnée par l'expression $f = \dfrac{D^2 - d^2}{4D}$ en appelant D la distance objet-écran.
Application numérique : $d = 67$ cm.

2) Quelle condition remplir pour pouvoir adopter cette méthode?

Vergence et rayon de courbure

• Exercice 21

Un ménisque d'indice $n = 1,5$ est assimilable à une lentille mince dont la première face (1) a pour rayon de courbure $R_1 = 0,10$ m et la seconde face (2) a pour rayon de courbure $R_2 = \dfrac{2}{3} R_1$.

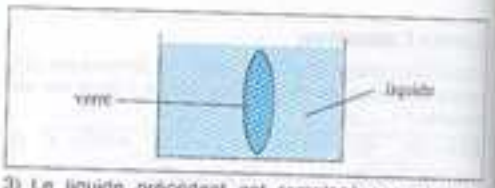
1) Calculer sa vergence C de cette lentille puis sa distance focale f.

2) Refaire le calcul de C et f après avoir permuté l'ordre des deux faces. Conclure.

• Exercice 22

1) Une lentille mince biconvexe est taillée dans un verre d'indice $n = 1,54$. Le rayon de courbure R des deux faces est le même. Sa distance focale vaut $f_1 = 35$ mm.
Calculer la valeur du rayon de courbure.

2) La lentille est introduite dans une cuve à faces parallèles transparentes qui est remplie d'un liquide. L'ensemble constitue trois lentilles accolées coaxiales minces de distance focale $f = 540$ mm; calculer l'indice du liquide.



3) Le liquide précédent est remplacé par un autre d'indice 1,54. Quelle est la vergence du système optique des trois lentilles?

Appareils

• Exercice 23

Appareil de projection
L'objectif d'un projecteur de diapositives est assimilé à une lentille mince convergente de distance focale $f = 12,5$ cm.
La distance entre la diapositive et l'écran est de 3 m.

1) Quel est le grandissement de l'appareil?

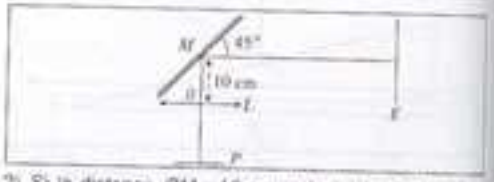
2) Quelles sont les dimensions de l'image d'une diapositive 24 × 36 mm²?

3) Si on rapproche l'écran de 1 m de l'appareil, dans quel sens doit-on déplacer l'objectif pour avoir encore une image nette sur l'écran et de quelle longueur? Quelles sont les nouvelles dimensions de l'image?

• Exercice 24

Rétroprojecteur
La lentille L d'un rétroprojecteur, assimilée à une lentille mince convergente de 4δ, donne d'un objet AB situé dans un plan horizontal P, une image 25 fois plus grande, située dans un plan vertical E, grâce à un miroir plan incliné de 45° sur l'axe principal vertical de la lentille.

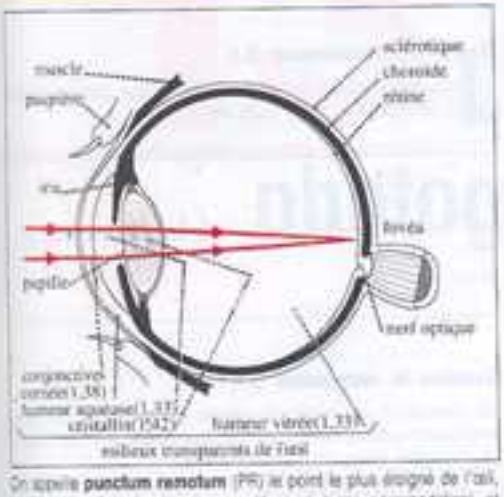
1) Construire la marche des rayons lumineux issus d'un point de l'objet et orienter la flèche $\overline{AB}$ pour que les spectateurs face à l'écran vertical E voient une image droite.



2) Si la distance $OM = 10$ cm, calculer la distance de l'écran au point M et la distance de l'objet à la lentille.

Coupe de l'œil humain et « œil réduit »
Le faisceau lumineux issu d'un point objet à l'infini subit des réfractions lorsqu'il traverse les divers milieux transparents d'indices différents qui constituent l'œil et le faisceau converge sur la rétine si l'objet est vu nettement.
Le système optique a une distance focale d'environ 17 mm.
Son modèle optique ou « œil réduit » sera une lentille mince convergente de même distance focale.
Lorsque l'objet se rapproche, pour qu'il soit vu nettement, l'œil **accommode** afin que son image reste sur la rétine. Cette **accommodation** se fait par une déformation de la face antérieure du cristallin, dont le rayon de courbure diminue, ce qui diminue la distance focale de l'œil. L'œil « fonctionne en zoom » par action des muscles ciliaires.

2. EXERCICES PROPOSES



On appelle **punctum remotum** (PR) le point le plus éloigné de l'œil, sur l'axe optique, qui soit vu nettement (sans accommodation) et **punctum proximum** (PP) le point le plus proche de l'œil, sur l'axe optique, qui soit vu nettement (avec accommodation maximale). Sa distance à l'œil est appelée **distance minimum de vision distincte** : d_m.

L'œil « normal » voit nettement les objets situés entre l'infini et 25 cm. L'œil peut être frappé d'anomalies optiques : myopie, hypermétropie, presbytie, qui peuvent être corrigées par des lentilles de vergences adaptées.

Exercice 25

Correction de la myopie, de l'hypermétropie et de la presbytie.

1) Un œil **myope** ne voit pas nettement les objets éloignés par suite d'un excès de convergence (dû à un trop fort indice du cristallin et/ou un allongement du globe oculaire selon l'axe principal) et l'image de l'objet à l'infini ne se forme pas sur la rétine mais avant celle-ci. Son punctum remotum est situé à 5 m. Quel type de lentille mince faut-il accoler à l'œil pour lui permettre la vision nette à l'infini?

2) Un œil **hypermétrope** par suite d'un manque de convergence a un PR virtuel situé 3 m derrière lui. Quel type de lentille mince faut-il accoler à cet œil pour lui permettre la vision nette à l'infini sans accommoder?

3) La **presbytie** est caractérisée par la diminution de la faculté d'accommodation du cristallin par suite de la fatigue des muscles ciliaires. Cet œil devenu totalement presbyte ne voit nettement que des objets à 2 m devant lui. Déterminer les lentilles minces à « double foyer » qui corrigeront cet œil afin de lui permettre la vision nette lointaine et la vision nette à 25 cm pour lire.

Exercice 26

Microscope

Le microscope sera ici modélisé par une lentille mince convergence (L_1) dite *objectif*, de centre optique O_1 et distance focale $f_1 = 5$ mm et une lentille mince convergente L_2 appelée *oculaire*, de centre optique O_2 et de distance focale $f_2 = 2$ cm. Les deux lentilles sont coaxiales et leur distance $O_1O_2 = \ell = 18{,}5$ cm. L'objectif donne de l'objet AB une image A_1B_1 réelle agrandie, puis l'oculaire, fonctionnant en loupe, donne de A_1B_1 une image finale $A'B'$ virtuelle, agrandie, et renversée par rapport à AB.

L'œil est situé au foyer principal image F_2' de l'oculaire.

1) Déterminer la position de l'objet AB :

— lorsque l'observateur met au point l'image $A'B'$ sur l'infini;

— lorsqu'il met au point cette image à 25 cm de l'œil.

En déduire la latitude de mise au point c'est-à-dire la distance des deux positions précédentes de l'objet. Montrer que ce résultat explique l'existence d'une vis micrométrique pour effectuer la mise au point.

2) Calculer le diamètre apparent α de l'objet AB, de 0,02 mm, vu à « l'œil nu » lorsqu'il est à 25 cm de cet œil, puis le diamètre apparent α' de l'image $A'B'$ lorsqu'elle est observée à l'infini.

Calculer le grossissement $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$ du microscope.

* Exercice 27

Lunette astronomique

Une lentille mince convergente L_1 de distance focale $f_1 = 90$ cm et de diamètre d'ouverture $d = 9$ cm est à la distance ℓ d'une lentille mince convergente L_2 de distance focale $f_2 = 4{,}5$ cm.

La lentille L_1 recevant la lumière issue d'un objet est appelée objectif et la lentille L_2 faisant office de loupe, donc proche de l'œil, est appelée oculaire.

Ce système centré est utilisé comme lunette astronomique. L'objet AB est très éloigné de la lunette et celle-ci en donne une image $A'B'$ à l'infini.

1) Construire l'image A_1B_1 donnée par L_1 puis l'image $A'B'$ donnée par la lunette en interprétant, puis évaluer la distance ℓ entre les lentilles.

2) Tracer la marche à travers la lunette :

a) du faisceau lumineux issu du point A sur l'axe principal de la lunette;

b) du faisceau lumineux issu du point B hors de l'axe.

Vérifier que tous les rayons qui entrent dans la lunette passent à la sortie de l'appareil à travers un cercle proche d'un point particulier puis calculer la position et le diamètre de ce cercle — image de la monture de l'objectif — donnée par l'oculaire.

C'est dans le plan de ce cercle qu'est située la pupille de l'œil.

3) Calculer le diamètre apparent α' de l'objet vu à travers la lunette sachant que le diamètre apparent de l'objet vu à « l'œil nu » vaut $\alpha = 2'$.

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES DESTINÉS A TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 28 A.1.a.

Définir par leur propriété, le centre optique, le foyer principal image, et le foyer principal objet d'une lentille. Accompagner ces définitions de schémas pour une lentille convergente puis divergente.

Exercice 29 A.1.b.

Donner l'ordre de grandeur de la distance focale d'une loupe, d'un objectif de microscope, d'une lunette astronomique.

Exercice 30 A.1.c.

Énoncer le théorème des vergences et donner un exemple.

Exercice 31 A.2.a.

Citer trois méthodes, qui ne demandent aucun calcul, permettant de distinguer dans une collection de lentilles minces sphériques une lentille convergente d'une lentille divergente.

Exercice 32 A.2.a.

On dispose d'une lentille mince convergente, d'une lentille mince divergente, d'un objet lumineux AB et d'un écran.
Proposer un montage pour réaliser une image A_1B_1 qui sera objet virtuel pour la lentille divergente qui en donnera une image $A'B'$ sur l'écran.

Exercice 33 B.2.

Après avoir relu le texte de l'exercice n° 10 et pris connaissance de la suite des calculs corrects qu'en a fait un élève, rédiger la solution de l'exercice.
A objet réel à l'infini, A_1 image qu'en donne la lentille L_1 (de centre optique O_1).

$$-\frac{1}{\overline{O_1A}}+\frac{1}{\overline{O_1A_1}}=\frac{1}{f_1'} \longrightarrow \overline{O_1A_1}=f_1'=20\text{ cm}.$$

A_1 objet réel pour L_2 (de centre optique O_2) qui en donne l'image finale A'

$$-\frac{1}{\overline{O_2A_1}}+\frac{1}{\overline{O_2A'}}=\frac{1}{f_2'} \longrightarrow \frac{1}{\overline{O_2A'}}=\frac{1}{-10}+\frac{1}{10}$$

donc $\overline{O_2A'}=\infty$.

Exercice 34 B.3.

Il peut être intéressant dans certains exercices d'utiliser à la place de la relation de conjugaison, la formule de Newton :

$$\overline{FA}.\overline{F'A'}=-f'^2$$

Établissez-la en prenant pour nouvelles origines F, puis F', foyers d'une lentille mince.

Exercice 35 B.4.

Construire l'image du point A situé sur l'axe optique de la lentille mince L, puis de L'.



Exercice 36 C.1.

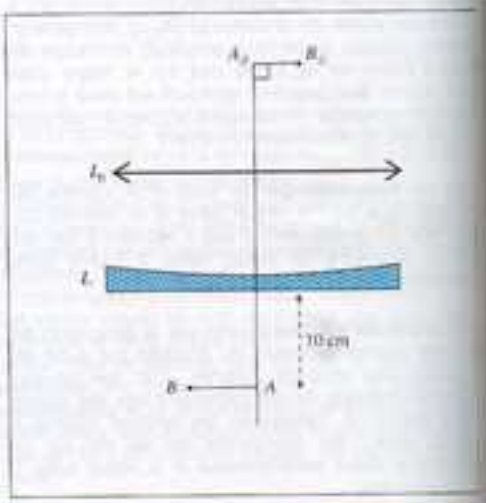
Au moyen d'une lentille auxiliaire convergente L_0 d'axe principal vertical, on forme l'image réelle AB de l'objet A_0B_0 situé dans un plan de front.
A 10 cm au-dessus de AB on interpose la lentille mince plan concave L, sa face concave étant la face supérieure et son axe principal étant confondu avec celui de L_0. On obtient l'image réelle $A'B'$ à 20 cm en dessous de L.

1) Construire la marche des rayons lumineux issus d'un point de l'objet et calculer la distance focale f' de la lentille plan concave.

2) On remplit d'eau la face concave de la lentille L et l'image de AB est alors en $A''B''$ à la distance 12,05 cm du nouveau système optique en L assimilé à deux lentilles minces accolées.

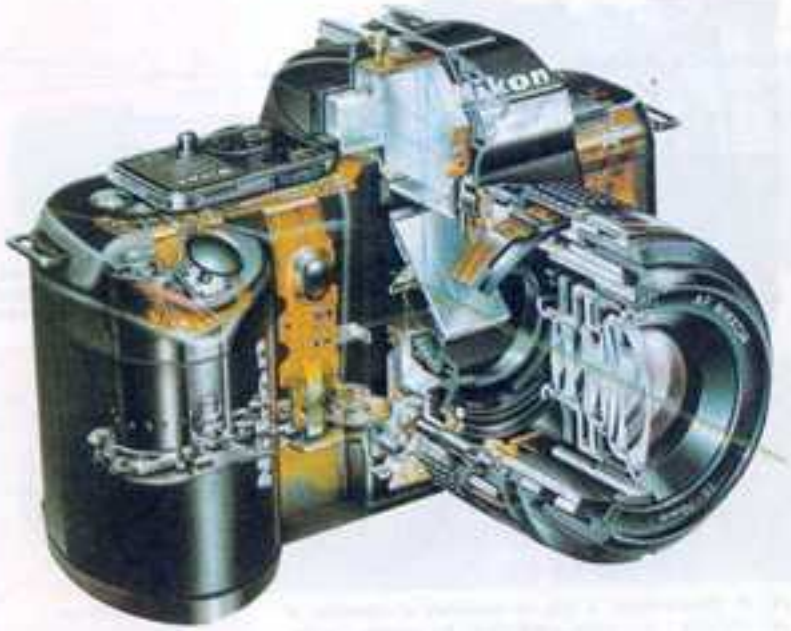
a) Calculer la vergence C de ce système optique.

b) Calculer le rayon de courbure R de la face concave, l'indice de l'eau étant $n_e = 1{,}333$, et calculer l'indice n du verre constituant la lentille plan concave.



13 L'objectif photographique

1 L'objectif et ses caractéristiques.
2 Utilisation.
3 Le traitement photographique.



« Éclaté » de boîtier et d'objectif photographique.

1 L'OBJECTIF ET SES CARACTÉRISTIQUES

1. Constitution

Un objectif photographique est un système optique convergent destiné à donner d'un objet réel, une image réelle sur une pellicule photographique.

Un objectif est constitué de *plusieurs lentilles coaxiales*, de vergences et de verres différents, parfaitement positionnées les unes par rapport aux autres (fig. 1). Leurs surfaces ont subi des traitements spéciaux afin de diminuer les réflexions parasites de la lumière.

Ces lentilles forment un système optique corrigé en grande partie des aberrations géométriques et chromatiques.

Entre deux de ses lentilles est placé un *diaphragme à iris* dont le diamètre d'ouverture d est réglable (fig. 2).

Dans la suite de ce paragraphe un objectif photographique, même complexe, sera modélisé par une lentille convergente mince associée à un diaphragme centré sur son axe principal (fig. 3).

2. Caractéristiques principales

Un objectif photographique est caractérisé essentiellement par trois paramètres.

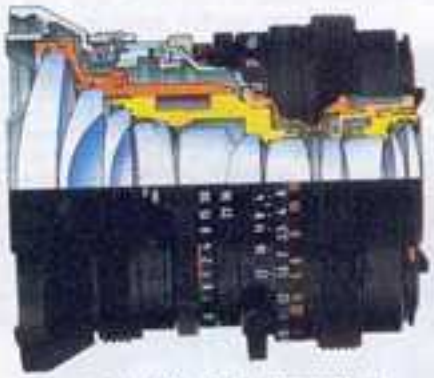


Fig. 1. *Éclaté d'objectif photographique.*



Fig. 2. *Diaphragme à iris, le diamètre d'ouverture d est réglable : a) petite ouverture; b) grande ouverture.*

a) *Distance focale*

Deux types d'objectifs existent :

- *Les objectifs à « focale fixe »* dont la distance focale f est constante. Selon l'usage on distingue les objectifs *grand angulaire*, *standard* et *téléobjectif*.
- Les *objectifs à « focale variable » ou zoom* dont la distance focale est ajustable.

Le tableau (fig. 5) présente différents types d'objectifs.

b) *Angle de champ*

C'est l'angle maximal α d'observation (fig. 4). Il est déterminé par :

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{L}{2}}{f}=\frac{L}{2f},$$

L étant la diagonale du rectangle de la pellicule. Par exemple, pour une pellicule de 24×36 mm, $L=43$ mm et avec un objectif standard de distance focale $f=50$ mm, l'angle de champ est

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{43}{2}}{50}=0{,}43, \quad \text{d'où :} \quad \frac{\alpha}{2}=23°\,3,$$

soit : $\alpha=47°$.

Pour une même pellicule, plus la distance focale est grande, plus l'angle de champ est réduit (fig. 5).

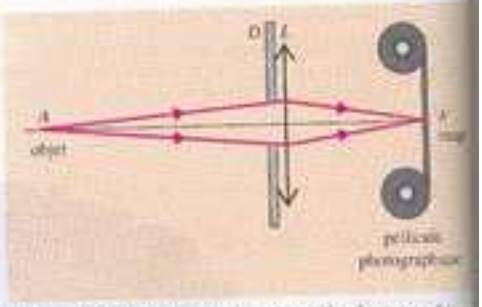


Fig. 3. *Modélisation d'un objectif photographique par une lentille mince convergente L, associée à un diaphragme D, d'ouverture réglable.*

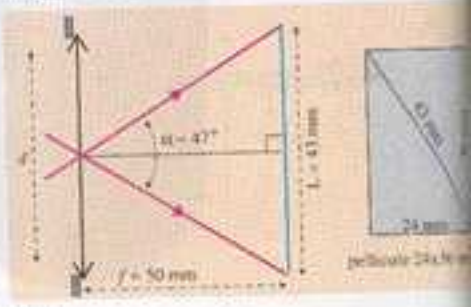


Fig. 4.

OBJECTIF SPÉCIAL

Distance focale 8 mm; *nombre d'ouverture mini* 2,8; *angle de champ* 180°; *plus courte distance repérée* 0,3 m.





OBJECTIF GRAND ANGULAIRE

Distance focale 24 mm; *nombre d'ouverture mini* 2; *angle de champ* 84°; *plus courte distance repérée* 0,3 m.





OBJECTIFS STANDARDS

Distance focale 50 mm; *nombre d'ouverture mini* 1,2 ou 1,4 ou 1,8; *angle de champ* 47°; *plus courte distance repérée* 0,5 m; 0,45 m; 0,60 m.





TÉLÉOBJECTIF

Distance focale 400 mm; *nombre d'ouverture mini* 5,6; *angle de champ* 6°; *plus courte distance repérée* 4 m.





ZOOM

Distance focale variant de 35 à 70 mm; *nombre d'ouverture* 3,3 à 4,5; *angle de champ* 64° à 34°; *plus courte distance repérée* 0,5 m.







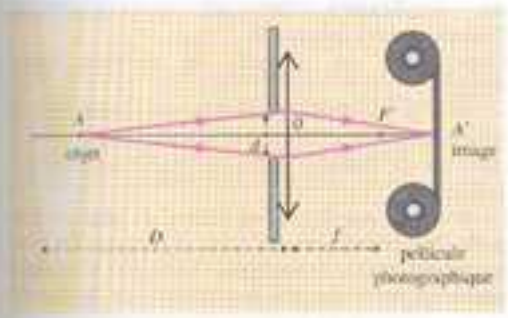
Fig. 5. Différents types d'objectifs et leurs caractéristiques pour des photographies 24 × 36 mm².

2. Netteté et grain de l'émulsion

Un objectif sans aberrations, donne d'un point objet une image ponctuelle sur la pellicule photographique, après mise au point.
Cependant, cette image après développement de la pellicule, apparaît comme une petite tache. Ceci est principalement dû au fait que l'émulsion a une structure granulaire. De plus une partie de l'énergie lumineuse qui arrive sur un grain de la pellicule est communiquée aux grains voisins.
Donc, deux images ponctuelles trop proches sur la pellicule donnent deux taches qui se chevauchent et n'en forment qu'une seule après développement.
Deux points images seront séparés si leur distance est supérieure à une longueur a', dite **grain de l'émulsion.**
Ce grain est de l'ordre du µm pour les meilleures émulsions.
En conséquence, la netteté de l'image est liée au grain de la pellicule, mais pour des raisons techniques, plus le grain est fin, moins la pellicule est sensible à la lumière.

3. Profondeur de champ

La mise au point étant faite sur l'objet A situé à la distance D de la lentille mince, son image est alors nette sur la pellicule (fig. 8).



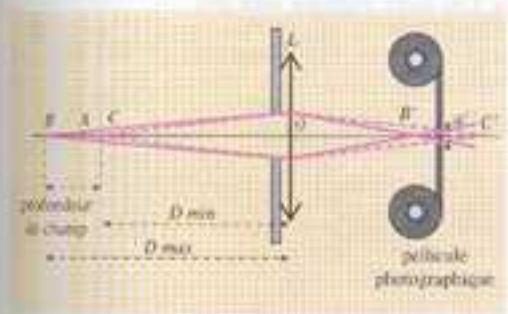


Fig. 8. La mise au point a été réalisée sur l'objet ponctuel A. Son image ponctuelle A' est sur la pellicule.
Du fait du grain a' de l'émulsion les objets ponctuels compris entre B et C ont des images de netteté acceptables sur la pellicule puisqu'elles apparaissent comme des taches de diamètre $\leq a'$.

Mais par suite de l'existence du grain de l'émulsion, qui ne peut différencier un point d'une tache de diamètre a', il existe une certaine tolérance de netteté.

On appelle, **profondeur de champ,** la distance des plans de front extrêmes entre lesquels doit se trouver l'objet pour que son image demeure nette sur la pellicule.

On montre que cette profondeur de champ :

$$p = D_{max} - D_{min}$$

est sensiblement égale à :

$$p \approx \frac{2a' \cdot D^2}{d \cdot f} = \frac{2a' \cdot D^2 \cdot N}{f^2}.$$

La profondeur de champ est d'autant plus importante pour une émulsion donnée, que :
— *la distance D, objet-lentille est grande;*
— *l'objectif est plus diaphragmé* (d faible) c'est-à-dire que le nombre d'ouverture N, est choisi grand;
— *la distance focale de l'objectif f, est petite.*
Il est possible de lire un ordre de grandeur de cette profondeur de champ sur la monture de l'objectif : en effet la bague de mise au point tourne devant un index gravé sur la monture.

Lorsque la mise au point est effectuée, la distance D est placée devant cet index. Deux échelles des nombres d'ouverture N du diaphragme sont gravées de part et d'autre de l'index. Elles permettent d'estimer la profondeur de champ pour chaque nombre d'ouverture, ce qui peut être un des critères de réglage (fig. 9).



a

b

*Fig. 9. **Profondeur de champ :***
Pour une mise au point à distance D constante, ici 5 m, la profondeur de champ croît lorsque le diamètre d'ouverture de l'objectif diminue.
a) Nombre d'ouverture N = 16;
b) Nombre d'ouverture N = 1,4;

4. Prise de vue

Prendre une photographie, c'est en fonction du sujet, de ses caractéristiques (éclairement, cadre, vitesse...) et de l'effet recherché, choisir parmi les possibilités de réglage souvent contradictoires de l'appareil. On doit effectuer les opérations suivantes :

a) Choix préalables

• **De la pellicule :** c'est un compromis entre la finesse du grain et la sensibilité à la lumière. On choisira par exemple, une pellicule à grain fin si la photo est destinée à être agrandie.

• **De la distance focale :** selon la portion de l'espace (grande : foule, ou petite : artiste seul) que l'on veut sélectionner, la distance focale sera prise petite ou grande. Ceci s'obtient soit en disposant d'un jeu d'objectifs, soit en utilisant un zoom.

b) Mise au point

c) Compromis entre temps de pose et ouverture

Pour cela, il faut procéder à la mesure de la **quantité de lumière nécessaire à l'impression** de la surface sensible, à l'aide d'un posemètre.
La quantité de lumière qui entre dans l'appareil est proportionnelle :
— **à la durée de l'exposition;**
— **à la surface non diaphragmée** de l'objectif.
L'aire de cette surface est :

$$S = \frac{\pi . d^2}{4}.$$

Puisque $d = \frac{f}{N}$, alors : $S = \frac{\pi . f^2}{4N^2}$.

$\frac{\pi . f^2}{4}$ est constant pour un objectif donné, donc S est proportionnel à $\frac{1}{N^2}$.

La quantité de lumière reçue est inversement proportionnelle au carré du nombre d'ouverture et proportionnelle à la durée de l'exposition.
Pour obtenir la quantité de lumière demandée par le posemètre, il faut donc **sélectionner** sur l'objectif photographique **le temps de pose t et le nombre d'ouverture N du diaphragme.**

• **Réglage du temps de pose**
Le temps de pose est la durée d'exposition de la pellicule, c'est-à-dire la durée de l'ouverture de l'obturateur qui protège la pellicule de la lumière.
Un bouton déclencheur commande l'obturateur qui découvre le film juste la durée d'exposition choisie.
Cette durée est à choisir parmi des valeurs, exprimées en seconde, qui forment une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$:

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{125} \quad \frac{1}{250} \cdots$$

Certaines valeurs sont simplifiées, par exemple $\frac{1}{8} \times \frac{1}{2}$ en $\frac{1}{15}$.

• **Réglage de l'ouverture du diaphragme**
Le diaphragme a un diamètre réglable.
Une bague de réglage du diaphragme permet de faire varier continuement son diamètre et de sélectionner sa valeur.
Cette bague porte des nombres d'ouverture, N, formant une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$:

1 1,4 2 2,8 4 5,6 8 11 16 22 32

Certains nombres sont arrondis, par exemple :

$$2 \times \sqrt{2} = 2{,}83 \approx 2{,}8.$$

A ces nombres d'ouverture N correspondent les diamètres d'ouverture d du diaphragme :

$$\frac{f}{2} \quad \frac{f}{2{,}8} \quad \frac{f}{4} \quad \frac{f}{5{,}6} \cdots$$

Par exemple, avec un objectif standard de distance focale $f = 50$ mm, en sélectionnant $N = 5{,}6$, le diamètre d'ouverture vaut :

$$d = \frac{50}{5{,}6} \approx 9 \text{ mm}$$

et en sélectionnant $N = 8$, $d = \frac{50}{8} \approx 6{,}25$ mm.

Le passage d'un nombre d'ouverture au suivant immédiatement supérieur réduit le diamètre d'un facteur $\sqrt{2}$, et par suite la surface d'ouverture du diaphragme (et par conséquent de l'éclairement) de moitié.
Donc pour un objectif de distance focale donnée :
— **plus le nombre d'ouverture est grand,** plus la profondeur de champ est grande, mais plus la quantité de lumière qui entre dans l'objectif est faible;
— **avec un nombre d'ouverture de plus en plus petit,** les conséquences sont inversées. De plus les aberrations deviennent difficiles à corriger parce qu'on s'éloigne des conditions de Gauss.

• **Ces deux réglages sont liés**
En effet pour obtenir une quantité de lumière donnée K, les réglages du temps de pose t, et du nombre d'ouverture N, sont liés, car K est proportionnel à $\frac{t}{N^2}$:

temps de pose t	nombre d'ouverture N	$\frac{t}{N^2}$
$\frac{1}{250}$ s	$5{,}65 \approx 5{,}6$	$\frac{1}{250} \times \frac{1}{(5{,}65)^2} \approx 1{,}25 \times 10^{-3}$
$\frac{1}{125}$ s	8	$\frac{1}{125} \times \frac{1}{(8)^2} = 1{,}25 \times 10^{-3}$
$\frac{1}{60}$ s	$11{,}3 \approx 11$	$\frac{1}{60} \times \frac{1}{(11{,}3)^2} \approx 1{,}25 \times 10^{-3}$

– si le sujet est en mouvement, pour éviter le «flou» l'opérateur choisira t petit, donc N faible, mais la profondeur de champ sera faible;
– si le sujet est immobile au premier plan, avec un paysage lointain intéressant, il faut pour que l'ensemble soit net une grande profondeur de champ, donc N élevé et t grand.

Avec un appareil semi-automatique l'opérateur peut :
– décider du nombre d'ouverture et «l'automatisme» sélectionne le temps de pose en fonction de la luminosité du sujet photographié et de la sensibilité du film;
– ou décider du temps de pose et «l'automatisme» règle l'ouverture du diaphragme.

3 LE TRAITEMENT PHOTOGRAPHIQUE

1. Photographie en noir et blanc

a) *Emulsion photographique*

L'émulsion photographique sensible à la lumière, est obtenue à partir d'un mélange de nitrate d'argent et de bromure de potassium dans de la gélatine.
Ce mélange est soumis à «maturation» à température constante (40 °C à 80 °C) pendant une durée de quelques heures à plusieurs jours. Il se forme des cristaux de bromure d'argent, en suspension dans la gélatine (fig. 10) :

$$Ag^+ + Br^- \longrightarrow AgBr(s).$$

Selon le temps de maturation, ils deviennent plus ou moins gros, et forment le **grain** de l'émulsion.
Un film est constitué par une mince couche d'émulsion photographique déposée sur un support souple (triacétate de cellulose, polyesters...)

Remarque :
Les couches photographiques du commerce renferment aussi des cristaux d'iodure d'argent ou de chlorure d'argent.



Fig. 10. Émulsion photographique observée au microscope électronique à balayage.

b) *Impression*

Au cours de l'exposition de l'émulsion à la lumière lors d'une prise de vue des grains de l'émulsion sont «marqués», c'est-à-dire **sensibilisés** par l'action de la lumière. On dit qu'ils sont insolés ou encore **impressionnés.**

En effet, sous l'action de la lumière, les microcristaux de bromure d'argent reçoivent l'énergie $h.\nu$, ce qui donne lieu à l'apparition d'atomes de brome, qui sont fixés par la gélatine, et à la libération d'électrons, selon la réaction d'oxydo-réduction :

$$AgBr(s) + h.\nu \longrightarrow Ag^+ + Br + e^-.$$

Les ions Ag^+ sont ensuite transformés en **agrégats d'argent** atomique :

$$Ag^+ + e^- \longrightarrow Ag(s).$$

La quantité d'argent qui apparaît dépend donc du nombre d'électrons, donc de l'énergie lumineuse reçue.

Ces agrégats d'argent atomique (formés d'environ 4 atomes d'argent) constituent les **germes** du développement ultérieur, au niveau du **cristal sensibilisé.** Ils forment une *image latente,* non perceptible, qui sera révélée par l'action du révélateur, puis stabilisée par l'action du fixateur.
Des essais de laboratoire ont déterminé la quantité minimale de lumière capable d'impressionner le «grain» de l'émulsion.

Une émulsion photographique est d'**autant plus sensible que ses grains sont plus gros.**
Des échelles normalisées déterminent la sensibilité d'un film et l'expriment par un nombre.
Dans l'échelle ASA (American Standard Association) le nombre est proportionnel à la sensibilité du film, par exemple un film de 100 ASA est deux fois plus sensible qu'un film de 50 ASA.

Dans l'échelle DIN (Deutsche Industrie Normen) le nombre augmente de 3 unités lorsque la sensibilité du film est doublée, par exemple un film de 21 DIN est deux fois plus sensible qu'un film de 18 DIN.
La correspondance des indices de sensibilité est donnée dans le tableau ci-dessous.

ASA	DIN
25	15
50	18
100	21
200	24
400	27

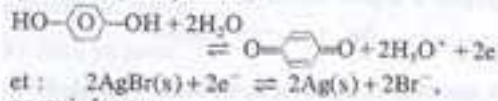
c) Développement

Le **développement** consiste à rendre visible l'image latente (c'est-à-dire à multiplier le nombre d'atomes d'argent par environ dix milliards!). Pour cela la couche sensible est plongée à l'abri de la lumière dans un **bain révélateur** pendant une durée donnée (quelques minutes), qui dépend de la température du bain et de la sensibilité du film.

Les révélateurs sont des solutions de réducteurs (hydroquinone ou dihydroxy-1,4 benzène par exemple). Ils réduisent d'abord les seuls cristaux de bromure d'argent porteurs de germes, en grains visibles d'argent métallique noir, selon une réaction d'oxydo-réduction :

$$\text{red} + AgBr(s) \longrightarrow \text{ox} + Ag(s) + Br^-.$$

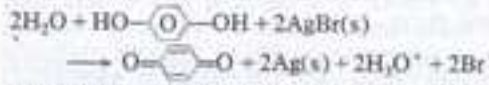
Dans le cas de l'hydroquinone, on a le couple quinone/hydroquinone :



$$\rightleftharpoons O{=}\langle\rangle{=}O + 2H_3O^+ + 2e^-,$$

et : $2AgBr(s) + 2e^- \rightleftharpoons 2Ag(s) + 2Br^-$,

ce qui donne :



$$\longrightarrow O{=}\langle\rangle{=}O + 2Ag(s) + 2H_3O^+ + 2Br^-.$$

Les cristaux de bromure d'argent porteurs de germes sont réduits beaucoup plus rapidement que les autres. C'est pourquoi *le développement a une durée limitée*, afin d'éviter la réduction des cristaux non sensibilisés et par suite le noircissement uniforme de l'émulsion (**voile**).

Les révélateurs sont en réalité en milieu basique afin de « neutraliser » les ions H_3O^+ formés.



Fig. 11. *Un négatif N et B.*



Fig. 12. *Le positif (P. et M. Curie à Sceaux).*

On stoppe alors le développement par rinç dans un **bain d'arrêt** (solution aqueuse d'ac acétique).

d) Fixage

Après rinçage, le film est soumis à l'action d' **fixateur** (thiosulfate de sodium), qui réagit les cristaux de bromure d'argent qui n'ont p été réduits par le révélateur, et les transfor en ions $[Ag(S_2O_3)]^-$, $[Ag(S_2O_3)_2]^{3-}$ et B solubles, selon :

$$S_2O_3^{2-} + AgBr(s) \longrightarrow [Ag(S_2O_3)]^- + Br^-,$$

et :

$$[Ag(S_2O_3)]^- + S_2O_3^{2-} \longrightarrow [Ag(S_2O_3)_2]^{3-}$$

Le film est ensuite bien lavé pour éliminer tou trace de produit, puis séché.

L'image obtenue est le **négatif** : (fig. 11)

— les parties sombres (dépôt d'argent) corr pondent à celles qui ont reçu le plus de lumièr

— les parties claires (peu de dépôt d'argen sont celles qui ont reçu le moins de lumière lo de la prise de vue.

e) L'image en noir et blanc

L'image définitive, le **positif**, est obtenue réalisant un négatif du négatif.

Mais comme l'image négative est en génér petite (format 24×36 mm^2), elle est agrand dans un agrandisseur, qui est un système optiq convergent. Le négatif est objet (éclairé) et lentille en donne une image agrandie sur u feuille de papier photographique. Cette imag subit les traitements précédents : dévelo pement, fixage, lavage et séchage (fig. 12).



Fig. 13

2. Photographie en couleurs (lecture)

a) Couleurs primaires, secondaires et complémentaires

Un faisceau de lumière blanche qui traverse un prisme est décomposé en un spectre fait de la juxtaposition de différentes couleurs (fig. 13) (voir chapitre 14).
Ce spectre peut grossièrement être subdivisé en trois zones colorées : *bleu* (foncé), *vert* et *rouge*.

• Couleurs primaires

A partir de ces trois couleurs dites **couleurs primaires,** on peut reproduire toutes les autres couleurs y compris le blanc. Ainsi, si on projette sur un écran blanc trois faisceaux de lumière colorés en rouge, vert et bleu, on obtient les couleurs de la figure 14. Par exemple le vert et le rouge forment du jaune. La **synthèse additive** du blanc provient de la superposition du rouge, du bleu et du vert.

• Couleurs secondaires

Ce sont les couleurs obtenues par addition de deux couleurs primaires. La figure 14 représente ainsi trois couleurs secondaires :

rouge + vert donnent la couleur *jaune;*
bleu + vert donnent la couleur *cyan* (bleu-vert);
bleu + rouge donnent la couleur *magenta* (rose-pourpre).

• Couleurs complémentaires

C'est la couleur secondaire qui par addition à une couleur primaire donne du blanc.
Ainsi le cyan est la couleur complémentaire du rouge.
(Cyan = bleu + vert, or (bleu + vert) + rouge = blanc donc cyan + rouge = blanc.)
De même le magenta est la couleur complémentaire du vert et le jaune est la couleur complémentaire du bleu.

couleurs primaires	couleurs complémentaires
rouge	cyan
vert	magenta
bleu	jaune

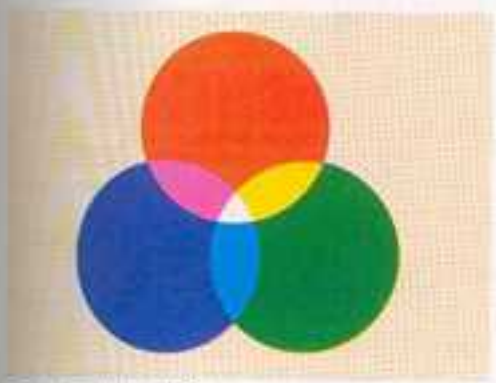


Fig. 14. *Synthèse additive.*

b) Filtres colorés

Un filtre coloré *transmet* certaines couleurs du spectre et *absorbe* les autres.

• Un **filtre primaire,** par exemple bleu, laisse passer sa couleur et absorbe les autres (vert et rouge).
Deux filtres primaires superposés arrêtent tout le spectre. Par exemple bleu + vert arrêtent : (vert + rouge) + (bleu + rouge). Aucune couleur ne passe.

• Un **filtre secondaire** (jaune, cyan ou magenta) transmet les deux couleurs primaires qui le composent et arrête la troisième. Par exemple un filtre jaune transmet le rouge et le vert mais arrête le bleu.
La superposition de deux filtres de couleurs secondaires donne la couleur primaire.
Par exemple, le filtre jaune transmet le vert et le rouge mais *soustrait le bleu,* le filtre cyan transmet le vert et le bleu mais *soustrait le rouge* et la superposition des deux filtres donne le *vert* obtenu à la confluence des plages jaune et cyan (fig. 15 et 16).

cyan + jaune	donne	vert;
cyan + magenta	donne	bleu;
jaune + magenta	donne	rouge.

La superposition des trois filtres de couleurs secondaires donne du noir (fig. 16) :

cyan + jaune + magenta = noir.

C'est cette **méthode soustractive** des couleurs qui est mise en œuvre en photographie en couleur.

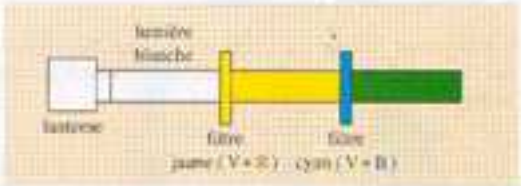


Fig. 15



Fig. 16. *Synthèse soustractive.*

c) Film couleur

Un film couleur comporte trois couches d'émulsion *noir et blanc* appliquées sur un même support (fig. 17).

Le bromure d'argent de chaque couche est rendu sensible à une couleur, en ajoutant à l'émulsion un **colorant sensibilisateur** spécifique. Ces colorants sensibles à une seule couleur, transmettent par résonance atomique l'énergie de la lumière incidente correspondante aux cristaux de bromure d'argent, qui ne sont donc insolés, que par cette couleur.

La première couche est sensible au *bleu*, la deuxième au *vert* et la troisième au *rouge*.

Chaque couche contient, d'autre part, des **coupleurs** (ou formateurs de colorants) qui vont former un colorant au moment du développement. Chaque couche contient un formateur de sa couleur complémentaire.

La première couche contient le formateur du *jaune*, la deuxième celle du *magenta* et la troisième celle du *cyan*.



Fig. 17. *Coupe d'émulsions pour la photographie couleurs par procédé soustractif.*

d) Film négatif

Lors de la prise de vue, une image latente est produite dans chaque couche selon la composition en couleurs de la lumière reçue.

Pour faire apparaître l'image on réalise les opérations suivantes :

• **Développement chromogène**

Le film est plongé dans un *révélateur* qui réduit les cristaux de bromure d'argent insolés, en argent :

$$AgBr(s) + red \longrightarrow Ag(s) + ox + Br^-.$$

L'entité oxydante formée se combine alors avec le coupleur de la couche, pour former le colorant correspondant (fig. 18 *a*).

• **Blanchiment-fixage**

Cette deuxième opération consiste à supprimer l'argent, afin de ne laisser dans chaque couche que le colorant de la couleur secondaire. Sous l'action d'un oxydant, l'argent est transformé en composé soluble puis éliminé par lavage.

L'image obtenue *(le négatif)* a exactement les couleurs complémentaires de celles du sujet photographié.

Pour obtenir une image sur papier, on réalise un négatif du négatif. La figure 18 *b* résume les différentes opérations.

En réalité il est nécessaire de filtrer la lumière qui éclaire le négatif pour obtenir une bonne restitution des couleurs primaires sur le positif.

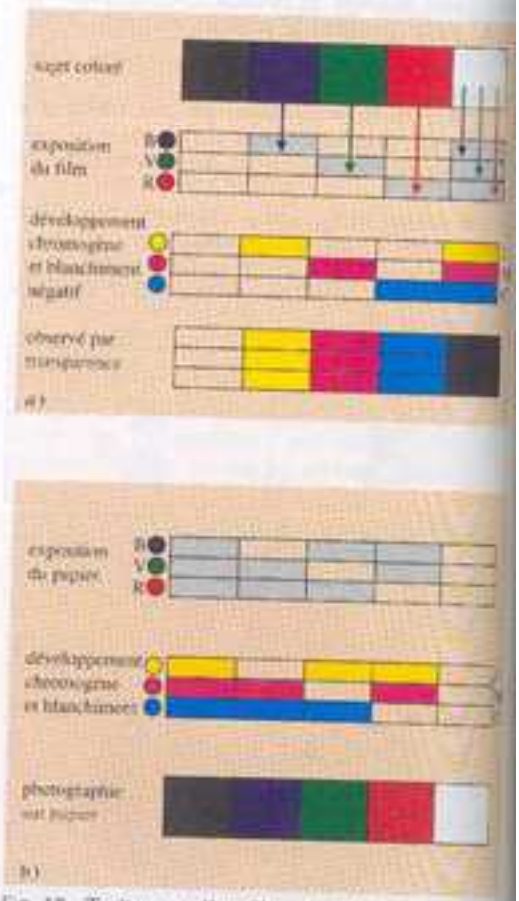


Fig. 18. *Traitement d'un film négatif couleur et tirage sur papier couleur.*

c) Film inversible (film diapositif)

Dans ce cas, après l'exposition, le film subit les traitements suivants (fig. 19) :

• Un **premier développement,** identique à celui du **noir et blanc** (même révélateur), produit une image dans chaque couche en fonction de la sensibilité à la couleur. Par exemple une partie blanche du sujet photographié impressionne les trois couches du film, alors qu'une partie bleue n'impressionne que la première couche (fig. 19 *b*).
On obtient une image argentique négative.

• **Une inversion par reste**
Le film est alors exposé à une lumière très intense. On impressionne complètement le bromure d'argent qui restait après le premier développement dans chacune des trois couches. Actuellement cette inversion tend à être effectuée par action de composés chimiques, en plongeant le film dans un *bain d'inversion.*
On obtient ainsi une image latente « **inverse** » de l'image argentique négative obtenue au premier développement, donc une image latente positive (fig. 19 *c*).

• **Un développement chromogène**
Au cours de ce développement, les couleurs jaune, magenta et cyan apparaissent au niveau de l'image latente positive.
Il se forme trois images positives de couleurs complémentaires des couleurs primaires initiales (fig. 19 *d*).

• **Un blanchiment-fixage,** suivi d'un lavage, élimine les images argentiques et donne la *diapositive.*
Éclairée en lumière blanche, la diapositive restitue les couleurs du sujet photographié : par exemple le jaune + le cyan donne bien du vert (fig. 19 *e*).

Remarque :
Certains films inversibles ne contiennent pas les coupleurs dans les couches sensibles. Ceux-ci sont introduits au cours du développement. De tels films ne peuvent être traités par l'usager. Ce sont certains films « développement compris ».

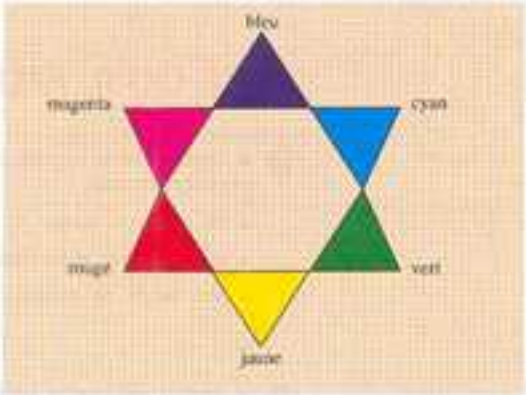


Fig. 20. *La combinaison deux par deux de pigments colorés dans les couleurs complémentaires : jaune, magenta et cyan donne les couleurs primaires : bleu, vert et rouge : la superposition des trois donne le noir.*

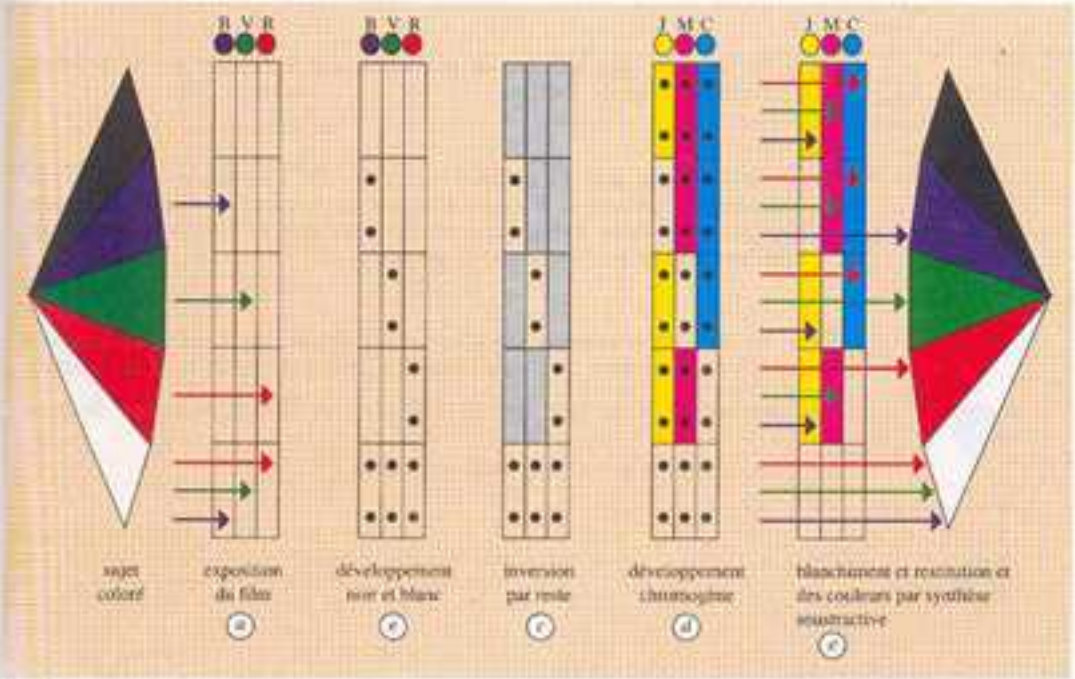


Fig. 19

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

- Connaître la signification des caractéristiques principales d'un ob photographique :
  - sa **distance focale** f ;
  - son **nombre d'ouverture minimale** N_{mini} ;
  - son **angle de champ.**

- Savoir définir le nombre d'ouverture : $N = \frac{f}{d}$.

- Se souvenir que le **diamètre d'ouverture,** d, d'un objectif peut v en agissant sur N, dont les valeurs forment une suite de raison

- Se rappeler que la **mise au point** consiste à obtenir sur la pelli une image nette de l'objet.

- Se souvenir que l'existence du grain de l'émulsion entraîne tolérance de netteté de l'image d'où une **profondeur de champ** : dist des plans de front extrêmes entre lesquels doit se trouver l'objet que son image soit nette sur la pellicule.

- Retenir que la **prise de vue** d'une bonne image sur la pellicule dema un choix approprié et concomitant du temps de pose t, et du nom d'ouverture N, tel que $\frac{t}{N^2}$ ait une certaine valeur, le temps de p étant à choisir parmi une suite de raison $\frac{1}{2}$.

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

Un objectif photographique est assimilé à une lentille mince convergente de distance focale 50 mm.
Pour photographier un cycliste à 8 m de l'objectif, l'opérateur effectue d'abord la mise au point.

1) Calculer la distance de la lentille à la pellicule. Comparer sa valeur à celle de la distance focale.

2) La trajectoire du cycliste est orthogonale à l'axe optique de la lentille et sa vitesse est $v = 5\ m.s^{-1}$. Calculer la durée maximale d'ouverture de l'obturateur pour avoir une image nette du cycliste, si le grain de la pellicule est 0,1 mm. Quel temps de pose choisir?

3) Le cycliste revient ensuite à 4 m de l'objectif et s'arrête. Sans changer la mise au point précédente, le photographe règle l'ouverture du diaphragme pour obtenir une image considérée comme nette. Calculer la valeur maximale du diamètre d. Quel nombre d'ouverture peut-il choisir?

SOLUTION

1) Distance pellicule-lentille

Soit A le cycliste-objet et A' l'image qu'en donne la lentille. A partir de la relation de conjugaison et avec $\overline{OA} = -8$ m et $\overline{OF'} = 50 \times 10^{-3}$ m, il vient :

$$\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

d'où

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}} + \frac{1}{\overline{OA}},$$

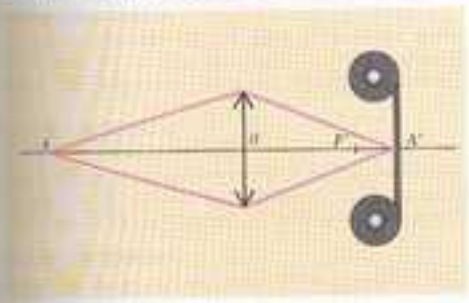
soit

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{50 \times 10^{-3}} - \frac{1}{8}$$

et

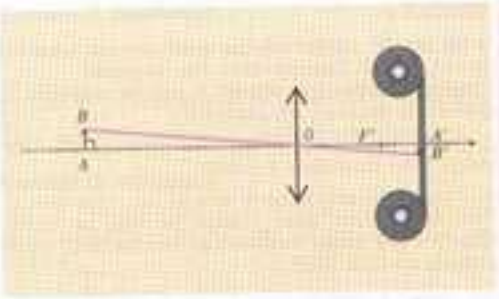
$$\boldsymbol{\overline{OA'} = 0{,}050\,3\ m.}$$

Cette valeur est très voisine de la distance focale.



2) Durée d'ouverture et temps de pose

Soit t la durée maximale d'ouverture de l'objectif pour avoir une image nette. Pendant cette durée, le cycliste franchit la distance $AB = v.t$ et la lentille en donne l'image $A'B'$. Pour que l'image du cycliste soit nette, il faut que la longueur $A'B'$ soit inférieure ou juste égale au grain a' de la pellicule.



De la relation du grandissement : $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

il vient : $AB = A'B' \cdot \frac{OA}{OA'} = v.t$. Avec $A'B' = a'$ on tire :

$$t = \frac{a'}{v} \cdot \frac{OA}{OA'}$$

$$t = \frac{10^{-4} \times 8}{5 \times 0{,}050\,3} = 31{,}8 \times 10^{-4}\ s$$

$$\boldsymbol{t = 3{,}18\ ms.}$$

Il faut choisir le temps de pose juste inférieur, soit $\frac{1}{500}$

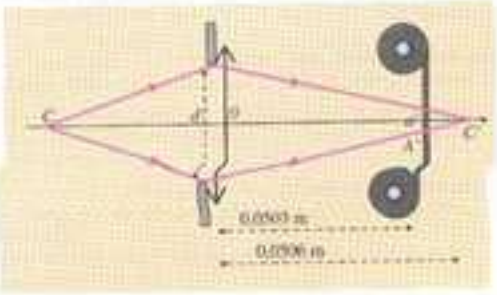
3) Nombre d'ouverture

Le cycliste est maintenant en C et $\overline{OC} = -4$ m. La lentille en donne l'image C'. D'après la relation de conjugaison on tire $\overline{OC'} = 0{,}050\,6$ m.
Sur la pellicule, placée avant le point de convergence des rayons, se forme une tache. Il faut que son diamètre soit inférieur ou juste égal à a'.
En considérant les deux triangles semblables de sommet C' et de base d et a', il vient :

$$\frac{a'}{d} = \frac{A'C'}{OC'} \quad \text{d'où} : \quad d = a' \cdot \frac{OC'}{A'C'}$$

$$d = 10^{-4} \times \frac{0{,}050\,6}{0{,}000\,3} = 15{,}9 \times 10^{-3}\ m.$$

Or, $\frac{f'}{d} = \frac{50}{15{,}9} = 3{,}14$, il faut donc choisir le nombre d'ouverture $\boldsymbol{N = 4.}$



1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 2

1) Un objectif photographique porte les inscriptions : 24 mm et 1 : 2. Que signifient ces nombres?
L'opérateur laisse son objectif à « pleine ouverture », quel est le diamètre d'ouverture?

2) Quelle mise au point effectuer pour obtenir une image nette d'un objet à l'infini?

3) L'opérateur photographie ensuite un objet situé à 5 m de l'objectif, sans changer la mise au point. Obtient-il une image satisfaisante avec un grain de la pellicule de 0,05 mm?

SOLUTION

1) Signification des nombres inscrits et diamètre d'ouverture

La distance focale, f, de l'objectif est 24 mm, c'est donc un grand angulaire, et le nombre d'ouverture minimal, N_{min}, est 2.

Or le nombre d'ouverture est : $N = \frac{f}{d}$ d étant le diamètre d'ouverture, donc : $d = \frac{f}{N} = \frac{24}{2} =$ **12 mm.**

C'est la valeur maximale du diamètre d'ouverture de l'objectif dit ici objectif à « pleine ouverture ».

2) Mise au point

La mise au point consiste à obtenir une image nette de l'objet sur la pellicule. Si l'objet est à l'infini, d'après la relation de conjugaison, la distance lentille-image $\overline{OA'} = f =$ **24 mm.**
Il faut donc régler l'appareil pour que la distance lentille-pellicule soit de 24 mm.

3) L'image est-elle satisfaisante?

Si l'objet est plus proche de l'objectif son image n'est plus à la distance précédente $\overline{OA'} = f$.
Sa nouvelle valeur est obtenue à partir de la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \quad \text{soit} : \quad \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}} + \frac{1}{\overline{OA}}$$

Avec $f = 24$ mm et $\overline{OA} = -5$ m $= -5\,000$ mm il vient :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{24} - \frac{1}{5\,000}$$

et : $\overline{OA'} =$ **24,116 mm.**

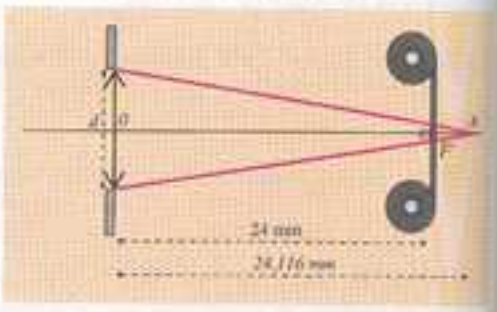
Par conséquent la pellicule est située 0,116 mm avant le point A' de l'image et l'on observe une tache de diamètre ε, sur la plaque sensible.

La valeur du diamètre ε est obtenue en considérant les deux triangles semblables de sommet A' et de hauteurs $A'O = 24{,}116$ mm et $A'F' = 0{,}116$ mm et de bases d (diamètre d'ouverture) et ε (diamètre de la tache) : $\frac{\varepsilon}{d} = \frac{A'F'}{A'O}$,

d'où : $$\varepsilon = d \cdot \frac{A'F'}{A'O}$$

soit : $\varepsilon = 12 \times \frac{0{,}116}{24{,}116} = 0{,}058$ mm $> 0{,}05$ mm.

Le diamètre de la tache est légèrement supérieur au grain de la pellicule donc **l'image ne sera pas satisfaisante.**



2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATIONS

Exercice 1

Un objectif photographique est modélisé par une lentille mince diaphragmée. Schématiser cet objectif. Définir la distance focale de la lentille.
Qu'appelle-t-on objectif à « focale fixe » et à « focale variable » ? Donner des exemples.

Exercice 2

Qu'est-ce que le diamètre d'ouverture d'un objectif assimilé à une lentille mince? Comment peut-on le modifier?
Quelles conséquences s'ensuivent lorsqu'il est très réduit? très ouvert?

Exercice 3

On lit sur un objectif grand angulaire : 35 mm et 1 : 1,4.

1) Que signifient ces nombres?

2) Calculer le diamètre d'ouverture de l'objectif.

Est-ce le plus petit ou le plus grand?

Exercice 4

Mêmes questions avec un téléobjectif : 800 mm et 1 : 5,6.

Exercice 5

Calculer l'angle de champ d'un objectif standard de distance focale 50 mm avec une pellicule 24 × 36 mm². Même question avec un téléobjectif de distance focale 300 mm.
Comparer les angles de champ et conclure.

Exercice 6

Calculer les valeurs extrêmes des angles de champ d'un zoom portant les inscriptions 80-300 mm pour une pellicule 24 × 36 mm². Conclure.

* Exercice 7

Un objectif standard 50 mm peut être utilisé entre l'infini et 50 cm. Calculer le « tirage » à effectuer pour obtenir une image nette dans les deux cas extrêmes.

* Exercice 8

Un objectif photographique 50 mm et 1 : 1,4 est réglé pour une mise au point sur l'infini à pleine ouverture. Le grain de la pellicule est 0,02 mm. L'image d'un objet situé à 8 m de l'objectif sera-t-elle satisfaisante?

Exercice 9

Calculer le temps de pose de la photographie des étoiles (fig. 4 p. 8).

Exercice 10

Comment varie l'axe non diaphragmée d'un objectif photographique assimilé à une lentille mince de distance focale $f = 50$ mm, associé à un diaphragme à iris axé sur son axe principal, lorsque le nombre d'ouverture passe de 4 à 5,6 puis à 8?

Exercice 11

Montrer, avec les couples de valeurs $\frac{1}{250}$ (s) et 8, $\frac{1}{125}$ (s) et 5,6 que lorsque le temps de pose double, l'aire non diaphragmée de l'objectif est double.

Exercice 12

On a relevé sur la monture d'un objectif photographique : 50 mm et les deux séries de valeurs :

$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{250}$
4	5,6	8	11	16	22

1) Que signifient ces nombres? Quelles suites forment-ils?

2) Pour effectuer une photographie correcte, l'appareil propose le couple de valeurs $\frac{1}{60}$ et 11 ou $\frac{1}{125}$ et ? Compléter le deuxième couple de valeurs en justifiant.

Exercice 13

1) Qu'appelle-t-on profondeur de champ?

2) Elle dépend de plusieurs paramètres comme le montre la relation :

$$D_{max} - D_{min} = \frac{2s' \cdot D^2}{d \cdot f}$$

Que signifient ces grandeurs?

3) Comment varie la profondeur de champ avec le nombre d'ouverture?

* Exercice 14

On veut photographier une voiture de 3 m de long située à 20 m avec un zoom caractérisé par : 75 – 300 mm.
La mise au point est réalisée successivement avec les deux valeurs extrêmes de la « focale ».
Calculer les grandissements correspondant à ces deux cas et les comparer.

Exercice 15

Un objectif photographique porte les indications 50 mm; 1 : 1,4. On veut photographier sur une pellicule 24 × 36 mm² une tige AB de 50 cm de haut située à 1 m de l'objectif.
En modélisant cet objectif par une lentille mince de même distance focale, ouverte à pleine ouverture :

1) Calculer la distance objectif-pellicule de l'appareil et la dimension de l'image sur la pellicule convenablement disposée.

2) Tracer à l'échelle 1, la marche des faisceaux lumineux pénétrant dans l'appareil, s'il pointe le milieu de l'objet.
(On tracera les faisceaux provenant des points extrêmes A et B.)

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 16

Sur la monture d'un objectif est gravé :

50 mm 1 : 1,2.

1) Qu'en déduire?
Proposer un schéma modélisant cet objectif par une lentille mince.

2) L'appareil est d'abord mis au point sur l'infini. Quelle est la distance lentille-pellicule?

3) Il est ensuite mis au point sur un objet à la distance $D = 5$ m. De combien et dans quel sens déplacer l'objectif par rapport à la pellicule?
La notion de profondeur de champ est ici ignorée.

Exercice 17

Le procédé Kodak de tirage d'une diapositive sur papier fait appel à un papier constitué de trois couches sensibles au bleu, vert et rouge contenant des coupleurs produisant les teintes jaune, magenta et cyan.
Après projection de la diapositive sur le papier, on réalise le traitement suivant :

- développement noir et blanc;
- lavage;
- pose d'inversion ou inversion chimique;
- développement chromogène;
- blanchiment-fixage;
- lavage;
- séchage.

1) Montrer que ce procédé, appelé « positif-positif » ou « copie-copie », donne bien une épreuve sur papier ayant les mêmes couleurs que la diapositive de départ.

2) Est-il possible par ce procédé, d'obtenir une copie de diapositive?

EXERCICES D'APRÈS SUJETS D'EXAMENS

* Exercice 18

On désire photographier une personne située à 2 m d'un objectif photographique assimilé à une lentille mince convergente de distance focale $f = 50$ mm.
L'appareil est mis au point sur le sujet.

1) Calculer la distance lentille-pellicule.

2) Avec un grain d'émulsion $a' = 0{,}1$ mm, sera-t-il possible de voir nettement sur l'image l'autre personne située 3 m derrière la première, si l'objectif est diaphragmé à $d = 25$ mm, puis à 5 mm.

* Exercice 19

Téléobjectif

Un téléobjectif est formé de deux lentilles minces coaxiales L_1 et L_2 distantes de $O_1O_2 = e = 2$ cm.
La lentille L_1, convergente, de distance focale $f_1 = 6$ cm reçoit la lumière issue d'un objet AB très éloigné, et la lentille L_2, divergente, à la distance focale f_2.
La pellicule photographique est à la distance $\ell = 10$ cm de la lentille L_1.

1) Construire l'image A_1B_1 donnée par la lentille L_1, puis l'image définitive $A'B'$ donnée par le téléobjectif sur la pellicule.

2) Déterminer la valeur de la distance focale f_2.

3) L'objet AB a un diamètre apparent $\alpha = 1°$.
Calculer la dimension de l'image qu'en donne ce téléobjectif.

4) Quelle serait la dimension de l'image de cet objet avec une seule autre lentille convergente de distance focale convenable située à la distance $\ell = 10$ cm de la pellicule?

Exercice 20

Un objectif photographique porte les inscriptions : 1 : 4,5 et $f = 135$ mm. Quels renseignements peut-on en tirer?
Il est supposé être constitué par une lentille mince et un diaphragme à iris centré sur l'axe et situé contre la lentille.

1) On photographie un objet plan vertical situé à une distance $p = 15$ m avec un nombre d'ouverture $N = 11$ et un temps de pose $t = \frac{1}{8}$ s.

Quelle est la position de la plaque sensible pour avoir la netteté maximale?
Cette plaque mesure 9×12 cm^2. Quelles sont les dimensions du plan objet qui apparaissent sur la photographie?

2) Qu'appelle-t-on nombre d'ouverture N? L'un de ces nombres étant 11, trouver tous les autres compris entre 5 et 32. Calculer le diamètre O' du faisceau parallèle qui pénètre dans l'appareil quand on règle l'ouverture du diaphragme avec chacun de ces nombres.

3) On admet qu'une photo a une netteté convenable quand le diamètre de l'image d'un point lumineux ne dépasse pas la valeur a'. La mise au point est faite sur le plan (P) vertical, normal en A à l'axe principal et situé à la distance p du diaphragme. La plaque sensible est placée dans le plan (P') conjugué du plan (P) à la distance p' du diaphragme.
a) Calculer la distance p_1 du point A_1 le plus rapproché sur l'axe principal et la distance p_2 du point A_2 le plus éloigné, qui donnent sur la plaque sensible une image de diamètre a', le nombre d'ouverture étant N. Les distances sont repérées par rapport au diaphragme. Pour cela :
Tracer les faisceaux lumineux qui couvrent toute la surface de l'objectif :
le 1er issu de A_1 converge en son image A_1';
le 2e issu de A_2 converge en son image A_2' (ne pas respecter les cotes).
Considérer les triangles semblables dont les hauteurs sont p_1 et $p - p_1$; p_2 et $p_2 - p$ et déterminer les relations qui lient p, p_1, a et N; p, p_2, a et N.

Application : $a = 40$ µm.

b) Déterminer la profondeur de champ de l'appareil pour la photographie prise en 1).

2. EXERCICES PROPOSES

c) Si on veut que la profondeur de champ s'étende de $p_1 = 6$ m à $p_2 = 100$ m, à quelle distance p faut-il faire la mise au point? Quel nombre d'ouverture N faut-il employer? Quel temps de pose t faut-il prendre? Les conditions d'éclairement sont les mêmes qu'en 1).

Exercice 21

Un appareil photographique peut être équipé de différents objectifs dont on veut étudier certaines propriétés. L'image est reçue sur une pellicule de format 24 mm × 36 mm².

1) Objectif « longue focale »
Il est constitué d'une lentille mince de distance focale 135 mm.

a) Le champ transversal est limité par les dimensions de la pellicule. La mise au point étant faite sur l'infini, déterminer l'angle de champ : en largeur et en hauteur.
Calculer la dimension de l'image d'un objet de hauteur égale à 20 m situé à 2 km de l'objectif.

2) Afin de réduire les aberrations chromatiques l'objectif est constitué de deux lentilles minces accolées.
Une lentille plan convexe de rayon de courbure R_1, taillée dans un verre en crown peu dispersif d'indice moyen $n_1 = 1,51$ et une lentille plan concave de rayon de courbure R_2, taillée dans un verre en flint plus dispersif d'indice moyen $n_2 = 1,65$.
Calculer les vergences C_1 et C_2 des deux lentilles et leurs rayons de courbure sachant que pour supprimer les aberrations chromatiques il faut, en tenant compte des pouvoirs dispersifs des deux verres, que :

$$C_2 = -0,6C_1.$$

3) Téléobjectif
Il est constitué d'une lentille mince convergente L_1 de distance focale $f_1 = 64$ mm et d'une lentille mince divergente L_2 de distance focale $f_2 = -32$ mm, les deux lentilles étant séparées par une distance de 40 mm. La mise au point étant faite sur l'infini, vérifier que ce téléobjectif a le même encombrement que le précédent, c'est-à-dire que la distance de la lentille L_1 à la pellicule est très voisine de 135 mm.
Comparer la grandeur des images données par le téléobjectif et l'objectif précédent.

EXERCICES DESTINÉS A TESTER LES CAPACITÉS

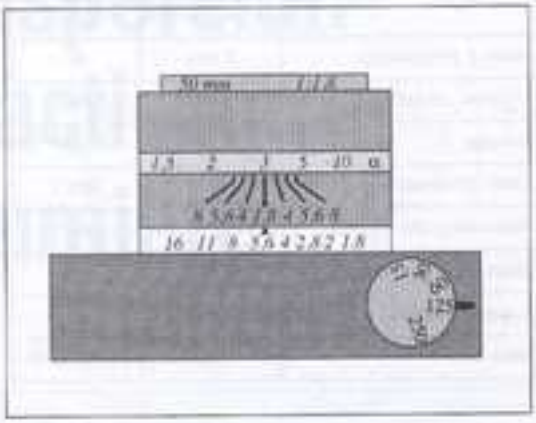
Exercice 22 A.1.a.

Définir le nombre d'ouverture.
La monture d'un objectif porte l'inscription 24 mm; 1 : 2.
Que signifient ces nombres?
Quelle autre grandeur en déduire?

Exercice 23 A.1.b.

Donner l'ordre de grandeur de la distance focale d'un objectif photographique standard, d'un grand angulaire et d'un téléobjectif.

Exercice 24 A.2.a.



Lire sur le schéma de la monture de l'objectif photographique prêt à la prise de vue :
— ses caractéristiques;
— les valeurs du temps de pose, du nombre d'ouverture et de la profondeur de champ;
— proposer un autre couple de valeurs des réglages sachant que le sujet à photographier est un coureur.

Exercice 25 B.1.

A partir de prospectus fournis par les fabricants d'appareils photographiques, dresser une liste des caractéristiques (nombre de lentilles, distance focale, nombre d'ouverture minimum, angle de champ...) des objectifs en les classant.

Exercice 26 B.4

On relève sur un prospectus les deux tableaux suivants :

Bain de traitement	Temps	Température (°C)
Révélateur	7 min 30s pour le 1er et le 2e film 8 min pour le 3e et le 4e film 8 min 30 s pour le 5e et le 6e film	33 ± 0,3
Bain de blanchiment-fixage	11 min	30 ± 1,0
Lavage (eau courante)	4 min	30 ± 5,0
Bain final	1 min	30 ± 5,0

2. EXERCICES PROPOSES

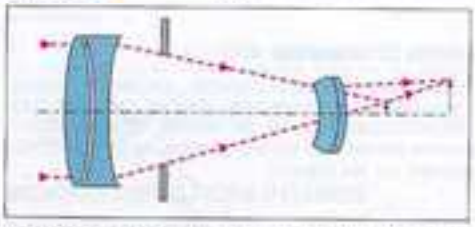
Bain de traitement	Durée du traitement Kit de 500 cm³	Température (°C)
Mise à température	8 min	40
Premier révélateur	6 min	38 ± 0,3
Lavage	2 min	38
Bain d'inversion	2 min	38 ± 1
Révélateur chromogène	4 min	38 ± 1
Bain de blanchiment-fixage	6 min	38
Lavage (eau courante)	3 min	38
Bain final	1 min	Temp. amb.

L'un des tableaux concerne le traitement d'un film couleur négatif, l'autre le traitement d'un film inversible.

1) Attribuer à chaque tableau le film correspondant.

2) Commenter chaque tableau en insistant sur le rôle de chaque bain de traitement.

Exercice 27 C.1.



Un catalogue donne le détail des lentilles constituant un téléobjectif photographique à l'échelle $\frac{1}{2}$.

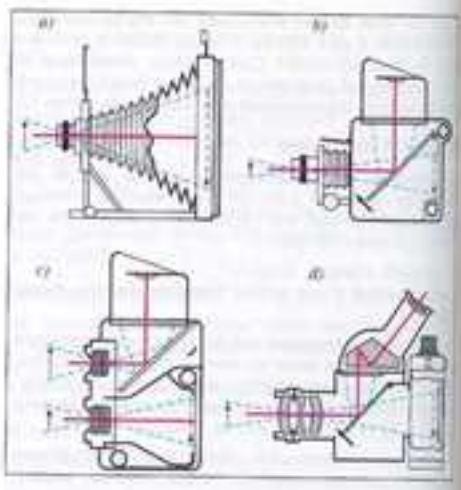
Il est formé de deux paires de 2 lentilles accolées.

1) Après avoir effectué les mesures utiles donner un ordre de grandeur de la vergence de chaque paire de lentilles, assimilée à une lentille mince. Interpréter le trajet du faisceau lumineux qui pénètre dans l'objectif.

2) L'objet se rapproche de l'appareil photographique. Comment refaire la mise au point si la distance entre la pellicule et la paire de lentilles où pénètre la lumière est constante?

Exercice 28 C.2.

Ce document donne quatre systèmes de mise au point sur verre dépoli de l'image d'un objet donné par des objectifs photographiques. Interpréter leur fonctionnement.



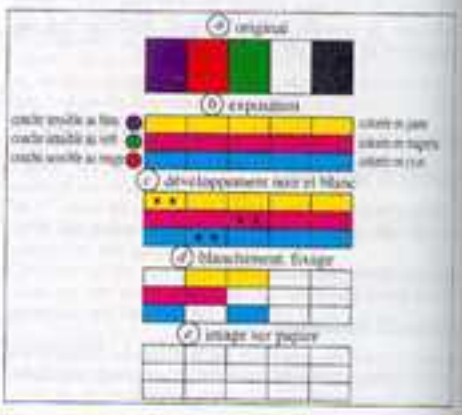
Exercice 29 C.2.

Le procédé Cibachrome de tirage d'une diapositive sur papier utilise un papier, constitué de trois couches sensibles au bleu, vert et rouge et qui contiennent déjà les pigments colorés complémentaires jaune, magenta et cyan, avant même d'être exposées et développées.

Après exposition le papier subit le traitement suivant :

- développement noir et blanc;
- blanchiment-fixage : qui élimine l'argent et ses composés, ainsi que les colorants des parties exposées;
- lavage.

Montrer que ce procédé dit « décoloration par l'argent de l'image » donne bien, sur papier, les couleurs de l'original. (On complétera la figure.)

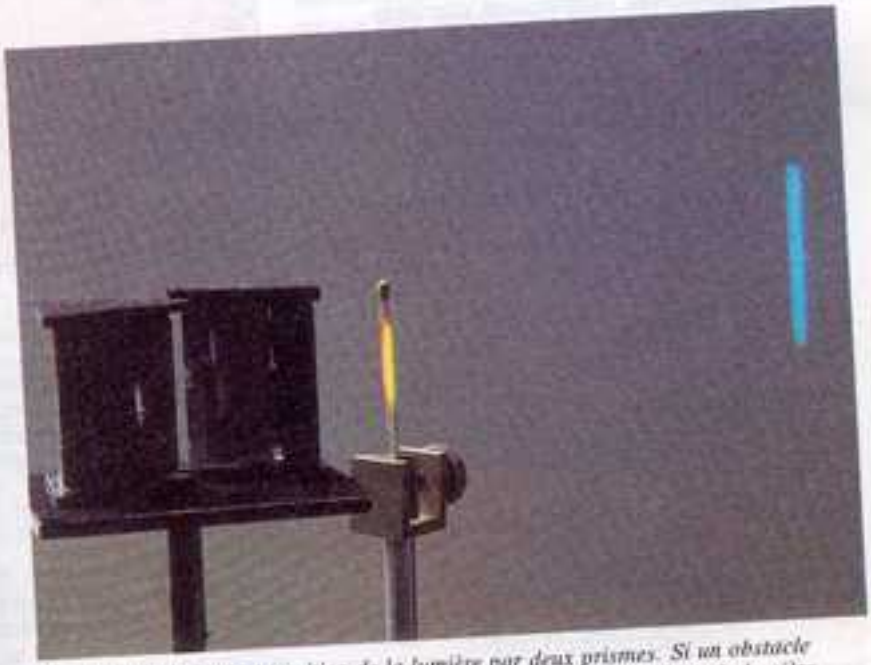


14 Dispersion et diffraction de la lumière

1 Nature de la lumière.

2 Phénomène de dispersion.

3 Phénomène de diffraction.



Décomposition et recomposition de la lumière par deux prismes. Si un obstacle est placé sur le trajet de la zone jaune-rouge de la lumière émergente, la lumière non arrêtée, qui converge sur l'écran est bleue.

1 NATURE DE LA LUMIÈRE

La nature de la lumière est un phénomène complexe. Selon les effets que l'on observe et les expériences que l'on réalise pour les comprendre, la lumière peut s'interpréter soit comme une onde électromagnétique, soit comme un flux de particules appelées photons.

• Une **onde électromagnétique** est une onde progressive, constituée d'un couple de champs : *électrique* et *magnétique*, orthogonaux, en phase et proportionnels (fig. 1). Cette onde est caractérisée par l'amplitude d'un de ces champs, (E_0, celle du champ électrique) et par sa longueur d'onde λ, (ou sa fréquence ν).

• Un **flux de photons** est comme un jet continu de particules.
Il est caractérisé par le nombre de ses photons et par leur énergie individuelle.
Les propriétés de la particule photon, seront détaillées dans les deux chapitres suivants.
Les ondes électromagnétiques s'étalent sur un vaste domaine de fréquence, de 10^4 à 10^{26} Hz. Selon sa place en ce domaine, une onde sera en pratique notée :
— par sa fréquence, pour les fréquences basses;
— par sa longueur d'onde, ensuite;
— par l'énergie des photons dans son interprétation en tant que flux de photons.

Ces quantités sont évidemment corrélées :
— La fréquence ν, de l'onde, est reliée à la longueur d'onde λ, et à la célérité de la lumière par la formule :

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

λ en mètre (m)
$c = 3 \times 10^8$ m.s^{-1}
ν en hertz (Hz)

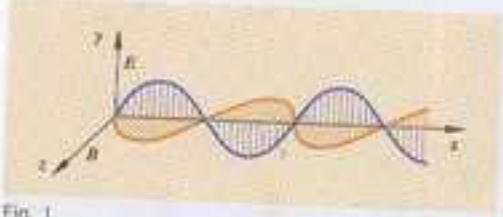


Fig. 1
L'onde se propage selon l'axe des x.
Le champ électrique est transversal,

$$E = E_0 . \cos \omega . \left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Le champ magnétique lui est orthogonal, en phase et proportionnel.

— L'énergie, E, d'un de ses photons est reliée à sa longueur d'onde par la relation :

$$E = h . \nu = h . \frac{c}{\lambda},$$

soit : $E = \frac{1\,241}{\lambda}$, si E est exprimée en électronvolt (eV) et λ en nm (voir chapitre 16).

Le tableau ci-dessous présente ce vaste domaine :

ν	λ	E	dénomination
30 kHz	30 km		• radiofréquences
100 kHz	3 km		• ondes longues
1 MHz	300 m		• ondes moyennes
10 MHz	30 m		• ondes courtes
100 MHz	3 m		
10^{9} Hz	300 mm		• T.V.
10^{10}	30 mm		• Radar
10^{11}	3 mm		
10^{12}	300 µm		
10^{13}	30 µm		• Infrarouge
10^{14}	7 µm		
2×10^{14}	300 nm	4,13 eV	• visible
7×10^{14}	30 nm	41,3 eV	• U.V. voisin
10^{15}	3 nm	413 eV	
10^{16}	300 pm	4,13 keV	• X
10^{17}		41,3 keV	
10^{18}		413 keV	
10^{19}		4,13 MeV	
10^{20}		41,3 MeV	
10^{21}		413 MeV	• γ
10^{24}		4,13 GeV	
10^{25}		41,3 GeV	
10^{26}		413 GeV	
	$\lambda_{(nm)} = \frac{3 \times 10^8}{\nu_{(Hz)}}$	$E_{(eV)} = \frac{1241}{\lambda_{(nm)}}$	

Les **ondes lumineuses** sont, dans l'ensemble des ondes électromagnétiques, celles qui sont détectées par l'œil. Leur domaine de longueur d'onde est étroit : de 400 nm pour le violet à 800 nm pour le rouge.

Leurs fréquences vont donc de $3{,}75 \times 10^{14}$ à $7{,}5 \times 10^{14}$ Hz et leurs énergies de 1,55 à 3,10 eV. L'œil, en tant que détecteur agit comme une antenne. Les bâtonnets ne sont sensibles qu'au champ électrique, c'est pourquoi dans ce chapitre on se limitera à considérer la lumière comme **une onde progressive d'un champ électrique.**

2 LE PHÉNOMÈNE DE DISPERSION

1. Célérité et indice de réfraction

La lumière se propage dans le vide, dans l'air et dans certains milieux matériels dits « transparents » comme le verre, l'eau...
Dans le vide, sa vitesse de propagation est une des constantes universelles de la nature et vaut :

$$c = 2{,}997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}.$$

Dans les milieux transparents sa vitesse de propagation est moindre, et d'autant moindre que le milieu est plus dense.

Pour caractériser le milieu, du point de vue optique, on défini son indice de réfraction, n. C'est le rapport de la vitesse de propagation de la lumière dans le vide, c, à sa vitesse de propagation dans le milieu, v :

$$n = \frac{c}{v}$$

Le tableau suivant présente quelques indices de réfraction :

Matériau	Indice pour 589 nm
Air	1,000 293
Eau	1,33
Alcool	1,36
Plexiglass	1,50
Quartz	1,51
Crown	1,52
Flint	1,90
Diamant	2,42

– celui de l'air est voisin de 1,0;
– celui de l'eau est voisin de 1,33;
– celui du verre est voisin de 1,5.

L'indice n du milieu **dépend de la longueur d'onde** λ de la lumière qui le traverse. Cette dépendance est faible mais néanmoins facilement observable. On représente cette dépendance par une relation du type :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

Les constantes A et B dépendent du milieu (fig. 2).

L'essentiel est que l'indice de réfraction *augmente* quand la longueur d'onde diminue.
Le trajet des rayons lumineux dans un milieu transparent, dépend de l'indice de réfraction de ce milieu.
Pour un faisceau lumineux incident de lumière blanche, qui comprend toutes les longueurs d'ondes du domaine visible, la trajectoire des rayons dépendra donc de leur longueur d'onde, et le **trajet des rayons rouges sera différent de celui des rayons bleus.**
Le milieu est dit **dispersif.** Tous le sont, plus ou moins.

Remarque technique :
Dans des études préliminaires d'un appareillage, pour s'affranchir de cette difficulté, on utilise de la lumière dont tous les rayons ont même longueur d'onde : une telle lumière est dite **monochromatique** (ce qui revient à sélectionner une seule couleur dans le spectre du visible).

Pour obtenir de la lumière monochromatique deux méthodes sont pratiquées :

• soit utiliser une source lumineuse qui n'émet que sur une seule longueur d'onde :
exemples :
— la vapeur de sodium qui émet une raie jaune,
— la vapeur de césium dont la raie est si fine qu'elle servait d'étalon de longueur,
— un laser, à rubis ou à hélium-néon qui émet à $\lambda = 628$ nm;

• soit interposer, sur le trajet de la lumière blanche, un filtre coloré sélectif qui ne laisse passer que sa couleur, dans un domaine étroit de longueur d'onde.

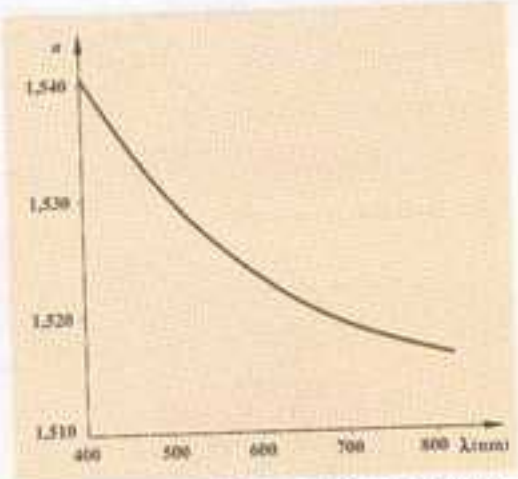


Fig. 2. *Variation de l'indice de réfraction d'un verre crown avec la longueur d'onde.*

2. Rappel des lois de l'optique géométrique

L'optique géométrique est l'étude des trajets des rayons lumineux à travers une succession de divers milieux transparents (d'indices de réfraction différents).

Elle repose sur un principe simple :

pour aller d'un point à un autre la lumière suit le trajet qui correspond au **moindre temps de parcours.**

De ce principe se déduisent sans difficultés **les lois de Descartes :**

— si les deux points sont dans le même milieu, la lumière se **propage en ligne droite** (fig. 3);

— si la lumière subit une réflection (fig. 4) **l'angle de réflexion** i' est égal à **l'angle d'incidence** i :

$$i = i'$$

— si la lumière subit une **réfraction** (fig. 5) à la surface qui sépare un milieu d'indice n_1, d'un milieu d'indice n_2, les angles d'incidence i_1 et de réfraction i_2, vérifient la relation :

$$n_1 . \sin i_1 = n_2 . \sin i_2$$

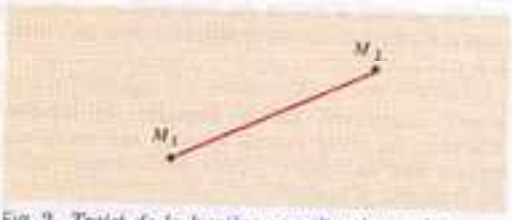


Fig. 3. *Trajet de la lumière en milieu homogène.*

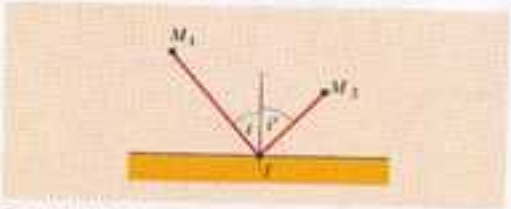


Fig. 4. *Réflexion sur un plan.*

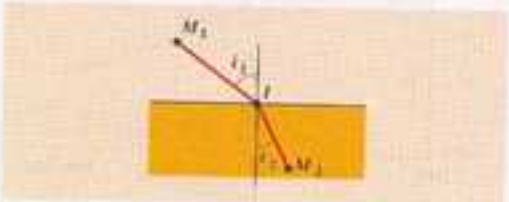


Fig. 5. *Réfraction à la surface de séparation de deux milieux d'indices de réfraction différents.*

3. Déviation de la lumière par un prisme

Un prisme est essentiellement un milieu transparent limité par deux plans faisant entre eux un angle A. Le milieu (du verre en général) a un indice de réfraction n. Le plus souvent le prisme est placé dans de l'air, d'indice voisin de 1.

a) Les quatre relations du prisme

Si un fin pinceau de lumière monochromatique frappe une des faces d'un prisme, il subit une réfraction à l'entrée, une à la sortie et est donc dévié, par la traversée du prisme, d'un angle D par rapport à sa direction incidente (fig. 6).

L'examen de la figure permet de déduire les quatre relations du prisme :

1. $\sin i = n . \sin r$
2. $\sin i' = n . \sin r'$
3. $r + r' = A$
4. $D = i + i' - A$

— Les deux premières sont les lois de Descartes sur les deux faces : entrée et sortie.

— La troisième s'établit dans le triangle QIR : l'angle A se retrouve entre les normales aux faces.

— La quatrième s'obtient en suivant la déviation du rayon dans le triangle QUR :
une déviation de $i - r$ à la face d'entrée, et une de $i' - r'$ à la face de sortie soit :

$$D = (i - r) + (i' - r) = i + i' - (r + r') = i + i' - A$$

b) Déviation minimale

La déviation D, pour un prisme donné, dépend de l'angle d'incidence; elle peut prendre une valeur minimale : D_m (fig. 7 et fig. 8).

Lorsqu'il en est ainsi, l'expérience montre, et le calcul confirme que le trajet de la lumière est **symétrique** par rapport aux faces du prisme et que la déviation, D_m, est donnée par la relation

$$\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right) = n . \sin\frac{A}{2}$$

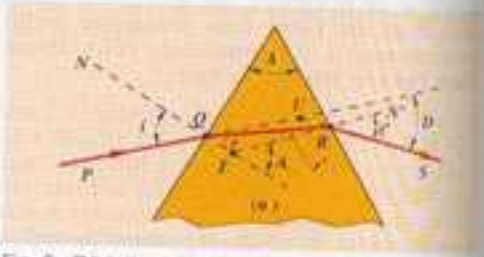


Fig. 6. *Déviation par un prisme.*

La condition de symétrie du trajet de la lumière par rapport aux faces du prisme se traduit par : $i=i'$, noté i_m, et : $r=r'=\frac{A}{2}$ (puisque $r+r'=A$), ce qui permet de calculer i_m par la relation :

$$\sin i_m = n \cdot \sin \frac{A}{2}$$

D'autre part $D_m = 2i_m - A$, le remplacement de i_m par $\frac{D_m + A}{2}$ dans la relation précédente, donne l'équation de la déviation minimale.

Cette équation est à la base des mesures des indices des milieux transparents : on construit un prisme de ce milieu, on en mesure l'angle au sommet A, et la déviation minimum de la lumière D_m ; on en déduit n.

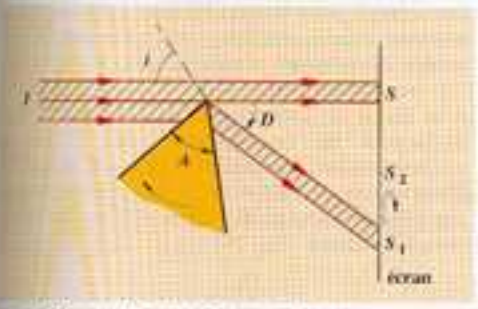


Fig 7. *Selon i, D passe par un minimum.*

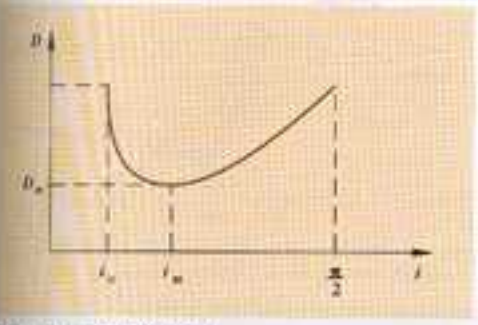


Fig 8. *D en fonction de i.*

c) Cas des prismes dont l'angle au sommet est petit

Dans le cas où l'angle au sommet A du prisme est petit, et si les rayons incidents sont voisins de la normale, les formules se simplifient car lorsque les angles i et r, i' et r' sont faibles on peut faire l'approximation $\sin a \approx a$ (à condition que a soit exprimé en radian). Les relations de la réfraction s'écrivent alors :

$$i = n \cdot r$$

et : $$i' = n \cdot r'$$

d'où : $D = i + i' - A = n \cdot r + n \cdot r' - A.$

Or : $r + r' = A$, donc :

$$D = (n-1) \cdot A$$

Cette déviation est indépendante de i, l'angle d'incidence. Elle est est donc constamment égale à la déviation minimale D_m, tant que l'angle d'incidence reste faible.

4. Dispersion par un prisme

a) Étude expérimentale

Si un faisceau de lumière polychromatique traverse un prisme, à chaque longueur d'onde correspond un indice différent, donc une déviation différente.

Les rayons émergents ne sont pas parallèles pour les différentes couleurs et la **dispersion** est notable. C'est pourquoi les prismes sont essentiellement utilisés, en tant que pièce maîtresse des spectroscopes.

• **Expérience** (fig. 9)

La lumière émise par une source S est limitée par une fente étroite. Une lentille L en donne une image sur un écran au loin (à 1 ou 2 m); le faisceau de lumière après traversée de la lentille est pratiquement parallèle. Si l'on place un prisme, le faisceau lumineux est dévié et dispersé.

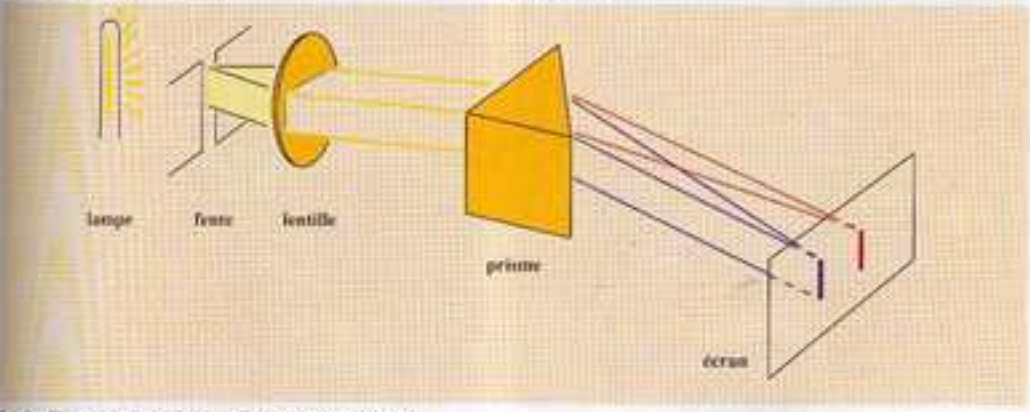


Fig 9. *Dispersion de la lumière par un prisme.*

Les différentes couleurs (longueur d'ondes) émises par la source donnent des images séparées sur l'écran.
Pour chaque longueur d'onde une ligne image de la fente apparaît sur l'écran.
L'ensemble forme le **spectre** de la lumière émise par la source.
Si la source est une lampe à vapeur de mercure, on observe, nettement détachées sur l'écran trois raies, bleu, verte et jaune, chacune image de la fente pour la longueur d'onde correspondante, et avec un bon réglage on observe le dédoublement de la raie jaune (fig. 10).
Si la source émet de la lumière blanche, l'image de la fente est composée d'une infinité d'images voisines, de couleur progressivement changeantes du bleu au rouge. C'est le **spectre continu** (fig. 11).
Le bleu est plus dévié que le rouge.

• **Deux exemples spectaculaires de dispersion :**
— *Décomposition et recomposition de la lumière par deux prismes* (fig. 12).
Comme dans le montage précédent une source, une fente F et une lentille L_1 créent un faisceau presque parallèle de lumière blanche qui donne, de la fente-source, une image sur un écran placé au loin. Une seconde fente, placée après la lentille, limite la largeur initiale du faisceau à 1 mm.
Ce faisceau rencontre un premier prisme qui le dévie et le disperse.
Un second prisme, identique au premier mais placé « tête bêche », remet le faisceau dans sa direction initiale, car l'ensemble des deux prismes agit comme une lame de verre à faces parallèles. Tous les rayons lumineux vont ressortir de cet ensemble parallèlement à leur direction incidente, et ceci quelle que soit leur longueur d'onde. Mais le faisceau sera élargi car la translation latérale due aux deux réfractions dépend de la longueur d'onde et il présentera donc latéralement, à la sortie du second prisme le spectre continu des couleurs.
La lumière est donc, en cet endroit **décomposée**.
Au loin, sur l'écran, tous les rayons colorés convergent pour former l'image de la fente; leur addition donne une image blanche, comme si le couple de prismes n'existait pas. Et la lumière est **recomposée** (fig. 13).
A la sortie du second prisme le faisceau a 1 cm de largeur. Si l'on déplace, monté sur une vis micrométrique, un **cache** de 3 mm de largeur, on observe sur le cache la couleur interceptée et sur l'écran l'image de la fente avec la **couleur complémentaire** (fig. 14).



Fig. 10. *Spectre de raies du mercure.*

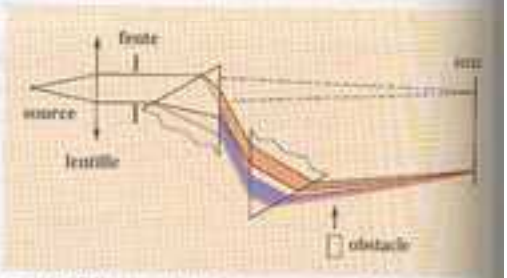


Fig. 12. *Schéma de la décomposition de la lumière par deux prismes et de sa recomposition sur l'écran.*



Fig. 11. *Spectre continu.*



Fig. 13. *L'expérience.*

– *L'arc-en-ciel* : ce phénomène est produit par les réfractions et les réflexions des rayons solaires dans les gouttes d'eau d'un mur de pluie que l'observateur regarde. Le spectre de couleur de l'arc est dû au pouvoir dispersif de l'eau.

Le mécanisme de la formation des deux arcs et de l'étalement de leurs couleurs est détaillé dans « Pour en Savoir Plus ». La modélisation est décrite dans la fiche expérimentale.

Remarque :

La pratique dans les spectroscopes, la lentille est placée pour que la fente soit à son foyer objet, et qu'il en ressorte un faisceau parallèle. Ce faisceau est réfléchi et dispersé par le prisme et repris par une seconde lentille qui le fait converger dans son plan focal. Un écran placé en ce plan met en évidence le spectre, continu ou de raies, de la lumière émise par la source.

b) Étude théorique

Le pouvoir dispersif, δ, d'un prisme, est défini comme la variation de la déviation en fonction de la longueur d'onde :

$$\delta = \frac{dD}{d\lambda}.$$

Pour analyser ce phénomène on écrit :

$$\delta = \frac{dD}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda}.$$

• Le premier facteur, $\frac{dD}{dn}$, dépend de la géométrie du montage.

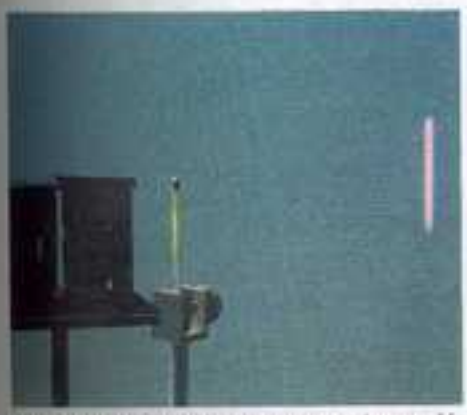


Fig. 14. Cette photographie est exactement la complémentaire de celle de la page titre. Si un obstacle est placé sur la zone bleue de la lumière émergente, l'image sur l'écran est rouge.

La déviation D varie comme n, ceci est peu évident sur les formules générales, mais très clair dans le cas où l'angle au sommet du prisme est petit : $D = (n-1)A$.

• Le second facteur $\frac{dn}{d\lambda}$, s'obtient à partir de la formule de l'indice de réfraction n, en fonction de la longueur d'onde λ :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2},$$

qui par dérivation donne :

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}.$$

Le signe moins rend compte du fait que l'indice de réfraction décroît lorsque la longueur d'onde croît.

Le bleu ($\lambda = 500$ nm par exemple) **est plus dévié que le rouge** ($\lambda = 800$ nm).

Ceci est à noter. Ce sera le **contraire** pour un **réseau.**

Par un prisme, se sont les longueurs d'onde les plus courtes qui sont les plus déviées, donc les ondes électromagnétiques les plus énergiques.

On peut comparer la dispersion du prisme à celle que produit un aimant sur un faisceau de particules chargées.

Une particule de charge q, de quantité de mouvement p, en passant dans une région où règne un champ magnétique $\vec{B}$, est déviée et décrit un cercle de rayon R tel que :

$$p = q \,.\, R \,.\, B.$$

A sa sortie de l'aimant la déviation est d'autant plus faible que sa quantité de mouvement est plus grande. Les particules énergiques sont les moins déviées, et un aimant agit à l'inverse du prisme.

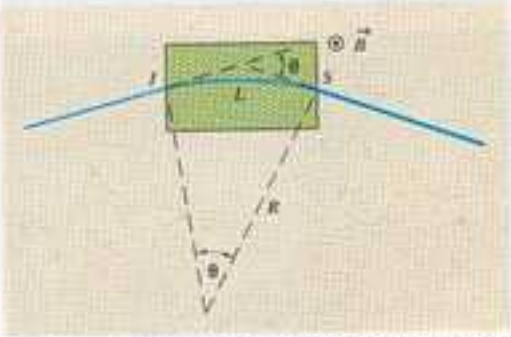


Fig. 15. — Courbure des trajectoires des particules chargées dans un champ magnétique.

3 LE PHÉNOMÈNE DE DIFFRACTION

Pour appréhender le phénomène de diffraction de la lumière par un réseau plusieurs étapes de connaissance sont nécessaires.

1. Rappel du phénomène d'interférence par deux fentes

• **Expérience dite des trous de Young**

— Si une source de lumière monochromatique éclaire une plaque percée de deux trous espacés d'une distance a, de l'ordre du mm, ces deux trous agissent comme deux sources synchrones et au-delà d'eux les faisceaux de lumière qu'ils rayonnent se superposent.
Si l'on place un écran assez loin des trous sources on observe sur cet écran les **franges d'interférences** (fig. 16).

— Par rapport à la médiatrice du segment qui joint les deux sources, l'image sur l'écran présente une frange centrale sur cette médiatrice, et, de part et d'autre d'elle, des franges situées à un écart angulaire θ tel que :

$$\sin \theta = k \cdot \frac{\lambda}{a}$$

k est un simple multiple.

— L'éclairement de l'écran, c'est-à-dire l'aspect en franges est d'allure sinusoïdale. L'intensité de la frange centrale est la plus forte.
Les intensités des franges latérales, qui devraient théoriquement lui être égales, diminuent à cause de la **diffraction** qui limite la zone éclairée de l'écran. C'est pourquoi l'on n'observe qu'un nombre limité de franges, quelques dizaines au plus.
Dans ce dispositif, l'angle θ est donc petit et l'on fait, dans les calculs, l'approximation : $\sin \theta \approx \theta$.

La position angulaire θ des franges brillantes est alors telle que : $\theta = k \cdot \frac{\lambda}{a}$.



Fig. 16. *Franges d'interférence.*

Si l'écran est situé à une distance D du plan des deux sources, l'**interfrange** i sur cet écran, vaut :

$$i = D \cdot \theta,$$

soit :

$$i = \frac{\lambda \cdot D}{a}$$

Les franges noires sont intercalées entre les brillantes. On définit la largeur $\Delta\theta$ d'une frange comme la distance angulaire entre son sommet et le premier minimum d'un côté ou de l'autre :

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{a}.$$

• Dans l'espace, les surfaces d'intensité maximale sont données par la relation :

$$r_2 - r_1 = k \cdot \lambda.$$

Ces surfaces sont des hyperboloïdes dont l'intersection par l'écran donne des arcs d'hyperboles pratiquement rectilignes dans la zone éclairée (ce sont les franges observées) (fig. 17).

Si l'on remplace les points sources par des fentes perpendiculaires au plan de la figure, les éclairements créés par chaque point de ces fentes, vont s'additionner sans déformer l'image d'interférence, mais celle-ci sera plus éclairée donc plus visible.

D'où l'usage de fentes au lieu de simples trous pour réaliser une figure d'interférence.

La disposition des franges dépend de la longueur d'onde de la lumière incidente. Si cette lumière n'est pas monochromatique il y a autant de système de franges que de longueurs d'onde, mais le décalage est faible, et si la lumière incidente est blanche les franges sont irisées, bleues côté frange centrale, rouge de l'autre.

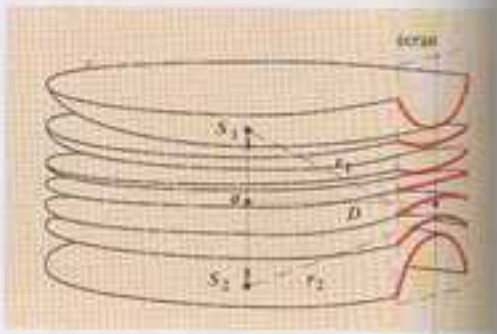


Fig. 17.

Interférences avec un réseau

Un réseau est en principe constitué d'un grand nombre de fentes parallèles extrêmement serrés. En pratique, il existe des réseaux par transmission, constitués d'un support transparent sur lequel sont tracées des lignes fines opaques, et des réseaux par *réflexion*, constitués d'une plaque métallique sur laquelle sont gravées des traits.

Le pas a du réseau est la distance interfente, il est de l'ordre de quelques µm, bien inférieur à la distance interfente du montage d'Young.

Le nombre N de fentes est de plusieurs milliers. La largeur du réseau est évidemment égale au produit $N.a$; elle est de quelques cm.

a) *Expérience*

Un réseau est placé sur le trajet d'un faisceau de lumière monochromatique. Ce faisceau est obtenu à l'aide d'une source de lumière monochromatique (un laser par exemple), une fente verticale, et une lentille convergente qui donne de la fente source une image agrandie sur un écran au loin. Si le réseau est placé perpendiculairement au faisceau lumineux, on constate :

– qu'il y a une image de la fente, dans l'axe du faisceau;

– et que d'autres franges fines existent de part et d'autre, situées à des angles i' tels que :

$$\sin i' = k \cdot \frac{\lambda}{a}$$

k est l'ordre algébrique de la frange (fig. 18). Les franges sont dues au phénomène d'interférence entre fentes voisines, mais la multiplicité de ces fentes fait que les franges obtenues par un réseau différent de celles obtenues par deux fentes seulement :

– ces franges brillantes sont beaucoup plus espacées que dans le dispositif d'Young, car l'interfente a est beaucoup plus petit, de sorte que k, l'ordre des franges latérales est limité à ±2 ou ±3 en pratique;

– ces franges sont beaucoup plus **brillantes;**

– enfin elles sont beaucoup plus fines.

Pour un ordre k donné ($\neq 0$), la direction i' de la frange correspondante dépend de la longueur d'onde de la lumière incidente.

Si cette lumière n'est pas monochromatique il y aura, en cette région angulaire, autant de franges que de longueurs d'ondes distinctes dans la lumière éclairante, ce qui formera un spectre en cet ordre k. Si la lumière est blanche le spectre sera continu.

L'intervalle angulaire entre deux spectres d'ordres différents est tel que pour les ordres ±1, ±2 ces spectres ne se chevauchent pas.

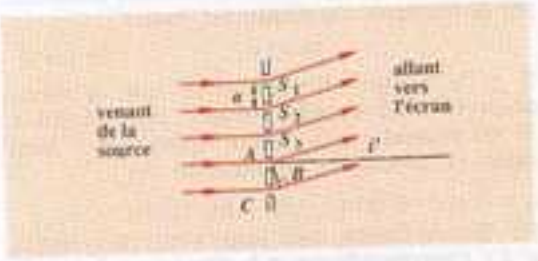
Il faut noter que, contrairement au prisme, avec un réseau la **lumière bleue est moins déviée que la lumière rouge** (fig. 19).

b) *Théorie du réseau*

La frange centrale d'interférence ne présente que peu d'intérêt car sa position $i' = 0$ est indépendante de la longueur d'onde.

Pour étudier la composition d'une lumière on observera donc le spectre d'ordre ±1, voire si possible celui d'ordre ±2.

Les phénomènes de diffraction limitent la luminosité lorsque l'on s'écarte de la normale du réseau. Pour ne pas trop s'en écarter donc pour limiter i' tout en maintenant la même différence de marche entre deux rayons issus de fentes adjacentes, on travaille en incidence oblique i. Les angles d'incidence i et d'émergence i' sont algébriques. Par convention ils ont **même signe** si les rayons incidents et émergents sont situés d'un **même coté de la normale** au plan du réseau.



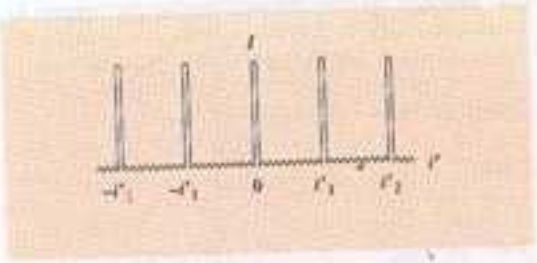


Fig. 18.



Fig. 19. *Réseau de faible dispersion attaqué sous incidence normale.*

• Réseau par transmission (fig. 20).
Pour un angle d'incidence i, les différentes franges brillantes en lumière monochromatique sont situées à des angles d'émergence i' tels que :

$$\sin i + \sin i' = k \cdot \frac{\lambda}{a}$$

• Réseau par réflexion (fig. 21).

Selon la convention de signe, la condition du maximum de brillance est :

$$\sin i - \sin i' = k \cdot \frac{\lambda}{a}$$

La figure 22 représente l'allure de l'intensité lumineuse obtenue pour différentes valeurs de a; les raies sont d'autant plus fines que les fentes sont plus serrées.

La déviation D que subit le faisceau lumineux par la traversée du réseau est donc :

$$D = i + i'.$$

Il y a autant de déviations que d'ordres observés. Pour un ordre k donné, cette déviation D est minimale lorsque les angles i et i' sont égaux (i' dépend de k). Dans ce cas :

$$i = i' = i_m \quad \text{et} \quad D_m = 2i_m$$

(la démonstration est dans l'exercice résolu n° 2). C'est ce réglage, à la déviation minimum, qui procure la meilleure luminosité pour le spectre étudié.

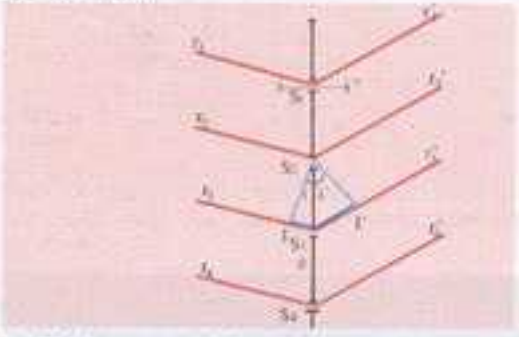


Fig. 20. *Les rayons de lumière incidente r_1, r_2, ..., arrivent sur le réseau avec un angle d'incidence i. Ils sont diffractés par la série de fentes S_1, S_2, ..., et les amplitudes des vibrations lumineuses portées par les rayons émergents r_1', r_2', ..., s'additionnent.*
Cette addition produira un maximum d'intensité lumineuse dans les directions i' telles que les ondes soient en phase, c'est-à-dire que la « différence de marche » entre deux rayons lumineux adjacents soit égale à un multiple entier de la longueur d'onde :

$$\delta = k \cdot \lambda.$$

Cette différence de marche entre les rayons r_1' et r_2' par exemple, est égale à :

$$\delta = IS_2 + S_2I' = a \cdot \sin i + a \cdot \sin i'.$$

La condition qui donne les directions i', de maximum d'éclairement est donc : $a \cdot (\sin i + \sin i') = k \cdot \lambda$.

c) Pouvoir séparateur du réseau

Le pouvoir séparateur est la possibilité de séparer dans un même spectre, deux franges de longueurs d'ondes voisines.
On définit la « largeur » d'une frange comme la distance angulaire $\Delta i'$, entre son maximum et son minimum :

$$\Delta i' = \frac{\lambda}{N \cdot a \cdot \cos i'} \quad \text{(fig. 23)}$$

Si la lumière n'est pas monochromatique mais correspond par exemple à deux longueurs d'ondes λ et λ', à l'ordre k il y aura deux franges brillantes et très fines aux angles i et i'.
Ces franges pourront être distinguées si elles sont suffisamment séparées. On admet que cette séparation est discernable si le maximum de l'une est au moins à la position du minimum de l'autre (donc si elles sont séparées par leur largeur) (fig. 24).

Si elles sont proches c'est que leurs longueurs d'ondes sont voisines et l'on pose : $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$.

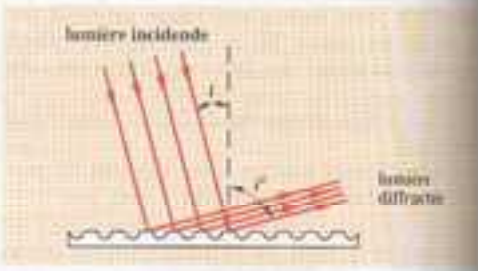


Fig. 21. *Réseau par réflexion.*

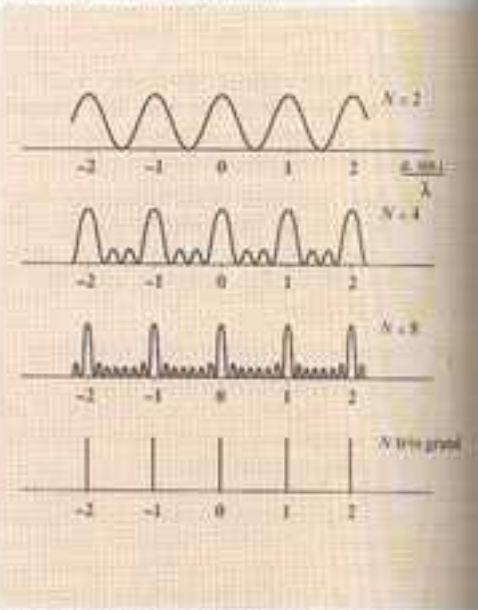


Fig. 22. *Intensité lumineuse dans la figure d'interférence donnée par 2, 4, 8, et nombreuses sources parallèles émettrices en phase. La dernière figure est celle que donne un réseau.*

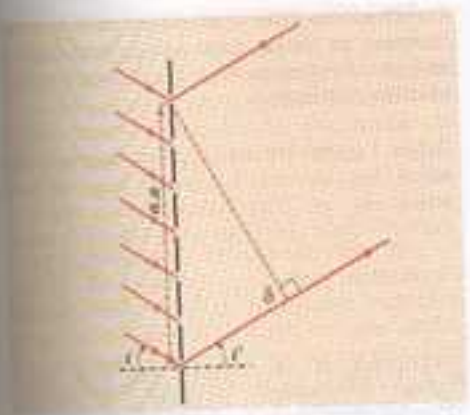


Fig. 23. *Pour une frange de longueur d'onde λ, dans le spectre d'ordre k, son maximum est à la position i' tel que :*

$$\sin i + \sin i' = k \cdot \frac{\lambda}{a}$$

Le maximum sera à un angle i' + Δi' tel qu'il n'y ait rien de lumière, donc que deux à deux les rayons émergents présentent une différence de marche de $\frac{\lambda}{2}$.

Soient deux rayons émergents distants de n fentes. Si, pour le maximum, la différence de marche entre deux rayons adjacents est égale à k.λ, entre eux cette différence sera de n.k.λ.
La condition d'opposition de phase, qui correspond au minimum, est donc que i' varie de Δi', de façon que cette différence deviennent $\left(n.k+\frac{1}{2}\right).\lambda$, *ce qui s'écrit :*

$$n.a.(\sin i + \sin(i' + \Delta i')) = \left(n.k + \frac{1}{2}\right).\lambda$$

or

$$\sin(i' + \Delta i') = \sin i' + \cos i'.\Delta i'$$

si compte tenu de la relation entre i et i' ceci donne :

$$n.a.\cos i'.\Delta i' = \frac{1}{2}\lambda.$$

Δi' calculé est d'autant plus petit que n est plus grand, mais les rayons doivent tous se détruire deux à deux, donc le maximum possible pour n est-il égal à $\frac{N}{2}$

d'où :

$$\Delta i' = \frac{\lambda}{N.a.\cos i'}$$

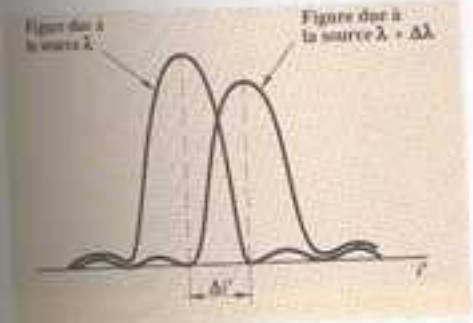


Fig. 24. *Le pouvoir séparateur du réseau.*

Une variation de longueur d'onde de Δλ crée un changement de position du maximum de Δi'. En dérivant la relation de position

$$\sin i + \sin i' = \frac{k.\lambda}{a}$$

il vient : $\cos i'.\Delta i' = k.\frac{\Delta\lambda}{a}$

soit : $\Delta i' = k.\frac{\Delta\lambda}{a.\cos i'}$

ce Δi' doit être au moins égal au Δi' observable, qui correspond à la largeur d'une frange

$$\Delta i' = k.\frac{\Delta\lambda}{a.\cos i'} = \frac{\lambda}{N.a.\cos i'}$$

L'écart de longueur d'onde discernable est donc :

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{k.N}$$

On définit le **pouvoir séparateur** d'un réseau par l'expression : $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$

Il est égal à :

$$\boxed{\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = k.N}$$

Il est d'autant plus grand que le nombre de fentes du réseau est plus grand et que l'on observe un spectre d'ordre plus élevé.
Le pouvoir séparateur du spectre d'ordre 2 est le double de celui d'ordre 1 mais sa luminosité est nettement plus faible à cause de la diffraction Pour étudier une répartition lumineuse on observera donc un spectre d'ordre 1 voire si possible un spectre d'ordre 2.

La **résolution angulaire** est, comme pour le prisme, définie par : $\frac{dD}{d\lambda}$.

Or $D = i + i'$ et i est fixé, donc $\frac{dD}{d\lambda} = \frac{di'}{d\lambda}$

$$\frac{dD}{d\lambda} = \frac{k}{a.\cos i'}$$

Elle est d'autant meilleure que l'on travaille à un ordre élevé, que a est plus petit, et que l'angle i' est au minimum.

Comme les prismes, mais avec un meilleur pouvoir séparateur, les réseaux sont utilisés pour l'analyse des spectres lumineux.
Dans les spectrographes d'analyse spectrale, la fente source est placée au foyer de la première lentille, le faisceau lumineux qui traverse le réseau est donc rigoureusement parallèle. Après traversée, déviation et diffraction, le faisceau émergent est repris par une seconde lentille qui donne, en son foyer, autant de franges qu'il y a de longueurs d'ondes dans la lumière de la source.

Ce spectre est observé soit :

— à l'œil à travers un oculaire muni d'une vis micrométrique qui déplace un fil vertical que l'on positionne sur la frange à mesurer;

— sur une pellicule photographique;

— par un dispositif avec amplificateur de brillance, ce qui permet d'analyser le spectre par voie électronique.

Les spectrographes à réseau sont de puissants moyens d'analyse de la composition d'un corps. Ils sont couramment utilisés en pharmacologie, en chimie, et en astrophysique (fig. 25).

3. Diffraction par une fente

Soit une onde plane monochromatique, si l'on interpose sur le trajet de cette onde une fente très large, cette fente limite latéralement le faisceau.

Si on diminue la largeur de cette fente, jusqu'à ce que sa dimension, b, soit de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de la lumière incidente, on constate alors que le faisceau émergent diverge et diverge d'autant plus que la fente est plus étroite (fig. 26).

La figure, sur un écran, apparaît comme une frange très large, avec, latéralement quelques franges beaucoup moins intenses (5 %) et de largeur moitié.

Pour calculer cet effet on s'appuie sur le théorème de Huygens. Dans une onde progressive on peut considérer tous les points d'une surface d'onde comme des sources synchrones, et la progression de l'onde comme l'addition des vibrations créées par ces sources.



Fig. 25. *Spectroscope à réseau.*

On considère donc que chaque point de la fen rayonne un champ dans tout le demi-espace. la figure lumineuse sera due à l'addition de champs électriques.

Selon l'angle d'émission, il y aura une pha entre les rayons lumineux issus de poi adjacents et l'on observera la figure d l'interférence créée par cette infinité de sourc

Diffraction et interférence sont donc dues a même phénomène physique, la différen d'appellation est purement historique.

Pour ce qui est de la diffraction par une fent l'essentiel à retenir est que la frange centrale une largeur angulaire de :

$$\theta \approx \frac{\lambda}{b}$$

(b est la largeur de la fente).

La frange de diffraction est d'autant plus larg que la fente est plus étroite (fig. 27).

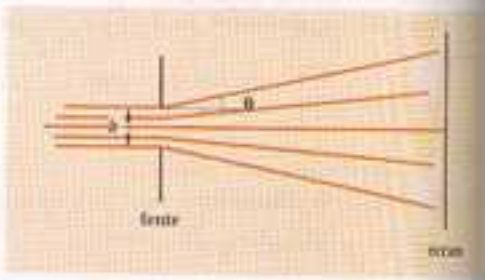


Fig. 26. *Diffraction par une fente, dite diffraction à Fraunhofer.*

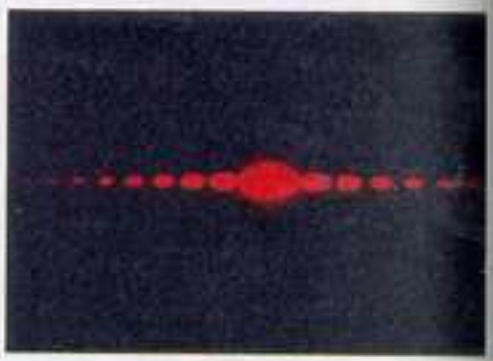


Fig. 27. *Image de la diffraction produite par une fent*

4. Diffraction par une ouverture circulaire

La figure de diffraction est une tache centrale, entourée d'anneaux beaucoup moins lumineux. Le résultat important est que le « diamètre » de la tache centrale (distance de son centre au premier anneau obscur) est égal à :

$$\theta = 1{,}22\,\frac{\lambda}{d}$$

d étant le diamètre de l'ouverture (fig. 28).
Ceci est fondamental pour les instruments d'optique : objectif photographique, jumelles, microscope. L'image d'un point est une tache, cette tache est d'autant plus petite (le piqué de l'image d'autant meilleur) que le diamètre de la lentille qui limite l'entrée de la lumière est plus grand.

5. Diffraction par deux fentes

On reprend le calcul du dispositif d'Young, mais en tenant compte de la largeur des fentes. Soient donc deux fentes :
– distantes de a : $a = 1$ à 2 mm;
– de largeur b : $b \approx 0{,}1$ mm.
Chacune des fentes va donner une figure de diffraction. Les franges en sont larges de :

$$\theta \approx \frac{\lambda}{b}$$

car b est de l'ordre de λ.

Sur un écran, ces deux figures vont s'additionner, elles seront décalées de a, mais en pratique a est petit devant la dimension des taches sur l'écran et les deux figures seront indiscernables.
Par contre, en s'additionnant, leurs rayons respectifs interfèrent, et à la place de la large frange de diffraction on observe la suite connue de franges d'interférence.
La figure obtenue est le produit de la figure d'interférence par la figure de diffraction. L'intensité maximale lumineuse des franges brillantes, est une fonction de l'angle de déviation θ, ce qui limite le champ d'observation et donc le nombre de franges visibles.

6. Diffraction par un réseau

Avec un réseau, le principe physique est le même qu'avec deux fentes, mais les ordres de grandeur changent car a, le pas du réseau est bien inférieur à la distance interfentes du système d'Young, et b la largeur de chaque fente, est elle aussi bien inférieure à la largeur des fentes d'Young (par exemple $a = 2$ µm et $b = 0{,}8$ µm) (fig. 29 et fig. 30).
La frange de diffraction sera donc très large, car b est très petit, néanmoins son existence a pour effet de **diminuer les intensités** des franges (ou des spectres) d'ordre ± 2 et surtout ceux d'ordre ± 3.

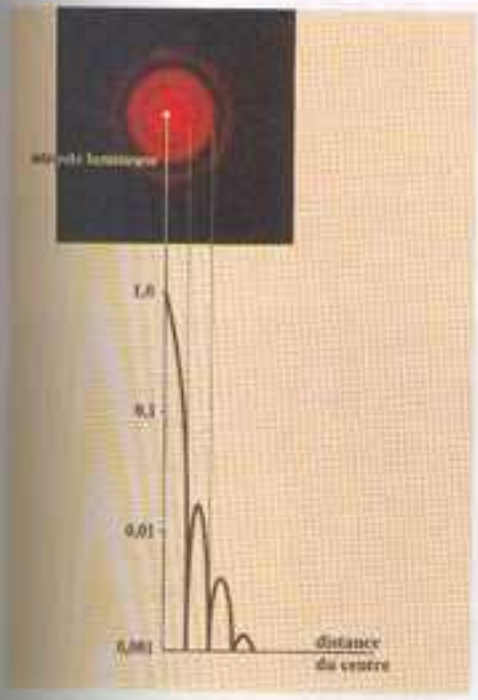


Fig 28. *Image de la diffraction produite par une ouverture circulaire.*

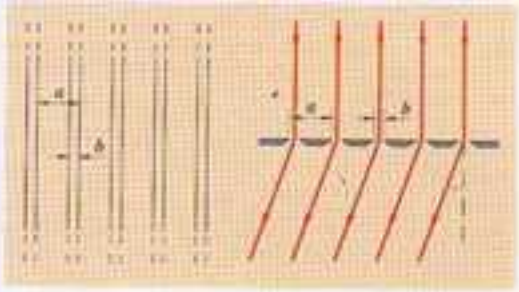


Fig. 29. *Vue de front, et coupe d'un réseau.*

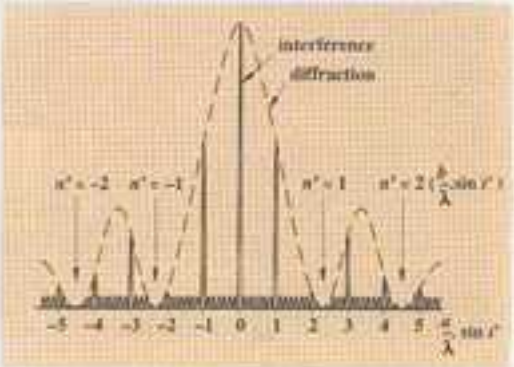


Fig. 30. *Intensité lumineuse émergente d'un réseau placé perpendiculairement au faisceau incident.*

Fiche expérimentale

LES COULEURS DE L'ARC-EN-CIEL

La répartition des couleurs dans l'arc-en-ciel est expliquée par la figure 31.
On peut, au laboratoire, modéliser cet effet.
On imagine un plan de coupe vertical de l'arc semblable à la figure, que pour des raisons de facilité on rendra, par la pensée, horizontal.
La lumière solaire est modélisée par un faisceau de lumière blanche, en principe parallèle, en pratique légèrement divergent.
On utilise pour cela, une lanterne lumineuse, une fente horizontale, une lentille et un écran à 3-4 m de la lentille. L'image de la fente doit être d'environ 10 à 15 cm de large et de 3 cm de haut. Les gouttes d'eau seront modélisées par deux pièces de verre cylindriques, de 3 cm de diamètre et de 2 cm d'épaisseur.
On place devant l'écran un support portant les deux « gouttes de verre », ces pièces étant distantes de quelques cm. L'écran peut alors être retiré.
En plaçant l'œil de l'observateur au voisinage de la lanterne lumineuse, environ 1 m latéralement et 1 m en arrière pour ne pas être gêné par la lumière émise, on aperçoit nettement le retour de la lumière bleue par un des blocs de verre et de la lumière rouge par l'autre (fig. 32).
Évidemment il faut quelque peu tâtonner pour pour trouver le bon écartement des blocs d'une part et pour positionner son œil d'autre part, mais l'effet est spectaculaire (fig. 33).
L'indice du verre est tel que ce que l'on observe correspond à deux réflexions internes donc au deuxième arc, le rouge serait côté terre, le bleu côté ciel.

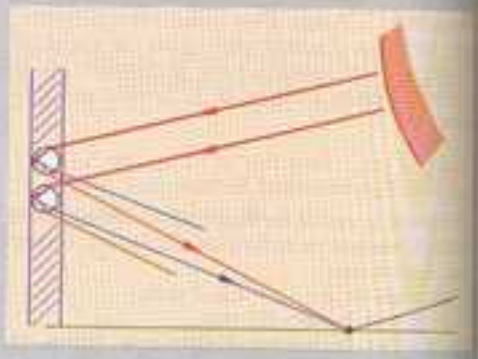


Fig. 31. *L'observation théorique de l'irisation d'un arc dans le ciel.*

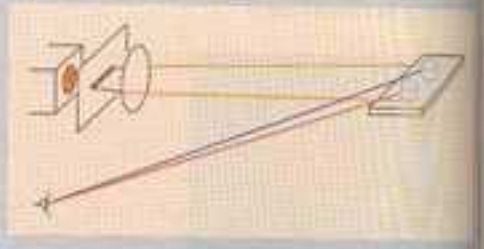


Fig. 32. *La schématisation expérimentale.*



Fig. 33. *Un bloc de verre renvoie de la lumière bleue, l'autre de la lumière rouge. La photographie, prise au téléobjectif, le montre bien.*

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

• La lumière est assimilée à la propagation d'un champ électrique en une onde plane progressive, de longueurs d'onde comprises entre 400 et 800 nm.

• Un prisme dévie et disperse la lumière.
— La déviation minimum d'un prisme est donnée par :

$$\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right) = n \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right).$$

A étant l'angle au sommet du prisme et n son indice de réfraction.
— La dispersion est due à la dépendance de l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}.$$

Le **bleu est plus dévié que le rouge.**

• Un réseau dévie et diffracte la lumière.
— Cette déviation, avec interférence des vibrations lumineuses, crée des franges brillantes aux positions angulaires i', telles que :

$$\sin i + \sin i' = k \cdot \frac{\lambda}{a}.$$

i est l'angle d'incidence, i' l'angle d'émergence, a le pas du réseau et k l'ordre de la frange ($k \leqslant 3$ en pratique).
— Ces franges sont très fines, leur position dépend de la longueur d'onde, **le bleu est moins dévié que le rouge.** La lumière blanche donne un spectre continu étalé.
Le pouvoir séparateur d'un réseau est :

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = k \cdot N.$$

N est le nombre total de traits du réseau.

La diffraction limite l'éclairement latéral.

Un réseau a un pouvoir séparateur plus élevé qu'un prisme, on l'utilise dans les spectroscopes pour faire de l'analyse spectrale.

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

Les diverses parties d'un spectroscope à prisme sont représentées ci-dessous. Le prisme a un angle au sommet $A = 60°$. Il est utilisé au minimum de déviation pour une raie de longueur d'onde λ_1, pour laquelle son indice de réfraction est n_1.

1) La déviation minimum D_m est donnée par la relation :

$$\sin\frac{D_m + A}{2} = n \cdot \sin\frac{A}{2}$$

Calculer D_m.

2) Calculer la valeur numérique de la dispersion angulaire $\frac{\Delta D}{\Delta n}$ sachant qu'au voisinage du minimum de déviation elle est donnée par :

$$\frac{\Delta D}{\Delta n} = \frac{2}{n}\,\mathrm{tg}\left(\frac{D_m + A}{2}\right),$$

où ΔD est exprimé en radian.

3) L'objectif de la lunette du spectroscope est équivalent à une lentille mince achromatique de distance focale $f = 25$ cm. Sur son plan focal image est placée une plaque photographique. Calculer les positions y_2 et y_3 sur la plaque, des raies-images correspondant aux radiations λ_2 et λ_3, par rapport à la position de la raie-image de la radiation λ_1, située au foyer principal image de l'objectif.

4) En déduire la dispersion linéaire moyenne $\frac{\Delta y}{\Delta \lambda}$.

On donne :

$\lambda_1 = 546$ nm	$\lambda_2 = 577$ nm	$\lambda_3 = 579$ nm
$n_1 = 1{,}730\,0$	$n_2 = 1{,}725\,0$	$n_3 = 1{,}724\,4$

SOLUTION

1) L'application numérique est simple : $\boldsymbol{D_m = 59{,}77°}$.

2) Cette formule s'obtient par dérivation de la formule donnant le minimum de déviation :

$$\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right) = n \cdot \sin\frac{A}{2}$$

d'où :

$$\cos\left(\frac{D_m + A}{2}\right)\frac{1}{2}\frac{dD_m}{dn} = \sin\frac{A}{2}.$$

En remplaçant $\sin\frac{A}{2}$ par $\frac{1}{n}\cdot\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)$ on obtient la formule de l'énoncé.

$$\boldsymbol{\frac{dD}{dn} = 1{,}993\,1 \text{ rad/unité d'indice.}}$$

3) Pour une raie, de longueur d'onde λ_2, l'indice du verre est n_2. Il a varié par rapport à n_1 de la quantité $dn_2 = n_2 - n_1 = 1{,}725\,0 - 1{,}730\,0 = -0{,}005\,0$. La variation de la déviation correspondante est :

$$dD_2 = 1{,}993\,1\,dn_2 = -9{,}96 \text{ mrad}.$$

Ce qui se traduit, sur l'écran, par une position en y_2 telle que :

$$y_2 - y_1 = f \cdot dD_2 = \boldsymbol{-2{,}50 \text{ mm}}.$$

Le même calcul, pour la raie de longueur d'onde λ_3, donne :

$$dn_3 = 1{,}724\,4 - 1{,}730\,0 = -0{,}005\,6,$$

$$dD_3 = -11{,}16 \text{ mrad},$$

$$y_3 - y_1 = \boldsymbol{-2{,}79 \text{ mm}}.$$

4) Pour la seconde raie :

$$\Delta\lambda = 577 - 546 = 31 \text{ nm},$$

et : $\Delta y = -2{,}5$ mm,

d'où : $\frac{\Delta y}{\Delta \lambda} \approx -81\ \mu\text{m} \cdot \text{nm}^{-1}$.

Pour la troisième raie :

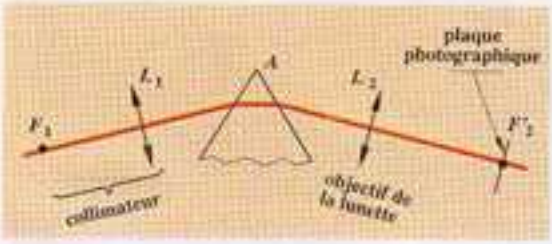
$$\Delta\lambda = 579 - 546 = 33 \text{ nm},$$

et : $\Delta y = -2{,}79$ mm,

d'où : $\frac{\Delta y}{\Delta \lambda} \approx -85\ \mu\text{m} \cdot \text{nm}^{-1}$.

La dispersion linéaire moyenne est donc de l'ordre de

$$\boldsymbol{\frac{\Delta y}{\Delta \lambda} \approx -83\ \mu\text{m} \cdot \text{nm}^{-1}}.$$



EXERCICE 2

Les faisceaux incident et diffracté par un réseau par transmission sont tels que les angles d'incidence i et de diffraction sont i et i'. Le réseau, supposé parfait, a N traits par mm.

1) Exprimer l'angle de déviation D en fonction de i et i'.

2) a) Montrer l'existence d'un minimum de déviation D_m.

b) Donner l'expression de D_m en fonction de i.

c) En déduire une nouvelle expression de la formule fondamentale du réseau.

1. EXERCICES RESOLUS

SOLUTION

La formule fondamentale du réseau est :

$$\sin i + \sin i' = k \cdot \frac{\lambda}{a} \quad \text{avec} \quad a = \frac{1}{N}$$

1) La déviation D vaut :

$$D = i + i'.$$

2a) Cette déviation dépend de i. La condition de minimum s'écrit :

$$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di} = 0, \quad \text{soit} : \quad \frac{di'}{di} = -1.$$

2) $\frac{di'}{di}$ s'obtient en dérivant la formule fondamentale :

$$\cos i + \cos i' \cdot \frac{di'}{di} = 0,$$

ce qui entraîne : $\cos i - \cos i' = 0$, soit : $i = i' = i_m$.

La **déviation est minimum quand le montage est symétrique.** Dans ces conditions :

$$D_m = 2i_m.$$

2c) La formule fondamentale devient :

$$2 \sin \frac{D_m}{2} = k \cdot \frac{\lambda}{a}$$

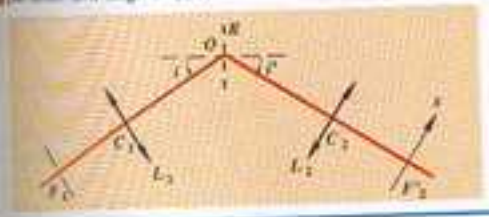
EXERCICE 3

Un réseau plan par transmission à 2 000 traits par millimètre est utilisé dans le vide, au voisinage du minimum de déviation ($i = i'$), dans le premier ordre.

1) Quel doit être l'angle d'incidence i pour que la longueur d'onde $\lambda = 500$ nm, soit exactement au minimum de déviation? Quelle est alors, autour de cette longueur d'onde, la dispersion angulaire $\frac{di'}{d\lambda}$ (à i constant) au premier ordre?

2) Le réseau est utilisé dans les conditions ci-dessus dans un spectrographe. Les distances focales des lentilles sont $f_1 = f_2 = 2$ m.
Quelle est, dans le plan focal de L_2, la dispersion linéaire $\frac{dx}{d\lambda}$ (où x est l'abscisse correspondant à λ, l'origine étant l'image F'_2 de la fente pour $\lambda = 500$ nm)?

3) Quelle serait — sachant que le nombre total de traits du réseau est $N = 173\,000$ — la largeur de la frange pour une lumière strictement monochromatique ($\lambda = 500$ nm), une fente infiniment fine et des lentilles parfaitement stigmatiques?



SOLUTION

1) La position des maxima principaux est donnée par la condition :

$$\sin i + \sin i' = k \cdot \frac{\lambda}{a}$$

La déviation des rayons est égale à :

$$D = i + i'.$$

Cette déviation qui dépend de i est minimum, pour :

$$\frac{dD}{di} = 0,$$

soit :

$$1 + \frac{di'}{di} = 0.$$

Or i et i' sont liés par la première relation, d'où :

$$\cos i + \cos i' \cdot \frac{di'}{di} = 0$$

ce qui, combiné avec la seconde, donne :

$$1 - \frac{\cos i}{\cos i'} = 0,$$

soit : $\cos i = \cos i'$, et : $i' = i$.

Pour le premier ordre ceci conduit à :

$$2 \sin i = \frac{\lambda}{a}$$

Il y a 2 000 traits par millimètre, donc :

$$a = \frac{1}{2\,000} \text{ mm} = 500 \text{ nm},$$

d'où :

$$i = 30°.$$

La dispersion angulaire est donnée par la dérivation de la première relation, car si λ varie, alors $i' \neq i$:

$$\cos i' \cdot di' = \frac{d\lambda}{a},$$

$$\frac{di'}{d\lambda} = \frac{1}{a \cdot \cos i'} \approx \mathbf{2{,}310 \text{ mrad} \cdot \text{nm}^{-1}}.$$

2) A une variation angulaire di', correspond dans le plan focal une variation linéaire dx :

$$dx = f \cdot di'$$

d'où :

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{f}{a \cdot \cos i'} = \mathbf{4{,}62 \text{ mm} \cdot \text{nm}^{-1}}.$$

3) La largeur angulaire d'une frange est :

$$\Delta i' = \frac{\lambda}{N \cdot a \cdot \cos i'},$$

d'où :

$$\Delta x = f \cdot \Delta i' = \mathbf{27\ \mu m}.$$

La frange a même largeur que la frange de diffraction d'une fente qui aurait pour largeur la largeur du réseau entier : $N \cdot a$.

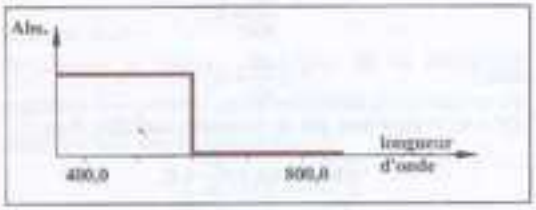
2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATIONS

Prisme

Exercice 1

On éclaire un écran blanc mat par un faisceau cylindrique de lumière blanche. Il diffuse toute la lumière reçue.
On place un filtre (voir courbe d'absorption jointe) sur le trajet du faisceau.
Quelle est alors la couleur de l'écran?



Exercice 2

1) Représenter sur un schéma les éléments constitutifs d'un spectroscope à prisme. Indiquer leurs différents noms.

2) Tracer la marche d'un faisceau de lumière jaune allant de la fente source jusqu'au plan focal de la lunette, l'appareil étant supposé réglé pour que l'image de la fente en lumière jaune passe par le foyer image de la lunette. Tracer la marche d'un faisceau de lumière rouge et celui d'un faisceau de lumière bleue à travers le spectroscope.

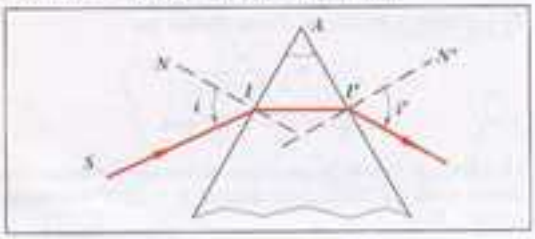
*** Exercice 3**

Un prisme est éclairé par un faisceau cylindrique de lumière monochromatique rouge de longueur d'onde $\lambda_1 = 643,8$ nm.

1) Donner dans le cas présent, en la justifiant, la direction du rayon émergent $I'S'_1$, caractérisé par la valeur de l'angle d'émergence i', (angle du rayon émergent et de la normale $I'N'$ au point I'_1).

2) Sachant que l'indice varie en fonction de la longueur d'onde suivant la loi : $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$, donner l'allure du trajet d'un rayon $SI'_2S'_2$ dans le cas d'une lumière bleue de longueur d'onde $\lambda_2 = 480,0$ nm.

3) Définir, dans chaque cas, la déviation (égale à D_1 avec la lumière rouge et D_2 avec la lumière bleue). Exprimer le pouvoir dispersif du prisme.



Exercice 4

On considère un prisme d'angle au sommet 30° d'indice $n = 1,5$.

1) Donner les valeurs de l'angle d'incidence et de l'angle de déviation dans les cas suivants :
incidence rasante; incidence normale; émergence rasante; émergence normale; minimum de déviation.

2) En déduire les conditions d'émergence.

3) Tracer la courbe de la variation de l'angle de déviation en fonction de l'angle d'incidence.

Exercice 5

Mesure de l'indice d'un prisme par la méthode du minimum de déviation.

1) Donner la relation qui existe entre l'indice n, l'angle A et l'angle du minimum de déviation D_m pour un prisme éclairé en lumière monochromatique.

2) On mesure l'angle A du prisme. Puis on fait tourner le prisme, par rapport au faisceau incident autour d'un axe parallèle à son arête, afin d'obtenir le minimum de déviation pour la raie verte du cadmium. On mesure l'angle de déviation D_m.
Calculer la valeur de l'indice du prisme pour la raie verte du cadmium.

Données : $A = 60°,00$; $D_m = 39,67°$.

Exercice 6

1) Donner l'expression de la déviation D en fonction de l'angle d'incidence i, de l'angle d'émergence i', et de l'angle d'un prisme A.

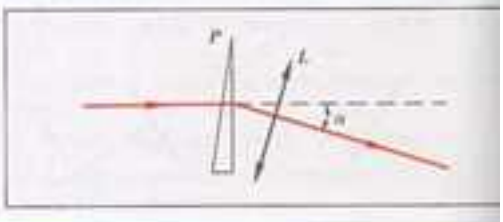
2) Quelle relation lie i et i' au minimum de déviation ?

3) L'étude expérimentale donne les valeurs suivantes pour la déviation minimale : $D_m = 48°$; incidence correspondante : $i_m = 54°$.
Calculer l'angle du prisme et l'indice du milieu transparent qui le constitue.

*** Exercice 7**

Étude du spectre d'une étoile.

On place devant l'objectif L un prisme P, de petit angle A.
Le faisceau cylindrique qui arrive sur P provient d'une étoile considérée comme une source ponctuelle à l'infini.



L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

• Les atomes présentent des spectres de raies.

Les spectres d'émission et d'absorption sont complémentaires : à une raie brillante d'émission correspond une raie obscure d'absorption.

• La lumière peut s'interpréter de deux façons :
— comme une onde électromagnétique;
— comme un faisceau de photons.

La correspondance entre les deux interprétations est :
— si ν est la fréquence de l'onde électromagnétique et E l'énergie du photon :

$$E = h \cdot \nu$$

h est la constante de Planck $h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ J.s.
Exprimée en unités pratiques, la formule s'écrit :

$$E = \frac{1\,241}{\lambda} \qquad \begin{matrix} E \text{ en eV} \\ \lambda \text{ en nm} \end{matrix}$$

• Le **photon** est une particule, de masse nulle, de charge électrique nulle. Il se déplace toujours à la vitesse égale à $c = 3 \times 10^8$ m.s^{-1}.
La relation entre son énergie et sa quantité de mouvement est : $E = p \cdot c$.

• L'énergie de liaison entre un électron et le reste de l'atome est quantifiée. Elle ne peut prendre que quelques valeurs discrètes.

L'émission de radiations est due au passage d'un électron d'un niveau d'énergie à un autre, inférieur.
La différence d'énergie est égale à l'énergie de l'onde émise, soit :

$$h \cdot \nu_{np} = E_n - E_p$$

Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \qquad \text{avec} \quad E_0 = 13{,}6 \text{ eV}.$$

Le phénomène de quantification des énergies de liaison, donc d'émission ou d'absorption de radiations sous forme de raies est général pour les atomes, les molécules, les noyaux.

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 20

Un réseau plan comportant n traits par mm ($n = 1\,200$ traits.mm^{-1}) est utilisé en transmission.

1) Donner la formule reliant i (angle d'incidence) à i' (angle du rayon diffracté) pour un maximum d'ordre k.

2) Le réseau est éclairé par un faisceau de lumière parallèle provenant d'une fente fine, éclairée par une lampe à vapeur de sodium et placée au foyer principal objet d'une lentille.
On donne : l'angle d'incidence $i = +20°$ et les longueurs d'onde du doublet jaune du sodium :

$$\lambda = 589{,}0 \text{ nm} \quad \text{et} \quad \lambda' = 589{,}6 \text{ nm}.$$

a) On observe à l'aide d'une lunette (L) l'image jaune d'ordre zéro de la fente. Sous quel angle i' peut-on observer cette image?

b) Faire un schéma du dispositif.

3) On se place au minimum de déviation d'ordre 1. Calculer l'angle D_m de déviation minimum, et l'angle d'incidence i_m correspondant. Pour cette question, on utilisera la longueur d'onde moyenne λ_m du doublet jaune du sodium :

4) La lunette (L) forme les images de la fente du collimateur dans le plan focal de son objectif (O) assimilable à une lentille mince de distance focale $f' = 200$ mm.
L'oculaire permet d'observer ce plan focal. La source émet les 2 radiations λ et λ'.
Quelle distance sépare les 2 images d'ordre 1 dans le plan focal de (O). L'angle d'incidence est : $i = +20°$.

5) Le spectroscope à réseau sépare $\Delta\lambda = 0{,}1$ nm à l'ordre 1. Calculer le pouvoir de résolution du réseau pour la longueur d'onde λ_m. En déduire le nombre de traits minimal que doit posséder le réseau pour obtenir ce résultat.

* Exercice 21

Un spectrographe à réseau se compose :
— d'un collimateur dont la fente d'entrée de largeur négligeable à son milieu au foyer principal objet d'une lentille achromatique;
— d'un réseau comportant 200 traits par millimètre et utilisé en transmission;
— d'un objectif achromatique de distance focale 1 m.
La lumière est issue d'une source monochromatique et a pour longueur d'onde 589,3 nm (moyenne du doublet du sodium).

A) Rappelez la formule du réseau que vous serez amené à utiliser.
On appellera i, l'angle d'incidence et i', l'angle de diffraction.

B) Le réseau est placé normalement aux rayons incidents.

1) Calculer le nombre maximal d'images de la fente que l'on pourrait théoriquement observer derrière le réseau.

2) Déterminer la direction dans laquelle il faut placer l'axe de la lentille-objectif pour que l'image correspondant au spectre d'ordre 3 se forme au foyer principal image de cette lentille.

3) Calculer la dispersion $\frac{di'}{d\lambda}$ du réseau dans le cas du 2e.
En déduire la longueur qui sépare, dans le plan focal de l'objectif, les images des raies formant le doublet du sodium dont les longueurs d'onde sont 589,0 et 589,6 nm.

C) On se place maintenant dans les conditions du spectre normal c'est-à-dire que l'axe de l'objectif est normal au plan du réseau ($i' = 0$).

1) Faire un schéma du montage. De quel angle faut-il faire tourner le réseau à partir de la position du paragraphe B pour obtenir un spectre normal dans l'ordre 3? Y a-t-il lieu de modifier la position de l'objectif par rapport à B 2°?

2) Calculer la nouvelle dispersion $\frac{di'}{d\lambda}$ du réseau dans le 3e ordre. En déduire la longueur qui sépare maintenant les images des deux raies du sodium dans le plan focal de l'objectif.

Exercice 22

On considère un spectroscope constitué d'un collimateur, d'un réseau R, et d'un objectif L_0 formant l'image spectrale dans son plan focal image (défini par son foyer image F'_0). Derrière ce plan, on peut mettre divers instruments : oculaire pour l'utilisation en spectroscopie, ou chambre photographique pour l'utilisation en spectrographie. Les caractéristiques techniques sont les suivantes :
— réseau : nombre de traits par unité de longueur $n = 600$ traits/mm utilisé sous une incidence $i = 30°$; largeur totale $L = 100$ mm, éclairé sur toute cette largeur par le faisceau issu du collimateur;
— objectif : distance focale $f' = 500$ mm;
— source : polychromatique, radiations couvrant tout le spectre visible ($400 \text{ nm} < \lambda < 800$ nm).
On dispose dans le plan focal de l'objectif, une plaque photographique.

1) Faire un schéma du dispositif (sans échelle) et rappeler la formule fondamentale des réseaux par transmission.

2) Quelle est la longueur d'onde λ_0, qui permet d'obtenir un minimum de déviation au 3e ordre avec une émergence i' de 30°?

3) Calculer la dispersion angulaire $\frac{di'}{d\lambda}$ pour λ_0 au troisième ordre.

4) A partir de quel ordre y a-t-il chevauchement des spectres?

Pour en savoir plus

LA THÉORIE DES ARCS-EN-CIEL

Cette théorie est présentée sous forme d'un problème corrigé.

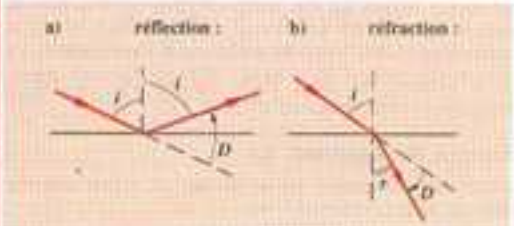
ÉNONCÉ

La déviation D d'un rayon lumineux passant dans un système optique est l'angle dont il faut faire tourner le rayon incident pour le superposer au rayon émergent.

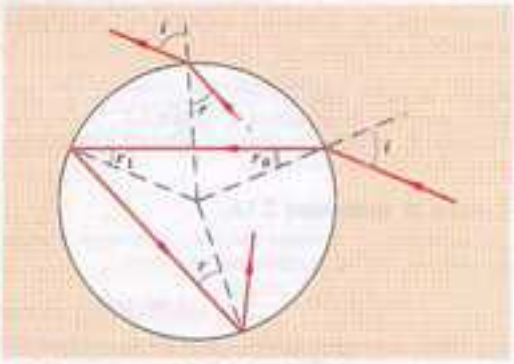
1) Calculer D en fonction de i et r :

a) pour la réflexion;

b) pour la réfraction.



2) Une goutte d'eau sphérique d'indice n, est éclairée par le soleil supposé à l'infini. Un rayon lumineux monochromatique jaune, pénètre dans la goutte, subit p réflexions internes, puis ressort.



a) Montrer que les réflexions internes ne sont pas des réflexions totales. Quelles en sont les conséquences?

b) Exprimer la déviation D_p qu'a subit le faisceau qui sort de la goutte après p réflexions internes, en fonction de i, r et p.

c) Montrer que, pour p donné, cette déviation D_p passe par un minimum pour une certaine valeur de i, notée i_{pm}, donnée par la relation :

$$\sin^2 i_{pm} = \frac{(p+1)^2 - n^2}{(p+1)^2 - 1}.$$

d) Calculer i_{pm}, et les angles correspondants r_{pm} et D_{pm} pour $p = 1$ et $p = 2$.

L'indice de réfraction de l'eau est $n = 1{,}33$ pour la lumière jaune.

3) On démontre que l'intensité de la lumière émergente est maximale pour ces déviations minimums D_{1m} et D_{2m}.

a) Justifier, très qualitativement, pourquoi l'on n'observe pas D_{3m}.

b) On considère une chute de pluie comme un ensemble de gouttes uniformément réparties. Un observateur est au sol, il a le soleil derrière lui et il regarde au loin le rideau de pluie. Calculer ϕ_1, l'angle, arithmétique, entre un rayon du soleil et celui qui lui pénètre dans l'œil après avoir subit la déviation D_{1m} dans une goutte de pluie.

Calculer de même ϕ_2, correspondant à D_{2m}.

c) Montrer que, pour cet observateur, le fait de n'être sensible qu'aux rayons déviés de D_{pm} se traduit pour lui, par l'observation d'un arc de cercle lumineux sur le rideau de pluie.

d) Soit θ l'angle d'élévation du soleil au-dessus de l'horizon, quels sont les angles α_1 et α_2 d'inclinaison maximale des rayons issus des deux arcs-en-ciel pour cet observateur ($\theta = 20°$)?

4) Les calculs précédents ont été conduits pour une lumière monochromatique, or la lumière du soleil est blanche et l'indice de réfraction de l'eau dépend de la longueur d'onde.

a) Expliquer qualitativement la présence de couleurs dans les arcs-en-ciel.

b) On prend comme indice de couleurs extrêmes :

— pour le bleu $n_B = 1{,}335$;
— pour le rouge $n_R = 1{,}325$.

Calculer :

$$\alpha_{1B},\quad \alpha_{1R},\quad \alpha_{2B},\quad \alpha_{2R}.$$

c) Faire un schéma représentant la succession des couleurs observées dans les deux arcs.

SOLUTION

1) *a*) Pour une réflexion $D = \pi - 2i$.

b) Pour une réfraction $D = i - r$.

2) *a*) Suite à la première réfraction, l'angle r_0 est inférieur à l'angle de réflexion totale. Lors de la première réflexion interne, l'angle r est égal à r_0, donc une fraction importante de l'intensité lumineuse subit la réfraction, et sort de la bulle, le reste subit la réflexion. Il en est de même à chaque réflexion interne, et l'intensité de la lumière qui suit le trajet étudié est de plus en plus faible après chaque réflexion.

b) Le faisceau subit :
— deux réfractions, chacune le déviant de $i - r$,
— p réflexions, chacune le déviant de $\pi - 2r$ (car à l'intérieur de la bulle, l'angle d'incidence est r);
— la déviation totale est donc :

$$D_p = p.(\pi - 2r) + 2(i - r)$$
$$= p.\pi + 2i - 2(p+1).r.$$

c) La déviation D_p est minimum lorsque sa dérivée par rapport à i est nulle :

$$\frac{dD_p}{di} = 2 - 2(p+1)\cdot\frac{dr}{di} = 0.$$

Or $\sin i = n.\sin r$, ce qui en dérivant par rapport à i donne :

$$\cos i = n.\cos r.\frac{dr}{di}$$

d'où : $$\frac{dD}{di} = 2 - 2(p+1)\cdot\frac{\cos i}{n.\cos r}.$$

La condition : $\frac{dD}{di} = 0$ s'écrit donc :

$$n.\cos r = (p+1).\cos i.$$

Pour la résoudre on élève au carré de façon à faire apparaître les sinus des angles qui sont reliés par la relation de la réfraction :

$$n^2.\cos^2 r = (p+1)^2.\cos^2 i$$

$$n^2.\left(1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}\right) = (p+1)^2.(1 - \sin^2 i)$$

dont la solution en i, appelé i_{pm} dans l'énoncé est :

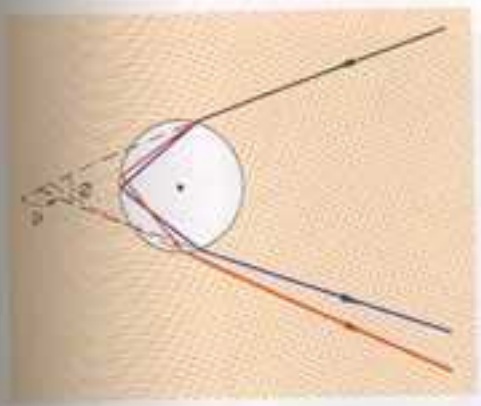
$$\sin^2 i_{pm} = \frac{(p+1)^2 - n^2}{(p+1)^2 - 1}.$$

d) Application numérique : Pour $p = 1$:

$$\sin^2 i_{1m} = \frac{4 - n^2}{3} \quad \text{d'où :} \quad i_{1m} = 59{,}58°$$

$$\sin r_{1m} = \frac{\sin i_{1m}}{n} \quad \text{d'où :} \quad r_{1m} = 40{,}42°$$

et : $D_{1m} = \pi + 2i_{1m} - 4r_{1m} = 137{,}48°$.

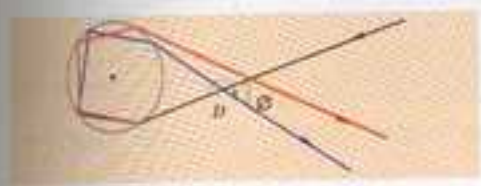


Pour $p = 2$, les mêmes calculs conduisent

$$\sin^2 i_{2m} = \frac{9 - n^2}{8} \quad \text{d'où :} \quad i_{2m} = 71{,}93°,$$

$$r_{2m} = 45{,}62°,$$

et : $D_{2m} = 2\pi + 2i_{1m} - 6r_{2m} = -129{,}92°$.



3) *a*) L'intensité lumineuse réfléchie diminue beaucoup à chaque réflexion interne, le second arc est déjà rarement observable, le troisième ne l'est pas.

b) Selon la figure, l'angle ϕ_1 est le supplément de D_{1m} donc :

$$\phi_1 = 42{,}52°$$

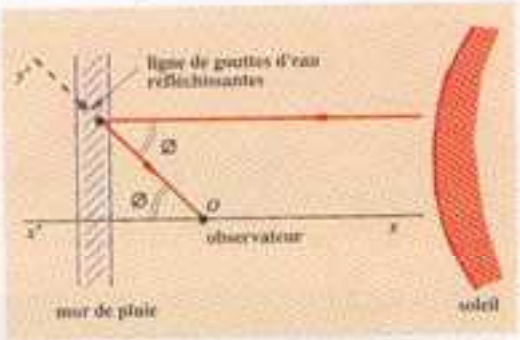
et de même :

$$\phi_2 = \pi - |D_{2m}| = 50{,}08°.$$

c) Tous les rayons lumineux qui viennent du soleil sont parallèles.

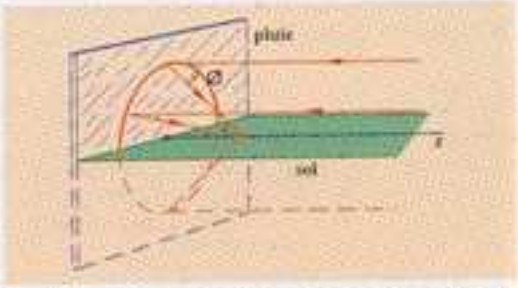
Si le soleil est à l'horizon, les rayons solaires sont parallèles au plan du sol donc perpendiculaires au mur de pluie.

— Dans le plan vertical une goutte d'eau sera vue lumineuse si le rayon diffusé fait un angle ϕ avec le rayon incident.



Et l'ensemble des gouttes lumineuses sera sur une demi-droite Oy faisant l'angle ϕ avec l'axe Ox qui représente le rayon solaire qui passe par l'œil de l'observation.

— La figure est de révolution autour de cet axe Ox, la figure lumineuse sera l'intersection d'un cône, de sommet O, d'axe Ox, de demi-angle au sommet ϕ, par un plan schématisant le mur de pluie. Cette figure est un cercle, dont seule la moitié supérieure, celle qui est au-dessus du plan horizon, est visible.



d) Si le soleil est à l'élévation θ, l'axe Ox du cône lumineux fait l'angle θ avec le sol, le plan de coupe ne lui est plus perpendiculaire et la partie visible est réduite.

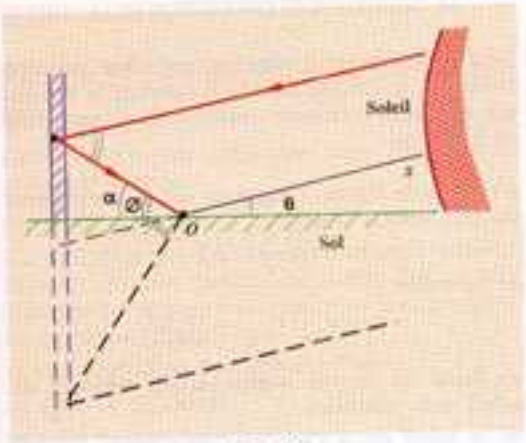
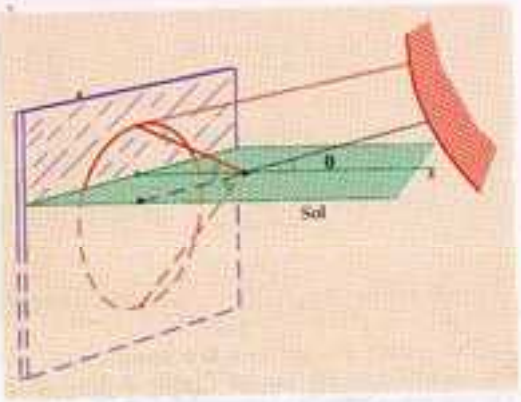


Fig. 41

L'intersection du cône lumineux par ce plan oblique est une ellipse dont l'observateur ne voit qu'une partie de l'arc supérieur.



Les angles d'élevation maximale pour les deux arcs de cercles sont :

$$\alpha_1 = \phi_1 - \theta = 22{,}52°,$$

et : $$\alpha_2 = 30{,}08°.$$

L'écart angulaire entre les deux arcs est de 7,56°.

4) *a*) L'indice de réfraction de l'eau varie avec la longueur d'onde de la lumière incidente, donc dans tous les calculs où cet indice intervient les résultats seront différents, mais peu, du bleu au rouge. Il en est ainsi de la suite des angles i_1, r_1, D_1, θ_1, α_1. Pour l'observateur les rayons de longueurs d'onde différentes arriveront à son œil sous des angles différents.

b) Il faut donc refaire la série de calcul d'angles pour le bleu et pour le rouge, pour le premier arc et pour le second. En quelques minutes de calculette, on obtient le tableau suivant :

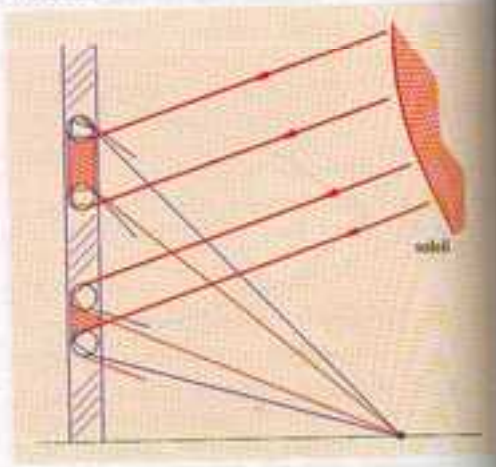
n° arc	couleur	i_1	r_1	D_1	θ	α	$\Delta\alpha_{1,2}$	$\Delta\alpha_{1,2}$
1	B	59,29	40,09	138,29	41,79	21,79	1,46	7,56°
1	R	59,88	40,73	136,75	43,25	23,25		
2	B	71,77	45,36	−128,62	51,38	31,38	2,62	
2	R	72,10	45,90	−131,23	48,76	28,76		

Ce tableau peut se résumer ainsi :

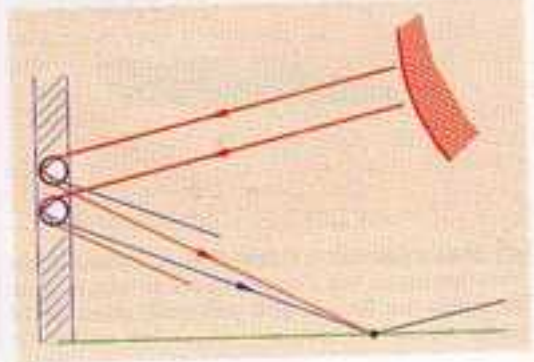
— Pour le premier arc, dont le sommet est à 22° au-dessus du sol, la dispersion est de 1,5°, la couleur bleue est du côté terre, la rouge du côté ciel :

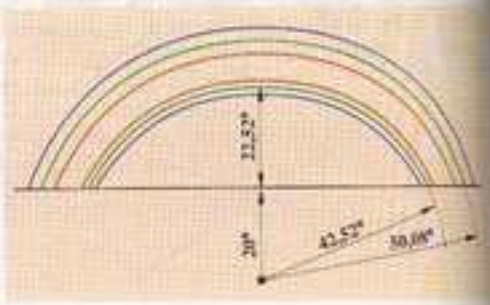
$$\alpha_{1B} < \alpha_{1R}.$$

— Le second arc est situé à 7,5° au-dessus du premier, sa dispersion est environ le double de celle du premier arc : 2,6°. Il apparaît donc deux fois plus large et la distribution des couleurs est inverse, c'est le rouge qui est côté sol et le bleu côté ciel.



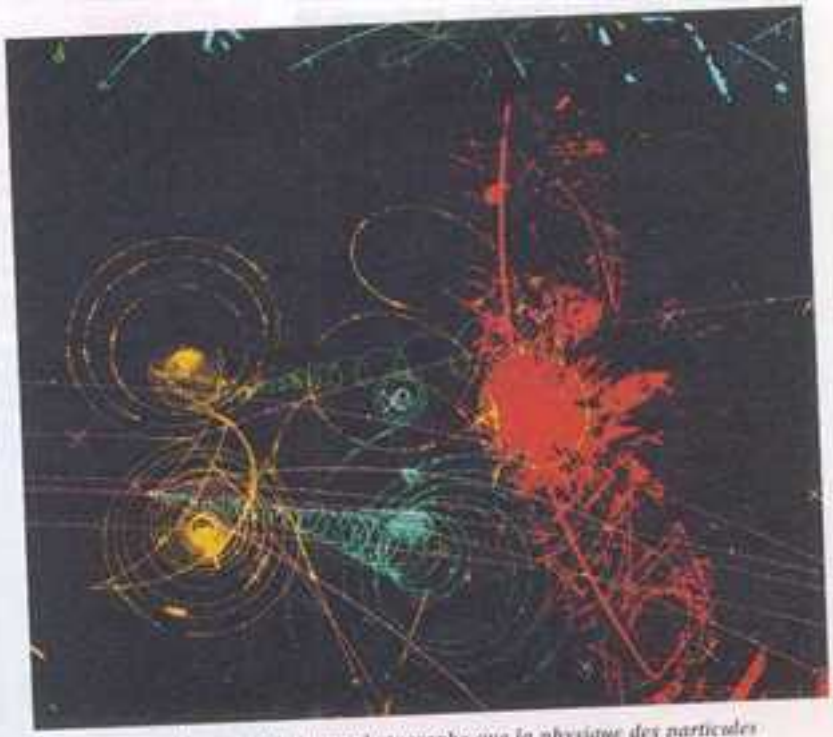
c) Ceci est schématisé ci-dessous :





15 Les particules de grande énergie

1 Insuffisances de la mécanique newtonienne.
2 Mécanique relativiste.
3 Les particules de masse nulle.
4 Unités et formules pratiques.
5 Équivalence énergie-masse. Relation d'Einstein.



Ce tableau est l'œuvre d'un jeune photographe que la physique des particules inspire. Il est obtenu par superposition de plusieurs clichés réels avec un coloriage arbitraire.

La physique des particules est la physique des constituants élémentaires de la matière, et des forces qui régissent leurs interactions.
Cette physique des particules élémentaires est passionnante, d'autant plus que les théories récentes du BIG-BANG, l'explosion initiale, relient l'évolution de l'infiniment grand aux mécanismes d'interaction de l'infiniment petit (que s'est-il passé durant les trois premières minutes de l'univers?). Le chapitre 20 présente une lecture sur ce sujet, qui peut être lue, au fur et à mesure de l'étude de ce chapitre et de ses suivants.
La mécanique newtonienne décrit parfaitement les mouvements des corps soumis à des forces, et elle permet de prévoir ces mouvements, tant que les vitesses acquises restent faibles devant la célérité de la lumière, mais, au fur et à mesure que les vitesses mises en jeu sont plus importantes et s'approchent de la célérité de la lumière, la mécanique newtonienne présente des insuffisances de plus en plus importantes et devient manifestement incorrecte.
Ceci se met en évidence par l'étude des particules qui, du fait de leurs faibles masses, peuvent acquérir de grandes vitesses.
*Pour décrire les mouvements, quelle que soit la vitesse, il faut utiliser le formalisme de la «relativité restreinte», conçu par Einstein en 1905. Ce formalisme est appelé, en abrégé : **mécanique relativiste**. La mécanique newtonienne n'en est qu'une approximation, mais combien importante car ses formules sont plus simples.*

1 INSUFFISANCES DE LA MÉCANIQUE NEWTONIENNE

Voici trois résultats d'expériences que la mécanique newtonienne ne peut expliquer.

1. La limitation de la vitesse

Le plus puissant accélérateur linéaire à électrons est actuellement celui de Stanford, Californie (U.S.A.). Il est long de 3,2 km (2 miles) et est constitué d'une succession de «cavités accélératrices» (équivalentes à des plaques accélératrices trouées) qui procurent, en fin de parcours, aux électrons une énergie de 50 GeV (1 GeV = 10^9 eV).
En moins d'un mètre les électrons acquièrent une vitesse proche de la célérité de la lumière (au millième près). Dans la suite de leur parcours dans l'accélérateur, leur énergie augmente régulièrement, mais leur vitesse n'augmente pratiquement plus. En fin d'accélération leur énergie atteint les 50 GeV requis, mais leur vitesse est toujours inférieure à la célérité de la lumière, tout en s'en étant rapprochée, à 10^{-6} près, mais sans la dépasser.

La célérité de la lumière apparaît donc comme une vitesse limite.

La célérité de la lumière dans le vide est une **des constantes universelles**, sa valeur est :

$$c = 2{,}997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1},$$

très proche de :

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}.$$

Elle n'a jamais pu être dépassée, mais c'est celle des particules de masse nulle.
La mécanique newtonienne ne prévoit pas cette limitation.

2. Relation entre l'énergie cinétique et la vitesse

Les chercheurs surent accélérer les électrons dès le début du siècle et ils utilisèrent la mécanique relativiste dès 1930, lors de la mise en service des premiers cyclotrons.
En 1964, W. Bertozzi, au M.I.T. à Boston (U.S.A.), a réalisé, dans un but pédagogique, une expérience très claire pour illustrer le problème.
Pour cela il utilisa un petit accélérateur linéaire d'électrons, dont il fit varier la tension accélératrice u, de 0 à 15 MV (fig. 1).
L'accélération était du type pulsé, aussi les électrons étaient-ils accélérés par paquets. Ces paquets d'électrons, à la sortie de l'accélérateur, parcouraient quelques mètres dans l'air puis étaient recueillis sur une cible d'aluminium.

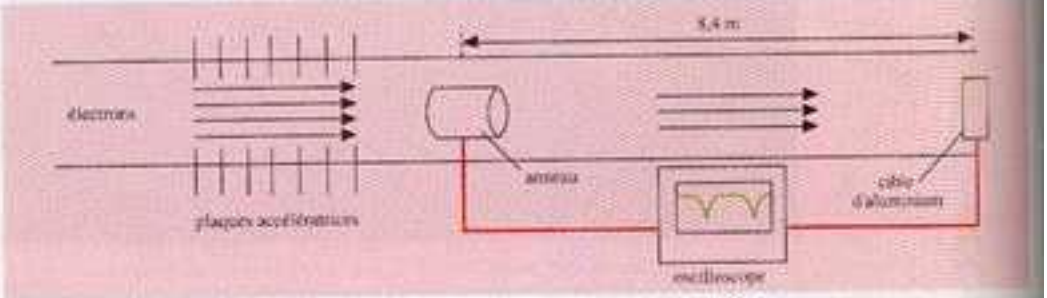


Fig. 1. *L'expérience de Bertozzi.*

...cédaient alors leur énergie cinétique à la cible sous forme d'énergie calorifique, ce qui échauffait celle-ci.

Les mesures de l'échauffement de la cible montrèrent que les électrons avaient bien acquis, et ensuite cédé à la cible, une énergie cinétique égale à $E_c = e.u$. Mais les mesures, très précises, du «temps de vol» des électrons, donc de leur vitesse montrèrent que :

$$E_c \neq \frac{1}{2} m.v^2.$$

Si la mécanique newtonienne était vérifiée, on aurait :

$$E_c = \frac{1}{2} m.v^2, \quad \text{d'où :} \quad v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}.$$

Or, le graphique de $v = f(\sqrt{E_c})$, n'est une droite que pour des faibles vitesses, jusqu'à $v = 0{,}1c$ environ (fig. 2). Au delà, la vitesse croît en fonction de la tension accélératrice, donc en fonction de l'énergie cinétique acquise, mais moins vite que ne le prédit la mécanique newtonienne. Cette vitesse, ce qui confirme l'expérience précédente, tend vers la célérité de la lumière, c, sans la dépasser.

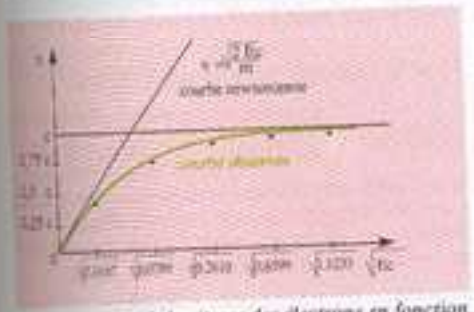


Fig. 2. Variation de la vitesse des électrons en fonction de leur énergie cinétique.



Fig. 3. Choc réel : $p + p \longrightarrow p + p$ à 2 GeV.

3. Relation entre l'énergie cinétique et la quantité de mouvement

La figure 3 représente un cliché de chambre à bulles à hydrogène liquide, dans laquelle un proton incident, sortant de l'accélérateur avec une énergie de 2 GeV, heurte un proton immobile, noyau de l'hydrogène liquide.
La figure 4 schématise le choc.
La mécanique newtonienne prédit :
— la conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p}_1 + \vec{0} = \vec{p}_2 + \vec{p}_3;$$

— la conservation de l'énergie cinétique :

$$E_{c_1} + 0 = E_{c_2} + E_{c_3}.$$

Or, $E_c = \frac{1}{2} m.v^2$, et $p = m.v$, d'où : $E_c = \frac{p^2}{2m}$,

soit :

$$\frac{p_1^2}{2m} = \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{p_3^2}{2m_3}.$$

Si, comme c'est le cas sur le cliché, les particules sont identiques, et ont donc même masse, alors :

$$p_1^2 = p_2^2 + p_3^2.$$

Et d'après la conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3.$$

En élevant au carré cette relation devient :

$$p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 + 2\vec{p}_2.\vec{p}_3.$$

Pour vérifier la relation de conservation de l'énergie, il faut que $\vec{p}_2.\vec{p}_3 = 0$, donc que $\vec{p}_2$ et $\vec{p}_3$ soient orthogonaux.
L'angle entre les traces des particules après le choc devrait être de 90°, or il est de 72° seulement.

Ces trois expériences montrent que :

A haute énergie, les expressions de la mécanique newtonienne ne conviennent pas. Il faut utiliser une autre mécanique : la mécanique relativiste.

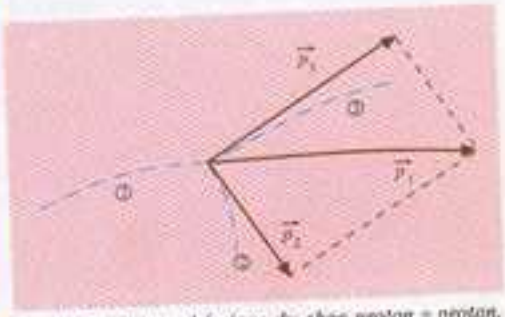


Fig. 4. Graphique théorique du choc proton - proton.

2 MÉCANIQUE RELATIVISTE

La mécanique relativiste se déduit de la théorie de la relativité restreinte.

Le terme « **relativité** » est de Galilée. Dans un de ses livres il explique qu'aucune expérience de mécanique faite dans un bateau peut prouver que celui-ci est à quai ou vogue sur les flots. Si les hublots sont fermés, un mouvement rectiligne uniforme du navire ne peut être détecté.
Ceci se traduit par le fait que les équations de la mécanique doivent être identiques dans tous les repères galiléens.

L'apport, extrêmement important d'Einstein, est de généraliser le principe de la relativité de Galilée à **tous** les phénomènes physiques, y compris les processus électriques et optiques qui mettent en jeu des particules se déplaçant à la vitesse de la lumière, en y incluant la contrainte que, quel que soit le mouvement et quel que soit le repère, cette vitesse soit une vitesse limite.

L'adjectif restreint signifie que cette extension mathématique à des phénomènes physiques nouveaux, a été limitée à leur description dans des repères galiléens.
La théorie de la relativité générale s'affranchit de cette restriction.

Cette théorie est donc basée sur deux postulats :
— les équations de la mécanique ont même expression dans tous les repères galiléens;
— la célérité de la lumière est la même dans tous les repères galiléens.
Par ailleurs, la relation importante entre la force appliquée à une particule et la variation de sa quantité de mouvement :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

reste inchangée.

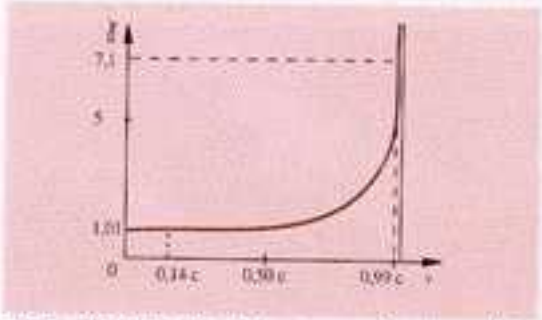


Fig. 5. Variation du facteur γ en fonction de la vitesse v.

1. Relations de définition des grandeurs relativistes

a) Quantité de mouvement

L'expression relativiste de la quantité de mouvement d'une particule en fonction de sa vitesse s'écrit :

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot m \cdot \vec{v}$$

Expression moins simple que celle de la mécanique newtonienne :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}.$$

Il est d'usage, pour alléger l'écriture de noter :

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

soit :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta^2)^{-1/2}.$$

Ainsi la quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{p} = \gamma \cdot m \cdot \vec{v}$$

Dans cette expression, lorsque la vitesse de la particule s'approche de la célérité de la lumière, β tend vers un, γ tend vers l'infini et la quantité de mouvement de même (fig. 5 et fig. 6).

Si un champ électrique accélérateur est appliqué à une particule chargée déjà rapide, la force électrique augmente sa quantité de mouvement et son énergie, mais sa vitesse ne varie que très peu.

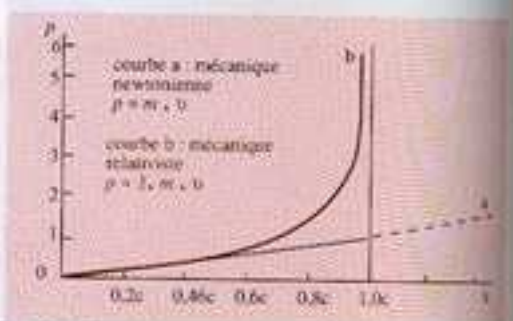


Fig. 6. Variation de la quantité de mouvement en fonction de la vitesse v.

c) Énergie cinétique

Par une méthode analogue à celle utilisée en mécanique newtonienne, on obtient l'expression de l'énergie cinétique relativiste E_c, en écrivant que sa variation est égale au travail des forces appliquées :

$$\Delta E_c = \int \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{\ell}.$$

En remplaçant $\vec{p}$ par son expression $\gamma . m . \vec{v}$, le calcul donne :

$$E_c = (\gamma - 1) . m . c^2.$$

2. Domaines d'utilisation

Les formules précédentes sont valables quelle que soit la vitesse de la particule, de 0 à c.

a) Si la vitesse v est proche de c

Si la vitesse est proche de c, β tend vers 1 et γ tend vers l'infini.

La quantité de mouvement et l'énergie cinétique de la particule tendent vers l'infini.

Réciproquement, pour que v tende vers c, il faut fournir à la particule une énergie cinétique très grande, donc lui appliquer une force importante pendant très longtemps, ou, ce qui se fait dans les accélérateurs, appliquer une force un grand nombre de fois (les particules font plus de cent mille tours par cycle d'accélération, et à chaque tour elles traversent les cavités accélératrices).

b) Si la vitesse v est faible devant c

Si la vitesse est faible devant c, la mécanique newtonienne peut s'appliquer.

Ceci se retrouve facilement :

si $v \ll c$ alors $\beta \ll 1$ et l'expression :

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}},$$

peut être approchée par $\gamma = 1 + \frac{1}{2}\beta^2$, puisque $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n . \varepsilon$, d'où :

$$p = \gamma . m . v = \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) . m . v = m . v$$

et :

$$E_c = (\gamma - 1) . m . c^2 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} . m . c^2 = \frac{1}{2} m . v^2.$$

La mécanique newtonienne apparaît donc comme une approximation, aux faibles vitesses, de la mécanique relativiste.

Pour que cette approximation soit acceptable il faut que $\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$ soit petit devant 1. On l'admet si $\frac{v^2}{c^2} < \frac{1}{100}$, soit si : $v < \frac{c}{10}$.

Mais $v = \frac{c}{10}$ est néanmoins une vitesse très grande, 30 000 km . s^{-1} à l'échelle macroscopique. Par exemple, pour un avion, voler à mach 3, c'est voler à seulement 1 km . s^{-1}.

Seules les particules de haute énergie requièrent l'outil de la mécanique relativiste. Pour le reste, l'usage de la mécanique newtonienne avec ses formules plus simples, est largement suffisant.

3. L'énergie de masse

Dans l'expression de l'énergie cinétique d'une particule apparaît le facteur $m . c^2$, qui a les dimensions d'une énergie. Ceci conduisit Einstein à postuler que cette équivalence mathématique reflétait une réalité physique et qu'une particule de masse m, possédait une énergie E_0, due à sa masse, et de valeur :

$$E_0 = m . c^2$$

En plus de son énergie cinétique, énergie « externe » due au mouvement, une particule possède donc une énergie « interne » : son **énergie de masse.**

4. Énergie totale

L'énergie totale E, d'une particule, est définie comme la somme de ces deux énergies :

$$E = E_c + E_0.$$

Énergie totale = Énergie cinétique + Énergie de masse, soit :

$$E = (\gamma - 1) . m . c^2 + m . c^2,$$

$$E = \gamma . m . c^2,$$

ou sous forme plus explicite :

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . m . c^2$$

5. Relation entre énergie totale et quantité de mouvement

L'énergie et la quantité de mouvement dépendent de la vitesse de la particule :

$$E = \gamma . m . c^2, \quad \text{et} \quad p = \gamma . m . v,$$

avec :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Pour éliminer v, entre E et p, on élève les relations au carré, soit :

$$E^2 = \gamma^2 . m^2 . c^4, \; p^2 = \gamma^2 . m^2 . v^2 \text{ et } \gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

LES PARTICULES DE MASSE NULLE

1. Unités de quantité de mouvement

La formule $E=\sqrt{(p.c)^2+(m.c^2)^2}$, montre que la quantité $p.c$, a la dimension d'une énergie.
Ainsi, est-il pratique d'exprimer :
$p.c$ en MeV, soit p en MeV/c.
Par exemple, si la quantité de mouvement d'une particule vaut 1 000 MeV/c, alors la quantité $p.c$ vaut 1 000 MeV.
En résumé, les quantités E, $m.c^2$, $p.c$, exprimées en MeV (ou en GeV) sont les variables essentielles de la mécanique relativiste.

2. Un critère simple pour décider si une particule est relativiste ou non

Une particule est non relativiste tant que sa vitesse reste inférieure à $0{,}1c$.
En écrivant la vitesse sous la forme habituelle $v=\beta.c$, avec β petit, il vient : $\gamma=1+\frac{1}{2}\beta^2$,

d'où :

$$p=\gamma.m.v=\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right).m.\beta.c$$

$$=\beta.m.c+\frac{1}{2}\beta^3.m.c.$$

Le second terme est négligeable puisque β est petit. En multipliant par c on obtient :

$$p.c=\beta.m.c^2.$$

Pour décider si une particule est relativiste ou non il suffit de comparer $p.c$ à $m.c^2$. Si $p.c<0{,}1m.c^2$, la particule n'est pas relativiste.
Par exemple un proton ayant une quantité de mouvement de 50 MeV/c n'est pas relativiste mais un électron de même quantité de mouvement l'est.
— Pour le proton :
$p.c=50$ MeV et $m.c^2=938$ MeV d'où :

$$\frac{p.c}{m.c^2}=0{,}053,$$

on peut faire l'approximation de la mécanique newtonienne et dire que :

$$\frac{p.c}{m.c^2}=\beta,$$

d'où : $v=0{,}053c$.
— Pour l'électron :
$p.c=50$ MeV et $m.c^2=0{,}51$ MeV d'où :

$$\frac{p.c}{m.c^2}=98,$$

la mécanique relativiste s'impose. Par exemple, pour calculer la vitesse, il faut calculer l'énergie totale :

$$E=\sqrt{(p.c)^2+(m.c^2)^2}=50{,}003 \text{ MeV},$$

et utiliser la formule :

$$\beta=\frac{p.c}{E}=0{,}99995 \quad \text{d'où} \quad v=0{,}99995c.$$

4. Expression pratique de l'énergie cinétique en mécanique newtonienne

Il suffit d'écrire :

$$E_c=\frac{1}{2}m.v^2=\frac{1}{2}\frac{p^2}{m}=\frac{1}{2}\frac{(p.c)^2}{m.c^2}$$

On retrouve d'ailleurs cette expression en développant, au second ordre, la formule de l'énergie totale lorsque $p.c$ est petit devant $m.c^2$:

$$E=\sqrt{(p.c)^2+(m.c^2)^2}$$

$$=m.c^2\sqrt{1+\frac{(p.c)^2}{(m.c^2)^2}},$$

$$E=m.c^2+\frac{1}{2}\frac{(p.c)^2}{m.c^2}$$

5. Action d'un champ magnétique sur une particule en mouvement

L'action d'un champ magnétique perpendiculaire à la trajectoire d'une particule chargée engendre, sur cette particule, une force de mêmes sens, direction et valeur que celle prédite par la mécanique classique. La relation :

$$p=q.R.B$$

est toujours valable, même quand :

$$p=\gamma.m.v.$$

Cette formule est très utilisée car techniquement il est plus facile de mesurer les quantités de mouvement des particules que leurs vitesses.
— Les quantités de mouvement s'obtiennent à partir des mesures des courbures des trajectoires des particules dans un champ magnétique. C'est ce qui se fait dans les chambres à bulles.
— Les vitesses s'obtiennent en mesurant le « temps de vol » des particules entre deux détecteurs, en général des plastiques scintillateurs.
— Avec les unités pratiques, la formule s'écrit :

$$p.c=c.q.R.B \text{ (en joules)}.$$

Or q, pour une particule chargée est égal à $\pm e$.
En divisant par e, les joules deviennent des électronvolts, et par 10^6 des MeV :

$$p.c=\frac{3\times10^8}{10^6}R.B \text{ (en MeV)},$$

d'où :

$$\boxed{p.c=300R.B}$$

Dans cette expression : $p.c$ est en MeV;
R en m;
B en T.

5 ÉQUIVALENCE ÉNERGIE-MASSE RELATION D'EINSTEIN

Écrire qu'une particule possède une énergie de masse $m.c^2$, c'est appliquer à un cas particulier la relation plus générale :

$$E = M.c^2,$$

valable pour toutes masses et toutes formes d'énergies.

Voir « Pour en savoir plus » pour l'interprétation de cette formule qui est assez délicate.

Cette formule s'applique en pratique sous la forme :

$$\Delta E = \Delta M.c^2$$

C'est la relation d'Einstein.

La masse d'une particule libre, qu'elle soit en mouvement ou qu'elle soit au repos, est constante.

Par contre, lorsque des particules interagissent, il peut y avoir une variation de la somme des masses, entre les particules initiales et finales, car lors du choc il peut se créer une ou plusieurs particules nouvelles, et dans ce cas une fraction de l'énergie cinétique des particules incidentes s'est matérialisée en énergie de masse de ces particules créées.

L'événement présenté figure 7 montre un choc avec création de 2 nouvelles particules. Ces particules sont appelés des « **mésons** » π : après le choc il y a trois traces de particules de charges positives : p, p, π^+ et une, de particule de charge négative : π^-, de courbure opposée.

La réaction qui s'est produite s'écrit :

$$p + p \longrightarrow p + p + \pi^+ + \pi^-.$$



Fig. 7. *Création de deux particules lors du choc*
$p + p \longrightarrow p + p + \pi^+ + \pi^-$.

L'événement suivant montre un choc spectaculaire avec création de 18 mésons π (fig. 8).

Lorsque l'énergie disponible est suffisante la réaction peut créer des **antiparticules.** Par exemple :

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}.$$

Lors de ce choc il s'est matérialisée une paire : proton + antiproton ($\bar{p}$ représente l'antiproton).

Les antiprotons sont facilement séparables car ils portent une charge électrique négative. Envoyés ensuite sur une cible de protons, ils peuvent soit faire des chocs, ce qui les ralentis (fig. 9) soit s'annihiler avec les protons cible et dans ce cas le couple antiproton-proton disparaît sous forme d'énergie qui se matérialise en quelques mésons π.

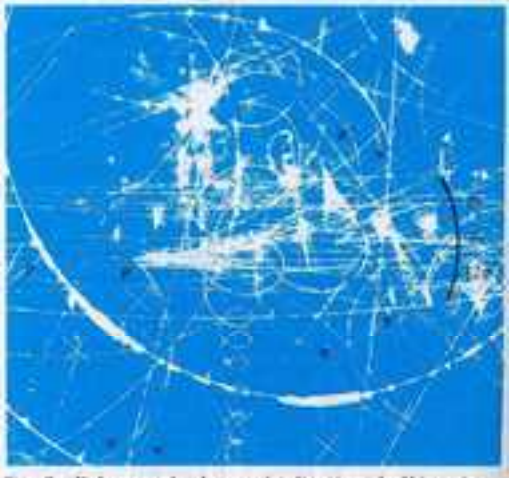


Fig. 8. *Bel exemple de matérialisation de l'énergie*
$p + p \longrightarrow p + p + 18\pi$.

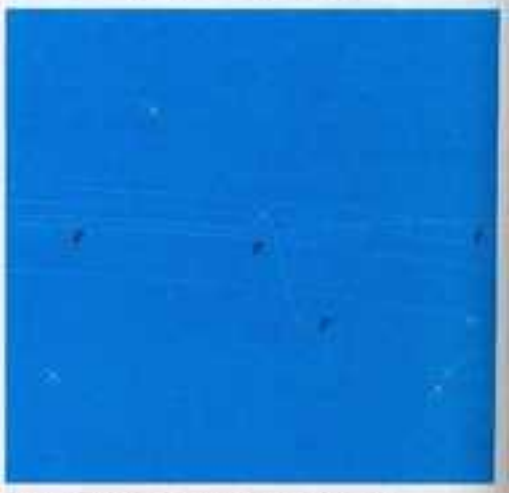


Fig. 9. *Choc élastique antiproton-proton*
$\bar{p} + p \longrightarrow \bar{p} + p$.
Remarquer les courbures opposés des traces sortantes

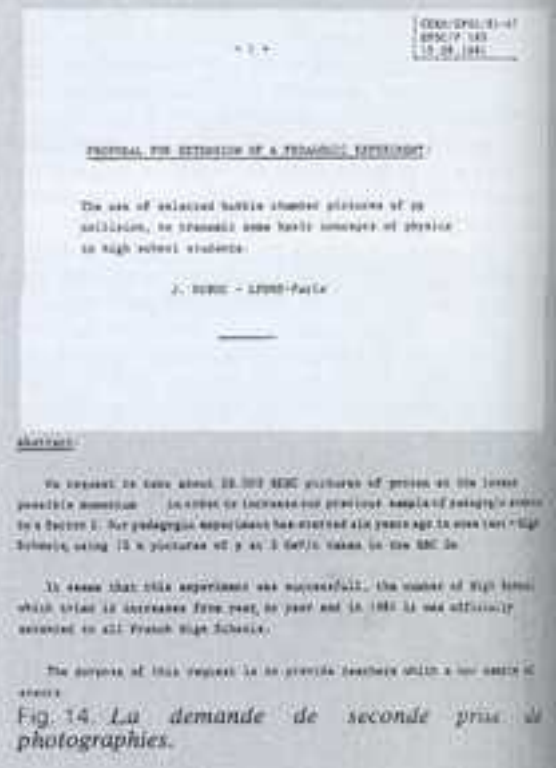
Les protons sortant de l'accélérateur avaient une quantité de mouvement de 2 GeV/c.
Après parcours en faisceau ils pénétraient dans la chambre et interagissaient, ou non, avec les protons cibles immobiles que constituent les noyaux de l'hydrogène liquide dans la chambre. 12 000 clichés ont été pris. Après examen et mesures au laboratoire, seuls ont été retenus les événements dont le plan d'interactions était parallèle au plan de la photographie, et qui de plus conduisaient à des calculs significatifs.
Cette sélection sévère, une vingtaine d'événements l'ont franchie. Les reproductions photographiques permettent de réaliser les deux T.P. qui sont au programme.
Le premier T.P. étudie un **choc élastique.**
Son but est de vérifier les lois de conservation qui régissent les interactions entre particules élémentaires et par là de montrer, que seule la formulation de la mécanique relativiste rend compte des mesures expérimentales.
Le deuxième T.P. étudie un **choc inélastique.** Lors de ce type de choc une particule nouvelle est créée, et le but est d'identifier cette particule, en utilisant les lois de conservations, et de prouver qu'une partie de l'énergie cinétique du proton incident s'est transformée en cette particule additionnelle, donc en matière.

• La seconde prise de données eut lieu en 1981. Cette fois les protons incidents avaient une quantité de mouvement de 5 GeV/c.
La chambre à bulles était la grosse B.E.B.C. (fig. 13).
Le corps de chambre a 3,5 m de diamètre, le volume d'hydrogène liquide est de 35 m^3. Les bobines magnétiques sont supraconductrices et maintenues à 4 K de température. Il y circule un courant de 5 700 A créant un champ magnétique de 3,5 T (pour maintenir cette intensité, il suffit de 0,8 V, tant la résistance des supraconducteurs est faible).
20 000 clichés ont été déjà pris, qui condoisent à une dizaine d'événements suffisamment clairs pour être exploitables en classe.

Ils permettent de faire exactement les mêmes T.P. que les clichés à 2 GeV/c, mais dans un autre domaine cinématique.



Fig. 13. *La B.E.B.C. (Big European Bubble Chamber).*



PROPOSAL FOR EXTENSION OF A PEDAGOGIC EXPERIMENT

The use of selected bubble chamber pictures of pp collisions, to transmit some basic concepts of physics to high school students

J. BUBOC - LPNHE-Paris

abstract:

We request to take about 20 000 BEBC pictures of proton on H2 target possible momentum ... in order to increase our previous sample of pedagogic events to a factor 2. Our pedagogic experiment has started six years ago to some tens of High Schools, using 15 k pictures at p ≈ 2 GeV/c taken in the BBC 2m

It seems that this experiment was successful, the number of High School which asked to participate grew year by year and in 1981 it was officially extended to all French High Schools.

The purpose of this request is to provide teachers which + ... events

Fig. 14. *La demande de seconde prise de photographies.*

1) ÉTUDE DU CHOC ÉLASTIQUE

Un choc est dit élastique si les particules sortantes, après le choc, sont les mêmes que celles avant le choc.
Pour le choc élastique proton-proton étudié, l'équation de la réaction est :

$$p_1 + p_0 \longrightarrow p_2 + p_3$$

1 représente le proton incident;
0 le proton cible initialement immobile;
2 et 3 les deux protons après le choc.

L'allure de l'événement est celui de la figure 15. Les exemples numériques et les calculs correspondent à l'événement réel labellé n° 12.



Fig. 15. *Choc élastique proton-proton.*

a) Vérification de la conservation de la quantité de mouvement

Le proton cible étant immobile, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{p}_1 + \vec{0} = \vec{p}_2 + \vec{p}_3.$$

C'est une relation vectorielle.

• Les directions des quantités de mouvement au point de choc sont les tangentes aux traces en ce point.
Ces tangentes sont tracées sur un papier semi-transparent plaqué sur le cliché.

• Les valeurs des quantités de mouvement sont obtenues par la mesure, aussi soignée que possible à 1 ou 2 % près, des rayons de courbure des trois traces, à l'aide d'abaques calibrés. Les mesures donnent :

$R_1 = 420$ cm; $R_2 = 80$ cm; $R_3 = 400$ cm.

Le passage du rayon de courbure mesuré sur la photographie à la quantité de mouvement se fait via la relation $p = q.R.B$. Pour cela il faut connaître :
— la carte du champ magnétique dans la chambre;
— la carte des aberrations géométriques des objectifs des caméras;
— la position en profondeur de l'événement dans la chambre pour en déduire le grandissement.
C'est ce qui se fait au laboratoire, et la valeur de la quantité de mouvement du proton incident, qui a donc été mesurée avec une grande précision, est inscrite sur la photographie :

$$p_1 = 2058 \text{ MeV/c}.$$

• En T.P. il suffit d'écrire que les quantités de mouvement sont proportionnelles aux rayons de courbure, et ainsi on calcule :

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{R_2}{R_1} \quad \text{et} \quad p_3 = p_1 \cdot \frac{R_3}{R_1}$$

le tout en MeV/c.

D'où : $p_2 = 2058 \times \dfrac{80}{420} = 392$ MeV/c.

et : $p_3 = 1960$ MeV/c.

ce qui conduit au graphique des quantités de mouvement (fig. 16).

L'échelle conseillée est de 10 cm pour 1 000 MeV/c, ce qui donne un dessin d'une vingtaine de centimètres. L'égalité vectorielle doit être vérifiée, avec cette échelle, à 2 ou 3 mm près.

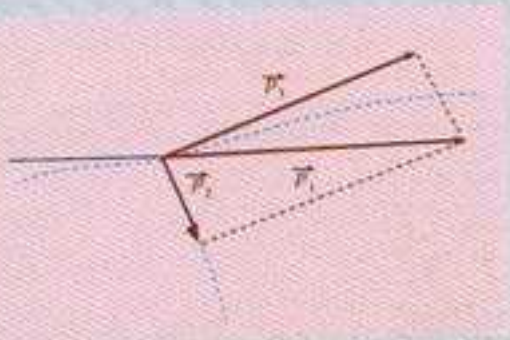


Fig. 16. *Vérification de la conservation de la quantité de mouvement lors du choc.*

b) Vérification de la conservation de l'énergie

La mesure des valeurs des quantités de mouvement, qui s'appuie sur la relation $p = q.R.B$ ne présume pas du formalisme de la mécanique utilisé car cette relation est valable aussi bien en mécanique newtonienne qu'en mécanique relativiste.
Dans les deux formalismes, il y a conservation de l'énergie lors du choc, mais selon l'un ou l'autre, la relation entre l'énergie cinétique et la quantité de mouvement diffère.

• *Essai de la mécanique newtonienne*
L'équation de conservation de l'énergie cinétique lors du choc est :

$$E_{c_1} + 0 = E_{c_2} + E_{c_3}.$$

En mécanique newtonienne, la relation entre l'énergie cinétique (notée E_c) d'une particule et sa quantité de mouvement est :

$$E_c = \frac{1}{2} m.v^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{(p.c)^2}{2(m.c^2)}.$$

$p.c$ et $m.c^2$ s'exprimant en MeV.
L'énergie de masse $m.c^2$, d'un proton, vaut 938 MeV. On en déduit les valeurs des quatre énergies :

(1) $p_1 = 2058$ MeV/c $\longrightarrow$ $E_{c_1} = \dfrac{(2058)^2}{2 \times 938} = 2258$ MeV.

(0) $p_0 = 0$ MeV/c $\longrightarrow$ $E_{c_0} = 0$ MeV;

(2) $p_2 = 392$ MeV/c $\longrightarrow$ $E_{c_2} = 82$ MeV;

(3) $p_3 = 1960$ MeV/c $\longrightarrow$ $E_{c_3} = 2048$ MeV.

La différence, ΔE_{c_n}, entre les énergies cinétiques après et avant le choc devrait être nulle :

$$\Delta E_{c_n} = -(E_{c_1} + E_{c_0}) + (E_{c_2} + E_{c_3}) = 0?$$

$$\Delta E_{c_n} = -(2258 + 0) + (82 + 2048) = -128 \text{ MeV}.$$

En pratique ΔE_{c_n} ne saurait être rigoureusement égal à 0, à cause des imprécisions sur les mesures. Pour les événements dont la quantité de mouvement initiale est de 2 GeV/c, ΔE_{c_n} est de l'ordre de 100 à 200 MeV, et pour ceux à 5 GeV/c ΔE_{c_n} est de l'ordre de 1 000 à 2 000 MeV.
Les mesures des courbures étant faites à 1 % près, les quantités de mouvement et les énergies cinétiques sont obtenues avec cette précision. ΔE_{c_n} devrait donc être de l'ordre de 20 MeV pour les événements à 2 GeV/c et de 50 MeV pour ceux à 5 GeV/c.

• *Essai de la mécanique relativiste*
En mécanique relativiste la relation entre l'énergie cinétique d'une particule et sa quantité de mouvement est un peu compliquée, aussi est-il avantageux de travailler avec l'énergie totale de cette particule $E = E_c + E_0$.

Les énergies de masse ne changent pas dans un choc élastique, mais l'utilisation de l'énergie totale n'est pas un simple artifice de calcul, car à haute énergie les chocs élastiques (sujets de ce T.P.) sont minoritaires et en général les chocs sont inélastiques (tels ceux étudiés au T.P. suivant).
La relation entre l'énergie totale relativiste (notée E_r) d'une particule et sa quantité de mouvement est : $E_r = \sqrt{(p.c)^2 + (m.c^2)^2}$.

Les calculs numériques donnent (fig. 17) :

(1) $p_1 = 2058$ MeV/c

$\longrightarrow E_{r_1} = \sqrt{(2058)^2 + (938)^2} = 2262$ MeV;

(0) $p_0 = 0$ MeV/c $\longrightarrow E_{r_0} = 938$ MeV;

(2) $p_2 = 392$ MeV/c $\longrightarrow E_{r_2} = 1017$ MeV;

(3) $p_3 = 1960$ MeV/c $\longrightarrow E_{r_3} = 2173$ MeV.

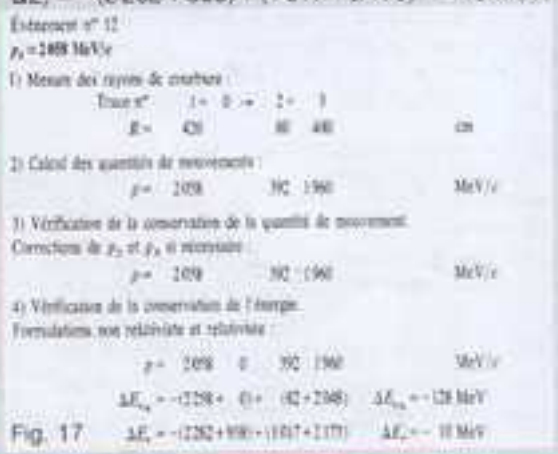
Pour le proton cible (0) son énergie totale se réduit à son énergie de masse.
La relation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$E_{r_1} + E_{r_0} = E_{r_2} + E_{r_3}$$

$$\Delta E_r = -(E_{r_1} + E_{r_0}) + (E_{r_2} + E_{r_3}) = 0?$$

Soit ici :

$$\Delta E_r = -(2262 + 938) + (1017 + 2173) = -10 \text{ MeV}.$$


Événement n° 12
$p_1 = 2058$ MeV/c
1) Mesure des rayons de courbure
Trace n° 1 + 0 − 2 + 3
R = 426 80 440 cm
2) Calcul des quantités de mouvement
p = 2058 392 1960 MeV/c
3) Vérification de la conservation de la quantité de mouvement
Corrections de p_2 et p_3 si nécessaire
p = 2058 392 1960 MeV/c
4) Vérification de la conservation de l'énergie
Formulations non relativiste et relativiste
p = 2058 0 392 1960 MeV/c
$\Delta E_{c_n} = -(2258 + 0) + (82 + 2048)$ $\Delta E_{c_n} = -128$ MeV
$\Delta E_r = -(2262 + 938) + (1017 + 2173)$ $\Delta E_r = -10$ MeV
Fig. 17

Pour les chocs élastiques à 2 GeV/c, ΔE_{c_n} est de l'ordre de 10 à 20 MeV; et pour ceux à 5 GeV/c plus difficiles à mesurer, ΔE_{c_n} est de l'ordre de 20 à 50 MeV.

• Il est intéressant de calculer les vitesses des protagonistes par la relation simple $\beta = \frac{p.c}{E_r}$.

(1) $\beta_1 = \frac{2058}{2262} = 0{,}910$

$\longrightarrow v_1 = 273\,000 \text{ km.s}^{-1}$;

(0) $\beta_0 = 0$ $\longrightarrow v_0 = 0 \text{ km.s}^{-1}$;

(2) $\beta_2 = 0{,}380$ $\longrightarrow v_2 = 114\,000 \text{ km.s}^{-1}$;

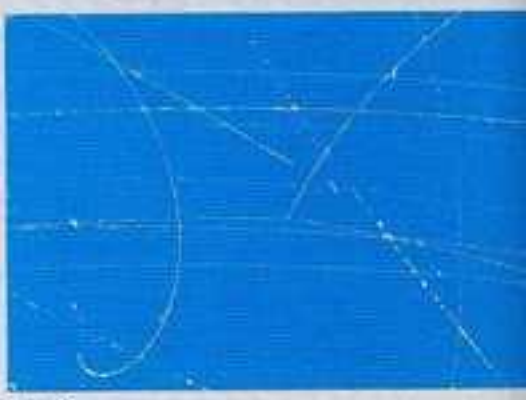
(3) $\beta_3 = 0{,}902$ $\longrightarrow v_3 = 271\,000 \text{ km.s}^{-1}$.

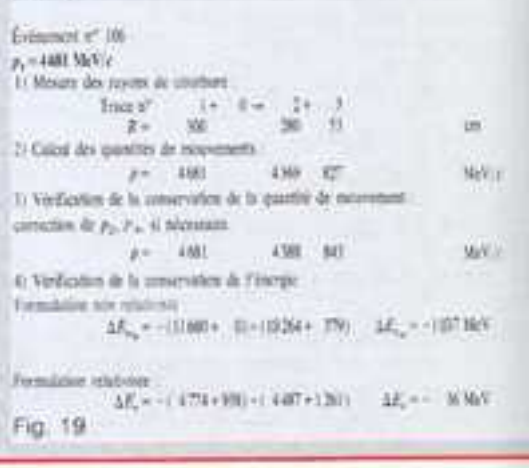
c) Conclusion

L'énergie doit être conservée lors du choc. Dans les deux formalismes la balance d'énergie ΔE_{c_n} ou ΔE_r doit être nulle (à l'imprécision de mesure près). Pour décider quel formalisme convient il faut comparer ΔE_{c_n} et ΔE_r à 0. Le résultat est net : ΔE_r est plus proche de 0 que ΔE_{c_n} et ce d'un facteur 10, ce qui prouve que, **à haute énergie, seule la mécanique relativiste rend compte des phénomènes.**

• La mécanique newtonienne n'est pas applicable à ces vitesses.

• L'écart est d'autant plus important que les particules en mouvement sont plus énergiques.
L'événement n° 106 à 5 GeV/c et sa fiche de calculs sont reproduits figure 18 et figure 19.


Fig. 18


Événement n° 106
$p_1 = 4481$ MeV/c
1) Mesure des rayons de courbure
Trace n° 1 + 0 − 2 + 3
R = 900 280 11 cm
2) Calcul des quantités de mouvements
p = 4481 4369 82° MeV/c
3) Vérification de la conservation de la quantité de mouvement
corrections de p_2, p_3 si nécessaire
p = 4481 4388 841 MeV/c
4) Vérification de la conservation de l'énergie
Formulation non relativiste
$\Delta E_{c_n} = -(11\,680 + 0) + (10\,264 + 779)$ $\Delta E_{c_n} = -107$ MeV
Formulation relativiste
$\Delta E_r = -(4774 + 938) + (4487 + 1261)$ $\Delta E_r = -$ 36 MeV
Fig. 19

IDE D'UN CHOC INÉLASTIQUE

oc est dit inélastique si, après ce choc, les
les sortantes sont différentes — soit en
e, soit en nature — des deux particules qui
teragi.
nent dit si leurs masses sont différentes,
s'il y a eu, au cours du choc, transformation
fraction de l'énergie cinétique de la particule
nte en matière.
ur des mêmes lots de clichés proton-proton
et 5 GeV/*c* nous avons sélectionné une
ine d'événements inélastiques suffisamment
pour être étudiés en T.P.
re de ces événements est assez semblable à
des chocs élastiques. Pourtant les deux traces
ntes sont plus courbées, ce qui est le signe
uantités de mouvement plus faibles (fig. 20).
certains événements ces deux traces sont du
e côté de la trace incidente (fig. 21) ce qui
ne signature évidente de la non-conservation
rente de la quantité de mouvement.
du T.P. précédent nous avons vérifié que la
ervation de la quantité de mouvement, et la
ervation de l'énergie relativiste sont de bonnes
nous allons maintenant utiliser ces lois pour
prendre ce qui s'est passé lors de ce choc
stique.
s le texte qui suit, seront insérés les mesures
alculs d'un événement réel, le n° 33 présenté
e 21.

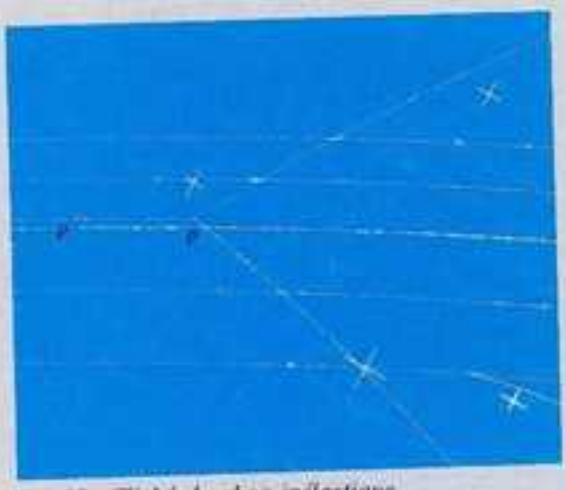


Fig. 20. *Cliché de choc inélastique.*



Fig. 21. *Un événement inélastique. Il n'est pas difficile de se rendre compte qu'une particule neutre a été créée.*

lise en évidence de la création d'une ticule

graphe des quantités de mouvement s'établit
a même manière que pour le choc élastique :
tracé des tangentes aux traces au point de
c.;
mesure des rayons de courbures :

$R_1 = 430$ cm $\quad R_2 = 230$ cm $\quad R_3 = 87$ cm;

calcul des valeurs des trois quantités de mouve-
nt :

$p_1 = 2030$ MeV/c (mesurée au laboratoire);

$p_2 = p_1 \cdot \frac{R_2}{R_1} = 1086$ MeV/c; $\quad p_3 = 411$ MeV/c

obtient un graphe du type figure 22 ou figure 23
montrent que les deux particules sortantes qui
ent les deux traces n'emportent pas la totalité
la quantité de mouvement de la trace incidente :

$$\vec{p}_1 > \vec{p}_2 + \vec{p}_3.$$

fraction de cette quantité de mouvement, qui
paremment manque, a été emportée par une
rticule neutre créée lors du choc.
es particules neutres ne laissent pas de traces
ns la chambre car elles n'ionisent pas
ydrogène liquide sur leur passage.)
r le graphique on mesure donc la quantité de
ouvement de cette particule, soit : $\vec{p}_4$.

$$p_4 = 708 \text{ MeV/c}$$

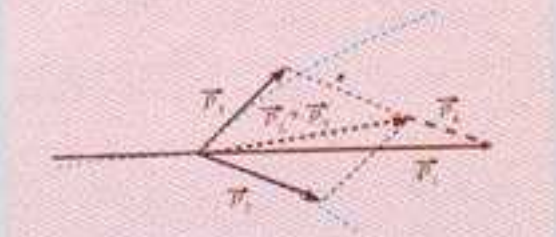


Fig. 22. *Le graphique des quantités de mouvement d'un événement inélastique et la détermination de la quantité de mouvement de la particule neutre créée.*

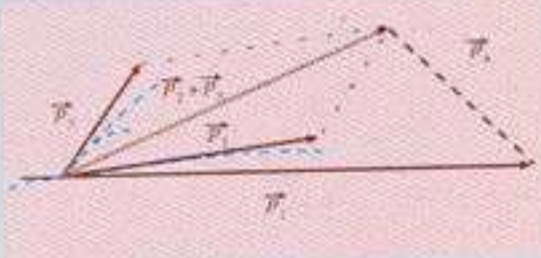


Fig. 23. *Graphique des quantités de mouvement de l'événement n° 33.*

b) Identification de cette particule

Pour identifier la particule neutre on établit la liste des réactions possibles et l'on retient celle qui conduit à la vérification de la conservation de l'énergie.

— Cette particule doit être neutre, et la conservation du nombre de nucléons impose que ce ne soit pas un neutron supplémentaire.

L'examen du tableau des particules élémentaires nous fournit les candidats : π^0, γ, ν.

Les réactions avec production de γ énergiques sont rares (100 fois plus rares qu'avec création de π^0), celles avec ν encore beaucoup plus rares, le bon candidat est probablement le méson π^0.

— Une première réaction possible est donc :

$$\underset{1}{p} + \underset{0}{p} \longrightarrow \underset{2}{p} + \underset{3}{p} + \underset{4}{\pi^0}$$

Ce n'est pas la seule. En effet, lors de l'interaction, il peut y avoir échange de la charge électrique entre le π^0 créé et l'un des protons sortants : le n° 2 ou le n° 3. Le π^0 devenant π^+ et le proton correspondant devenant neutron. Si l'échange se fait avec le proton sortant labellé 3, la réaction est :

$$\underset{1}{p} + \underset{0}{p} \longrightarrow \underset{2}{p} + \underset{3}{\pi^+} + \underset{4}{n}$$

Mais cet échange de charge peut aussi se faire avec le proton sortant labellé 2, et au total il y a trois réactions inélastiques possibles :

Réaction : $A : p + p \longrightarrow p + p + \pi^0$

$B : p + p \longrightarrow p + \pi^+ + n$

$C : p + p \longrightarrow \pi^+ + p + n$

Quelle réaction s'est effectivement produite?

c) Conservation de l'énergie

Le choix entre les trois réactions possibles se fera par la vérification, ou non, de la conservation de l'énergie.

— L'énergie à calculer est l'énergie totale relativiste. Énergie relativiste, puisque c'est la seule qui convient pour les particules de grande énergie et totale, puisqu'il y a eu manifestement transformation d'énergie cinétique en matière.

— Il faut donc, pour chaque particule, avant et après le choc, calculer son énergie E_i à partir de sa quantité de mouvement en utilisant l'expression :

$$E_i = \sqrt{(p_i . c)^2 + (m_i . c^2)^2}$$

Mais selon la réaction A, B ou C, pour une même quantité de mouvement les énergies diffèrent puisque les valeurs des masses à introduire dans la formule de l'énergie sont celles qui correspondent à la réaction essayée.

— Les énergies de masses des particules citées sont :

pour le proton : $m_p . c^2 = 938$ MeV;

pour le neutron : $= 939$ MeV;

pour π^+ : $= 139$ MeV;

pour π^0 : $= 135$ MeV

— Calculs pour la réaction A

(1) = proton : $p_1 = 2\,030$ MeV/c

$\longrightarrow E_{c_1} = \sqrt{(2\,030)^2 + (938)^2} = 2\,236$ MeV

(0) = proton : $p_0 = 0$ MeV/c $\longrightarrow E_{c_0} = 938$ MeV

(2) = proton : $p_2 = 1\,086$ MeV/c

$\longrightarrow E_{c_2} = 1\,435$ MeV

(3) = proton : $p_3 = 411$ MeV/c

$\longrightarrow E_{c_3} = 1\,024$ MeV

(4) = π^0 : $p_4 = 708$ MeV/c $\longrightarrow E_{c_4} = 721$ MeV.

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$E_{c_1} + E_{c_0} = E_{c_2} + E_{c_3} + E_{c_4}$$

ou encore :

$$\Delta E_c = (E_{c_2} + E_{c_3} + E_{c_4}) - (E_{c_1} + E_{c_0}) = 0?$$

ce qui, pour l'événement étudié donne :

$$\Delta E_c = (1\,435 + 1\,024 + 721) - (2\,236 + 938) = 6 \text{ MeV},$$

ce qui est une bonne vérification.

— Calculs pour la réaction B

Les calculs sont identiques, et n'ont pas à être refaits pour les particules (1), (0), (2).

Pour la particule (3) dans cette hypothèse B, ce doit être un π^+, il faut donc injecter 139 MeV (au lieu de 938 dans l'hypothèse A) dans la formule de E_{c_3} et de même, pour la particule (4) supposée être un neutron, il faut injecter 939 MeV au lieu de 135 MeV dans la formule de E_{c_4}.

(3) = π^+ : $p_3 = 411$ MeV/c

$\longrightarrow E_{c_3} = \sqrt{(411)^2 + (139)^2} = 434$ MeV

(4) = neutron : $p_4 = 708$ MeV/c

$\longrightarrow E_{c_4} = 1\,176$ MeV.

D'où la balance d'énergie :

$$\Delta E_c = (E_{c_2} + E_{c_3} + E_{c_4}) - (E_{c_1} + E_{c_0}) = 0?$$

$$= (1\,435 + 434 + 1\,176) - (2\,236 + 938)$$

$$= -129 \text{ MeV}.$$

La réaction B vérifie beaucoup moins bien que la réaction A l'équation de conservation de l'énergie.

— Calculs pour la réaction C

La particule (2) est cette fois un π^+, la (3) est un proton, la (4) est un neutron.

Le seul calcul nouveau à faire est celui de l'énergie de la particule (2) en tant que π^+ :

(2) = π^+ : $p_2 = 1\,086$ MeV/c

$\longrightarrow E_{c_2} = \sqrt{(1\,086)^2 + (139)^2} = 1\,095$ MeV.

et avec les quantités déjà calculées :

$$\Delta E_c = (E_{c_2} + E_{c_3} + E_{c_4}) - (E_{c_1} + E_{c_0}) = 0?$$

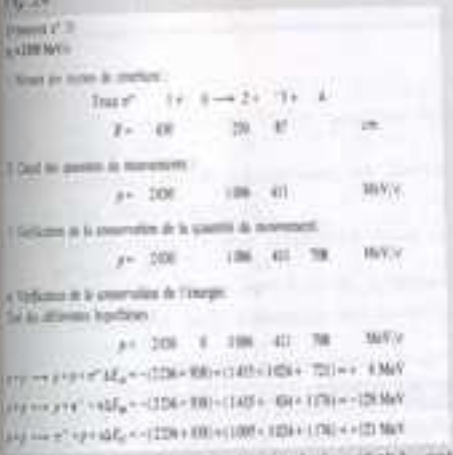
$$= (1\,095 + 1\,024 + 1\,176) - (2\,236 + 938)$$

$$= 121 \text{ MeV}$$

La relation C, elle aussi, vérifie beaucoup moins bien que la réaction A l'équation de la conservation de l'énergie.

Tout ceci est résumé sur la feuille de T.P. : figure 24.

Fig. 24



Pour un autre événement, dont le cliché est présenté figure 25 et la feuille de T.P. figure 26, c'est la réaction B :

$$p + p \longrightarrow p + \pi^+ + n$$

qui est la mieux vérifiée.

Toujours, pour les clichés à 2 GeV/c, les ΔE_c des hypothèses fausses (donc dues à une mauvaise attribution des valeurs des masses) doivent être de l'ordre de 100 à 200 MeV, tandis que celle de l'hypothèse exacte doit être inférieure à l'incertitude expérimentale qui est de l'ordre de 20 MeV.

Pour les événements proposés en T.P., il n'y a pas d'ambiguïtés et, à condition de mesurer soigneusement, la bonne hypothèse se différencie nettement des deux autres. Ceci est particulièrement net pour les clichés à 2 GeV/c, car les quantités de mouvement de particules sortantes sont inférieures ou égales à 1 GeV/c et dans ce cas la permutation des valeurs des masses entraîne une variation sensible de l'énergie totale, ce qui différencie bien les réactions.

A 5 GeV/c ceci est moins net, car les quantités de mouvement sont de quelques GeV et l'énergie totale devient peu sensible à la valeur de $m_\pi c^2$ (fig. 27).



Fig. 25

d) Retour sur la réaction de création d'un π^0

C'est la réaction inélastique la plus simple :

$$\underset{(1)}{p} + \underset{(2)}{p} \longrightarrow \underset{(3)}{p} + \underset{(4)}{p} + \underset{(5)}{\pi^0}$$

La relation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$E_{c_1} + E_{c_2} = E_{c_3} + E_{c_4} + E_{c_5}$$

Dans cette relation simple on peut faire apparaître l'énergie cinétique de chacune des particules par :

$$E_c = E_{c_0} + m_0 c^2$$

L'équation devient

$$(E_{c_{0_1}} + m_{0_1} c^2) + (m_{0_2} c^2) = (E_{c_{0_3}} + m_{0_3} c^2) + (E_{c_{0_4}} + m_{0_4} c^2) + (E_{c_{0_5}} + m_{0_5} c^2),$$

et en simplifiant par $2m_0 c^2$ dans chaque membre :

$$E_{c_{0_1}} = E_{c_{0_3}} + E_{c_{0_4}} + E_{c_{0_5}} + m_{0_5} c^2.$$

On voit bien, sur cette relation, qu'une fraction de l'énergie cinétique incidente $E_{c_{0_1}}$ s'est transformée en matière : $m_{0_5} c^2$, l'excédent se répartissant en énergie cinétique des **trois** particules sortantes.

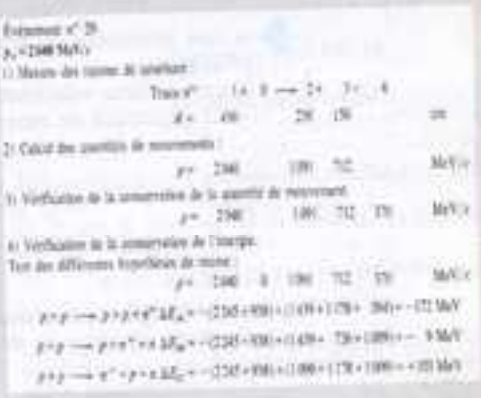


Fig. 26

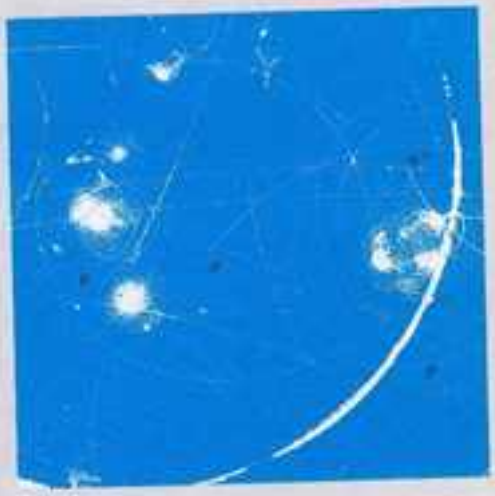


Fig. 27

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

• La vitesse de la lumière est une vitesse limite.

• Les particules de grande énergie s'étudient à l'aide de la mécanique relativiste.
En mécanique relativiste :
— La quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{p} = \gamma . m . \vec{v}$$

avec :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

— L'**énergie totale** d'une particule est la somme de son énergie cinétique E_c et de son énergie de masse $m . c^2$:

$$E = E_c + m . c^2.$$

L'expression de l'énergie totale en fonction de la vitesse est :

$$E = \gamma . m . c^2,$$

et en fonction de la quantité de mouvement :

$$E = \sqrt{(p . c)^2 + (m . c^2)^2}$$

• Lors d'interactions entre particules, il peut y avoir transformation mutuelle d'énergie en masse, selon la relation :

$$\Delta E = \Delta M . c^2$$

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

Le synchrotron à protons du CERN accélère les protons jusqu'à 28 GeV.

1) Calculer leur quantité de mouvement, en GeV/c.

2) Calculer leur vitesse en $km.s^{-1}$.

3) Calculer la courbure de leur trajectoire dans un champ magnétique de 3 T.
Ce champ magnétique règne sur 1 m de longueur.

4) Calculer la déviation de la trajectoire des protons, en mrad et en degrés.
Les protons n'ont pas tous exactement 28 GeV d'énergie. Pour obtenir des protons monocinétiques on place une fente à 30 m de l'aimant. Cette fente est constituée de deux blocs de tungstène séparés de 1 cm. Elle est positionnée de façon que les protons dont l'énergie est exactement 28 GeV passent au milieu.

5) Quelle est en %, la sélection en quantité de mouvement de ce montage?

Donnée : $m_p = 938{,}3\ MeV/c^2$.

SOLUTION

1) La relation entre l'énergie totale d'une particule et sa quantité de mouvement est :

$$E = \sqrt{(p.c)^2 + (m.c^2)^2},$$

d'où :

$$p.c = \sqrt{E^2 - (m.c^2)^2}$$
$$= \left[(28)^2 - (0{,}938\,3)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 27{,}984$$

p = 27,984 GeV/c.

2) La formule commode pour calculer la vitesse d'une particule est :

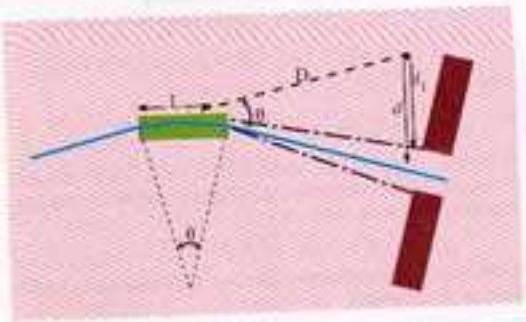
$$\frac{v}{c} = \beta = \frac{p.c}{E}$$

d'où :

$$\beta = \frac{27{,}984}{28} = 0{,}999\,4$$

$$v = 3 \times 10^5 \times 0{,}999\,4 = 299\,820,$$

v = 299 820 km.s^{-1}.



3) La relation entre la quantité de mouvement et la courbure de la trajectoire sous l'action d'un champ magnétique est :

$$p = q.B.R.$$

Pour un proton $q = e$, la charge élémentaire, et en multipliant par c, ce qui, en unités pratiques, voir p. 309 s'écrit :

$$p.c = 300R.B,$$

$p.c$ en MeV; R en m; B en tesla. D'où :

$$R = \frac{p.c}{300B} = \frac{27\,984}{300 \times 3} = 31{,}093$$

R = 31,1 m.

4) Si L est la longueur de la zone où règne le champ magnétique, la déviation θ est donnée par $L = R.\theta$, d'où :

$$\theta = \frac{L}{R} = \frac{1}{31{,}1} = 0{,}032\,16$$

θ = 32,16 mrad = 1,84°.

5) Pour résoudre la question il faut calculer la déflexion à 30 m.
Si D est la distance de la fente après l'aimant, la déflexion d est :

$$d = D.\theta = 30 \times 32{,}2 \times 10^{-3} = 0{,}964\,8$$

$d = 0{,}964\,8$ m ou 964,8 mm.

La largeur de la fente étant de 10 mm, le montage acceptera des protons déviés de 964,8 ± 5 mm soit de 959,8 à 969,8 mm.
Pour avoir les valeurs extrêmes des quantités de mouvement acceptées, il faut faire les calculs précédents à rebours et calculer à quelles quantités de mouvement correspondent ces deux déflexions d_1 et d_2 :

$$\theta_1 = \frac{d_1}{D} \quad R_1 = \frac{L}{\theta_1} \quad \text{et} \quad p_1.c = 300R_1.B.$$

d'où :

$$p_1.c = 300B.L.\frac{D}{d_1}$$

$$= \frac{300 \times 3 \times 1 \times 30}{0{,}954\,8} = 28\,131 \text{ MeV}.$$

Un calcul analogue pour d_2 donne :

$$p_2.c = 27\,841 \text{ MeV}.$$

$p.c$ est compris entre 28 131 et 27 841 MeV, ce qui s'écrit encore :

$$p.c = \frac{p_1.c + p_2.c}{2} \pm \left(\frac{p_2.c - p_1.c}{2}\right)$$

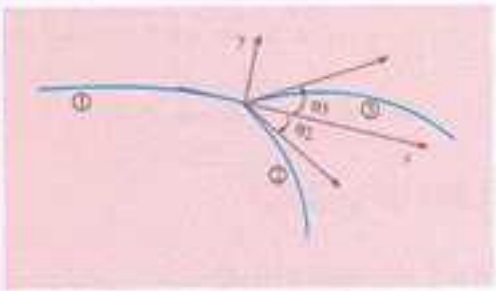
$$= 27\,986 \pm 145 \text{ MeV}.$$

La résolution est de $\frac{145}{27\,986} = 0{,}005$ soit **0,5 %**.

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 2

Un événement de choc proton-proton présente l'allure suivante :



Les mesures des rayons de courbure donnent :

$R_1 = 360$ cm ; $R_2 = 92$ cm ; $R_3 = 115$ cm ;

et pour les angles entre traces : $\theta_2 = -26°$ et $\theta_3 = 30°$. Enfin la quantité de mouvement initiale est de 2 650 MeV/c.

1) Dire sans calculs, pourquoi, cet événement est inélastique.

2) Calculer les valeurs des quantités de mouvement p_2 et p_3 des particules secondaires laissant des traces dans la chambre à bulles.

3) Faire le graphique des quantités de mouvement.

4) Calculer la quantité de mouvement manquante, en calculant d'abord ses projections puis sa valeur.

5) En faisant l'hypothèse que cette réaction de choc se fait avec création d'un méson π, les trois réactions possibles sont :

particule :	1	0	2	3	4 (manquante)
(*A*)	$p + p \longrightarrow$	p	$+ p$	$+ \pi^0$	
(*B*)	$\longrightarrow$	p	$+ \pi^+ + n$		
(*C*)	$\longrightarrow$	$\pi^+ + p$	$+ n$		

Pour chacune de ces trois hypothèses, calculer la différence entre l'énergie totale du système avant et après le choc. Laquelle de ces trois hypothèses vérifie le mieux la conservation de l'énergie ?

Données :

$m.c^2$		
	proton	= 938 MeV
	neutron	= 940 MeV
	π^+	= 140 MeV
	π^0	= 135 MeV

SOLUTION

1) Pour un choc élastique

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \quad \text{donc} \quad p_1 \leqslant p_2 + p_3.$$

Les quantités de mouvement sont proportionnelles aux rayons de courbure, or dans ce choc-ci

$$R_1 > (R_2 + R_3) \quad \text{donc} \quad p_1 > (p_2 + p_3),$$

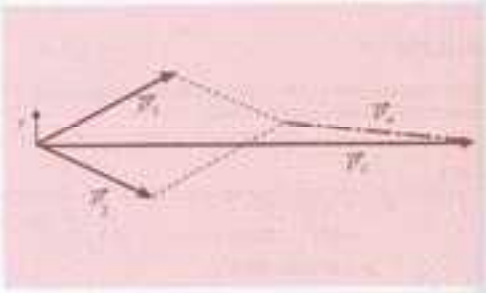
apparemment il manque de la quantité de mouvement. Une particule neutre qui ne laisse pas de trace dans la chambre a donc été créée et a emporté la quantité de mouvement qui apparemment manque.

2) p étant proportionnel à R selon la relation $p = q.R.B$ alors : $p_2 = p_1.\dfrac{R_2}{R_1}$ et $p_3 = p_1.\dfrac{R_3}{R_1}$, d'où :

$$p_2 = 2\,650 \times \frac{92}{360} = \mathbf{677\ MeV/c}$$

et $$p_3 = 2\,650 \times \frac{115}{360} = \mathbf{846\ MeV/c.}$$

3) Graphique des quantités de mouvement.



4) La relation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{p}_1 + \vec{0} = \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4$$

Soit, en projection sur l'axe des abscisses :

$$p_1 = p_2.\cos\theta_2 + p_3.\cos\theta_3 + p_{4x}$$

$$2\,650 = 677\cos(-26) + 846\cos(30) + p_{4x}$$

d'où : $$p_{4x} = 1\,308\ \text{MeV/c}$$

En projection sur l'axe des ordonnées :

$$0 = p_2.\sin\theta_2 + p_3.\sin\theta_3 + p_{4y}$$

$$0 = 677\sin(-26) + 846\sin(30) + p_{4y}$$

d'où : $$p_{4y} = -126\ \text{MeV/c}$$

et $$p_4 = \sqrt{p_{4x}^2 + p_{4y}^2} = \mathbf{1\,314\ MeV/c.}$$

5) Selon l'hypothèse essayée, il faut, pour chaque particule sortante, calculer son énergie totale en injectant, dans la formule :

$$E = \sqrt{(p.c)^2 + (m.c^2)^2},$$

la valeur numérique correcte pour la masse correspondant à l'hypothèse.

1. EXERCICES RESOLUS

• *Dans l'hypothèse A :*

$$\underset{1}{p} + \underset{0}{p} \longrightarrow \underset{2}{p} + \underset{3}{p} + \underset{4}{\pi^0}$$

$m_3 = m_p = 938\ \text{MeV}/c^2$

$m_4 = m_{\pi^0} = 140\ \text{MeV}/c^2$

ce qui conduit à :

$E_1 = \sqrt{(p_1 c)^2 + (m_p c^2)^2} = \sqrt{(2\,650)^2 + (938)^2}$

$= 2\,811$ MeV

$E_0 = m_p c^2 = 938$ MeV

$E_2 = \sqrt{(p_2 c)^2 + (m_p c^2)^2} = \sqrt{(677)^2 + (938)^2}$

$= 1\,157$ MeV

$E_3 = \sqrt{(p_3 c)^2 + (m_p c^2)^2} = \sqrt{(846)^2 + (938)^2}$

$= 1\,263$ MeV

$E_4 = \sqrt{(p_4 c)^2 + (m_{\pi^0} c^2)^2} = \sqrt{(1\,314)^2 + (140)^2}$

$= 1\,321$ MeV.

La relation de conservation de l'énergie s'écrit :

$\Delta E = -(2\,811 + 938) + (1\,157 + 1\,263 + 1\,321)$

$= \mathbf{-8\ MeV.}$

• *Dans l'hypothèse B :*

$$\underset{1}{p} + \underset{0}{p} \longrightarrow \underset{2}{p} + \underset{3}{\pi^+} + \underset{4}{n}$$

Les calculs pour les particules 1, 0, 2 sont inchangés, par contre pour la particule n° 3, l'énergie se calcule en faisant $m_\pi c^2 = 140$ dans la formule :

$E_3 = \sqrt{(p_3 c)^2 + (m_\pi c^2)^2} = \sqrt{(846)^2 + (140)^2} = 857$ MeV,

et pour la particule n° 4 il faut faire $m_n c^2 = 940$ MeV ce qui conduit à $E_4 = 1\,616$ MeV.

La relation de conservation de l'énergie devient :

$\Delta E = -(2\,811 + 938) + (1\,157 + 857 + 1\,616) = \mathbf{-119\ MeV,}$

valeur nettement plus éloignée de 0 que celle de l'hypothèse A.

• *Dans l'hypothèse C :*

$$\underset{1}{p} + \underset{0}{p} \longrightarrow \underset{2}{\pi^+} + \underset{3}{p} + \underset{4}{n}$$

E_2 est changé = 694 MeV.

E_3 est le même que dans l'hypothèse A.

E_4 est le même que dans l'hypothèse C.

$\Delta E_C = -(2\,811 + 938) + (694 + 1\,263 + 1\,616)$

$= \mathbf{-176\ MeV.}$

Conclusion :

C'est **l'hypothèse A** qui conduit à la meilleure vérification de la conservation de l'énergie.

EXERCICE 3

Le synchrotron à protons du CERN accélère les protons jusqu'à 28 GeV. Il accepte 2×10^{13} protons par cycle d'accélération et chaque cycle dure 2,8 s. Au cours d'une année son rendement d'utilisation est de 70 %.

1) Calculer en nJ l'énergie d'un de ces protons.

2) Calculer en kJ l'énergie du paquet de protons.

3) Calculer le nombre de protons accélérés par an.

Donnée : $1\ \text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ J.

SOLUTION

1) L'énergie de chaque proton est :

$E = 28\ \text{GeV} = 28 \times 10^9\ \text{eV} = 28 \times 10^9 \times 1{,}6 \times 10^{-19}$

$= \mathbf{4{,}48\ nJ.}$

2) L'énergie du paquet de protons est égale à l'énergie de chacun multipliée par leur nombre :

$E_{\text{paquet}} = 4{,}48 \times 10^{-9} \times 2 \times 10^{13} = 8{,}96 \times 10^4 = \mathbf{89{,}6\ kJ.}$

3) Ce nombre est égal au nombre de protons par cycle, divisé par le temps du cycle, multiplié par la durée d'une année, et par le rendement de la machine, soit :

$$N = \frac{2 \times 10^{13}}{2{,}8} \times 86\,400 \times 365{,}3 \times 0{,}7 = \mathbf{1{,}57 \times 10^{20}.}$$

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATIONS

Exercice 1

Écrire la réaction dans le cas d'un choc inélastique proton-proton avec création de méson π^+.

Exercice 2

La réaction $p + p \longrightarrow p + p + n$ est-elle possible? sinon pourquoi?

Exercice 3

Un électron de 10 MeV d'énergie cinétique est-il relativiste? et un proton de même énergie?

Mécanique relativiste

Exercice 4

Des électrons sont accélérés, à partir du repos, sous une différence de potentiel $U = 0{,}8$ MV.

1) En appliquant les lois de la mécanique newtonienne, quelle vitesse v trouverait-on pour ces électrons?

2) Quelle vitesse v' leur attribue la mécanique relativiste?

$m_e.c^2_{\text{électron}} = 0{,}5$ MeV.

Exercice 5

On imagine qu'une bille de 20 g a une vitesse qui approche celle de la lumière à trois millionièmes près (3×10^{-6}).

1) Quelle serait son énergie cinétique E_c?

2) Quel temps mettrait une centrale de 1,2 GW pour fournir une telle énergie? (On donnera le résultat en utilisant une unité convenable, de la seconde au siècle.)

3) Quelles conclusions tirez-vous de ce calcul? Préciser les projectiles qu'on peut lancer à cette vitesse.

* Exercice 6

Des électrons, de vitesse initiale négligeable, sont accélérés par un dispositif comportant une série de « cellules » successives identiques. A la traversée de chaque « cellule » les électrons sont soumis à une tension d'accélération de 8 kV.

1) Calculer la variation d'énergie cinétique d'un électron à la traversée d'une cellule.

2) En utilisant la théorie relativiste, en déduire son énergie totale et sa vitesse à la sortie de la cinquième « cellule ».

3) Combien faut-il prévoir de « cellules » en série pour atteindre une vitesse de 150 000 km.s^{-1}?

On donne : Énergie de masse de l'électron :

$m_e.c^2 = 0{,}5$ MeV.

Exercice 7

Écrire la relation qui relie la quantité de mouvement d'une particule au rayon de courbure de sa trajectoire.

$p = q.R.B$, en unités pratiques.

$$p.c = C^{te}.R.B \quad \left| \begin{array}{ll} p.c & \text{en GeV} \\ R & \text{en m} \\ B & \text{en T.} \end{array} \right.$$

Montrer que la constante vaut, avec ces unités : 0,3.

1) L'accélérateur dit « proton-synchrotron » du CERN a un diamètre de 200 m. Il accélère des protons jusqu'à 28 GeV/c. Quel est le champ magnétique B en fin d'accélération.

2) L'accélérateur dit « super proton synchrotron » du CERN a un diamètre de 2 km, il accélère les protons jusqu'à 400 GeV/c, même question.

3) L'accélérateur du laboratoire Fermi, aux U.S.A. a même diamètre, 2 km, il accélère les protons jusqu'à 1 TeV/c, même question.

4) Des prototypes d'aimants fournissent des champs magnétiques de 10 T. Quelle sera la quantité de mouvement des protons pour :

a) le projet soviétique de 6,6 km de diamètre?

b) le projet du CERN d'installer de tels aimants dans le tunnel du « LEP » de 9 km de diamètre?

c) le projet des U.S.A. de 30 km de diamètre?

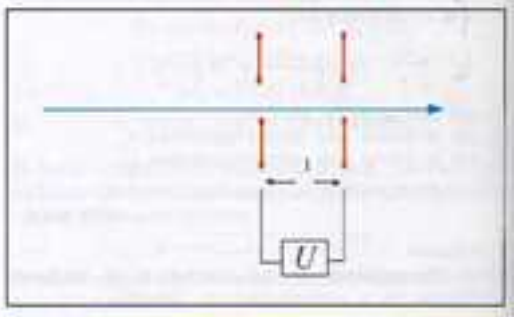
* Exercice 8

En cours d'accélération, à un instant donné, un proton qui circule dans un accélérateur a une énergie cinétique E_c de 2 GeV.

1) Calculer l'énergie totale de ce proton E par la relation $E = E_c + E_0$.

2) Exprimer la relation entre l'énergie totale E, d'une particule et sa vitesse v.
En déduire l'expression de sa vitesse en fonction de son énergie E.
Calculer la vitesse du proton. La réponse sera donnée sous forme de $\beta = v/c$ avec 6 chiffres significatifs.

3) Ce proton traverse alors une cavité accélératrice, assimilable à deux plaques de condensateur trouées, entre lesquelles est établie une différence de potentiel U de 200 kV.
La distance entre les plaques est de 10 cm.



2. EXERCICES PROPOSES

Calculer la durée Δt de la traversée de la cavité en admettant que la vitesse demeure approximativement constante.

6) Calculer, en MeV, l'énergie ΔE acquise par la particule lors de cette traversée.
En déduire son énergie totale E' après la traversée.

7) Calculer, comme en question 3, la vitesse du proton après la traversée de la cavité, sous la forme $v' = \beta' . c$.

8) En déduire sa variation de vitesse :

$$\Delta v = (\beta' - \beta) . c$$

9) Calculer l'accélération reçue par la particule :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{en } m . s^{-2}$$

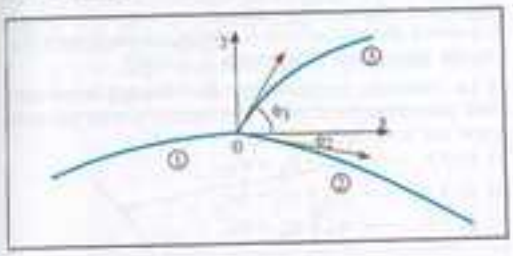
Cette accélération est-elle forte, ou faible, comparée à l'accélération de la pesanteur?

Données : $m_p . c^2 = 938$ MeV.

Chocs élastiques proton-proton

Exercice 9

On étudie le choc élastique proton-proton.
L'événement se présente comme sur la figure.
Les valeurs mesurées sont : $p_1 = 5\,030$ MeV/c ; $R_1 = 410$ cm ; $R_2 = 395$ cm ; $R_3 = 50$ cm ; $\theta_2 = -6{,}75°$; $\theta_3 = 69°$.
Le référentiel est tel que l'origine est au point de choc et que l'axe des x est avec la tangente à la trace incidente au point de choc.



1) Calculer les modules des quantités de mouvement des traces sortantes.

2) Écrire l'équation vectorielle de conservation de la quantité de mouvement.

3) Écrire, en fonction de p_1, p_2, θ_2, p_3, θ_3, les projections de cette relation, sur les axes Ox et Oy.

4) Faire les applications numériques et montrer que ces équations sont vérifiées à mieux que 5 MeV/c près.

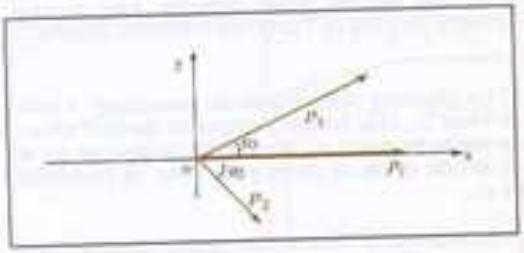
5) Écrire l'équation de conservation de l'énergie cinétique en mécanique classique ; faire l'application numérique.

6) Écrire l'équation de conservation de l'énergie totale en mécanique relativiste ; faire l'application numérique.

7) Conclure.

Exercice 10

Soit un événement élastique de choc proton-proton. Le système d'axes est lié à la quantité de mouvement du proton incident.



p_1 et 0 sont les quantités de mouvement des protons avant le choc, p_2 et p_3 après le choc, θ_2 et θ_3 sont respectivement les angles des trajectoires des particules après le choc avec la direction incidente.
Écrire dans le système d'axes, les deux solutions algébriques de conservation de la quantité de mouvement.
Éliminer θ_2 entre les deux relations en calculant cos θ_2 dans l'une, sin θ_2 dans l'autre et en utilisant la relation :

$$\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 = 1$$

En déduire l'expression de cos θ_2 en fonction de p_1, p_2, p_3.
En déduire l'expression de cos θ_3 par permutation des indices 2, 3.

Exercice 11

Faites-le vous-même :
Construisez votre propre problème de choc élastique proton-proton.
Savoir construire un problème c'est savoir résoudre tous les problèmes de ce type.

1) Se fixer la quantité de mouvement initiale : p_1.
p_1 doit être supérieur à 1 000 MeV/c car en deçà les protons ne sont guère relativistes.
p_1 doit être inférieur à 1 000 GeV/c qui est la limite technologique actuelle.
Si l'événement doit être calculé ensuite à partir des mesures de courbures, la relation

$$p . c = 300 R . B \quad \left| \begin{array}{l} p.c \text{ en MeV} \\ B \text{ en T} \\ R \text{ en m} \end{array} \right.$$

indique que, pour des champs magnétiques de quelques teslas, p_1 doit être inférieur à 10 GeV pour que les rayons de courbure des traces soient mesurables, donc :

$$1 < p_1 < 10 \text{ GeV/c}$$

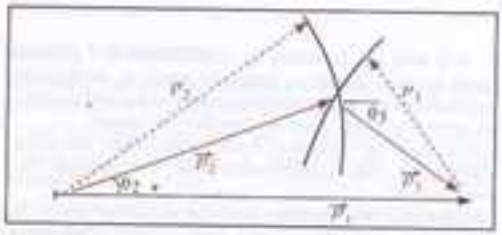
2) Ensuite choisir p_2, la valeur de la quantité de mouvement de l'un des protons après le choc. p_2 choisi, l'événement est déterminé, et se construit comme suit :

2. EXERCICES PROPOSES

3) Calculer p_3, la quantité de mouvement du second proton après le choc par la formule de conservation de l'énergie totale relativiste.

4) En fonction de p_1, p_2, p_3, en déduire les angles θ_2 et θ_3 que font les traces sortantes avec la trace incidente par l'une ou l'autre des méthodes suivantes :

a) Le graphique des quantités de mouvement. Il suffit de tracer p_1, puis avec un compas de dessiner un arc de cercle de rayon p_2, à partir de l'origine de p_1, et un arc de cercle de rayon p_3, à partir de l'extrémité de p_1.



b) Le calcul direct des angles, selon la formule établie dans l'exercice précédent :

$$\cos\theta_2 = \frac{p_1^2 + p_2^2 - p_3^2}{2p_1 \cdot p_2}$$

et cos θ_3 en permutant les indices 2 et 3.

5) Dessiner le graphique des quantités de mouvement.

6) En choisissant B, le champ magnétique de la chambre à bulles compris entre 1 et 3,5 T, en déduire les rayons de courbures des trajectoires, et si besoin est les multiplier par le facteur de grandissement (entre 0,5 et 2) entre l'événement réel et le cliché photographique.

7) Pour dessiner l'événement, porter les perpendiculaires aux vecteurs quantités de mouvement au point d'interaction et, plaçant la pointe du compas sur ces perpendiculaires, tracer les arcs de cercles figurant les trajectoires.

8) Arrondir tous les résultats obtenus et calculer ce que donnerait l'équation de conservation de l'énergie dans le formalisme newtonien.

9) Calculer les vitesses des protons, avant et après le choc.

Exemple d'applications numériques :

$p_1 = 2\,500$ MeV/c $\quad p_2 = 600$ GeV/c

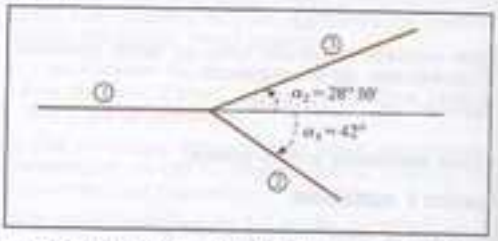
Chocs inélastiques proton-proton

Exercice 12

Un proton incident de quantité de mouvement $p_1 = 2\,085$ MeV/c interagit avec un proton cible, dans une chambre à bulles. On observe après le choc deux trajectoires de particules chargées positives de même charge que le proton. Ces deux trajectoires et la trajectoire du proton incident sont situées dans un même plan parallèle au plan d'observation. Les rayons des trajectoires sont :

$R_1 = 430$ cm ; $\quad R_2 = 160$ cm ; $\quad R_3 = 230$ cm

Les tangentes aux trajectoires sont représentées sur la figure.



1) Calculer p_2 et p_3 à partir de p_1 en utilisant la relation :

$$p = q.B.R$$

2) Représenter les vecteurs quantité de mouvement p_1, p_2, p_3 (1 000 MeV/c ⟶ 5 cm).

3) Montrer que la conservation de la quantité de mouvement n'est pas satisfaite sans l'hypothèse de l'apparition d'une autre particule dont on déterminera la quantité de mouvement p_4. Pourquoi ne laisse-t-elle pas de trace dans la chambre à bulles ?

4) La meilleure conservation de l'énergie totale doit vous permettre de choisir l'événement le plus probable entre les trois hypothèses :

a) $p_1 + p_{1c} \longrightarrow p_2 + p_3 + \pi_a^0$.

b) $p_1 + p_{1c} \longrightarrow p_2 + \pi_b^+ + n_b$.

c) $p_1 + p_{1c} \longrightarrow \pi_c^+ + p_3 + n_c$.

	Proton	Neutron	π^0	π^+
Masse (MeV/c²)	938	939	135	139

Compléter le tableau suivant :

	1	Cible	2	3	4	Différence	Choix
Hyp. (a) E (MeV)							
Hyp. (b) E (MeV)							
Hyp. (c) E (MeV)							

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 13

Faites le vous-même

Construisez votre propre problème de choc inélastique proton-proton.

Comme pour les problèmes de choc élastique, il est facile de construire des problèmes de chocs inélastiques de la manière suivante.

1) Choisir p_1, la quantité de mouvement initiale.

2) Choisir, parmi les trois possibles, la réaction qui est censée avoir eu lieu.

3) Choisir p_2 et p_3, les quantités de mouvement des particules secondaires chargées.

Pour que les différentes hypothèses de réaction conduisent à des calculs d'énergie différents, il faut que les trois quantités de mouvement p_2, p_3, p_4 soient assez différentes. (Si $p_2 = p_3$ par exemple, $E_2 + E_3$ sera inchangé entre les deux dernières réactions qui seront ainsi indiscernables.)

4) En fonction de l'hypothèse de réaction retenue, calculer p_4 par la conservation de l'énergie :

$$E_4 = (E_1 + E_2) - (E_3 + E_5)$$

et

$$p_4 \cdot c = \sqrt{E_4^2 - (m_4 \cdot c^2)^2}.$$

m_4 étant la masse de la particule neutre.

5) Les angles entre traces seront déterminés par le graphique de conservation de la quantité de mouvement.

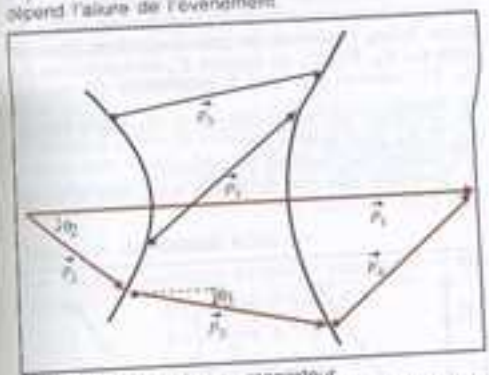
— Tracer p_1, avec une échelle raisonnable.

— Du point origine, tracer un arc de cercle de rayon : p_2.

— De l'extrémité, tracer un arc de cercle de rayon : p_4.

— Positionner un vecteur de longueur p_3, tel que son origine soit sur le premier arc de cercle et son extrémité sur le second.

Il y a une large indétermination. Du choix retenu dépend l'allure de l'événement.



— Mesurer les angles au rapporteur.

— Le passage aux rayons des courbures et le dessin sont identiques à ceux du choc élastique.

Exemple d'application numérique :

$p_1 = 2\,500$ MeV/c.

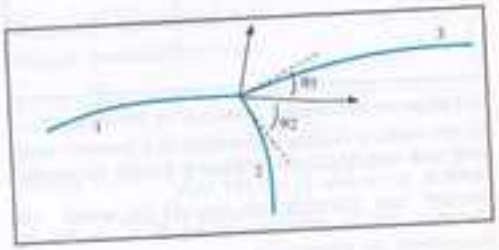
Hypothèse : $p + p \longrightarrow p + \pi^+ + n$.

$p_2 = 600$ MeV/c ; $p_3 = 900$ MeV/c.

D'autres chocs proton-proton

Exercice 14

Un événement de choc proton-proton présente les données suivantes :



$p_1 = 2\,020$ MeV/c.

$p_2 = 638$ MeV/c ; $\theta_2 = -46,6°$.

$p_3 = 1\,670$ MeV/c ; $\theta_3 = +16,7°$.

1) Vérifier, en projections sur les axes des abscisses et des ordonnées, que la quantité de mouvement est conservée lors de ce choc à quelques MeV/c près.

2) En faisant l'hypothèse d'un choc élastique :

$$p + p \longrightarrow p + p$$

Vérifier la conservation de l'énergie totale, dans le formalisme relativiste.

3) Si cette vérification n'est pas bonne, essayer l'hypothèse suivante :

$$p + p \longrightarrow d + \pi^+$$

et vérifier la conservation de l'énergie dans les deux cas possibles, selon que le deutérium est supposé être la particule 2 ou la particule 3.

Quelle est l'hypothèse qui convient ?

$m_p \cdot c^2 = 938$ MeV ; $m_\pi \cdot c^2 = 140$ MeV.

$m_d \cdot c^2 = 1\,876$ MeV.

Exercice 15

Un deuton (noyau « d'hydrogène lourd ») constitué d'un proton et d'un neutron a une énergie de masse $E_0 = 1\,876,10$ MeV.

1) Ce deuton, initialement immobile est soumis à une tension accélératrice de 1 868 kV.

Exprimer en MeV l'énergie cinétique acquise par ce deuton.

Calculer sa quantité de mouvement en MeV/c.

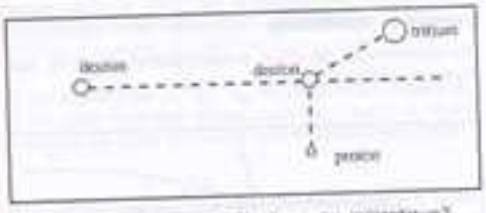
Après avoir subit l'accélération précédente, le deuton vient en choquer un autre immobile.

Il se forme uniquement :

— un proton ;

— un noyau de tritium (constitué d'un proton et de deux neutrons).

2. EXERCICES PROPOSES



a) Est-ce un événement élastique ou inélastique?

b) On mesure l'énergie cinétique des protons émis dans une direction perpendiculaire à celle du deuton incident. On trouve $E_c = 3{,}467$ MeV.
Sachant que l'énergie de masse du proton est 938 MeV, calculer l'énergie totale et la qantité de mouvement du proton.

3) Calculer l'énergie totale du tritium.
Déterminer les composantes p_x et p_y de son vecteur quantité de mouvement (parallèlement et perpendiculairement à la direction incidente).
En déduire sa masse en MeV/c^2.

Exercice 16

Un cliché d'interaction antiproton-proton présente l'allure suivante :



Les deux traces après le choc sont symétriques par rapport à la direction incidente, l'angle $\theta_0 = (\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ vaut 51,0° et $\theta_2 = -\theta_1$.
La quantité de mouvement de l'antiproton incident est $p_1 = 1\,875$ MeV/c, les quantités de mouvement des particules secondaires sont :

$$p_2 = p_3 = 1\,511 \text{ MeV/c}$$

1) Vérifier que la quantité de mouvement est conservée, donc qu'il n'y a pas de particules neutres supplémentaires.

2) Par la vérification de la conservation de l'énergie, trouver quelle réaction s'est produite parmi celles-ci :

$$\bar{p} + p \longrightarrow \bar{p} + p$$

$$\bar{p} + p \longrightarrow \pi^- + \pi^+$$

3) La réaction est-elle un choc élastique, un choc inélastique, ou une annihilation?

Exercice 17

Une belle expérience

Une expérience de choc photon-électron.
Pour obtenir des photons énergiques, on réalise l'expérience suivante : on place un puissant laser en bout d'un accélérateur à électrons. Le laser produit un faisceau de photons dirigé perpendiculairement au faisceau d'électrons sortant de l'accélérateur.

• L'énergie des photons créés par le laser est de 1,55 eV, et celle des électrons accélérés est de 20 GeV (attention aux unités). Le système d'axes est celui de la figure.

• Soit $\vec{p}_1$ la quantité de mouvement des photons et $\vec{p}_2$ celle des électrons, avant le choc et $\vec{p}'_1$ et $\vec{p}'_2$ les mêmes quantités, après le choc.
Lors du choc les électrons communiquent une partie de leur quantité de mouvement aux photons qui sont donc déviés. On sélectionne les photons déviés dans la direction et le sens des électrons avant le choc. Les électrons eux aussi sont déviés, d'un angle θ par rapport à leur direction initiale.

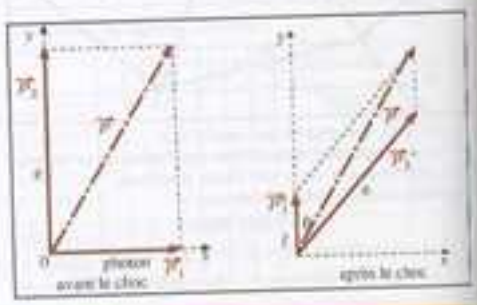
• Soit $\vec{\beta}$ la somme des quantités de mouvement avant et après le choc :

$$\vec{\beta} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

1) Écrire les deux équations de conservation de la quantité de mouvement en fonction de p_1, p_2, p'_1, p'_2 et θ sur l'axe des abscisses, et sur celui des ordonnées.
En déduire, par élimination de θ, p'_2 en fonction de p_1, p_2, p'_1 : relation (1).

2) Si de même l'on note E_1, E_2 les énergies totales des photons et des électrons avant le choc, et E'_1, E'_2 après, écrire l'équation de conservation de l'énergie entre E_1, E_2, E'_1, E'_2, en déduire E'_2 en fonction de E_1, E_2, E'_1 : relation (2).

3) Combiner les deux relations de manière à éliminer p'_2 et E'_2 pour obtenir E'_1.
En utilisant les relations importantes :
— pour une particule de masse nulle, telle le photon $E = p.c$,



2. EXERCICES PROPOSES

– pour une particule massive, telle l'électron :

$$E^2 = (p.c)^2 + (m.c^2)^2,$$

obtenir la relation :

$$E'_1 = \frac{E_1.E_2}{(E_2 - p_2.c) + E_1}$$

4) Calculer numériquement l'énergie après choc des photons : E'_1. Ce calcul est délicat car fait sans précautions il dépasse les possibilités des calculettes usuelles, en effet la différence $E_2 - p_2.c$ est infime pour des électrons de 20 GeV. Pour conserver la précision il faut exprimer E_2, en fonction de $p_2.c$, en tenant compte que $p_2.c$ est très grand devant $m.c^2$, et faire l'approximation classique $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n.\varepsilon$; démontrer que dans ce cas :

$$E_2 = p_2.c + \frac{1}{2}\frac{(m.c^2)^2}{p_2.c}$$

En déduire la relation finale :

$$E'_1 = \frac{E_2}{1 + \frac{1}{2}\frac{(m.c^2)^2}{E_1.E_2}}$$

Calculer E'_1 en GeV/c.

5) Par quel facteur l'énergie des photons a-t-elle été multipliée?

Donnée : $m_{\text{électron}}.c^2 = 0{,}51$ MeV.

EXERCICES DESTINÉS A TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 18 — **A.1.a.**

Définir les termes suivants : énergie de masse, énergie totale.

Exercice 19 — **A.1.b.**

L'énergie de masse d'un électron est-elle de l'ordre du : eV, keV, MeV, GeV, TeV?
Même question pour le proton.

Exercice 20 — **A.2.a.**

Estimer, après avoir fait les T.P. sur les clichés de chambres à bulles, la précision que l'on obtient sur la mesure des rayons de courbures par des abaques. De même estimer la précision que l'on obtient sur le tracé des tangentes.

Exercice 21 — **A.2.b.**

Les réactions suivantes sont-elles possibles? si non pourquoi?

$$p + p \longrightarrow p + p + n,$$
$$p + p \longrightarrow p + n,$$
$$p + p \longrightarrow \pi^+ + \pi^-,$$
$$p + p \longrightarrow p + p + \pi^0.$$

Exercice 22 — **B.1.**

Demander par écrit à l'Institut National de Physique Nucléaire et de Physique des Particules, Paris — des renseignements sur les expositions qu'il organise ou qu'il a organisé sur les particules.

Exercice 23 — **B.2.**

Expliquer, en 100 ± 10 mots, pourquoi l'étude des particules, bien que coûteuse et sans applications pratiques prévisibles, est poursuivie par toutes les nations qui en ont les moyens.

Exercice 24 — **B.3.**

Essayer de démontrer que :

si $F = \frac{dp}{dt}$ avec $p = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.m.v$,

alors le travail de la force F, est égal à :

$$W = \int_0^\ell F.d\ell = \frac{m.c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m.c^2,$$

ce qui définit l'énergie cinétique relativiste.

Exercice 25 — **C.1.a.**

Dans un cliché de choc élastique $\bar{p} + p$, comment reconnaître du premier coup d'œil, sur les deux traces après le choc, laquelle est due au proton et laquelle est due à l'antiproton (sans connaître l'orientation du champ magnétique).

*** Exercice 26** — **C.1.b.**

A la sortie d'un accélérateur les protons heurtent une cible, parmi les particules produites lors du choc on sélectionne celles qui :
— sont neutres;
— ont une énergie de 1 600 MeV;
— ont un temps de vol de 62 ns pour parcourir 15 m.
Quelles sont ces particules?

Exercice 27 — **C.2.b.**

Devant un cliché de choc antiproton-proton, manifestement inélastique, écrire les trois réactions possibles qui correspondent à la création d'une particule neutre.

*** Exercice 28** — **C.2.b.**

On définit la masse M, d'un groupe de particules par la relation :

$$(M.c^2)^2 = E^2 - (P.c)^2$$

où $E = \Sigma E$ et $\vec{P} = \Sigma \vec{p}$.

Dans un collisionneur proton-proton, dans lequel les protons qui se heurtent ont même quantité de mouvement, égale en valeur à 20 GeV/c mais de directions opposées.

$\longrightarrow \quad \longleftarrow$

calculer l'énergie de masse du système. Quelle devrait être la quantité de mouvement à fournir à un proton, dans un accélérateur classique, pour que ce proton en heurtant un proton cible immobile, produise la même énergie de masse?

$\longrightarrow$ •

Pour en savoir plus

$E = M.c^2$: L'ÉNERGIE DE LA MASSE, LA MASSE DE L'ÉNERGIE

« Some recent work... leads me to expect that the element uranium may be turned into a new and important source of energy in the immediate future... »

Lettre de A. Einstein
à F. D. Roosevelt, 2 août 1939

L'idée d'A. Einstein, qu'une particule de masse m possède, en plus d'une énergie cinétique éventuelle due à son mouvement, une énergie de masse de valeur $E = m.c^2$, a fait évoluer nos concepts d'énergie et ouvert de nombreuses perspectives pratiques.

1. Au niveau de la particule élémentaire

a) Avec de l'énergie peut-on créer de la masse?

Oui et non. Lorsqu'une particule de haute énergie choque une particule immobile, une fraction de son énergie cinétique peut se matérialiser en une ou plusieurs particules nouvelles et ainsi de la masse est créée.

Le système final est plus lourd que le système initial.

Mais on constate d'expérience que ces particules créées sont :

• Soit des particules π, et ces particules sont instables, elles se désintègrent vite :
— le π^0 a une vie moyenne de $0{,}9 \times 10^{-16}$ s, il se désintègre en deux photons γ;
— le π^+ (ou le π^-) a une vie plus longue : $2{,}6 \times 10^{-8}$ s, mais après désintégration il reste finalement un positron (pour le π^+), un électron (pour le π^-) et quelques neutrinos-antineutrinos (ν, $\bar{\nu}$). Le positron, antiparticule, donc antimatière ne peut subsister dans notre monde de matière et dès qu'il rencontre un électron du voisinage, ils s'annihilent en 2γ.
De même, l'électron sera absorbé par un des protons de l'appareillage.
Un décomptage des ν, $\bar{\nu}$ produits, montre qu'ils apparaissent en nombre égal au cours de la suite des désintégrations et le bilan global est donc nul.
Les γ créés se propagent dans le milieu réel et heurtent les électrons des atomes environnants, ce qui cause un échauffement local. Le bilan final est la restitution, sous forme de micro-échauffement, de l'énergie un instant matérialisée.

• Soit des paires de particules-antiparticules. Exemple :

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}.$$

Là encore, l'antiproton s'annihilera avec un des protons des atomes constituants l'appareillage et l'on retrouvera, à la fin, de l'énergie calorifique.

La transformation d'énergie en matière est donc possible, mais ce bonheur dure peu car cette matière est éphémère.

b) Avec de la masse peut-on créer de l'énergie?

Oui, lorsqu'une particule se désintègre.
Une particule instable éclate en deux ou trois particules plus légères, et la différence entre l'énergie de masse de la particule initiale et la somme des énergies de masse des particules finales se retrouve sous forme d'énergie cinétique de ces dernières.
Encore a-t-il fallu, auparavant, créer cette particule instable. Ceci a pu se faire auprès des accélérateurs, ou cela s'est fait lors de la création du monde, peu après le **big-bang.** Il reste encore de ces noyaux instables dans l'écorce terrestre (voir chapitre radioactivité).

2. Au niveau d'un assemblage de particules

Notre monde est un assemblage de particules élémentaires. Les quarks forment : les protons et les neutrons; les protons et les neutrons forment : les noyaux; les noyaux et les électrons : les atomes; les atomes et d'autres atomes : des molécules; et les édifices des molécules : nous.
Ces assemblages se font, ou se défont, via quatre types de forces, chaque type correspondant à un mode d'interaction différent entre particules.
Ces quatre interactions **(gravifique, faible, électromagnétique, forte),** lorsqu'elles tiennent les constituants entre eux sont attractives et le travail qu'elles ont accompli, pour les réunir se retrouve sous forme d'énergie potentielle. (Cette énergie de liaison est négative, par convention, vu du système constitué.)
Lors de la formation, ou de la rupture d'un édifice il y a donc variation d'énergie (potentielle) et la relation d'Einstein s'applique en écrivant que :

A toute variation d'énergie d'un système correspond une variation de sa masse :

$$\Delta E = \Delta m.c^2$$

Et ceci s'applique quel que soit le type d'interaction.

a) Dans l'interaction gravifique

L'attraction gravitationnelle est la plus faible des quatre, elle n'est décelable que si elle s'applique à de grandes masses (nous tenons sur terre). L'énergie potentielle acquise par cette liaison, divisée par le coefficient c^2, conduit à des variations de masse non mesurables.

Pour en savoir plus

$E = M.c^2$: L'ÉNERGIE DE LA MASSE, LA MASSE DE L'ÉNERGIE

« Some recent work... leads me to expect that the element uranium may be turned into a new and important source of energy in the immediate future... »

Lettre de A. Einstein
à F. D. Roosevelt, 2 août 1939

L'idée d'A. Einstein, qu'une particule de masse m possède, en plus d'une énergie cinétique éventuelle due à son mouvement, une énergie de masse de valeur $E = m.c^2$, a fait évoluer nos concepts d'énergie et ouvert de nombreuses perspectives pratiques.

1. Au niveau de la particule élémentaire

a) Avec de l'énergie peut-on créer de la masse?

Oui et non. Lorsqu'une particule de haute énergie choque une particule immobile, une fraction de son énergie cinétique peut se matérialiser en une ou plusieurs particules nouvelles et ainsi de la masse est créée.

Le système final est plus lourd que le système initial.

Mais on constate d'expérience que ces particules créées sont :

• Soit des particules π, et ces particules sont instables, elles se désintègrent vite :
— le π^0 a une vie moyenne de $0{,}9 \times 10^{-16}$ s, il se désintègre en deux photons γ;
— le π^+ (ou le π^-) a une vie plus longue : $2{,}6 \times 10^{-8}$ s, mais après désintégration il reste finalement un positron (pour le π^+), un électron (pour le π^-) et quelques neutrinos-antineutrinos (ν, $\bar{\nu}$). Le positron, antiparticule, donc antimatière ne peut subsister dans notre monde de matière et dès qu'il rencontre un électron du voisinage, ils s'annihilent en 2γ.
De même, l'électron sera absorbé par un des protons de l'appareillage.
Un décomptage des ν, $\bar{\nu}$ produits, montre qu'ils apparaissent en nombre égal au cours de la suite des désintégrations et le bilan global est donc nul.
Les γ créés se propagent dans le milieu réel et heurtent les électrons des atomes environnants, ce qui cause un échauffement local. Le bilan final est la restitution, sous forme de micro-échauffement, de l'énergie un instant matérialisée.

• Soit des paires de particules-antiparticules. Exemple :

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}.$$

Là encore, l'antiproton s'annihilera avec un des protons des atomes constituants l'appareillage et l'on retrouvera, à la fin, de l'énergie calorifique.

La transformation d'énergie en matière est donc possible, mais ce bonheur dure peu car cette matière est éphémère.

b) Avec de la masse peut-on créer de l'énergie?

Oui, lorsqu'une particule se désintègre.
Une particule instable éclate en deux ou trois particules plus légères, et la différence entre l'énergie de masse de la particule initiale et la somme des énergies de masse des particules finales se retrouve sous forme d'énergie cinétique de ces dernières.
Encore a-t-il fallu, auparavant, créer cette particule instable. Ceci a pu se faire auprès des accélérateurs, ou cela s'est fait lors de la création du monde, peu après le **big-bang**. Il reste encore de ces noyaux instables dans l'écorce terrestre (voir chapitre radioactivité).

2. Au niveau d'un assemblage de particules

Notre monde est un assemblage de particules élémentaires. Les quarks forment : les protons et les neutrons; les protons et les neutrons forment : les noyaux; les noyaux et les électrons : les atomes; les atomes et d'autres atomes : des molécules; et les édifices des molécules : nous.
Ces assemblages se font, ou se défont, via quatre types de forces, chaque type correspondant à un mode d'interaction différent entre particules.
Ces quatre interactions (**gravifique, faible, électromagnétique, forte**), lorsqu'elles tiennent les constituants entre eux sont attractives et le travail qu'elles ont accompli, pour les réunir se retrouve sous forme d'énergie potentielle. (Cette énergie de liaison est négative, par convention, vu du système constitué.)
Lors de la formation, ou de la rupture d'un édifice il y a donc variation d'énergie (potentielle) et la relation d'Einstein s'applique en écrivant que :

A toute variation d'énergie d'un système correspond une variation de sa masse :

$$\Delta E = \Delta m . c^2$$

Et ceci s'applique quel que soit le type d'interaction.

a) Dans l'interaction gravifique

L'attraction gravitationnelle est la plus faible des quatre, elle n'est décelable que si elle s'applique à de grandes masses (nous tenons sur terre).
L'énergie potentielle acquise par cette liaison, divisée par le coefficient c^2, conduit à des variations de masse non mesurables.

b) Dans l'interaction faible

Cette interaction intervient dans des désintégrations radioactives β, et surtout dans la première des réactions de synthèse des étoiles, lorsque les noyaux d'hydrogène se consument en hélium. Bien que dénommée « faible », cette interaction est plus forte que la gravifique, mais là encore les énergies mises en jeu conduisent à des variations de masse faibles.

c) Dans l'interaction électromagnétique

Elle est responsable de la liaison électrons-noyaux. L'énergie de liaison d'un électron périphérique à son noyau est de quelques électronvolts, ce qui pour un atome moyen correspond à un $\frac{\Delta m}{m}$ de 10^{-10}.

La modification de cette liaison, pour briser une molécule ou en former une nouvelle peut se faire par réaction chimique.

Toute la civilisation industrielle du 19e et de la première moitié du 20e siècle a été basée sur l'énergie chimique (essentiellement de combustion), c'est-à-dire en remontant le raisonnement : sur la modification des liaisons électrons-noyaux, où pour parler autrement sur cette variation relative de 10^{-10} des masses des produits réagissant due à l'interaction électromagnétique.

d) Dans l'interaction forte

L'interaction forte est responsable de la cohésion des quarks dans le proton et dans le neutron.

Elle est si forte que jusqu'à ce jour, malgré d'énorme moyens mis en œuvre, elle n'a pu être brisée.

Question : à quoi est due la cohésion du noyau d'atome?

Réponse : par analogie, dans une molécule d'eau, les atomes sont liés par l'interaction électromagnétique. Mais, bien que la molécule d'eau soit électriquement neutre, les forces électriques, qui varient en $\frac{1}{r^2}$, dépassent le volume de la molécule, et c'est leur résidu (qui présente une structure dipolaire) qui est responsable de la cohésion des molécules d'eau en phase liquide.

Il en est de même dans le noyau, la cohésion protons-neutrons est due à un résidu traînant de l'interaction forte quark-quark.

Le noyau est extrêmement solide, sa cohésion correspond à une énergie potentielle importante, si importante que la variation de masse qui lui est proportionnelle est mesurable.

Le « défaut de masse » que présente chaque noyau ainsi formé varie en proportions relatives d'un élément à l'autre. Si l'on transforme, par réactions nucléaires, des noyaux peu liés en noyaux très liés, les défauts de masse vont être différents, ils seront plus importants après la réaction qu'avant.

Il y aura eu libération d'une fraction de la masse, donc d'énergie.

La force de liaison nucléaire est, à masse égale de produit, environ un million de fois plus forte que la force de liaison atomique, et le défaut de masse dans le même rapport.

Alors que pour les trois premières interactions le calcul des défauts de masse afférents sont des curiosités intellectuelles, pour l'interaction forte c'est au contraire la façon pratique de prévoir les énergies susceptibles d'être libérées dans les réactions nucléaires.



Fig. 28

Pour en savoir plus

QUELQUES PARTICULES

• Les particules qui furent, ou seront rencontrées dans le cours de terminale sont dans le tableau ci-dessous :
— le proton et le neutron sont les constituants du noyau de l'atome (chapitre 17);
— l'électron est le partenaire du noyau pour former l'atome (chapitre 16);
— le photon est la particule de lumière, qui est considéré dans les chapitres suivants comme une particule à part entière (chapitres 16 et 18);
— le neutrino intervient dans la désintégration β (chapitre 18) et dans les réactions thermonucléaires des étoiles (chapitre 19);
— les mésons π (chapitre 16).
Les mésons π sont des particules mi-lourdes, instables, qui n'existent donc pas dans la vie pratique. Ce sont elles qui sont créées le plus facilement auprès des accélérateurs, par matérialisation de l'énergie lors des réactions de chocs entre particules de grande énergie.
Le π^+, et son antiparticule le π^-, ont des temps de vie de $2{,}6 \times 10^{-8}$ s, ce qui, pour des vitesses proches de la vitesse de la lumière, correspond à des parcours de plusieurs mètres avant de se désintégrer.
C'est pourquoi ils laissent des traces dans les chambres à bulles.
Le π^0 a un temps de vie beaucoup plus court, de $0{,}9 \times 10^{-16}$ s. Il se désintègre donc au bout de quelques μm et il est inobservable directement. Il se désintègre en 2 photons γ. Les γ, particules neutres ne laissent pas de traces, et le π^0 ne peut être mis en évidence que par calculs. Parfois un des γ se matérialise en une paire $e^- + e^+$ (électron + positron) ce qui donne une figure caractéristique assez jolie (fig. 29).

• Le tableau ci-dessous présente sensiblement l'état des connaissances en 1945. Depuis les expériences ont montré :
— qu'il existait beaucoup d'autres particules,
— que la plupart n'étaient pas élémentaires mais constituées d'assemblages de **quarks**.
Ceci est détaillé chapitre 20, mais pour ce qui concerne les particules du tableau, en bref :
γ, e, ν sont des particules élémentaires;
p et n sont constitués de quarks.
π^+, π^0, π^- sont des paires de quark-antiquarks.

• Tant que les énergies ne dépassent pas quelques GeV, la sous-structure en quark est inobservable.

Type de particules	Nom	Symbole	Masse (MeV)	Temps de vie (s)	Charge électrique (e)	Nombre de nucléon	Antiparticule
	Photon	γ	0	∞	0		
Légères	Électron Neutrino	e^- ν	0,51 0	∞ ∞	-1 0	0 0	e^+ $\bar{\nu}$
Mi-lourdes	Pi Pi	π^+ π^0	139,6 135,0	$2{,}6 \times 10^{-8}$ $0{,}9 \times 10^{-16}$	1 0	0 0	π^- π^0
Lourdes	Proton Neutron	p n	938,3 939,6	∞ 898	1 0	1	$\bar{p}$ $\bar{n}$

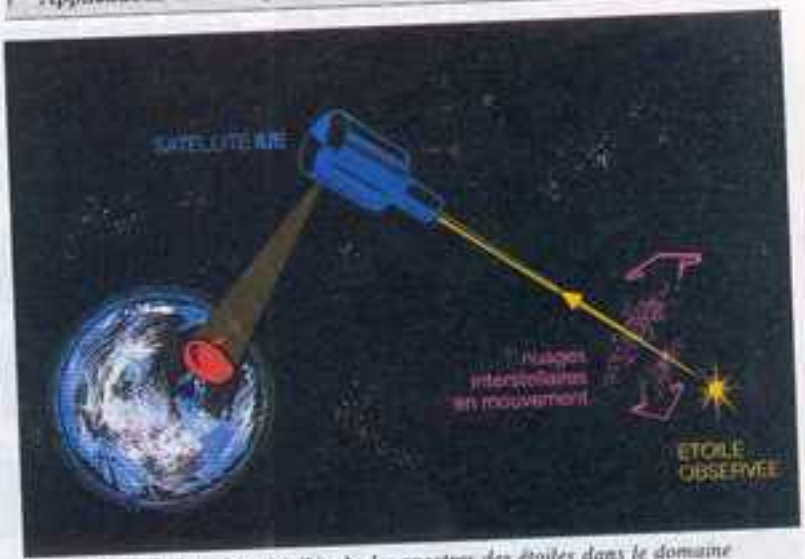
Tableau des particules du programme de terminale.



Fig. 29

16 Niveaux d'énergie atomiques

1 Spectres atomiques.
2 Interprétation des spectres.
3 Le photon.
4 L'atome.
5 Spectre de l'atome d'hydrogène.
6 Autres spectres.
7 Applications à l'astrophysique.



Le satellite IUE est destiné à l'étude des spectres des étoiles dans le domaine U.V., de 115 nm à 320 nm. La dispersion de l'image de l'étoile est obtenue dans un mode haute résolution et la figure d'interférence est projetée sur un tube de télévision qui en permet la transmission au sol. Le satellite est placé sur une orbite géostationnaire à 36 000 km de la Terre. Il se pointe par télécommande dans la direction de l'étoile à observer et se comporte donc comme un véritable observatoire.

1 SPECTRES ATOMIQUES

1. Spectres d'émission

Lorsqu'on apporte de l'énergie extérieure à de la matière, celle-ci peut l'absorber puis la restituer sous forme d'énergie électromagnétique.
De nombreuses sources d'éclairement utilisent l'émission lumineuse de gaz ou de vapeurs métalliques, chauffés ou excités par des décharges électriques. Par exemple, l'éclairage des autoroutes est réalisé par des lampes à vapeur de sodium.
Lorsque cette lumière émise est analysée au spectrographe, on constate que son spectre est *constitué de plusieurs raies, fines et distinctes.* Et ces raies sont caractéristiques de l'atome émetteur. Le spectre de l'hydrogène (fig. 1), est différent de celui du calcium (fig. 2). Lorsque la vapeur ou le gaz émetteur est un mélange, soit parce que composé comme tel, soit parce que le corps originel était une molécule qui s'est dissociée en ses atomes sous l'effet de la haute température, alors le spectre de la lumière émise est la superposition des spectres des atomes composants, avec des brillances relatives qui renseignent sur les proportions du mélange.

2. Spectres d'absorption

Les atomes peuvent également absorber la lumière.
Si, sur un faisceau de lumière blanche on interpose une ampoule emplie de gaz peu chaud, He, Na, Hg... avant l'interposition de l'ampoule le spectre est continu, après traversée du gaz on observe des raies noires dans le spectre continu. Il y a eu absorption sélective de la lumière par les atomes de la vapeur (fig. 3 et 4) et :

les raies d'absorption se produisent aux mêmes longueurs d'ondes que les raies d'émission.

3. Complémentarité des deux types de spectres

Quels que soient les corps, mais selon leur état physique, les deux phénomènes d'émission et d'absorption du rayonnement sont toujours observables.
Pour obtenir un spectre d'émission il faut fournir toutes les énergies possibles à la vapeur éclairée et observer quelles sont les fréquences du rayonnement qu'elle émet.
Pour obtenir un spectre d'absorption il faut envoyer sur la vapeur un rayonnement contenant toutes les fréquences possibles et voir quelles sont celles qu'elle absorbe.
Il n'y a aucune distinction à faire entre spectre d'émission et d'absorption, car il y a identité absolue entre les deux spectres, **ce qui est brillant dans le premier est noir dans le second.**
Une raie d'absorption est d'autant plus sombre que la raie d'émission est plus brillante.
L'essentiel à retenir est que ces spectres sont formés de **raies,** images de la fente source du spectrographe, suivant les longueurs d'ondes émises ou absorbées.

2 INTERPRÉTATION DES SPECTRES

1. Mécanisme de l'émission lumineuse

a) L'électron et l'atome

Dans l'atome les électrons sont liés au noyau. Ils subissent l'interaction électromagnétique (ou plus simplement dit : l'attraction électrique) et se déplacent autour du noyau avec une probabilité de présence moyenne dans l'espace qui dépend de leur énergie.

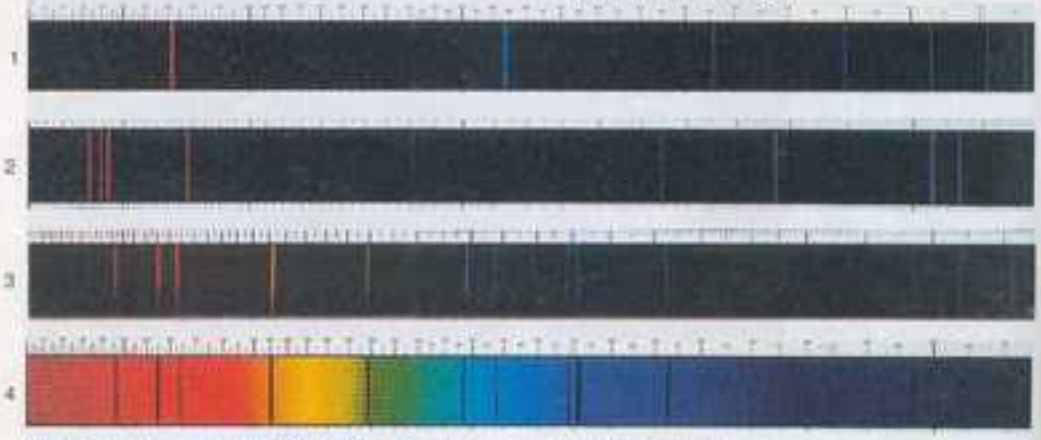


Fig. 1, 2, 3, 4. *1 : émission de l'hydrogène. 2 : émission du calcium. 3 : émission de l'hélium. 4 : absorption de l'hélium.*

L'énergie de liaison, entre un électron et le groupement composé du noyau et des autres électrons, est la somme de :
— l'énergie potentielle d'attraction électrique;
— l'énergie cinétique de l'électron qui tend à l'écarter du noyau.
La résultante est une énergie potentielle de liaison, en forme de puits (fig. 5).

• Pour l'atome d'hydrogène, et pour les ions hydrogénoïdes (ions à un seul électron), cette énergie de liaison électron-noyau est appelée « l'énergie de l'atome ».

• Pour les atomes à plusieurs électrons, l'approximation usuelle est de considérer les électrons comme indépendants. L'énergie de l'atome est la somme des énergies de liaison de chacun des électrons.

L'énergie de l'atome, comme toute énergie potentielle est définie à une constante près. Par convention, on choisit comme zéro des énergies de l'atome, celle qui correspond à l'atome complètement ionisé avec ses électrons à l'infini. Plus l'énergie de l'atome est négative, c'est-à-dire plus le niveau de cette énergie est situé profondément dans le puits, et plus les électrons sont liés.

b) L'émission lumineuse

Lorsqu'une vapeur est chauffée, l'élévation de température augmente l'agitation des atomes qui se heurtent plus fréquemment et plus violemment. Lors de ces chocs, l'énergie acquise se traduit par une perturbation du cortège électronique, les atomes recevant un supplément d'énergie qui les place à un niveau d'énergie supérieur dans le puits. Ils sont **excités**, leurs électrons sont moins liés.
Après le choc, l'atome se désexcite, les électrons « redescendent » à leurs niveaux d'origine, et l'atome retrouve son énergie initiale. La différence d'énergie est libérée sous forme d'émission lumineuse.

c) Énergie et fréquence des radiations

Les radiations sont d'autant plus énergiques que leur fréquence est plus élevée.

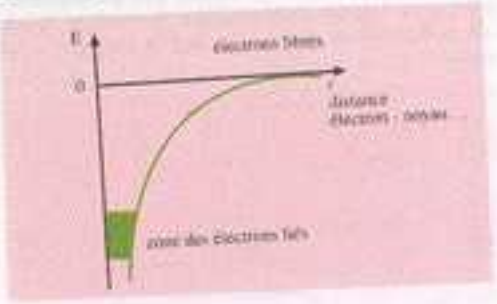


Fig. 5

Par exemple, si l'on photographie une voiture qui s'éloigne, d'une part la lumière solaire est réfléchie par la carrosserie, et d'autre part le pot d'échappement d'où sortent les gaz brûlés chauds émet beaucoup de rayonnement I.R. Or au développement, le pot d'échappement ne paraît pas plus brillant que le reste (sinon moins), ce qui prouve que les rayons infrarouges (par ex. : $\lambda = 40\ \mu m$, $\nu \approx 8 \times 10^{12}$ Hz) ne sont pas suffisamment énergiques pour impressionner la pellicule, alors que les rayons lumineux (par ex. : $\lambda = 550$ nm, $\nu \approx 5{,}4 \times 10^{14}$ Hz) le sont.
De même il est bien connu que ce sont les ultraviolets (par ex. : $\lambda = 330$ nm, $\nu \approx 9 \times 10^{14}$ Hz) qui font bronzer et non pas la lumière du jour.
Et les rayons X, de fréquence mille fois supérieure, sont encore plus destructeurs pour l'organisme.

Ceci admis, les phénomènes s'expliquent par deux grandes idées.

2. Première idée : la quantification de la lumière

Reprenant et développant les travaux de M. Planck, A. Einstein en 1904-1905 a émis l'idée que lors de sa désexcitation l'atome libérait l'énergie excédentaire par émission d'une particule : le **photon.**

Si E_1 est le niveau d'énergie initial d'un atome, E_2 le niveau auquel il est porté par l'excitation extérieure, lorsqu'il revient à son niveau initial il émet un photon d'énergie $E = E_2 - E_1$.
A chaque retour d'électron, correspond donc l'émission d'un photon. Plus puissante est la source lumineuse, plus grand est le nombre de photons émis.

La lumière, et d'une manière générale toute radiation, peut donc s'interpréter de deux façons :
— soit comme une onde progressive électromagnétique, de fréquence ν, c'est le point de vue **ondulatoire;**
— soit comme un jet continu de photons (un flux de particules), d'énergie E, c'est le point de vue **corpusculaire.**
La corrélation entre ces deux points de vue est énergétiquement parlant, donnée par la relation :

$$E = h \cdot \nu$$

L'énergie de chaque proton (en interprétation corpusculaire) est proportionnelle à la fréquence de l'onde (en interprétation ondulatoire).

Le facteur de proportionnalité h, est appelé la constante de Planck, et vaut :

$$h = 6{,}62 \times 10^{-34}\ \text{J.s.}$$

Cette valeur est petite.
Pour la raie jaune du sodium, dite raie D, sa longueur d'onde est $\lambda = 589{,}3$ nm, sa fréquence :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{589{,}3 \times 10^{-9}} = 5{,}09 \times 10^{14}\ \text{Hz},$$

et son énergie :

$$E = h \,.\, \nu = 6{,}62 \times 10^{-34} \times 5{,}09 \times 10^{14} = 3{,}37 \times 10^{-19}\ \text{J},$$

soit, en électronvolt :

$$E = \frac{3{,}37 \times 10^{-19}}{1{,}6 \times 10^{-19}} = 2{,}1\ \text{eV}.$$

L'énergie des photons lumineux est de l'ordre de l'électronvolt.

On image parfois cette idée de photons, en disant que l'énergie lumineuse ne se propage pas de façon continue, mais par «paquets» : les quanta d'énergie. Chaque photon transporte le **quantum** d'énergie $E = h \,.\, \nu$.

Remarque :
Une manière pratique d'utiliser cette formule est d'écrire :

$$\lambda = \frac{h \,.\, c}{E},$$

et d'exprimer λ en nanomètre (nm) et E en électronvolt (eV) :

$$\lambda = \frac{1\,241}{E}$$

3. Seconde idée : la quantification de l'énergie de l'atome

Chaque photon émis correspond à un changement d'énergie pour l'un des atomes de la source, qui passe d'un niveau d'énergie E_n à un niveau d'énergie inférieur E_p dans le puits.

Le photon emporte l'énergie :

$$E = E_n - E_p.$$

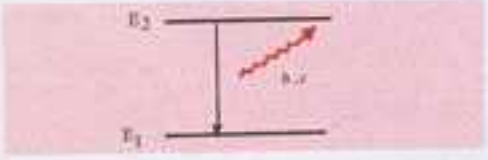


Fig. 8. Émission lumineuse. → représente le photon émis.

L'onde associée à cette transition est de fréquence ν_{np} donnée par :

$$h \,.\, \nu_{np} = E_n - E_p \quad \text{(fig. 6)}.$$

Le fait que le spectre de lumière émise soit un spectre de raies indique que :
— les fréquences des ondes émises par un atome excité ont des valeurs **discrètes** (non continues);
— l'énergie des photons correspondant, a elle aussi des valeurs discrètes.
Cette énergie des photons étant égale à des différences d'énergie de l'atome, ceci implique que l'énergie d'un atome ne peut avoir que des valeurs bien définies : les **niveaux d'énergie.**

L'énergie de l'atome est donc **quantifiée.**

Cette interprétation a été proposée par N. Bohr en 1913, à partir de l'idée que la mécanique classique n'est plus valable à l'échelle atomique.

Cette **quantification,** à l'origine purement empirique a été par la suite confirmée et généralisée par Sommerfeld à tous les systèmes liés.

La loi de combinaisons de Ritz confirme ceci.
On peut trouver, dans un spectre, trois raies dont des fréquences ν, ν', ν'' vérifient la combinaison suivante :

$$\nu'' = \nu' + \nu.$$

Cette relation est facile à interpréter :
si ν_{np} est la fréquence de l'onde émise par le saut d'énergie d'un niveau E_n à un niveau E_p :

$$h \,.\, \nu_{np} = E_n - E_p,$$

s'il existe, entre les niveaux n et p un niveau intermédiaire possible m, alors :

$$E_n - E_p = E_n - E_m + E_m - E_p$$

et :
$$h \,.\, \nu_{np} = h \,.\, \nu_{nm} + h \,.\, \nu_{mp}.$$

La transition $n \longrightarrow p$ se fait soit directement, soit avec l'étape intermédiaire $n \longrightarrow m$ suivie de la transition $m \longrightarrow p$. Sur la figure 7 c'est évident.

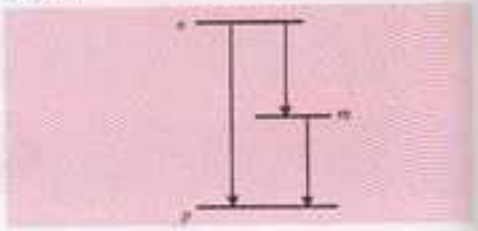


Fig. 7

4. Interaction de la lumière avec la matière

a) Absorption des photons

Les spectres d'émission s'expliquent donc par l'émission d'un photon chaque fois qu'un atome passe d'un niveau d'énergie E_n, à un niveau d'énergie inférieur E_p.

Il en va de même pour les spectres d'absorption, un faisceau de lumière blanche s'interprète comme un flux de photons de toutes énergies. Ces photons «choquent» les électrons atomiques, et si l'énergie d'un photon est juste égale à l'énergie nécessaire pour faire «monter» un électron du niveau d'énergie E_p où il se trouve, à un niveau supérieur d'énergie E_n, ce photon sera absorbé.

Donc seuls seront absorbés les photons dont les énergies sont égales à des différences d'énergie des niveaux dans les atomes (fig. 8).

b) Phénomène de résonance optique

L'expérience se fait souvent avec de la vapeur de sodium. Un ballon de verre contenant de la vapeur de sodium est fortement éclairé par une lampe au sodium pratiquement monochromatique (jaune-orange).

Les photons incidents ont donc exactement l'énergie nécessaire pour faire passer les atomes du sodium vapeur du ballon, de l'état fondamental au **même** niveau excité que celui auquel avaient été portés les atomes du sodium de la lampe.

Une partie des photons incidents est donc absorbée, et la vapeur de sodium excitée, réémet des photons de même longueur d'onde, mais dans **toutes les directions.**

La vapeur de sodium du ballon devient lumineuse, de même couleur que la source et le faisceau émergent est atténué car en partie absorbé (fig. 9).

Cette interaction lumière-matière, qui se traduit par l'émission ou l'absorption sélective de photons est donc un mécanisme de choc entre particules élémentaires : photons-électrons.

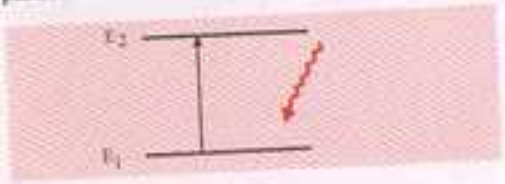


Fig. 8. *Absorption de la lumière : un photon est absorbé.*

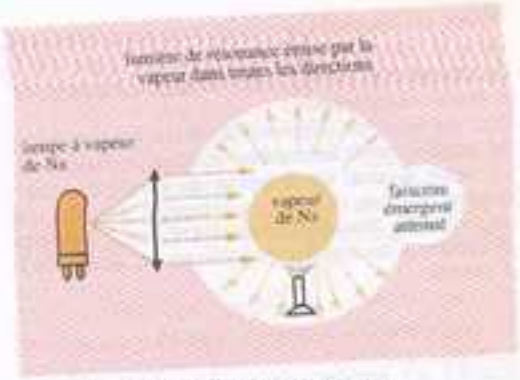


Fig. 9. *Expérience de résonance optique.*

3 LE PHOTON

Le photon γ est une particule élémentaire, électriquement neutre et de masse nulle.

Il se déplace toujours à la vitesse :
$c = 3 \times 10^8\ \text{m.s}^{-1}$, vitesse dite «de la lumière». Pour lui l'état de repos n'est qu'un rêve.

Son énergie de masse est nulle. Son énergie E est purement cinétique, elle est reliée à sa quantité de mouvement p, par la relation vue chapitre 15 :

$$E = p \,.\, c.$$

Que sa masse soit nulle et qu'il se déplace à la célérité de la lumière c, sont deux faits corrélés, car la vitesse d'une particule est donnée par :

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{p \,.\, c}{E};$$

si $m = 0$, $E = p \,.\, c$ donc $\beta = 1$ et $v = c$.

Comme les autres particules, le photon peut créer des chocs élastiques ou inélastiques : photon-électron, photon-proton, photon-noyau.

Selon les phénomènes étudiés, un rayonnement sera mieux expliqué si on l'interprète comme une onde (par exemple dans les phénomènes d'interférences) ou comme un flux de photons.

Le point de vue «particule» est d'autant plus nécessaire que le rayonnement est plus énergique, donc de plus courte longueur d'onde (X, γ).

Voici un exemple d'expérience avec photons, faite à Stanford, Californie (U.S.A.) en 1977. Le but était d'obtenir des photons γ énergiques et mono-énergétiques.
Pour ce faire on place un puissant laser à rubis en bout d'un accélérateur linéaire à électrons. Le laser produit un faisceau de lumière monochromatique de 800 nm de longueur d'onde, qui est dirigé perpendiculairement au faisceau d'électrons sortant de l'accélérateur, de 20 GeV d'énergie.

— Les photons «rouges» ont une énergie de 1,55 eV.

— Par choc sur les électrons de 20 GeV, ils acquièrent de l'énergie et si l'on sélectionne les photons déviés dans le sens et la direction des électrons incidents, ces photons ont une énergie de 4 GeV (fig. 10).

— L'énergie des photons a donc été multipliée par un facteur $2{,}6 \times 10^9$ lors du choc!!
La fréquence de l'onde associée a été multipliée par le même facteur, passant de $3{,}7 \times 10^{14}$ à $9{,}6 \times 10^{23}$ Hz.

photon + électron ⟶ photon + électron.
1,55 eV 20 GeV 4 GeV 16 GeV

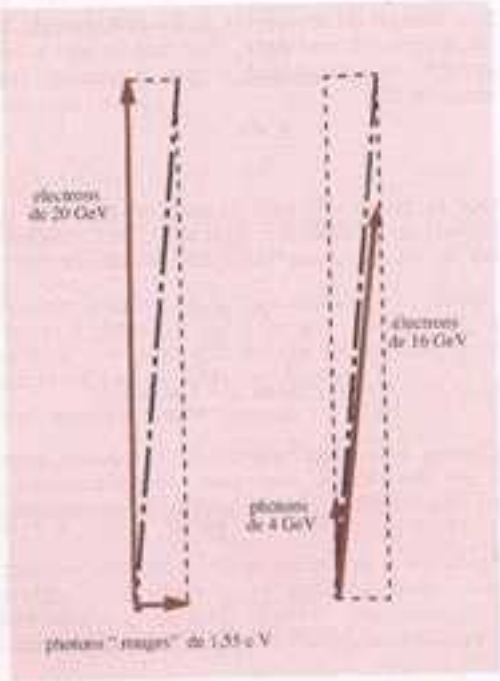


Fig. 10. *Graphique des quantités de mouvement avant et après le choc. Pour les commodités du tracé, l'échelle des abscisses a été dilatée d'un facteur 10^9.*

4 L'ATOME

L'énergie de l'atome est donc quantifiée.
— Le nombre d'électrons qui se trouvent à un niveau d'énergie donnée est limitée (c'est un phénomène quantique hors programme).
Lorsqu'un niveau est saturé, les électrons se placent sur le niveau supérieur, etc.

— Plus l'énergie de liaison est grande (plus l'électron est situé sur un niveau profond dans le puits de potentiel), plus sa position autour du noyau est en moyenne proche de celui-ci.

— Le dernier niveau effectivement occupé est appelé **niveau de valence.** Il se peut qu'il ne soit que partiellement occupé.

— Le niveau zéro d'énergie de liaison est celui qui correspond à l'électron libéré de l'atome, celui-ci est alors ionisé.

— La différence d'énergie entre le niveau de valence et le niveau zéro est donc l'**énergie d'ionisation** de l'atome, notée E_i.

— Entre le niveau de valence et le niveau zéro, il existe une quantité de niveaux possibles d'énergie, normalement inoccupés, mais qui peuvent l'être de façon temporaire si l'atome est excité.

— Lorsque tous les électrons d'un atome sont situés à leur niveau d'énergie le plus bas possible, l'atome est dit dans son **état fondamental** (sinon il est excité).

— Les niveaux d'énergie sont d'autant plus serrés qu'ils sont situés près du niveau d'ionisation.

Pour des atomes les plus simples, tels l'hydrogène, l'hélium et les alcalins, le calcul des niveaux est possible et rend compte de l'expérience. Pour les autres, c'est l'expérience, c'est-à-dire l'observation de leurs spectres qui, par mesure de la fréquence des raies, renseigne sur les niveaux d'énergie de l'atome.

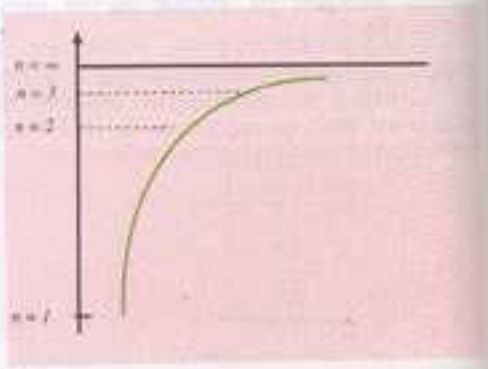


Fig. 11

5 SPECTRE DE L'ATOME D'HYDROGÈNE

L'atome d'hydrogène est le plus simple qui soit : un noyau formé d'un proton et un seul électron. C'est pourquoi son spectre a été souvent étudié, tant du point de vue théorique qu'expérimental.

La courbe de l'énergie de liaison de l'électron au proton, en fonction de la distance électron-proton est une branche d'hyperbole (fig. 11).

Le niveau d'énergie de l'état fondamental est à −13,6 eV. Comme l'électron est unique, l'énergie d'ionisation de l'hydrogène est donc :

$$E_0 = 13{,}6 \text{ eV}.$$

Le niveau fondamental, auquel arbitrairement on attribue le numéro $n = 1$, est donc situé à :

$$E = -E_0.$$

Les niveaux supérieurs sont normalement vides, mais si l'atome d'hydrogène est excité, l'électron peut s'y trouver.

L'expérience montre, et la théorie explique, que les niveaux excités de l'hydrogène sont situés à l'« altitude énergétique » :

$$E = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{(fig. 12)}.$$

— Le niveau fondamental, $n = 1$, est à :

$$E = -13{,}6 \text{ eV}.$$

— Le premier niveau excité, $n = 2$ est à :

$$E = -3{,}4 \text{ eV}.$$

— Le deuxième niveau excité, $n = 3$ est à :

$$E = -1{,}5 \text{ eV}.$$

— Les niveaux supérieurs sont de plus en plus resserrés.

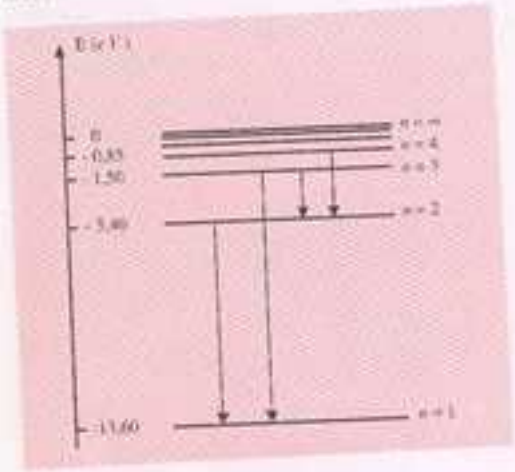


Fig. 12. *Représentation graphique des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène et de quelques transitions.*

1. Les séries de raies

Si du gaz hydrogène est excité de telle sorte que les électrons des atomes soient sur les niveaux supérieurs, et si tous les atomes se désexcitent de façon que tous les électrons redescendent au niveau 1 par exemple, l'écart d'énergie entre les niveaux de départ est faible comparé à leur distance énergétique du niveau 1. Les raies d'émissions sont donc voisines et constituent une « série ».

Si les électrons retombent d'abord sur le niveau 2 (le premier niveau excité) cela créera une autre série, etc.

Les principales séries du spectre de l'atome d'hydrogène sont :

• *La série de l'ultraviolet, dite de* **Lyman.**

Les électrons des atomes, placés par excitation préalable sur des niveaux d'énergie :

$$E = -\frac{E_0}{n^2},$$

redescendent au niveau fondamental d'énergie $E = -E_0$, que, pour des raisons de symétrie d'écriture évidentes on écrit :

$$E = -\frac{E_0}{1^2}.$$

Les fréquences des raies de la série sont donc :

$$h\,\nu = E_n - E_1$$

$$= \left(-\frac{E_0}{n^2}\right) - \left(-\frac{E_0}{1^2}\right)$$

$$= E_0 \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

La première raie, $n = 2$, a pour fréquence :

$$\nu = \frac{E_0}{h} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right).$$

La constante E_0 vaut 13,6 eV, mais pour ce calcul elle doit être convertie en joules soit :

$$\nu = \frac{13{,}6 \times 1{,}6 \times 10^{-19}}{6{,}62 \times 10^{-34}} \times \left(\frac{3}{4}\right) = 2{,}46 \times 10^{15} \text{ Hz},$$

ce qui correspond à une longueur d'onde de :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \times 10^8}{2{,}46 \times 10^{15}} = 1{,}22 \times 10^{-7} \text{ m} = 122 \text{ nm}.$$

La seconde raie de la série, $n = 3$, a pour fréquence :

$$\nu = \frac{E_0}{h} \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right),$$

ce qui conduit à : $\lambda = 103$ nm.

Et la dernière raie, $n = \infty$, est dans l'U.V. lointain :

$$\lambda = 91 \text{ nm}.$$

Il y a théoriquement autant de raies que de valeur de n, c'est-à-dire une infinité. Au fur et à mesure que n augmente les raies se resserrent, la dernière, la plus courte ($n = \infty$) est dans l'U.V. lointain à $\lambda = 91$ nm et la première, la plus grande ($n = 2$) est aussi dans l'U.V. à 122 nm.

L'ensemble de la série est donc située dans l'ultraviolet.

• *La série du visible, dite de* ***Balmer.***
Elle correspond aux transitions des niveaux supérieurs (n), au premier état excité ($n = 2$). Les fréquences des raies sont donc données par la relation :

$$h \cdot \nu = E_0 \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad \text{avec} \quad n > 2.$$

La première raie de la série ($n = 3$) a pour fréquence :

$$\nu = \frac{E_0}{h} \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right),$$

ce qui donne $\nu = 0{,}45 \times 10^{15}$ Hz soit $\lambda = 656$ nm (jaune-orange). Cette raie, la plus importante, est appelée H_α. Les raies suivantes sont :

H_β, pour $n = 4$, soit : $\lambda = 486$ nm (bleu);
H_γ, pour $n = 5$, soit : $\lambda = 434$ nm (indigo)
H_δ, pour $n = 6$, soit : $\lambda = 410$ nm (violet).

Les suivantes sont dans l'ultraviolet, et la dernière ($n = \infty$), la plus courte est à $\lambda = 365$ nm, bien en de ça de la première raie de Lyman.

Remarque :
La série de Balmer, fut la première étudiée, car une partie de ses raies est dans le visible.

• *La série de l'infrarouge, dite de* ***Paschen.***
Elle correspond au retour de l'électron sur le deuxième état excité ($n = 3$).
Les fréquences de ses raies sont donc données par : $h \cdot \nu = E_0 \cdot \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)$.

La première ($n = 4$) est à $\lambda = 1900$ nm, les suivantes, plus courtes, sont néanmoins dans l'infrarouge, la dernière ($n = \infty$) est à $\lambda = 820$ nm.

• Toutes les raies de l'hydrogène satisfont la relation générale : $h \cdot \nu = E_0 \cdot \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right)$.

Du point de vue spectral, p caractérise la série et n la raie dans la série (fig. 13).

Remarque :
Aux trois séries précédentes : $p = 1$ Lyman, $p = 2$ Balmer, $p = 3$ Paschen, suivent $p = 4$ Brackett et $p = 5$ Pfund, toutes deux dans l'infrarouge.

La forme particulièrement simple de la formule donnant les niveaux d'énergie n'est pas spéciale à l'atome d'hydrogène. Elle est générale.

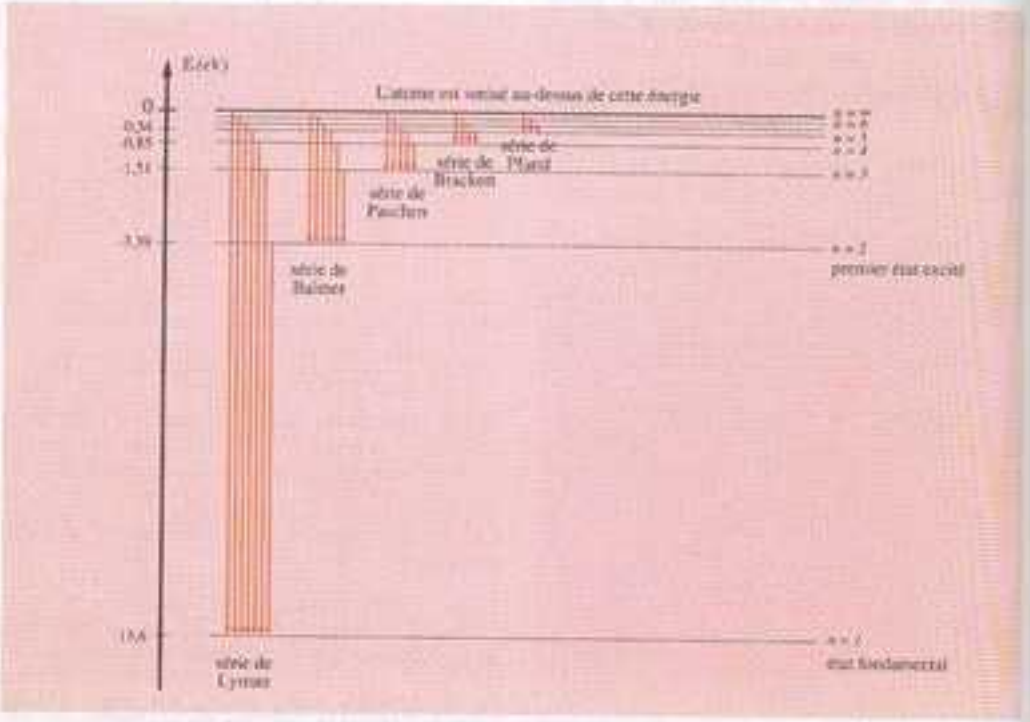


Fig. 13. *Diagramme des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.*

2. Le continuum

Lorsque l'énergie extérieure que reçoit l'électron est supérieure à l'énergie d'ionisation E_0, l'électron se retrouve dans une région au-dessus du puits de potentiel de liaison. Dans cette région, l'énergie n'est plus quantifiée, car l'espace est illimité. L'énergie de l'électron peut prendre n'importe quelle valeur positive.

• Continuum d'émission

Si cet électron est capturé par le noyau, il libère de par sa capture, une énergie non quantifiée. L'énergie du photon n'étant plus quantifiée, la fréquence de l'onde ne l'est pas non plus et peut prendre n'importe quelle valeur supérieure à celle de la plus grande fréquence de la série. C'est pourquoi le spectre est continu au-delà de la raie de plus courte longueur d'onde de la série (fig. 14 et 15).

• Continuum d'absorption

Pour créer la première raie d'absorption de la série de Balmer par exemple, l'atome n'absorbe que les photons d'énergie :

$$E = E_0 \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right).$$

Si l'énergie des photons est telle que :

$$E = E_0 \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty^2}\right) = \frac{E_0}{4}$$

elle créera la dernière raie d'absorption de la série.

Et si l'énergie E des photons est supérieure à cette valeur, l'atome sera ionisé et l'électron aura l'énergie cinétique excédentaire : $E - \frac{E_0}{4}$.

Les photons seront absorbés quelle que soit leur énergie et ceci constituera le spectre continu d'absorption.

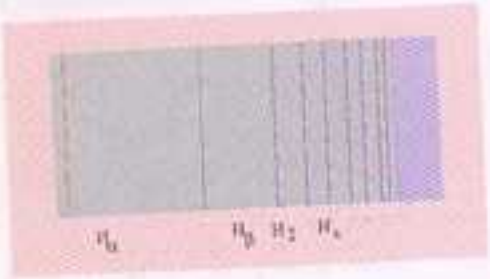


Fig. 15. Spectre visible de l'hydrogène atomique. C'est un spectre de raies jusqu'à $\lambda = 364{,}6$ nm. Ensuite l'hydrogène émet un spectre continu de faible intensité.

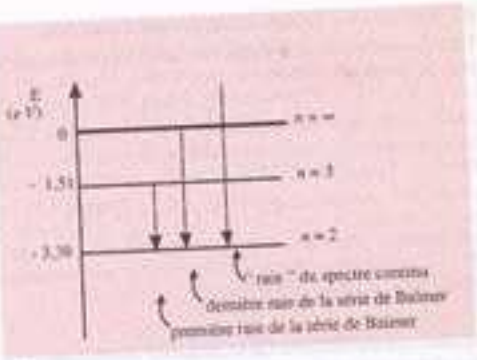


Fig. 14

6 AUTRES SPECTRES

Les caractéristiques du spectre d'un élément (atome ou ion) dépendent essentiellement du nombre d'électrons autour du noyau et plus précisément du nombre d'électrons sur la couche externe.

Par exemple, l'hélium neutre He et l'ion He^+ ont des spectres complètement différents, alors que le spectre de l'ion He^+ (qui n'a qu'un électron périphérique) ressemble à celui de l'hydrogène.

Dans tous les cas la relation :

$$h \cdot \nu_{n,p} \overset{*}{=} E_n - E_p$$

est valable, mais en général il n'y a pas de relation simple entre la fréquence $\nu_{n,p}$ et les numéros des niveaux (n et p) comme c'est le cas pour l'hydrogène.

1. Spectres des ions hydrogénoïdes

Les ions hydrogénoïdes sont des atomes ionisés une ou plusieurs fois, de manière qu'il ne reste qu'un électron autour de l'atome, comme par exemple He^+, Li^{2+}, etc.

Leurs noyaux sont plus lourds, et portent la charge électrique $+Z.e$. L'électron restant est donc d'avantage lié au noyau que dans le cas de l'hydrogène, l'énergie de liaison est multipliée par le facteur Z^2 (la démonstration est hors programme). L'énergie des photons émis est multipliée par le même facteur.

a) Spectre de l'hélium ($Z = 2$) ionisé une fois

Les fréquences des raies de He^+ sont données par la relation :

$$h \cdot \nu = E_{0(He^+)} \cdot \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

avec $E_{0(He^+)} = Z^2 \cdot E_{0(H)} = 4E_{0(H)}$

$= -4 \times 13{,}6 \text{ eV} = -54{,}4 \text{ eV}.$

Le spectre de He^+ est donc semblable à celui de l'hydrogène, mais décalé vers les courtes longueurs d'onde d'un facteur 4 (fig. 16).

b) Spectre du lithium ($Z = 3$) ionisé deux fois

De même le spectre de Li^{2+}, est semblable à celui de l'hydrogène mais décalé vers les courtes longueurs d'ondes d'un facteur $Z^2 = 9$ (fig. 16).
D'une manière générale, le spectre des atomes hydrogénoïde est décrit par la relation :

$$h \cdot \nu = -13{,}6Z^2 \cdot \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

2. Spectres des alcalins

Les alcalins Li, Na, K... présentent des spectres de raies, et les fréquences de ces raies se calculent par une formule du type :

$$h \cdot \nu = E_0 \cdot \left(\frac{1}{(m+a)^2} - \frac{1}{(n+b)^2}\right),$$

qui est un peu plus compliquée que celle de l'hydrogène.

a) Les séries de raies

Pour un atome donné, a et b ne peuvent prendre que 4 valeurs, que selon la notation spectroscopique on écrit s, p, d, f, ce qui conduit à une certaine multiplication des séries, que l'on peut résumer ainsi :
— Série s (sharp = étroite) où $p \longrightarrow s$, ($a = s$ et $b = p$).
Les raies sont extrêmement fines.
— Série p (principale) où $s \longrightarrow p$.
Les raies sont les plus intenses.
— Série d (diffuse) où $p \longrightarrow d$.
Les raies sont peu intenses et larges.
— Série f (fondamentale) où $d \longrightarrow f$.
Les raies sont situées dans l'infrarouge.

b) Existence de règles de sélection

Au principe de combinaison de Ritz, on doit donc associer quelques règles de sélection.
Certaines transitions atomiques sont interdites même si elles sont énergétiquement possibles. Le cas de l'hydrogène est exceptionnel.
Pour les alcalins, les seules raies permises sont celles qui correspondent aux transitions :

$s \rightleftarrows p \quad p \rightleftarrows d \quad d \rightleftarrows f$ (fig. 17).

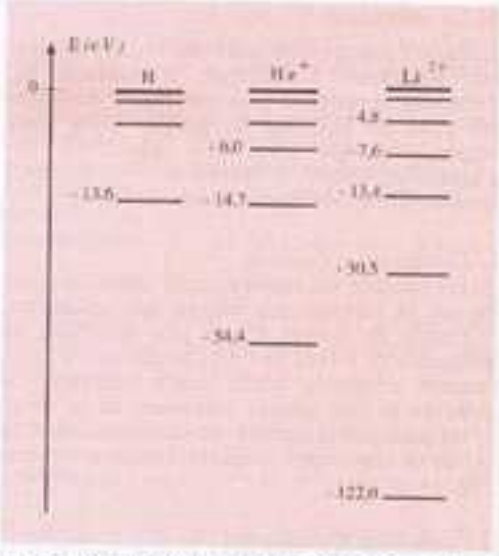


Fig. 16. *Niveaux d'énergie des hydrogénoïdes* He^+ *et* Li^{2+}, *comparés à ceux de l'atome d'hydrogène.*

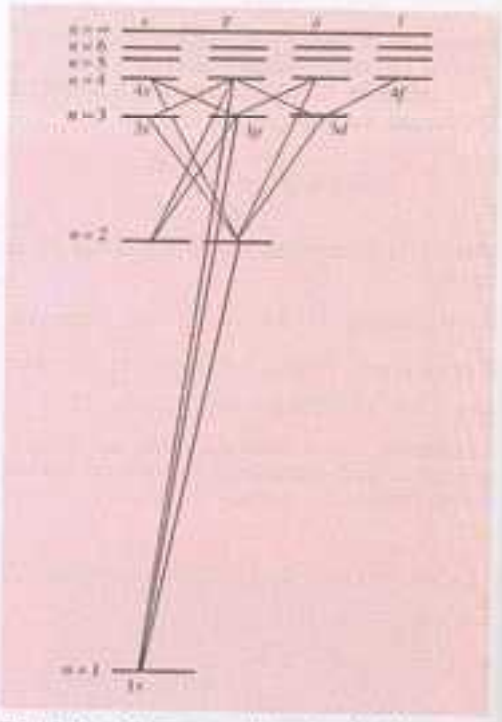


Fig. 17. *Le diagramme d'énergie de l'atome de lithium. Exemples de raies :*
dans la série s : 2p ⟶ 1s
dans la série p : 3s ⟶ 2p
dans la série d : 3d ⟶ 2p
dans la série f : 4f ⟶ 3d.
Sur la figure, les niveaux de départ et d'arrivée de la transition doivent être dans des colonnes adjacentes.

3. Potentiels d'ionisation

Si les électrons de valence sont en l'état fondamental situés sur le niveau d'énergie $-E_0$, pour ioniser l'atome il faut apporter l'énergie E_0. Cette énergie d'ionisation dépend de l'élément, elle s'exprime en électronvolt. Mais plutôt que parler d'énergie d'ionisation E_i (en eV), on parle de **potentiel d'ionisation** V_i (en volt), c'est la même information.

La figure 18 présente différents potentiels d'ionisation. Ces potentiels ne sont pas indépendants des propriétés chimiques des atomes, ils sont élevés pour les gaz nobles inertes, et faibles pour les alcalins facilement ionisables.

4. Spectres des molécules

Ils sont plus complexes que ceux de ses atomes constituants. Au-dessus de son état fondamental, l'énergie d'excitation d'une molécule est due à trois causes :

— la vibration des noyaux au voisinage de leur distance moyenne;

— l'excitation électronique de ses électrons de liaison;

— la rotation de la molécule.

A chaque cause correspond une énergie, et chacune de ces trois énergies est quantifiée.

Une excitation, ou désexcitation de la molécule met en jeu une variation d'énergie ΔE, telle que :

$$\Delta E = \Delta E_{el} + \Delta E_{vib} + \Delta E_{rot},$$

Les ordres de grandeur diffèrent :

ΔE_{el} est de l'ordre de quelques eV;

ΔE_{vib} est de l'ordre de quelques 0,1 eV;

ΔE_{rot} est de l'ordre de quelques 0,001 eV.

— Le spectre de rotation pure se situe dans l'infrarouge lointain, il est pratiquement inobservable.

— Le spectre de vibration-rotation est dans l'infrarouge proche, il s'observe surtout en absorption, les longueurs d'ondes absorbées sont :

$$\lambda = \frac{1\,241}{\Delta E_{vib} + \Delta E_{rot}}.$$

L'importance de ces spectres I.R. est considérable en chimie analytique, car on a constaté que les vibrations de groupes fonctionnels donnés ont pratiquement même fréquence quelle que soit la molécule qui les contient. La présence de cette fréquence permet d'identifier le groupe dans les molécules complexes.

— Le spectre complet, dû aux trois effets est dans le visible, il s'observe bien en émission et en absorption :

$$\lambda = \frac{1\,241}{\Delta E_{el} + \Delta E_{vib} + \Delta E_{rot}} \quad \text{(fig. 19)}.$$

La combinaison des trois possibilités de sauts énergétiques fait la complexité du spectre.

Le petit terme ΔE_{rot}, fait que les raies observées sont serrées et regroupées en bandes présentant une limite nette (l'arête) du côté correspondant à la plus grande longueur d'onde.

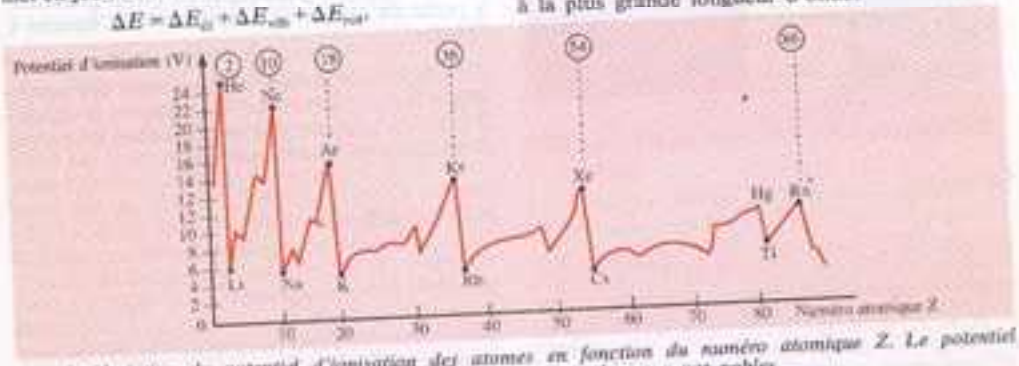


Fig. 18. Variation du potentiel d'ionisation des atomes en fonction du numéro atomique Z. Le potentiel d'ionisation est très grand pour les valeurs de Z, qui correspondent aux gaz nobles.

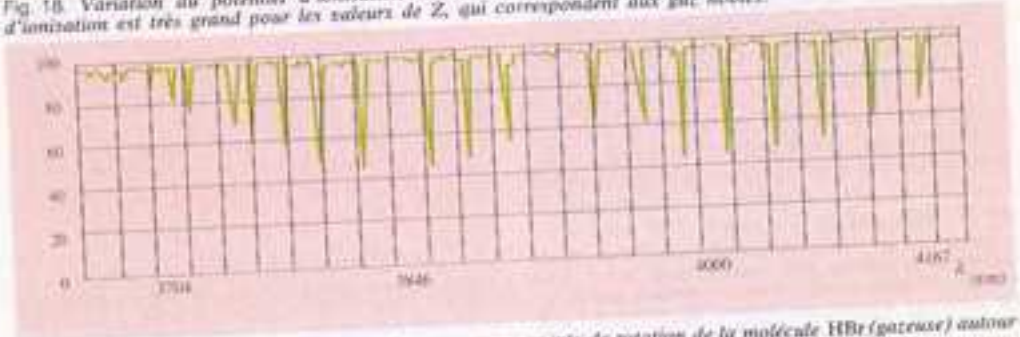


Fig. 19. Ensembles de raies d'absorption dues aux mouvements de rotation de la molécule HBr (gazeuse) autour de la première transition de vibration.

5. Spectres des solides, liquides et gaz comprimés

Portés à haute température, ils émettent un spectre continu, dont une partie est dans le visible.

Le caractère continu s'explique par le fait que les niveaux d'énergie dans lesquels peuvent se trouver les électrons responsables de l'émission sont si serrés, que par suite de la largeur naturelle des raies, il y a chevauchement et donc continuum.

Le graphique de la puissance lumineuse émise, en fonction de la longueur d'onde est présentée figure 20. Il présente deux caractéristiques :

— cette puissance est d'autant plus importante que la température est plus élevée;

— la fréquence qui correspond au maximum de puissance est proportionnelle à la température du corps :

si $T = 3\,000$ K le maximum est dans l'infrarouge, si $T = 6\,000$ K le maximum est dans le visible et si $T = 12\,000$ K il est dans l'ultraviolet.

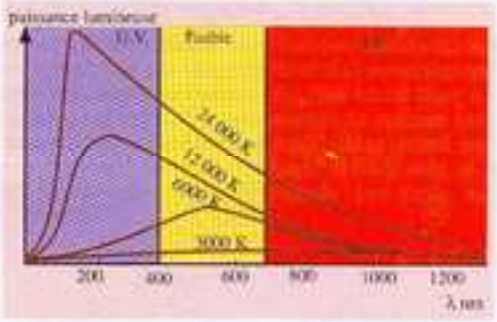


Fig. 20

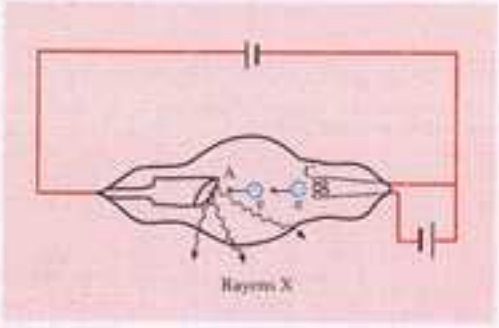


Fig. 21. *Production de rayons X.*
L'anode est en métal (tungstène). Si les électrons sortant de la cathode sont accélérés sous 50 kV, leur énergie cinétique est suffisante pour extraire, par choc, les électrons internes de l'anode. Le retour à l'état fondamental libère de l'énergie sous forme de rayons X.

6. Spectres X

Les rayons X ont des longueurs d'onde de l'ordre du picomètre, et donc des énergies de l'ordre du keV (de 0,1 à 100 keV). Ils proviennent des transitions d'électrons entre les niveaux d'énergie les plus profonds des atomes lourds.

Par convention ces niveaux ont reçu les appellations suivantes :

$n = 1$	2	3	4 ...
K	L	M	N...

Le principe de production du rayonnement X est expliqué par la figure 21.

• *Spectres d'absorption*

Pour les plus courtes longueurs d'onde, les photons X incidents sont suffisamment énergiques pour chasser un électron du niveau K de la substance qu'ils irradient.

Mais les niveaux supérieurs, et ce jusqu'au niveau de valence sont occupés, donc l'électron doit sauter plus haut que ce niveau de valence pour trouver un niveau d'accueil. Étant donné les énergies mises en jeu, de l'ordre du keV, la différence entre les derniers niveaux libres et le niveau d'énergie zéro (d'ionisation) est négligeable, et en pratique il y a photo-ionisation à partir du niveau K, l'électron étant arraché à l'atome.

Les photons X absorbés seront ceux qui possèdent l'énergie du niveau K (changée de signe). Il y a donc une raie d'absorption dans le spectre X transmis pour la fréquence :

$$h \cdot \nu_K = E_K,$$

puis une autre raie pour :

$$h \cdot \nu_L = E_L,$$

etc. (fig. 22).

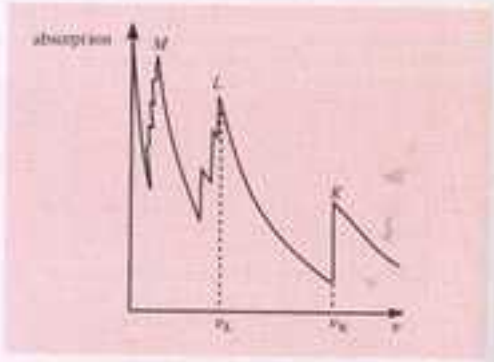


Fig. 22. *Variation de l'absorption d'une substance en fonction de la fréquence des rayons X incidents.*

• *Spectre X d'émission*

Lorsqu'un électron du niveau K a été extrait, l'atome revient à l'état fondamental par réarrangement du remplissage de ses niveaux. Ceci peut se faire en cascade : un électron du niveau L, descend sur le niveau K, en émettant un photon X, d'énergie $E_L - E_K$, puis un électron du niveau M, descend sur le niveau L, etc. Mais il peut y avoir des transitions directes $M \longrightarrow K$, ou autres.

Donc il existe une série de raies K :

$K\alpha$ telle que $h \cdot \nu_{K\alpha} = E_L - E_K$;

$K\beta$ telle que $h \cdot \nu_{K\beta} = E_M - E_K$.

De même il existe une série L, dues aux transitions des niveaux supérieurs au niveau L (fig. 23).

Le spectre X d'émission à l'allure de la figure 24.

L'énergie d'une raie d'émission est égale à la différence des énergies de deux raies d'absorption.

Tous les spectres X d'émission, ont même structure générale caractérisée par les séries de raies K, L, M...

Pour une raie donnée, la raie $K\alpha$ par exemple, il y a une relation simple entre sa fréquence et le numéro atomique Z, de l'élément émetteur :

$$h \cdot \nu_{K\alpha} = 13{,}6(Z-1)^2 \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right).$$

Normalement le niveau K ($n = 1$) est occupé par deux électrons. Si l'un de ces deux électrons a été éjecté par excitation extérieure, un électron de niveau L va descendre, mais cet électron est attiré par le groupement noyau de charge $+Z.e$, et de l'électron restant de charge $-e$. Il est donc attiré par la charge $(Z-1).e$, d'où le facteur $(Z-1)^2$ de la formule. D'un élément à un autre la fréquence de la raie $K\alpha$ varie comme $(Z-1)^2$. C'est la **loi de Moseley**, cette loi a historiquement servi à vérifier la correspondance entre la charge électrique d'un noyau et la place de l'élément dans la classification périodique.

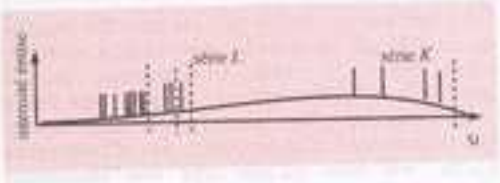


Fig. 24. *Spectre d'émission de rayons X.*
Aux séries de raies d'émission, séries K, L, ..., se superpose un spectre continu. Ceci est dû au freinage des électrons incidents, qui en pénétrant dans le bloc de tungstène sont ralentis par l'attraction électrique des noyaux. Leur perte d'énergie se retrouve sous forme d'émission X non quantifiée.

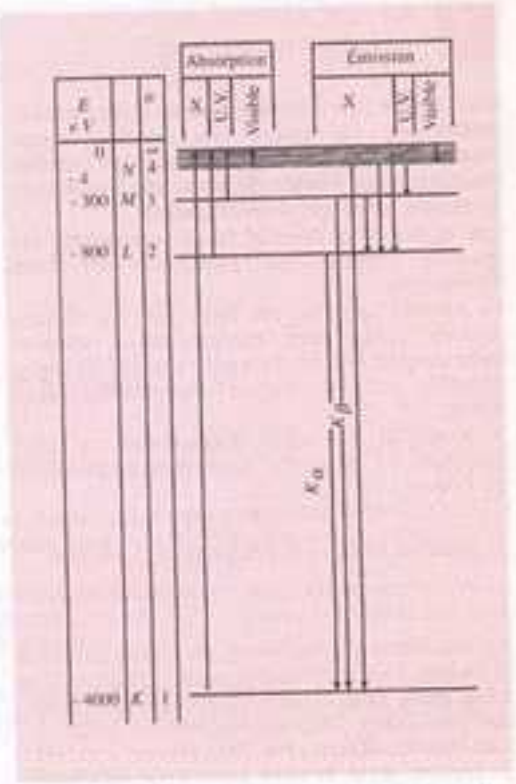


Fig. 23. *Niveaux d'énergie et transitions possibles pour le potassium. La transition $\nu_{L,K}$ ou raie K_α, libère une énergie de 3200 eV ce qui correspond à une longueur d'onde de 387 pm, domaine des rayons X.*

7. Spectres d'émission et d'absorption des noyaux

Le noyau de l'atome est constitué de protons et de neutrons dont les niveaux d'énergie sont eux aussi quantifiés. Mais le noyau étant beaucoup plus « solide » que l'atome, protons et neutrons ont des énergies de liaison environ un million de fois plus grandes que celles des électrons de l'atome.

Le puits de potentiel d'énergie de liaison du noyau est donc un million de fois plus profond que celui de l'atome, et les niveaux d'énergie permis d'autant plus espacés, de quelques MeV en général.

Les photons émis ou absorbés par des noyaux sont donc des photons γ de quelques MeV d'énergie. Comme pour les atomes, les spectres nucléaires sont des spectres de raies, en émission aussi bien qu'en absorption, mais situés dans le domaine des rayons γ.

8. L'effet Laser

Voir « Pour en savoir plus ».

7 APPLICATIONS A L'ASTROPHYSIQUE

Il est, pour l'instant, impossible d'aller expérimenter sur les étoiles (les satellites munis d'automates ne se posent que sur des planètes froides), aussi l'étude de leurs spectres est-elle le moyen privilégié d'investigation.

Les étoiles — et donc le Soleil — émettent des spectres continus qui présentent des raies d'absorption.

Le spectre continu est émis par les régions internes, comprimées, chaudes, et ce rayonnement continu est plus ou moins absorbé de façon sélective par les régions superficielles plus froides.

A partir de ces raies d'absorption on peut identifier les éléments composant la couronne de l'étoile.

1. Spectre continu d'émission des étoiles

Le rayonnement des étoiles est semblable à celui d'un gaz comprimé chaud.

Le maximum de luminosité du Soleil est dans le visible, c'est pourquoi il paraît « blanc ». Une autre étoile plus chaude (Rigel) paraîtra bleue, une plus froide (Betelgeuse) paraîtra rouge.

Les marins disent que les étoiles mentent : Betelgeuse dont le nom commence par un B, comme bleu, est rouge, et Rigel est bleue.

Les couleurs des étoiles correspondent à leurs températures de surface : 3 000 K pour Betelgeuse, 6 000 K pour le Soleil, 20 000 K pour Rigel.

Ces spectres continus d'émission présentent, outre des raies d'absorption, deux discontinuités d'absorption :

— les photons de $\lambda < 91$ nm sont très absorbés car ils peuvent ioniser l'hydrogène depuis son état fondamental;

— les photons de $\lambda < 364$ nm sont aussi absorbés car ils peuvent ioniser l'hydrogène depuis son premier état excité.

Ainsi des étoiles chaudes semblent opaques car les photons rayonnés par leur région centrale chaude, sont absorbés par leurs couches externes plus froides.

2. Spectre de raies d'absorption

• Le spectre de raies d'absorption d'une étoile renseigne sur sa composition, du moins sur la composition de ses couches superficielles, celles qui absorbent la lumière émise par sa région centrale. Si les raies de Balmer de l'hydrogène apparaissent, cela signe la présence de l'hydrogène. Mais la réciproque est fausse. L'absence de raies de Balmer dans le spectre d'une étoile ne signifie pas que l'hydrogène y soit absent, mais simplement qu'il ne s'y trouve pas sur son premier état excité.

Ceci dépend beaucoup de la température de l'étoile.

• L'hydrogène est l'élément composant principal des étoiles (à 90 %), et les raies de Balmer sont dans le visible, donc facilement observables, c'est pourquoi on les étudie tant. Ces raies de Balmer sont dues aux transitions de l'électron de l'hydrogène du premier état excité à un niveau supérieur. Mais pour que l'électron se trouve déjà sur ce premier état excité, il a fallu qu'il y soit porté par une énergie extérieure : l'énergie d'agitation thermique.

— Si l'étoile est froide (3 000 K) l'agitation thermique est insuffisante pour exciter l'hydrogène.

— Si l'étoile est chaude (8 000 K, type Soleil) cette excitation a lieu et l'étoile est visible.

— Si l'étoile est très chaude (20 000 K) l'apport d'énergie est tel que l'hydrogène est ionisé, il n'y a pas d'électrons situés au premier état excité d'énergie.

— Au cours de la vie de l'étoile sa température diminue. Sa visibilité, faible au début, augmente puis ensuite décroît.

• L'observation, plus difficile, du spectre U.V. permet toujours de déceler l'hydrogène par les raies de Lyman.

• L'intensité d'une raie d'absorption dépend donc :

— de l'abondance d'un élément;

— de la température de l'étoile.

L'observation de plusieurs raies permet de séparer les deux facteurs.

3. Spectre du Soleil, raies de Fraunhofer

Les premières observations de raies d'absorption dans le spectre des étoiles furent faites par J. Fraunhofer, en 1814, dans le spectre du Soleil. Ces raies font partie de la série de Balmer.

Le Soleil est une étoile peu chaude. On imagine qu'au-delà de sa couche superficielle relativement froide, il existe une seconde couche gazeuse : la chromosphère, diffuse, peu dense mais beaucoup plus chaude. Dans cette couche la proportion d'hydrogène, et d'hydrogène excité, est telle qu'elle crée une absorption aisément décelable (fig. 25).



Fig. 25. Spectre d'absorption du Soleil, avec les raies de Fraunhofer.

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATION

Décroissance radioactive

Exercice 1

En aspirant 1 000 m^3 d'air chargé de poussières à travers un filtre de papier qui les retient toutes, et en mesurant l'activité du filtre après cette opération, on a observé 74 désintégrations par seconde. Quelle est la radioactivité des poussières de l'air aspiré, exprimée en $Bq.m^{-3}$?

Exercice 2

L'abondance naturelle de $^{235}_{92}U$ est 0,72 % et celle de $^{238}_{92}U$ est 99,3 %. En supposant que dans le processus de formation d'élément les deux isotopes aient été formés avec une égale abondance, que peut-on conclure sur le temps auquel les éléments furent formés? Les périodes de $^{235}_{92}U$ et de $^{238}_{92}U$ sont respectivement $6,8 \times 10^8$ et $4,6 \times 10^9$ années.

* Exercice 3

Le nucléide radioactif $^{24}_{11}Na$ ($T = 14,8$ h) peut être produit par un bombardement neutronique du $^{23}_{11}Na$. Si la vitesse de production du $^{24}_{11}Na$ est de 10^6 s^{-1} et si le bombardement débute avec un échantillon neuf de $^{23}_{11}Na$, calculer :

1) L'activité maximum du $^{24}_{11}Na$ (en Bq) qui pourrait être obtenue.

2) Le temps nécessaire de bombardement pour produire 90 % de l'activité maximum.

3) Le nombre d'atomes radioactifs de $^{24}_{11}Na$ qui restent 3 heures après l'arrêt du bombardement 2).

Exercice 4

Un morceau de phosphore renfermant du phosphore $^{32}_{15}P$ radioactif β^-, a une activité de 8×10^8 $Bq.g^{-1}$.

1) Sachant que la période du $^{32}_{15}P$ est de 14,3 jours, calculer sa constante de désintégration, ainsi que le nombre de désintégrations par seconde et par gramme du $^{32}_{15}P$ pur. En déduire l'activité en $Bq.g^{-1}$ du $^{32}_{15}P$ pur.

2) Calculer la proportion de $^{32}_{15}P$ dans le morceau de phosphore.

* Exercice 5

Sachant que la masse de polonium 210 en équilibre radioactif avec une masse d'une tonne d'uranium 238 est égale à 74×10^{-6} g :

1) Calculer la période T de l'uranium 238 sachant que la période du polonium est de 139 jours.
(Il y a équilibre radioactif si le nombre d'atomes de polonium formés est égal au nombre d'atomes de polonium désintégrés pendant le même intervalle de temps.)

2) Calculer le pourcentage de polonium désintégré au bout de 30 jours.

Radioactivité α

Exercice 6

Étude de la désintégration spontanée du polonium.

Données :
Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ mol^{-1}.
Charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C.
M (He) = 4 $g.mol^{-1}$.
Numéro atomique, Z de quelques éléments :
He : $Z = 2$; Ra : $Z = 88$; Rn : $Z = 86$;
Po : $Z = 84$; Pb : $Z = 82$.

Le noyau de polonium $^{210}_{84}Po$ se désintègre spontanément, en donnant un nucléide et en émettant une particule α d'énergie cinétique 5,30 MeV.

1) Écrire l'équation de la réaction nucléaire en précisant le nom du nucléide formé, son nombre de charge et son nombre de masse.

2) Calculer la vitesse de la particule α émise.

3) La période du polonium 210 est de 138 jours. Calculer la proportion de polonium qui se désintègre par seconde et par gramme de polonium.

Exercice 7

Le radium $^{226}_{88}Ra$ est radioactif et émetteur α.

1) Écrire l'équation de la désintégration.

2) En utilisant la mécanique classique et en écrivant la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie, montrer que la particule α emporte la quasi-totalité de l'énergie libérée par la désintégration.

3) En admettant que chaque particule α émise a une énergie cinétique de 4,7 MeV, calculer, en joule, l'énergie libérée par la désintégration complète de 1 mg de radium. Quelle est la perte de masse correspondante? Calculer également le rapport entre la perte de masse et la masse de radium désintégré ($c = 300\,000$ $km.s^{-1}$; $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ mol^{-1}).

* Exercice 8

On étudie la désintégration radioactive du nucléide $^{238}_{92}U$.

1) L'uranium 238 subit plusieurs désintégrations successives : x désintégrations de type α et y désintégrations de type β^- et se transforme en $^{226}_{88}Ra$. Le radium 226, lui-même radioactif, conduit par plusieurs désintégrations successives à un isotope stable $^{206}_{82}Pb$, après avoir subi x' désintégrations de type α et y' désintégrations de type β^-. Déterminer x, y et x', y'.

2) La première désintégration de l'uranium est de type α et conduit à un noyau de thorium (Th). La masse du noyau de $^{238}_{92}U$ est 238,086 u, celle du noyau formé après désintégration 234,078 1 u et celle d'une particule α 4,002 6 u.

a) En admettant que toute l'énergie libérée au cours de la réaction nucléaire est transmise à la particule α sous forme d'énergie cinétique, calculer la valeur de la vitesse d'émission v des particules α en admettant qu'elles ne sont pas relativistes.

2. EXERCICES PROPOSES

b) La valeur trouvée justifie-t-elle l'emploi de la mécanique classique?

c) La détermination expérimentale de la vitesse des particules α montre qu'elle a en fait pour valeur :

$$v = 1,4 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}.$$

En déduire la longueur d'onde λ du rayonnement γ émis simultanément à la réaction nucléaire étudiée.

Données numériques : $1 \text{ u} = \frac{1}{6,02} \times 10^{-26}$ kg ;

constante de Planck : $h = 6,62 \times 10^{-34}$ J.s ;

célérité de la lumière dans le vide :

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}.$$

Exercice 9

Les nucléides suivants sont tous trois à la fois radioactifs α et β^- : $^{212}_{83}\text{Bi}$, $^{213}_{83}\text{Bi}$, $^{214}_{83}\text{Bi}$.

1) Écrire les équations-bilans nucléaires correspondantes.

2) Les descendants obtenus par radioactivité α sont radioactifs β^- et inversement ($\beta^- \rightarrow \alpha$). Écrire les équations-bilans.

3) Représenter ces transformations sur le diagramme $N = f(Z)$.

Radioactivité β^-

Exercice 10

La proportion, en masse, de potassium naturel dans le corps d'un adulte est en moyenne 0,22 %. Or le potassium naturel est un mélange de potassium 39 (93,1 %), de potassium 40 ($1,2 \times 10^{-2}$ %) et de potassium 41 (6,9 %).

Le seul qui n'est pas stable est l'isotope 40 qui présente la radioactivité β^-, sa période de désintégration étant $T = 1,3 \times 10^9$ années.

1) Écrire l'équation de désintégration β^- du potassium 40.

2) Calculer le nombre de désintégrations β^- par seconde, du fait de la présence de ce nucléide dans le corps d'un individu de masse $m = 80$ kg.

$$M(\text{K}) = 39 \text{ g.mol}^{-1}.$$

Exercice 11

Une ampoule de 2,57 cm^3 contenant du gaz tritium dans les conditions normales de température et de pression produit de la chaleur à raison de 0,8 J.h^{-1}.

La période du tritium est de 12,46 années et son spectre bêta a une énergie E_{max} de 19,4 keV. Calculer :

1) L'activité (en Bq) de l'échantillon de tritium.

2) Le rapport entre l'énergie moyenne et l'énergie maximale des électrons.

Exercice 12

En supposant qu'un noyau ^7_4Be est au repos avant qu'ait lieu une capture K, quelle vitesse (en km.s^{-1}) et quelle énergie (en eV) lui sont-elles communiquées après la capture K? On suppose que la masse au repos du neutrino est nulle. (La différence de masse atomique entre ^7_4Be et ^7_3Li est de 0,86 MeV.)

Exercice 13

La masse molaire de l'isotope $^{95}_{41}\text{Nb}$ est plus élevée que celle du $^{95}_{42}\text{Mo}$ de $0,995 \times 10^{-4}$ u ($1 \text{ u} = 931,5$ MeV).

La désintégration β^- du $^{95}_{41}\text{Nb}$ conduit à un état excité de 768 keV du $^{95}_{42}\text{Mo}$. Cet état excité se désintègre vers l'état fondamental en partie par conversion interne.

1) Représenter un diagramme de niveaux d'énergie montrant le schéma de désintégration.

2) Trouver le point maximum de l'énergie du spectre β et l'énergie de la conversion K (l'énergie de liaison d'un électron K du molybdène est de 20 keV).

3) Tracer le spectre β (nombre de coups en fonction de l'énergie), avec la raie de conversion (sans calcul).

* Exercice 14

Données : masses des atomes :

$^{24}_{11}\text{Na} = 23,990\,96$ u ; $^{24}\text{Mg} = 23,985\,04$ u ;

masse de l'électron $m_e = 5,486 \times 10^{-4}$ u ;

$$1 \text{ u} = 931 \text{ MeV}/c^2 ;$$

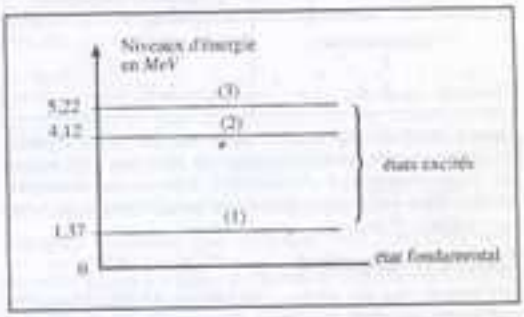
constante de Planck $h = 6,62 \times 10^{-34}$ J.s ;

charge élémentaire $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C.

Le nucléide $^{24}_{11}\text{Na}$ est radioactif β^- ; sa désintégration donne le nucléide ^{24}Mg.

1) Écrire l'équation-bilan de cette désintégration.

2) Le noyau fils peut apparaître sous différents états excités correspondant au diagramme des énergies :



a) Lorsque le noyau fils est produit dans son état fondamental, déterminer l'énergie cinétique maximale de l'électron émis (l'énergie cinétique de recul du noyau fils est négligeable). Il est très rare que l'électron possède cette énergie cinétique bien que le noyau fils soit produit dans son état fondamental, pourquoi?

b) Lorsque le noyau fils est produit dans l'état excité 2 :

— quelle est l'énergie cinétique maximale de l'électron émis?

— quelles sont les fréquences des photons qui peuvent être émis lors de la désexcitation du noyau fils?

A quelle partie du spectre électromagnétique appartiennent-elles?

2. EXERCICES PROPOSES

Radioactivité β^+

Exercice 15

En 1934, Irène et Frédéric Joliot-Curie ont créé le premier nucléide radioactif artificiel, en bombardant des noyaux d'aluminium 27 par des particules α.

1) Sachant que cette réaction nucléaire produit un neutron, trouver le nom du noyau formé, écrire l'équation nucléaire, préciser les règles utilisées pour l'établir.

3e période	$_{11}$Na	$_{12}$Mg	$_{13}$Al	$_{14}$Si	$_{15}$P	$_{16}$S	$_{17}$Cl

2) Le noyau radioactif formé se désintègre par rayonnement β^+ ; écrire l'équation de désintégration nucléaire; préciser les règles utilisées pour prévoir le noyau fils; donner le nom et les caractéristiques de l'autre particule émise, celle qui permet de respecter la loi de conservation de l'énergie.

3) Le noyau radioactif a une période de 2 min 30 s.

a) Donner la définition de la période d'un noyau radioactif.

b) Au bout de combien de temps les 7/8 des noyaux de l'échantillon initial sont-ils désintégrés?

Désexcitation γ

Exercice 16

Les trois niveaux les plus bas du noyau $^{23}_{12}$Mg ont les caractéristiques indiquées sur le tableau ci-dessous.

Niveau	Énergie d'excitation
Fondamental	0
1	2,13 MeV
2	3,30 MeV

Quand le noyau est produit dans son état de 3,3 MeV, on observe trois émissions gamma dans les processus de désexcitation qui s'ensuivent. Donner les énergies de ces trois émissions. Les montrer sur un diagramme de niveaux d'énergie.

* Exercice 17

Un atome, ou un noyau, de masse M se désexcite par émission d'un photon. L'énergie de désexcitation est ΔE.

1) Calculer la fréquence ν_0 de la radiation émise en supposant que le noyau reste immobile.

2) En réalité le noyau recule. En écrivant les équations de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie, calculer la fréquence ν de la radiation émise en posant $\nu = \nu_0 - \Delta\nu$. Calculer $\frac{\Delta\nu}{\nu}$.

- Faire l'application numérique

a) pour la raie jaune du sodium $^{23}_{11}$Na, $\lambda = 589$ nm;

b) pour l'émission γ de 113 keV émis par l'isotope $^{182}_{72}$Hf de l'hafnium.

- Cet écart relatif $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ est-il décelable?

Absorption des rayonnements

Exercice 18

1) Le gray (symbole Gy) est la dose d'irradiation reçue par 1 kg de matière lorsqu'il a absorbé une énergie de 1 J sous forme de rayonnements ionisants (alpha, bêta ou gamma).
Un irradiateur de puissance 15 kW fournit des électrons d'énergie cinétique 10 MeV.

a) Quelle masse de pommes de terre peut-il traiter en une heure pour qu'elles absorbent une dose globale de 10 kGy?

b) Combien d'électrons cet irradiateur fournit-il par seconde?

2) a) Le noyau de l'atome de cobalt 59 contient 5 neutrons de plus que de protons. Quel est le numéro atomique du cobalt?

b) Écrire l'équation de la réaction de production de cobalt 60 signalée dans le texte.

3) a) Le cobalt 60 est radioactif β^- et se transforme ainsi en nickel. Écrire la réaction de désintégration du cobalt 60.

b) Chaque année, un échantillon de cobalt 60 perd 12 % de son activité. Quelle est la période du cobalt 60?

c) Le noyau Ni formé après émission β^- par le cobalt au repos est pratiquement au repos. Il se trouve dans un état excité et libère successivement deux photons d'énergies 1,33 MeV et 1,17 MeV, tout en restant pratiquement au repos. De quelle masse de cobalt 60 faut-il disposer pour irradier par ces photons des pommes de terre dans les conditions de la première question?

Données :
masses des noyaux ^{60}Co : 59,919 010 u; ^{60}Ni : 59,915 439 u; masse de l'électron $0{,}548\,6 \times 10^{-3}$ u.

$1\ \text{u} = 931{,}5\ \text{MeV}/c^2$.

Exercice 19

1) On évalue à 35 eV l'énergie perdue en moyenne par une particule α à chaque fois qu'elle provoque l'ionisation par choc d'une des molécules de l'air. Le polonium 214 émet des particules dont l'énergie cinétique vaut 7,7 MeV.

a) Évaluer le nombre de chocs subis par cette particule avant qu'elle ne s'arrête.

b) La portée de cette particule dans l'air est de 5,5 cm. Combien de molécules rencontre-t-elle en moyenne pour un parcours de 1 cm?

2) La portée d'une particule d'énergie cinétique 7,7 MeV vaut 5,5 cm dans l'air, 3,6 µm dans le mica, 4,1 µm dans l'aluminium et 1,4 µm dans l'or.
Calculer, en MeV.mm^{-1}, le pouvoir d'arrêt de ces substances, c'est-à-dire l'énergie perdue par unité de longueur de trajet.

2. EXERCICES PROPOSES

Familles radioactives

Exercice 20

Le tableau ci-dessous donne quelques informations sur les trois familles radioactives naturelles :

Nucléide initial instable	$^{232}_{90}Th$	$^{238}_{92}U$	$^{235}_{92}U$
Nucléide final stable	$^{208}_{82}Pb$	$^{206}_{82}Pb$	$^{207}_{82}Pb$
Période (années)	$1,39 \times 10^{10}$	$4,51 \times 10^{9}$	$7,07 \times 10^{8}$

La période indiquée est celle du radionucléide initial, qui est le plus stable de la série. Les descendants sont radioactifs α ou β^-, parfois les deux.
Écrire les équations-bilans globales, pour chaque famille, en ne faisant intervenir que le nucléide initial, le nucléide final, et un certain nombre de particule α et β (ces nombres étant à déterminer pour chacune des familles).

Exercice 21

Dans la famille radioactive de l'uranium, on rencontre l'élément $^{210}_{84}Po$ (isotope du polonium) qui, par deux désintégrations successives, la première de type α, la seconde de type β^-, devient un isotope du bismuth (Bi).

1) Écrire les équations traduisant ces deux désintégrations (l'élément intermédiaire est un isotope du plomb).

2) On observe que la deuxième désintégration s'accompagne d'une autre émission dangereuse pour l'organisme humain. Préciser de quelle émission il s'agit et indiquer brièvement sa cause.

3) La famille de l'uranium débute à l'élément radioactif $^{238}_{92}U$ et se termine à l'élément stable $^{206}_{82}Pb$.
Quels sont les nombres de désintégrations α et de désintégrations β^- au cours de cette filiation?

Datation

Exercice 22

1) On illustre ici la méthode de datation au radiocarbone (Willard Libby, Prix Nobel 1960) utilisée en archéologie.
Le carbone 14 se forme dans la haute atmosphère par bombardement neutronique d'atomes d'azote. Avec une période de 5 730 ans, il redonne l'azote par radioactivité β. Écrire les équations correspondantes.

2) Dans l'atmosphère (CO_2), les eaux (CO_2 dissous), la matière vivante, la proportion $\frac{^{14}C}{^{12}C}$ a une valeur constante (de l'ordre de 10^{-12}). Comment interpréter cela?

3) Au contraire, ^{14}C disparaît sans retour de la matière organique morte. Cela étant, du charbon de bois recueilli dans la chambre funéraire d'un dolmen à Barnenez (Finistère) a été en 1969 l'objet de l'étude suivante : la combustion de quelques grammes de ce « charbon » a fourni 1,2 L de dioxyde de carbone (20 °C, pression atmosphérique), dont la radioactivité, suivie pendant 24 h au moyen d'un compteur, s'exprime par 2,95 coups par minute. À quantité égale, la radioactivité de CO_2 provenant de la combustion d'un bois actuel était de 6,02 coups.min^{-1}.
Déduire de ce qui précède l'époque d'occupation du tumulus de Barnenez.

4) Indiquer succintement des méthodes de datation utilisant d'autres isotopes ou nucléides.

* Exercice 23

Dans le monde vivant, les compositions isotopiques du strontium et du rubidium sont :

Sr : $^{84}_{38}Sr$: 0,56 %, $^{86}_{38}Sr$: 9,86 %, $^{87}_{38}Sr$: 7,00 %, $^{88}_{38}Sr$: 82,58 %.

Tous ces isotopes sont stables.

Rb : $^{85}_{37}Rb$: 72,17 %, $^{87}_{37}Rb$: 27,83 %.

Ce dernier isotope est radioactif.

1) La désintégration de l'isotope du rubidium $^{87}_{37}Rb$, donne l'isotope du strontium $^{87}_{38}Sr$, avec une période de $4,7 \times 10^{10}$ ans.
— De quel type de radioactivité s'agit-il?
— Donner l'expression de la loi de désintégration du $^{87}_{37}Rb$ ainsi que celle de la loi de formation du $^{87}_{38}Sr$, en fonction du temps.

2) Application
On trouve au Groenland une roche siliceuse (gneiss) qui contient un peu de strontium et de rubidium. Le principe de la datation des roches par le $^{87}_{37}Rb$ est le même que celui de la datation par le carbone 14.
Dans le monde vivant les rapports $\frac{^{87}_{37}Rb}{^{85}_{37}Rb}$, $\frac{^{87}_{38}Sr}{^{86}_{38}Sr}$ des nombres d'atomes des isotopes sont constants; on les note $\left(\frac{^{87}_{37}Rb}{^{85}_{37}Rb}\right)_0$, $\left(\frac{^{87}_{38}Sr}{^{86}_{38}Sr}\right)_0$. Dans le monde non vivant le $^{87}_{37}Rb$ ne se renouvelle plus. Le nombre d'atomes de $^{87}_{37}Rb$ et donc le rapport $\frac{^{87}_{37}Rb}{^{85}_{37}Rb}$ diminuent.
À la date $t = 0$ de formation du gneiss, le rapport $\frac{^{87}_{37}Rb}{^{85}_{37}Rb}$ égale celui du monde vivant (voir données).
On mesure à l'aide du spectrographe de masse les rapports des nombres d'atomes $\frac{^{87}_{38}Sr}{^{86}_{38}Sr}$ et $\frac{^{87}_{37}Rb}{^{86}_{38}Sr}$ dans le gneiss.
Exprimer le rapport $\frac{^{87}_{38}Sr}{^{86}_{38}Sr}$ en fonction du temps et des rapports $\left(\frac{^{87}_{38}Sr}{^{86}_{38}Sr}\right)_0$ et $\frac{^{87}_{37}Rb}{^{86}_{38}Sr}$. Montrer que les données appliquées à cette relation permettent de calculer l'âge du gneiss.

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES DESTINÉS A TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 24 — A.1.a.

Définir l'unité légale d'activité, de dose absorbée, d'équivalent biologique de dose.

Exercice 25 — A.1.b.

Quel est l'ordre de grandeur d'une dose absorbée bénigne? et d'une dangereuse?

Exercice 26 — A.1.c.

Donner la loi de variation de l'activité d'une source en fonction du temps.

Exercice 27 — A.2.a.

Un échantillon radioactif dans un réacteur nucléaire a la courbe de désintégration suivante :

Temps d'observation (min)	Activité (coups.s^{-1})	Temps d'observation (min)	Activité (coups.s^{-1})
0	366	10	129
1	289	15	99
2	241	20	78
3	210	25	63
4	189	30	50
5	173	35	42
6	161	40	35
7	151	45	30

Après plusieurs heures, on observe un bruit de fond constant de 15 coups.s^{-1}. Calculer les périodes et les activités initiales relatives des isotopes radioactifs contenus dans l'échantillon.

Exercice 28 — A.2.b.

Dessiner un agrandissement du diagramme $N = f(Z)$ au voisinage de la vallée de stabilité pour la zone :

$$75 \leqslant Z \leqslant 82.$$

Sur ce diagramme dessiner les flèches correspondant aux trois désintégrations α, β^-, β^+, des noyaux père : $^{192}_{78}$Pt pour l'α, $^{194}_{77}$Ir pour la β^-, $^{200}_{81}$Tl pour la β^+.

Échelle recommandée : 2 cm pour une unité en Z ou N.

Vérifier que les points représentatifs des noyaux fils sont alignés.

En déduire l'allure de la vallée de stabilité dans cette région.

— Quel est, selon ces points, le rapport N/Z pour les noyaux lourds?

— Calculer la pente de la « droite locale » $\dfrac{\Delta N}{\Delta Z}$.

— Cette droite représente la tangente à la courbe représentative de la vallée de stabilité $N = f(Z)$. Si l'on mathématise cette courbe par $N = Z + x.Z^2$ en déduire la valeur du coefficient x.

Exercice 29 — B.4

Une source radioactive est surmontée d'un absorbant fin pour enlever les rayons bêta. Le rayonnement gamma restant est absorbé par l'aluminium, avec les résultats suivants :

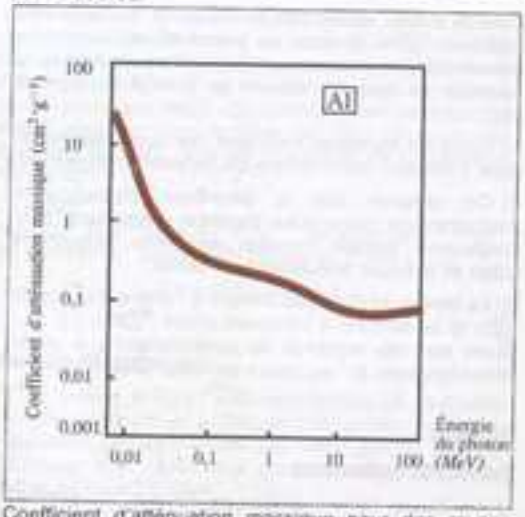
Épaisseur de l'écran (cm)	Activité détectée (coups.min^{-1})	Épaisseur de l'écran (cm)	Activité détectée (coups.min^{-1})
0	3510	1,0	1740
0,1	3180	1,5	1470
0,2	2870	2,0	1280
0,3	2630	3,0	1000
0,4	2430	4,0	790
0,5	2260	5,0	620
0,6	2120	6,0	510
0,7	2000	7,0	400

Analyser ces résultats et trouver :

1) le coefficient d'atténuation de chaque rayonnement gamma, ainsi que la valeur de l'épaisseur moitié correspondante;

2) l'énergie des rayons gamma (utiliser la figure);

3) l'intensité relative des rayonnements gamma émis par la source.



Coefficient d'atténuation massique pour des rayons gamma dans l'aluminium en fonction de l'énergie du rayonnement gamma. Pour obtenir les coefficients en cm^{-1}, multiplier par la masse volumique de l'aluminium = 2,70 g.cm^{-3}.

Exercice 30 — C.2.a.

Une source radioactive émet des rayons β de 1 MeV et des rayons γ de 1 MeV. Le compteur est sensible aux deux rayonnements. Comment séparer pratiquement les comptages β des comptages γ (voir la fiche expérimentale)? Détailler le mode opératoire.

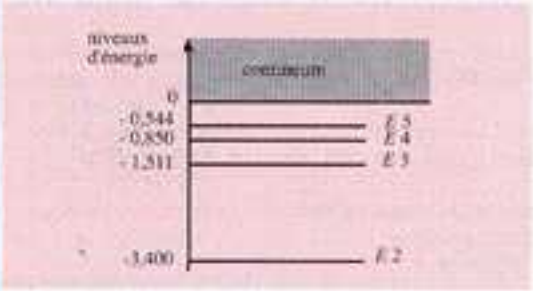
1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

La figure ci-dessous indique quelques-uns des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène. Le niveau fondamental (−13,606 eV) n'est pas représenté.

Les niveaux d'énergie sont indiqués en électronvolt.

$h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ J.s; $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C;
$c = 3 \times 10^{8}$ m.s^{-1}.



1) *a*) Établir la relation donnant pour un photon :

— sa fréquence (exprimée en térahertz) en fonction de son énergie (en électronvolt);

— sa longueur d'onde (en nanomètre) en fonction de son énergie (en électronvolt).

b) Déterminer les longueurs d'onde des photons émis lors des transitions entre les niveaux indiqués sur la figure. Préciser les couleurs éventuelles des radiations correspondantes (consulter la littérature...).

2) Un électron d'énergie cinétique égale à 2,00 eV vient heurter un atome d'hydrogène au repos, dont l'électron se trouve au niveau d'énergie E_2. Préciser quelles sont les radiations visibles que l'on pourra observer après cette collision.

3) Même question si le projectile est un photon d'énergie 2,00 eV.

SOLUTION

1) *a*) Un photon d'énergie 1 eV a une fréquence :

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{1{,}602 \times 10^{-19}}{6{,}626 \times 10^{-34}} = 2{,}418 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\nu_{(\text{THz})} \approx 242 E_{(\text{eV})}.$$

Cela revient à exprimer l'inverse de la constante de Planck en térahertz par électronvolt.

La longueur d'onde associée à ce photon vaut :

$$\lambda = \frac{h.c}{E} \approx \frac{6{,}62 \times 10^{-34} \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^{8}}{E},$$

d'où :

$$\lambda_{(\text{nm})} \approx \frac{1\,241}{E_{(\text{eV})}}.$$

b) L'émission des photons correspond à des transitions « descendantes » : passage d'un niveau supérieur à un niveau inférieur. On obtient ainsi :

— Les transitions vers le niveau 2 : *série de Balmer*

$3 \longrightarrow 2$, $\Delta E = 3{,}400 - 1{,}511 = 1{,}889$
soit : $\lambda = 657$ nm
c'est la série H_α, rouge.

$4 \longrightarrow 2$ $\lambda = 486$ nm, la série H_β, bleue;
$5 \longrightarrow 2$ $\lambda = 434$ nm, la série H_γ, indigo.

Les niveaux supérieurs ne sont pas mentionnés, sauf le niveau d'ionisation ($n = \infty$) qui donne la tête de la série.

$\infty \longrightarrow 2$, $\lambda = 365$ nm, qui est dans l'U.V.

— Les transitions vers le niveau 3 : *série de Paschen*

$4 \longrightarrow 3$ $\lambda = 1\,876$ nm infrarouge proche;
$5 \longrightarrow 3$ $\lambda = 1\,282$ nm infrarouge proche;
$\infty \longrightarrow 3$ $\lambda = 821$ nm infrarouge proche.

— Les transitions vers le niveau 4 : *série de Brackett*

$5 \longrightarrow 4$ $\lambda = 4\,052$ nm infrarouge;
$\infty \longrightarrow 4$ $\lambda = 1\,460$ nm infrarouge.

— Les transitions vers le niveau 5 : *série de Pfund*

$\infty \longrightarrow 5$ $\lambda = 2\,281$ nm infrarouge.

2) Lorsqu'un électron d'énergie 2 eV vient heurter l'électron de l'atome d'hydrogène alors que celui-ci est au niveau 3, cet électron atomique est déplacé et l'énergie de l'atome augmente. L'électron atomique peut monter au niveau 4, 5, ...

• 2 eV suffisent pour produire l'ionisation de l'atome à partir du niveau 3. Il y a même un excédent d'énergie de $2 - 1{,}511 = 0{,}489$ eV qui se partage entre les deux électrons. L'électron atomique se retrouve donc avec une énergie positive, là où il n'y a plus de quantification.

• Cette réaction est de loin la plus probable. Après le choc, l'atome se désexcite en émettant toutes ses raies de toutes ses séries, y compris un continuum d'émission après la tête de chaque série.
Par exemple pour la série de Balmer, la raie de plus courte longueur d'onde correspond à la transition $\infty \longrightarrow 2$, donc :

$$\Delta E = 3{,}4 \text{ eV}, \quad \text{soit} : \quad \lambda = 365 \text{ nm},$$

mais comme l'électron peut avoir (au maximum) 0,489 eV de plus, au-delà de cette dernière raie il y aura un *continuum* jusqu'à :

$$\lambda = \frac{1\,241}{(3{,}4 + 0{,}489)} = 319 \text{ nm}.$$

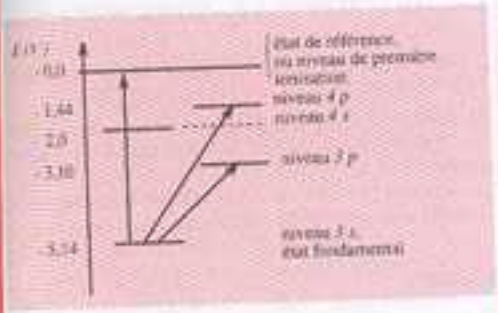
3) Un photon ne peut faire transiter un atome d'un niveau d'énergie à un autre que si son énergie est exactement égale à la différence des énergies de l'atome, car les raies d'absorption sont très fines. Donc un photon de 2 eV ne peut qu'ioniser l'atome et transmettre toute son énergie à l'électron atomique qui sera donc 0,489 eV au-dessus du niveau d'ionisation.
Ensuite l'atome se désexcitera comme décrit question 2).

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 2

Les atomes de sodium constituant la vapeur d'une ampoule, sont excités avec une radiation de fréquence ν.

Le diagramme simplifié des niveaux d'énergie de l'atome de sodium est donné ci-contre. Quelques transitions sont représentées.



1) a) Calculer la valeur ν_1 de ν pour laquelle il y a résonance.

b) Calculer la valeur ν_2 de ν pour laquelle il y a ionisation (effet photoélectrique).

2) Donner l'allure du spectre d'absorption du sodium si on l'excite avec une lumière dont le spectre est continu dans les domaines IR-visible-UV. Préciser en particulier ce qui se passe si $h.\nu > E_i$.

Donnée : $h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ J.s.

SOLUTION

1) a) Il y a résonance lorsque la radiation excitatrice cède à l'atome, l'énergie nécessaire pour l'amener de l'état fondamental au premier état excité.
Ici, cela correspond à la transition $3s \longrightarrow 3p$ d'où :

$$h.\nu_1 = E_{3p} - E_{3s}$$

$$\nu_1 = \frac{1{,}6 \times 10^{-19}}{6{,}62 \times 10^{-34}} \times (-3{,}10 - (-5{,}14))$$

$$= \mathbf{4{,}93 \times 10^{14}\ Hz.}$$

b) Il y a ionisation si la radiation excitatrice cède à l'atome, l'énergie $h.\nu_2$ nécessaire pour l'amener de l'état fondamental à l'état ionisé.

Ceci correspond à une transition $E_{3s} \longrightarrow E_i$ d'où :

$$h.\nu_2 = E_i - E_{3s}$$

$$\nu_2 = \frac{1{,}6 \times 10^{-19}}{6{,}62 \times 10^{-34}} \times (0 - (-5{,}14))$$

$$= \mathbf{1{,}242 \times 10^{15}\ Hz.}$$

2) Les transitions permises sont :

$E_{3s} \longrightarrow E_{3p}$ absorption de résonance ;
$E_{3s} \longrightarrow E_{4p}$ absorption de fluorescence ;
$E_{3s} \longrightarrow E_i$ absorption d'ionisation.

$E_{3s} \longrightarrow E > E_i$ correspond au système ion-électron **non lié** ; les énergies permises sont non quantifiées. E peut prendre toutes les valeurs, le spectre d'absorption est continu.

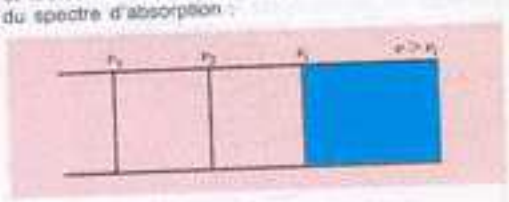
Les raies absorbées ont pour fréquences :

$\nu_1 = \mathbf{4{,}930 \times 10^{14}\ Hz}$ (voir 1) a)) ;

$\nu_2 = \dfrac{E_{4p} - E_{3s}}{h} = \mathbf{8{,}942 \times 10^{14}\ Hz}$;

$\nu_i = \mathbf{1{,}242 \times 10^{15}\ Hz}$ (voir 1) b)),

et toutes les radiations telles que $\nu > \nu_i$; d'où l'allure du spectre d'absorption :



EXERCICE 3

Pour la production de rayon X un cristal métallique est bombardé par des électrons d'énergie cinétique :

$$E_c = 120\ \text{keV}.$$

1) Calculer l'énergie totale, la quantité de mouvement, la vitesse de ces électrons.

2) Dans le spectre de rayon X émis, on distingue :
— un spectre continu pratiquement indépendant du métal cible, résultat du freinage des électrons par le métal ;
— un spectre de raies caractéristiques du métal.

a) Calculer l'énergie maximale des photons X du spectre continu, ainsi que la longueur d'onde minimale.

Vérifier la relation $\lambda_{(nm)} = \dfrac{1241}{E_c\,(eV)}$

b) Le métal constituant la cible est le cuivre ($Z = 29$). Son spectre de raies présente la raie $K\alpha$ pour laquelle :

$$\lambda = 0{,}1541\ \text{nm}.$$

Montrer que la loi de Moseley est vérifiée convenablement.

Données : $h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ J.s ; $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.
$m.c^2$ (électron) = 0,51 MeV.

SOLUTION

1) Accélérés sous tension $U = 120$ kV, les électrons initialement sans vitesse initiale acquièrent une énergie $E_c = 120$ keV.
Ces électrons possèdent une énergie totale :

$$E = E_c + E_0 = 0{,}12 + 0{,}51 = \mathbf{0{,}63\ MeV.}$$

Leur quantité de mouvement est telle que :

$$p^2.c^2 = E^2 - E_0^2 \qquad \text{d'où } p.c = \mathbf{0{,}37\ MeV.}$$

Leur vitesse vaut donc :

$$\beta = \frac{p.c}{E} = \mathbf{0{,}59}\ (v = 1{,}8 \times 10^8\ \text{m.s}^{-1}),$$

1. EXERCICES RESOLUS

2) a) • L'énergie des photons X émis ne peut dépasser l'énergie cinétique des électrons projectiles, soit $E = 120\ \text{keV} = 1{,}92 \times 10^{-14}$ J.
La conservation de l'énergie relativiste s'écrit en effet :

$$\underbrace{(E_c + E_0)_1}_{\text{électron}} + \underbrace{(E_c' + E_0')_1}_{\text{cible}} = \underbrace{(E_c + E_0)_2}_{\text{électron}} + \underbrace{(E_c' + E_0')_2}_{\text{cible}} + \underbrace{E_X}_{\text{photon}}.$$

Les énergies au repos avant et après l'interaction sont les mêmes et, si l'on suppose la cible pratiquement au repos $[(E_c')_1 = 0]$:

$$(E_c)_1 = (E_c)_2 + (E_c')_2 + E_X.$$

L'énergie du photon X est maximale si l'électron est stoppé $(E_c)_2 = 0$ et si la cible reste au repos $(E_c')_2 = 0$.

On a alors $E_{X_{max}} = E_{c_1}$,

soit : $$h \cdot \nu_{max} = \frac{h \cdot c}{\lambda_{min}} = E_{c_1},$$

$$\lambda_{min} = \frac{h \cdot c}{E_{c_1}}.$$

On en déduit :

$$\lambda_{min} = \frac{\dfrac{6{,}62 \times 10^{-34}}{1{,}6 \times 10^{-19}} \times 3 \times 10^{17}}{E_c},$$

d'où : $$\lambda_{min} = \frac{\mathbf{1\,241}}{E_c},$$

en exprimant les longueurs en nm, et les énergies en eV.

Application numérique :

$$\lambda_{min} = \frac{1\,241}{120 \times 10^3} = \mathbf{1{,}04 \times 10^{-2}\ nm}.$$

Pour les photons émis d'énergie inférieure, l'excédent d'énergie des électrons incidents se retrouve sous forme d'énergie cinétique de ces électrons et d'énergie cinétique désordonnée de la cible (échauffement).

b) La loi de Moseley est ici (raie K_α) :

$$h \cdot \nu = -13{,}6\,(Z-1)^2 \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right).$$

Avec $Z = 29$, on obtient $\nu_{K_\alpha} = \mathbf{1\,932 \times 10^{15}\ Hz}$, alors que l'expérience donne $\nu = \dfrac{3 \times 10^{17}}{0{,}154\,1} = 1\,946 \times 10^{15}$ Hz.

EXERCICE 4

A 200 °C, la pression dans une ampoule contenant de la vapeur d'atome de sodium est 10^5 Pa.

1) Donner un ordre de grandeur de la fraction des atomes qui se trouvent à chaque instant dans le premier état excité.
Pour cela la formule ci-après sera utilisée :

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\frac{E - E_0}{k \cdot T}},$$

où N est le nombre d'atomes dans le premier état excité d'énergie E et N_0 est le nombre d'atomes dans l'état fondamental d'énergie E_0 (la valeur $E = 0$ de l'énergie de l'atome correspond au niveau de première ionisation. Le système est constitué par l'ion et l'électron, situés à grande distance l'un de l'autre et immobiles).

Données :
$k = 1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J.K}^{-1}$; $T = 200$ °C ; $E = -3{,}03$ eV ; $E_0 = -5{,}14$ eV.

2) Calculer le nombre d'atomes (ordre de grandeur) dans l'état excité pour une ampoule de 50 cm³.

3) Justifier que dans ces conditions on puisse obtenir un spectre d'absorption et pas de spectre d'émission.

Donnée :
Le volume molaire du gaz parfait est, dans les conditions du problème : 3 880 L.

SOLUTION

1) *Fraction d'atomes excités*

• Calcul de l'exposant :

— au numérateur :

$$E - E_0 = (-3{,}03) - (-5{,}14) = 2{,}11\ \text{eV};$$

— au dénominateur : la température doit être exprimée en Kelvin : $T = 200 + 273$, donc :

$$k \cdot T = 1{,}38 \times 10^{-23} \times 473 = 6{,}53 \times 10^{-21}\ \text{J}$$

et cette quantité doit être transformée en eV pour la cohérence des unités, d'où :

$$k \cdot T = \frac{6{,}53 \times 10^{-21}}{1{,}6 \times 10^{-19}} = 4{,}08 \times 10^{-2}\ \text{eV}.$$

— L'exposant vaut donc : $\dfrac{2{,}11}{4{,}08 \times 10^{-2}} = 51{,}7$.

• La fraction d'atomes excités est :

$$\frac{N}{N_0} = e^{-51{,}7} = \mathbf{3{,}5 \times 10^{-23}}.$$

2) *Nombre d'atomes de sodium excités*

• Nombre d'atomes de sodium dans l'ampoule :
La donnée du volume molaire n'est pas nécessaire, il suffit d'écrire la relation de la thermodynamique :

$$P \cdot V = N_0 \cdot k \cdot T.$$

$P = 10^5$ Pa ; $V = 50 \times 10^{-6}$ m³ ; $T = 473$ K,

d'où : $N_0 = 0{,}76 \times 10^{19}$.

• Nombre d'atomes excités :

$$N = 0{,}76 \times 10^{19} \times 3{,}5 \times 10^{-23} = \mathbf{2{,}7 \times 10^{-4}}.$$

3) Ce nombre est bien inférieur à 1, donc **aucun** atome de sodium n'est excité à cette température, il ne peut y avoir émission de lumière dans ces conditions.

2. EXERCICES PROPOSÉS

EXERCICES D'APPLICATION

Spectres atomiques

Exercice 1

Les raies dont les fréquences ν_i (en Hz) sont données ci-après appartiennent au spectre d'émission d'un certain atome :

$\nu_1 = 24,677\,4 \times 10^{14}$ $\quad \nu_6 = 6,199\,37 \times 10^{14}$

$\nu_2 = 29,247\,3 \times 10^{14}$ $\quad \nu_7 = 6,997\,02 \times 10^{14}$

$\nu_3 = 30,846\,8 \times 10^{14}$ $\quad \nu_8 = 1,599\,45 \times 10^{14}$

$\nu_4 = 31,587\,2 \times 10^{14}$ $\quad \nu_9 = 2,339\,7 \times 10^{14}$

$\nu_5 = 4,569\,89 \times 10^{14}$ $\quad \nu_{10} = 0,740\,7 \times 10^{14}$

1) Trouver le plus d'exemples possibles illustrant le principe de recombinaison de Ritz, à savoir qu'une fréquence est égale à la différence de deux autres fréquences.

2) Dessiner un diagramme partiel des niveaux d'énergie qui contient les termes E_i ci-après :

$E_1 = -13,6$ eV $\quad E_4 = -0,85$ eV

$E_2 = -3,39$ eV $\quad E_5 = -0,54$ eV

$E_3 = -1,51$ eV

L'origine des énergies, $E = 0$, est toujours, par convention celle de l'atome ionisé (ion + électron très éloignés l'un de l'autre avec une vitesse nulle).

3) Toutes les fréquences données en 1) peuvent être obtenues à partir de la relation $h.\nu = E_i - E_j$? Vérifier ceci sur quelques exemples.

4) Trouver une expression générale pour les termes de la question 2). Quel est l'atome étudié?

5) Représenter les transitions entre deux niveaux d'énergie de l'atome considéré qui correspondent aux raies dont les fréquences sont données en 1).

Exercice 2

La plus courte longueur d'onde nécessaire pour ioniser le tungstène est 270 nm. Calculer l'énergie cinétique maximum E_{cm} des électrons éjectés du tungstène par des radiations de 170 nm.

Exercice 3

Le diagramme *a*) donne, de manière simplifiée, les niveaux d'énergie de l'atome de mercure (le niveau $E = 0$ correspond au niveau de 1re ionisation). Un certain nombre d'entre eux interviennent dans les transitions, qui correspondent aux raies des deux portions de spectres données figures b_1 et b_2. Les énergies correspondantes sont données en eV, les longueurs d'onde des raies émises en nm. (Elles sont écrites sur les lignes verticales.)

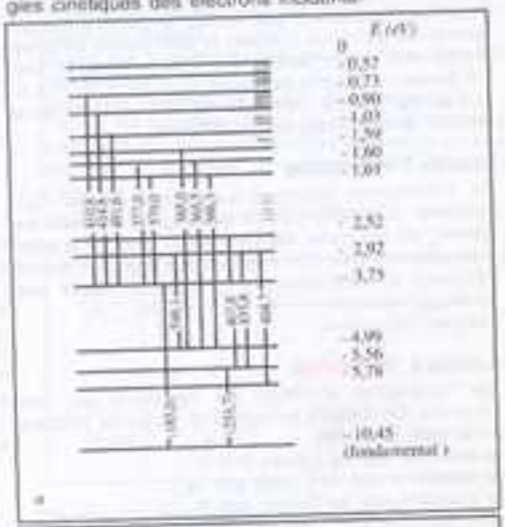
La vapeur de mercure contenue dans une ampoule est excitée par chocs électroniques soit avec des électrons d'énergie 8,7 eV, soit avec des électrons d'énergie 9,8 eV.

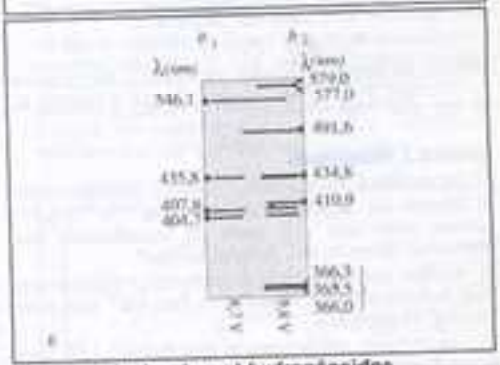
Les spectres d'émission dus à la désexcitation, sont représentées en b_1 et b_2.

1) Lire attentivement les figures *a*) et *b*).

2) Faire le bilan des raies excédentaires sur l'un des spectres.

3) Justifier les différences en comparant les énergies d'excitation des divers niveaux de l'atome aux énergies cinétiques des électrons incidents.





Atomes d'hydrogène et hydrogénoïdes

• Exercice 4

Les niveaux d'énergie quantifiés de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}$$

avec E_n en eV et n, nombre entier supérieur ou égal à 1.

1) Quelle est l'énergie d'ionisation d'un atome d'hydrogène?

2) Quelle est l'énergie cinétique minimale d'un électron capable de provoquer par choc l'excitation d'un atome d'hydrogène de son niveau fondamental ($n = 1$) à son premier niveau excité ($n = 2$)?

3) L'atome d'hydrogène précédemment excité revient à l'état fondamental ($n = 1$) avec émission d'une onde lumineuse. Quelle est sa longueur d'onde?

2. EXERCICES PROPOSES

4) Établir la relation littérale donnant la fréquence des ondes lumineuses émises lorsque des atomes d'hydrogène préalablement excités passent d'un état d'énergie caractérisé par $n > 2$, à l'état d'énergie caractérisé par $n = 2$. Calculer la plus grande longueur d'onde des ondes lumineuses émises dans ce cas.
On donne : constante de Planck, $h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ J.s ; charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C ; célérité de la lumière dans le vide, $c = 3 \times 10^{8}$ m.s^{-1}.

Exercice 5

De l'hydrogène atomique est bombardé par des électrons. L'émission de la raie H_α de la série de Balmer, est observée, mais les autres raies de la série n'apparaissent pas. Ces observations fixent les limites inférieure et supérieure de l'énergie cinétique des électrons incidents.
Calculer ces limites.

• Exercice 6

De l'hydrogène atomique est bombardé par des électrons. On mesure les nombres relatifs de photons émis dans trois raies :
la première raie de Lyman soit $N_{L,1}$;
la deuxième raie de Lyman soit $N_{L,2}$;
la première raie de Balmer soit $N_{B,1}$.
Ces nombres sont dans les rapports :

$$N_{L,1} : N_{L,2} : N_{B,1} = 6 : 1 : 2$$

Trouver les rapports entre les nombres C_n de collisions qui excitent les atomes sur les niveaux d'énergie E_n ($n = 2, 3, 4, \ldots$).

Exercice 7

1) Qu'appelle-t-on un atome ou un ion hydrogénoïde ?
2) Donner les structures des ions He^+, Li^{2+}, Be^{3+} (utiliser pour cela une table de classification des éléments). Sont-ils des hydrogénoïdes ?
3) Justifier que dans l'état fondamental, l'électron soit plus fortement lié au noyau dans l'ion He^+ que dans l'atome d'hydrogène.
4) Les énergies des atomes et ions H, He^+, Li^{2+} sont respectivement $-13{,}6$, $-54{,}4$, $-122{,}4$ eV dans leur état fondamental. Quelle relation simple existe entre ces valeurs ?
En déduire l'énergie de l'état fondamental de Be^{3+} ?
5) Quelle est la plus courte longueur d'onde des radiations émises par : He^+ ? Li^{2+} ?

Autres spectres

Exercice 8

La vapeur d'atome de lithium contenue dans une ampoule, à température ordinaire, est éclairée avec une radiation dont les photons ont une énergie E supérieure à l'énergie E_i de première ionisation du lithium.
On obtient l'ion Li^+, de vitesse v, et un électron de vitesse v'.

1) Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble ion-électron.
2) En fait l'ion Li^+, est pratiquement immobile. Calculer l'énergie cinétique de l'électron. Est-il relativiste ? Calculer sa vitesse.
3) Justifier que le spectre d'absorption du lithium dans son état d'énergie fondamental, présente une partie continue à partir d'une fréquence que l'on déterminera.

$E_i = 5{,}2$ eV $\quad E = 6{,}0$ eV.

• Exercice 9

Les rayons X sont obtenus en bombardant certains métaux par des électrons de grande énergie.
Calculer la tension minimale d'accélération d'électrons, de vitesse initiale nulle, nécessaire pour obtenir l'émission de la radiation $\lambda_P = 0{,}056\,8$ nm du palladium.

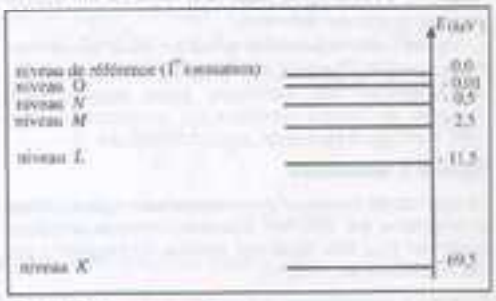
Exercice 10

On envoie sur un cristal de tungstène des électrons d'énergie cinétique 80 keV.

1) Ces électrons sont-ils relativistes ?

2) Le diagramme très simplifié ci-dessous donne des niveaux d'énergie permis de l'atome de tungstène. Les transitions entre deux de ces niveaux correspondent à l'émission de rayons X.
Représenter ces transitions.

3) Calculer les longueurs d'onde correspondantes.



• Exercice 11

La relation ci-dessous exprime la loi de Moseley :

$$\sqrt{\nu} = k\,(Z - a)$$

où ν est la fréquence de la raie X qui correspond une transition donnée ;
Z est le numéro atomique de l'atome étudié ;
k et a sont deux constantes.
Le tableau ci-dessous donne pour quelques métaux, les longueurs d'onde des raies X qui correspondent à la transition étudiée ($K\alpha$).

	Cr	Fe	Cu	Ag
λ (nm) de la raie $K\alpha$	0,229	0,194	0,154	0,056

1) Calculer k et a.

2. EXERCICES PROPOSES

2) La raie $K\alpha$ d'un métal a pour longueur d'onde $\lambda = 0{,}093$ nm. Quel est le numéro atomique de ce métal.

Données :
Célérité de la lumière dans le vide : 3×10^8 m.s^{-1}.
Z_{Ag} : 47. Z_{Cu} : 29. Z_{Fe} : 26. Z_{Cr} : 24.

Exercice 12

Un petit cristal de cuivre est bombardé par des photons dont la longueur d'onde associée est :

$$\lambda = 0{,}995 \text{ nm}.$$

Des électrons sont ainsi arrachés au métal.

1) A quel domaine des radiations électromagnétiques appartiennent les photons incidents? Quelle est leur énergie?

2) Les électrons ainsi émis, sont soumis à l'action d'un champ magnétique de valeur $B = 0{,}2$ mT et décrivent des cercles de rayon $R_1 = 51{,}5$ cm et $R_2 = 52{,}0$ cm.
Calculer les quantités de mouvement et les énergies cinétiques des deux familles d'électrons.

3) En déduire les valeurs de leurs énergies d'extraction.

Charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.
Masse de l'électron : $m_e c^2 = 0{,}51$ MeV.
Constante de Planck : $h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ J.s.

Exercice 13

Dans un tube de télévision des électrons d'énergie cinétique $E_c = 18$ keV, bombardent l'écran. Ils sont subitement décélérés et produisent des rayons X. Quelle est la longueur d'onde minimale des photons ainsi émis?

Spectre des molécules

Exercice 14

Spectre de vibration de HBr gazeux.

1) Le spectre de vibration-rotation (spectre de vibration avec structure fine de rotation) de HBr gazeux montre que la fréquence de la raie de vibration pure est $\nu = 7{,}65 \times 10^{13}$ Hz.
Calculer la variation d'énergie de la molécule lors de la transition correspondante.

2) Le spectre est facilement interprétable en utilisant le modèle de l'oscillateur harmonique. La liaison $A - B$ est modélisée par un ressort de raideur k (la solidité de la liaison croît si k croît). Dans des molécules telles que HCl, HBr, on peut admettre que le centre de masse est très proche de l'atome le plus lourd (Cl, Br). Dans la vibration cet atome est pratiquement immobile et seul l'atome le plus léger, ici l'hydrogène, assimilable à un point matériel de masse m, oscille.
Donner l'expression de la fréquence propre ν_0 de l'oscillateur.

3) L'énergie de vibration de cet oscillateur est quantifiée selon :

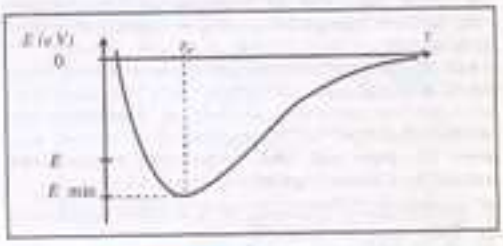
$$E_v = \left(v + \frac{1}{2}\right) . h . \nu_0$$

v étant un entier positif.
Montrer que la fréquence de la radiation absorbée ou émise lors de la transition $\Delta v = 1$ est égale à ν_0.

4) Calculer la constante de raideur k.

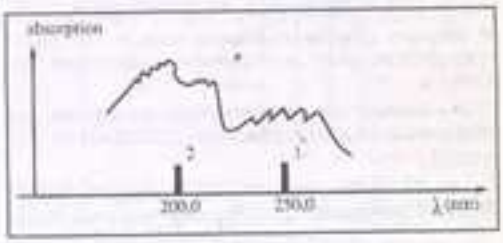
5) L'énergie potentielle E_p de la molécule varie en fonction de la distance r des deux atomes selon le graphique ci-après.
Quelle est la distance des deux atomes dans l'état fondamental?
Quelle est l'énergie de liaison de la molécule?
Décrire les transferts d'énergie cinétique en énergie potentielle et d'énergie potentielle en énergie cinétique lors de la vibration de la molécule dans l'état d'énergie E.

Données : $h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ J.s.



Exercice 15

La figure ci-dessous donne le spectre d'absorption du benzène, dans l'*U.V.* Les raies composant ce spectre correspondent à des transitions électroniques. (On remarque que par rapport à des spectres atomiques gazeux, les raies sont très élargies, cependant la structure fine de vibration est bien visible.)



Elles sont centrées sur les longueurs d'onde 200,0, 250,0 nm.

Les transitions correspondantes font passer la molécule de l'état fondamental à des états excités. Ces états font intervenir les électrons délocalisés de liaisons π : un électron π passe d'un état fondamental à un état excité où il est moins lié.

Calculer les énergies d'excitation électronique de la molécule de benzène qui correspondent au spectre ci-dessus.

La raie 1 correspond à la transition état fondamental → premier état excité.
La raie 2 correspond à la transition état fondamental → deuxième état excité.

2. EXERCICES PROPOSES

• Exercice 16

La partie continue du spectre d'émission de certaines étoiles commence exactement à la limite de la série de Balmer. On l'interprète ainsi :
Les ions H^+, pratiquement immobiles, capturent des électrons de vitesse v ($v \ll c$). Cette capture donne un atome d'hydrogène d'énergie E_p $\left(E_p = \frac{-13,6}{p^2}\ \text{eV}\right)$ et s'accompagne de l'émission d'une radiation de fréquence ν.

1) Donner l'expression de la variation d'énergie du système, ion H^+ + électron, lors de la capture.
On admet que l'énergie cinétique de l'atome dans l'état final est négligeable devant la variation d'énergie du système.
Il est rappelé que pour un atome, le niveau d'énergie $E = 0$ est par convention celui du système : ion + électron infiniment éloignés et immobiles. Les niveaux d'énergie qui correspondent à l'atome, système lié, dans son état fondamental et ses états excités sont donc négatifs.

2) Justifier que la fréquence de la radiation émise varie de façon continue quand v varie.
Donner la valeur de la fréquence minimale du spectre continu.

• Exercice 17

On constate que les spectres d'absorption des couches extérieures des étoiles contiennent :

a) aucune raie correspondant à la série de Balmer de l'hydrogène dans le cas des étoiles rouges, ou étoiles froides dont la température de surface est 3 000 K,

b) les raies décrites ci-dessus, dans le cas d'une étoile blanche dont la température de surface est 8 000 K,

c) pratiquement aucune de ces raies dans le cas des étoiles bleues ou étoiles chaudes (20 000 K).

Données :
— Les fréquences des raies de la série de Balmer vérifient l'expression :

$$h.\nu = +13,6\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

où les énergies sont exprimées en eV, avec $n > 2$.
— La formule ci-après sera utilisée :

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\frac{E - E_0}{kT}}$$

où N est le nombre d'atomes dans l'état d'énergie E, N_0 est le nombre d'atomes dans l'état d'énergie E_0;
$h = 6,62 \times 10^{-34}$ J.s.
$e = 1,6 \times 10^{-19}$ C.
$k = 1,38 \times 10^{-23}$ J.K^{-1}. T la température en K.
— Niveaux d'énergie permis de l'atome d'hydrogène : $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$, où n est un entier positif.

1) Quelle est l'énergie E_p des atomes d'hydrogène qui donnent lieu à un spectre d'absorption qui correspond à la série de Balmer?

2) Donner un ordre de grandeur de la fraction des atomes qui se trouvent à chaque instant dans l'état d'énergie E_p à 3 000 K et à 8 000 K.
En déduire une justification des résultats des alinéas a) et b).

3) Trouver une justification pour les résultats de l'alinéa c).

EXERCICES DESTINÉS A TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 18 A.1.a.

Définir la constante de Planck, l'énergie d'ionisation, l'état fondamental, le photon.

Exercice 19 A.1.b.

Quel est, en eV, l'ordre de grandeur des énergies des photons des radiations visibles?

Exercice 20 A.1.c.

Sous l'effet d'un apport d'énergie extérieur, l'énergie d'un atome passe d'un niveau E_1, à un niveau E_2, ensuite l'atome revient à son état initial en émettant des radiations.
Quelle est la fréquence de ces radiations en fonction de E_1 et E_2?

Exercice 21 A.2.a.

Pour obtenir un beau spectre d'absorption, vaut-il mieux utiliser le corps à analyser sous forme solide, liquide ou gazeuse? Justifier votre réponse.

Exercice 22 A.2.b.

Écrire la relation qui lie la longueur d'onde d'une radiation émise ou absorbée, et l'énergie de la transition correspondante dans l'atome. Cette relation sera donnée sous forme numérique pour :

λ en m,	E en J;
λ en nm,	E en eV.

Exercice 23 B.1.

Recherchez à quelle époque l'énergie atomique a été domestiquée par l'homme (cf. la guerre du feu, etc.)

Exercice 24 B.2.

Rédigez un des paragraphes de ce chapitre comme vous auriez aimé qu'il fut écrit et envoyez-le à l'éditeur.

Exercice 25 B.3.

Lire « Pour en savoir plus » sur le modèle de Bohr. Terminez les démonstrations et faites les calculs numériques de l'énergie d'ionisation E_0 de l'hydrogène et du « rayon » de cet atome.

Exercice 26 C.2.

Lire « Pour en savoir plus » sur le modèle de Bohr. Critiquez ce modèle, pourquoi est-il abandonné? Quelles phrases de ce texte sont en contradiction avec nos idées actuelles de l'atome développées au début du chapitre?

L'EFFET LASER

Un laser est constitué de deux parties : l'excitateur et le résonateur.

1) L'excitateur

• Le rubis est un cristal d'alumine, dans lequel sont inclus des ions chrome. Le chrome absorbe la lumière verte, c'est pourquoi le rubis paraît rouge, et les photons « verts » font monter les électrons du niveau de valence E_1, à un niveau supérieur E_3, vide. Il n'y a pas d'émission de lumière à partir de E_3, car il se produit alors des transitions extrêmement rapides dans lesquels une fraction de l'énergie de E_3, est transmise directement au cristal sous forme d'agitation thermique. Les électrons descendent, sans émettre, sur un niveau E_2, d'énergie inférieure. Cet état excité E_2, a un temps de vie exceptionnellement long : 10^{-3} s au lieu de 10^{-8} s habituel. Au fil du temps la source excitatrice verte va donc pomper les électrons du niveau 1, qui vont se retrouver au niveau 2 sans en redescendre (fig. 26).

Si un photon, d'énergie $E = E_2 - E_1$, inférieure à $E_3 - E_1$, donc incapable de créer la transition $1 \longrightarrow 3$ est alors absorbé, il peut initier la retombée collective de tous les électrons situés au niveau E_2.

Il y aura donc émission, au même instant, de plusieurs photons de même énergie $E_2 - E_1$, ce qui va créer un faisceau lumineux intense, de lumière cohérente, rouge (fig. 27).

Un de ces photons rouges va initier d'autres retombées et on obtient ainsi le faisceau laser.

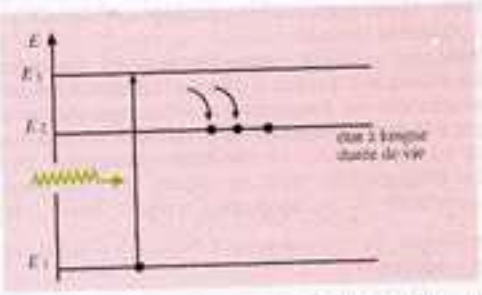


Fig. 26. *Le pompage optique qui vide l'état E_1 et peuple l'état E_2 à longue durée de vie.*

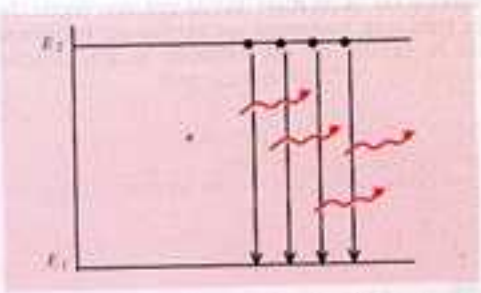


Fig. 27. *L'émission laser : tous les électrons, en attente sur l'état métastable E_2, descendent ensemble sur l'état fondamental E_1.*

• Il existe des lasers à gaz, par exemple :

— *Laser à hélium-néon* (fig. 28).

Dans le tube la pression de l'hélium est de 1 mm de mercure et celle du néon de 0,1 mm. Une haute fréquence auxiliaire excite les électrons. Les électrons de l'hélium, excités par la H.F. montent au niveau E_2. Or ce niveau E_2 de l'hélium est juste au-dessus du niveau à long temps de vie E_3, du néon. Il y a transfert d'énergie au cours des chocs, la faible différence d'énergie se transforme en énergie cinétique sans émission de radiations. L'atome d'hélium revient à l'état fondamental, tandis que le niveau E_3, du néon, se peuple. La transition $E_3 \longrightarrow E_2$ du néon donne l'émission laser à 632,8 nm (rouge).

— *Laser à azote.*

Ils émettent dans l'U.V. En plaçant une cuve de substance colorée sur le trajet du faisceau laser, on obtient une lumière laser de longueur d'onde voulue.

Les lasers à gaz émettent une lumière très cohérente, car le milieu émetteur (le gaz) est plus homogène que les mélanges de solides.

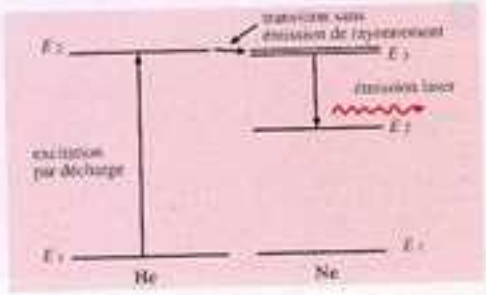


Fig. 28. *Le principe du laser hélium-néon.*

2) Le résonateur

Pour amplifier et concentrer l'énergie lumineuse, l'excitateur (le barreau de rubis ou le tube de gaz) est fermé par deux miroirs réfléchissants sur ses extrémités (fig. 29). Il s'établit, pour la lumière émise un régime d'ondes stationnaires entre les deux miroirs. Un tel système s'appelle une cavité « Perot-Fabry ».

Dans cette cavité, l'onde créée traverse le milieu en initiant d'autres émissions, elle se réfléchit sur l'un des miroirs et retraverse le milieu; il y a donc un gain d'émission lumineuse due à la cavité.

Pour que la lumière produite sorte, un des miroirs d'extrémité est semi réfléchissant, son pouvoir de transmission est de l'ordre de 1 à 10 %. C'est cette lumière sortante qui constitue le faisceau laser.

Vue de la cavité, une fraction de l'énergie lumineuse est perdue à chaque réflexion sur ce miroir, elle est compensée par l'énergie produite par l'émission stimulée de l'onde qui oscille. La cavité agit comme un oscillateur entretenu.

La longueur du laser (quelques cm) est bien supérieure à la longueur d'onde émise, la condition de stationnarité $\left(d = k.\frac{\lambda}{2}\right)$ n'est donc pas sévère.

En fait le laser ne peut fonctionner que pour les trajets de lumière à l'intérieur de la cavité qui correspondent à des incidences normales sur les miroirs car si ce n'est pas le cas une partie de la puissance lumineuse est perdue sur les bords de la cavité, ce qui explique la très grande directivité du faisceau émergent.

3) Intérêt pratique

La caractéristique des lasers est de fournir une lumière unidirectionnelle, intense et cohérente (fig. 30).

On peut obtenir des puissances instantanées très élevées en faisant fonctionner le laser en impulsions. L'énergie mise en réserve par l'inversion de population au niveau E_2, est déversée d'un seul coup pendant une durée extrêmement brève. On obtient des puissances lumineuses instantanées supérieures au Mégawatt pendant la durée de l'impulsion.



Fig. 30

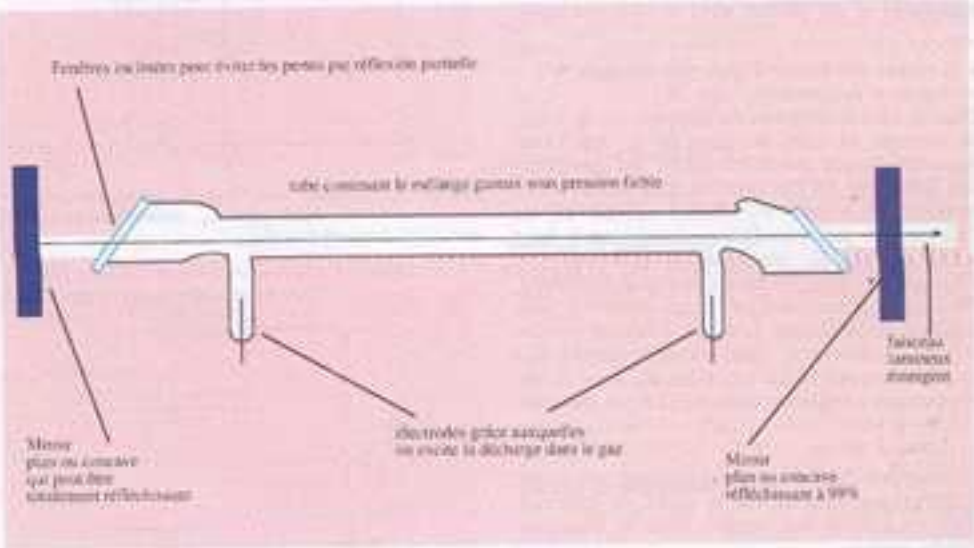


Fig. 29. *Schéma d'un laser à gaz.*

LE MODELE HISTORIQUE DE BOHR

En 1913 la mécanique quantique n'était pas inventée. A la suite des expériences de Rutherford (voir chapitre 17) qui montraient que l'atome était constitué d'un noyau entouré d'électrons, N. Bohr, pour ses calculs de l'atome, imagina que l'électron tournait autour du noyau, en une trajectoire circulaire, comme une planète autour du Soleil.
Le début des calculs est identique à celui des satellites.

— L'électron, qui décrit un cercle de rayon r est attiré par le noyau, de numéro atomique Z, par la force électrique :

$$-\frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}.\frac{Z.e.e}{r^2}.$$

Si l'orbite est stable, cette force d'attraction est équilibrée par la force centrifuge $\frac{m.v^2}{r}$:

$$\frac{m.v^2}{r}-\frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}.\frac{Z.e^2}{r^2}=0. \qquad (1)$$

— L'énergie de l'électron est la somme de son énergie cinétique : $\frac{1}{2}m.v^2$ et de l'énergie potentielle d'attraction électrique :

$$\frac{-1}{4\pi.\varepsilon_0}.\frac{Z.e^2}{r}$$

L'énergie de l'électron est donc :

$$E=\frac{1}{2}m.v^2-\frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}.\frac{Z.e^2}{r}. \qquad (2)$$

La combinaison des formules (1) et (2) donne :

$$E=-\frac{1}{2}m.v^2=-\frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}.\frac{Z.e^2}{2r}. \qquad (3)$$

Cette énergie est négative, c'est l'énergie de liaison électron-noyau, que l'on appelle **énergie de l'atome** (fig. 31).

— N. Bohr a postulé qu'il existait une suite d'orbites stables de rayons définis, donc une suite de niveaux d'énergie stables E_n pour l'atome, et que la condition de stabilité était que la différence entre les énergies des niveaux, devait être reliée à la fréquence de rotation de l'électron par la relation :

$$E_n-E_{(n-1)}=h.\nu_n. \qquad (4)$$

— La période de rotation de l'électron sur une orbite de rayon r est $T=\frac{2\pi.r}{v}$. La fréquence ν est donc : $\nu=\frac{v}{2\pi.r}$.

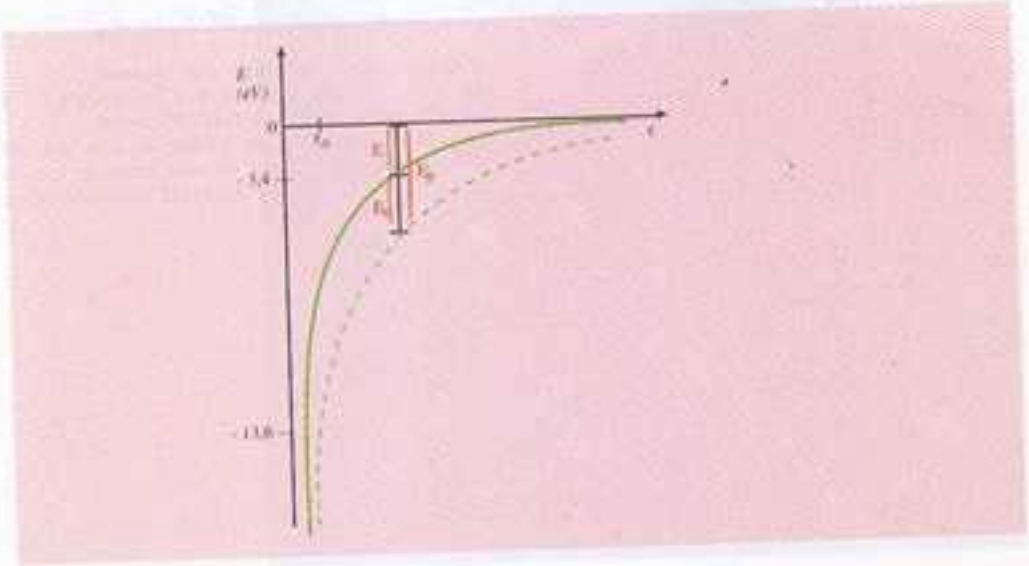


Fig. 31. Évolution de l'énergie potentielle électron-noyau, de l'énergie cinétique de l'électron, de l'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène en fonction de la distance électron-noyau.

Or, d'après la relation (3) :

$$v=\sqrt{\frac{-2E}{m}} \quad \text{et} \quad r=-\frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}.\frac{Z.e^2}{2E},$$

donc :

$$v=\frac{1}{2\pi}.\sqrt{\frac{-2E}{m}}.\frac{(-4\pi.\varepsilon_0).2E}{Z.e^2}=\frac{(4\pi.\varepsilon_0)(-2E)^{\frac{1}{2}}}{2\pi.\sqrt{m}.Z.e^2},$$

d'où la relation de quantification :

$$E_n-E_{n-1}=\frac{h.(4\pi.\varepsilon_0)(-2E)^{\frac{1}{2}}}{2\pi.\sqrt{m}.Z.e^2}.$$

Pour les grandes valeurs de n, c'est-à-dire pour des orbites lointaines, la quantité E_n-E_{n-1} est approximativement assimilable à la dérivée $\frac{dE_n}{dn}$, donc :

$$\frac{dE_n}{dn}=C^{te}.(-2E_n)^{\frac{1}{2}}$$

dont la solution est :

$$E_n=-\frac{1}{2(C^{te})^2.n^2},$$

soit :

$$E_n=-\frac{2\pi^2.m.e^4.Z^2}{(4\pi.\varepsilon_0)^2.h^2}.\frac{1}{n^2}=E_0.Z^2.\frac{1}{n^2}. \quad (5)$$

La quantité :

$$E_0=-\frac{2\pi^2.m.e^4}{(4\pi.\varepsilon_0)^2.h^2}$$

est l'énergie pour $Z=1$ et $n=1$, c'est donc celle du premier niveau de l'hydrogène.

L'application numérique donne :

$$E_0=-13{,}6 \text{ eV}.$$

• Pour l'atome d'hydrogène $Z=1$, on retrouve la formule classique :

$$E_n=-13{,}6\frac{1}{n^2}.$$

• Pour les autres atomes on retrouve la dépendance en Z^2 qui conduit à la loi de Moseley.

• Le rayon de l'atome d'hydrogène se calcule par la relation (3) en faisant $Z=1$:

$$E_1=-\frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{2r}=-13{,}6 \text{ eV},$$

d'où : $r=50$ pm.

• Pour les autres atomes, les rayons sont de l'ordre de 100 pm, la variation de r en fonction de Z n'est que très grossière.

• La vitesse de l'électron est donnée par la relation (3) :

$$E=-E_0=-\frac{1}{2}m.v^2=-\frac{1}{2}(m.c^2).\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

d'où : $$\frac{1}{2}\times(0{,}5\times10^6).\left(\frac{v}{c}\right)^2=13{,}6,$$

$$v=\frac{c}{137},$$

l'électron, dans ce modèle n'est pas relativiste.

• Ce modèle d'électron planétaire, qui donne de bons résultats pour les niveaux d'énergie de liaison des atomes est quasi abandonné.

• La différence des ordres de grandeur des périodes de révolution de l'électron et de la Terre montre la faiblesse de la comparaison des deux phénomènes.

Durée d'un tour :

— pour la Terre : 1 an;

— pour l'électron : $T=\frac{2\pi.r}{v}=10^{-16}$ s.

L'électron fait 10^{16} tours par seconde.

La Terre, depuis le début de l'ère solaire il y a 10 milliards d'années a fait 10^{10} tours.

L'électron fait donc un million de fois plus de tours autour du noyau en une seconde que la Terre n'en a fait autour du Soleil depuis le début de notre ère!

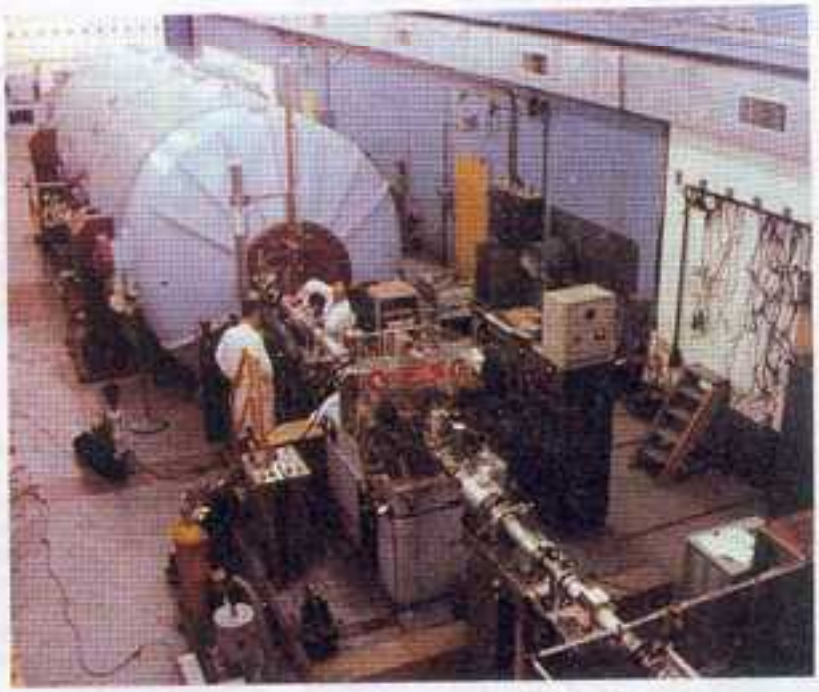
17 Le noyau atomique

1 Caractéristiques du noyau.

2 Physique du noyau.

3 Stabilité et solidité des noyaux.

4 Énergie de liaison d'un noyau.



Accélérateur de recherche nucléaire type Van de Graaf de Saclay.
Le gros cylindre bleuté est l'enceinte sous pression qui contient l'accélérateur électrostatique. Il a environ 15 m de long.
Ces accélérateurs sont particulièrement stables et précis. C'est en grande partie grâce à eux que l'on a découvert l'existence d'un grand nombre d'états excités dans les noyaux.

Exemples :

L'hydrogène possède trois isotopes : (fig. 1)

$^{1}_{1}H$ $^{2}_{1}H$ $^{3}_{1}H$.

$^{1}_{1}H$, est l'hydrogène ordinaire, c'est le plus abondant : 99,99 %. Son noyau est constitué d'un proton seul.

$^{2}_{1}H$, est l'« hydrogène lourd », le deutérium, d'abondance 0,015 %. Son noyau est constitué d'un proton et d'un neutron.

$^{3}_{1}H$, est un hydrogène encore plus lourd, le « tritium ». Il est instable : sa période est de 10 ans. Son noyau est composé d'un proton et de deux neutrons.

Le carbone possède 7 isotopes :

$^{10}_{6}C$ $^{11}_{6}C$ $^{12}_{6}C$ $^{13}_{6}C$ $^{14}_{6}C$ $^{15}_{6}C$ $^{16}_{6}C$.

Parmi ceux-ci, deux sont stables :

le $^{12}_{6}C$, de proportion 98,89 % et le $^{13}_{6}C$, de proportion 1,11 %, et un de ses isotopes instables, le $^{14}_{6}C$, a une période très longue ($1{,}8 \times 10^{12}$ s).

A eux trois ils constituent le carbone ordinaire.

A ces isotopes naturels s'ajoutent les isotopes artificiels, créés en laboratoire pour les besoins de la médecine ou de la recherche, ils sont **instables.**

Pour 109 éléments chimiques connus, il existe plus de 325 nucléides stables et plus de 1 200 nucléides instables, radioactifs, qui sont les isotopes de ces 109 éléments.

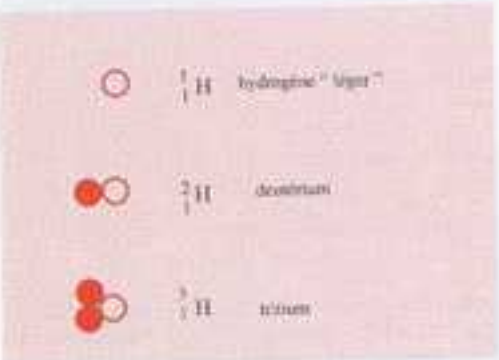


Fig. 1. *La constitution nucléaire des trois isotopes de l'hydrogène.*
○ : proton
● : neutron

2 PHYSIQUE DU NOYAU

1. Dimensions

Le fait que le noyau ait une dimension très faible par rapport à la dimension de l'atome a été mise en évidence en 1909-1911 par l'expérience de E. Rutherford (voir Pour en savoir plus). Le noyau est sphérique. Il semble que la matière nucléaire soit incompressible et que dans le noyau, les nucléons soient au contact les uns des autres. Le volume d'un noyau est donc proportionnel à son nombre de nucléons, A.

• *Pour un nucléon*
Le nucléon est sphérique. Ce qui, pour un nucléon de rayon R_0, conduit à un volume V_0, égal à : $V_0 = \frac{4}{3}\pi . R_0^3$.

• *Pour un noyau*
Si R est son rayon, son volume V est égal à :

$$V = \frac{4}{3}\pi . R^3.$$

Par ailleurs, ce volume V est aussi égal à : $V = A . V_0$ donc : $\frac{4}{3}\pi . R^3 = A . \frac{4}{3}\pi . R_0^3$,

ce qui conduit à : $R = R_0 . A^{1/3}$.

C'est une loi approchée, car bien qu'ils soient jointifs, il existe entre les nucléons sphériques des interstices vides. Le volume du noyau est donc légèrement supérieur à $A . V_0$. C'est pour tenir compte de cet effet que le coefficient R_0 de la formule $R = R_0 . A^{1/3}$ est pris légèrement supérieur au rayon d'un nucléon.
En pratique R_0 est choisi égal à 1,2 fm.

La variation de rayon d'un noyau à l'autre, en fonction du nombre de masse A, est faible, comparée à la variation de A puisqu'elle varie comme $A^{1/3}$.
Exemples :
Pour l'hydrogène : $^{1}_{1}H$,

$$A = 1 \quad \text{et} \quad R = R_0 = 1{,}2 \text{ fm}.$$

Pour l'uranium : $^{238}_{92}U$:

$$A = 238 \quad \text{et} \quad R = 238^{1/3} . R_0 = 6{,}2 \times 1{,}2 = 7{,}5 \text{ fm}.$$

Remarque :
Si le rayon d'un noyau peut être chiffré avec précision, il n'en est pas de même pour le rayon de l'atome, car le nuage électronique est mal délimité, les électrons n'ayant pas de trajectoires déterminées autour du noyau. Néanmoins les atomes ont pratiquement même rayon : 100 pm (50 pm pour le plus petit : celui de l'hydrogène).
Le rayon du noyau est donc 10 000 fois plus petit que le rayon de l'atome. C'est l'équivalent d'une bille au centre d'un stade.

2. Masse du noyau, et unité de masse

Les nucléons étant environ 2000 fois plus massifs que les électrons, le noyau porte pratiquement toute la masse de l'atome.
Pour exprimer la masse des noyaux, il s'est avéré commode de définir une nouvelle unité bien adaptée aux ordres de grandeur, intermédiaire entre l'unité du SI (le kg) et l'unité utilisée pour les particules (le MeV/c^2) : c'est **l'unité de masse atomique : u.**

> L'unité de masse atomique est égale au douzième de la masse de l'atome de l'isotope 12 du carbone.

La correspondance entre ces trois unités de masse, d'après la définition de u, est :

$$1\ \text{u} = 1{,}661 \times 10^{-27}\ \text{kg}$$
$$= 931{,}5\ \text{MeV}/c^2.$$

Le tableau ci-dessous, présente les masses du proton, du neutron, et de l'électron, exprimées en ces trois unités : kg, u, MeV/c^2 :

	u	kg	MeV/c^2
u	1	$1{,}660\,54 \times 10^{-27}$	931,502
proton	1,007 276	$1{,}672\,62 \times 10^{-27}$	938,280
neutron	1,008 665	$1{,}674\,93 \times 10^{-27}$	939,573
électron	0,000 548	$9{,}109\,39 \times 10^{-31}$	0,511

Les masses des noyaux, exprimées en unité de masse atomique, sont ainsi très voisines de leur nombre de nucléons A (d'où le nom de nombre de masse).

Exemples :

Pour $^{35}_{17}\text{Cl}$, $M = 35$ u.

Pour $^{16}_{8}\text{O}$, $M = 16$ u.

3. Masse volumique des noyaux

Le noyau porte pratiquement toute la masse de l'atome sous un volume très réduit.
La masse volumique ρ d'un noyau est indépendante de ce noyau, car sa masse est proportionnelle à A et son volume aussi. Elle est donc très proche de celle d'un nucléon :

$$\rho = \frac{\text{masse d'un nucléon}}{\text{volume d'un nucléon}} = \frac{1{,}67 \times 10^{-27}}{\frac{4}{3}\pi.(1{,}2 \times 10^{-15})^3}$$

$$= 2{,}3 \times 10^{17}\ \text{kg.m}^{-3},$$

soit plus de 200 000 t par mm^3!!

La matière nucléaire est donc extraordinairement dense. Cette énorme masse volumique est inobservable en général, puisque, aux énergies ordinaires, le cortège électronique est infranchissable. Lorsqu'ils s'agencent en composés macroscopiques, les atomes se lient en respectant le volume du nuage électronique et la masse du noyau semble répartie sur le volume de l'atome, ce qui donne la masse volumique « ordinaire ». Mais en réalité cette masse est concentrée.

De telles masses volumiques se rencontrent à grande échelle lors de l'évolution des étoiles lourdes, celles dont la masse est supérieure à deux fois celle du Soleil. Lorsque tous les atomes légers de l'étoile : hydrogène, hélium, ..., mis en mouvement par l'attraction gravitationnelle ont été consumés (par réactions nucléaires) et sont devenus des atomes assez lourds (fer...), l'attraction gravitationnelle agit encore et est si forte, qu'elle comprime les atomes, écrasant les électrons sur les noyaux.

Les électrons, à la rencontre des protons du noyau (ils sont en nombre égal), les transforment en neutrons, l'étoile n'est plus constituée que de neutrons jointifs (ceux déjà présents dans ses noyaux et ceux nouvellement formés par l'écrasement), d'où son nom : **étoile à neutrons.**

Toute l'étoile a donc la masse volumique de la matière nucléaire. Sa masse (supérieure à deux fois celle du Soleil) se trouve concentrée en une sphère de 10 km de rayon.

4. Masse volumique d'énergie

A toute masse correspond une énergie de masse. Un noyau de masse M, possède une énergie de masse, $M.c^2$. Si sa masse volumique est ρ, sa masse volumique d'énergie est :

$$\rho_E = \rho.c^2.$$

Exprimé en unités du SI, ceci donne :

$$\rho_E = 2 \times 10^{34}\ \text{J.m}^{-3}\ (!)$$

ou, en unités plus « nucléaires » :

$$\rho_E = 130\ \text{MeV.fm}^{-3}.$$

Par comparaison, c'est une telle masse volumique d'énergie qui existait, selon la théorie du « big bang », une seconde après l'explosion qui a donné naissance à notre monde, quand notre univers, alors en expansion rapide, avait un rayon égal à la moitié de celui de notre Soleil actuel.

3 STABILITÉ ET SOLIDITÉ DES NOYAUX

La plupart des nucléides créés au laboratoire sont instables et se désintègrent, mais les nucléides naturels, qui ont été créés à la naissance de notre Terre il y a 10 milliards d'années peuvent être considérés comme **stables.** De plus ils sont « **solides** » (au sens ordinaire), car pour les casser, il faut mettre en jeu des énergies de rupture environ un million de fois plus importantes que pour briser un atome.

1. Conditions de stabilité

a) La vallée de la stabilité

L'observation de la composition en protons et neutrons des nucléides naturels, montre que **le nombre de neutron ($A-Z$) est sensiblement égal au nombre de protons, Z.**

Sur la courbe de $A-Z$ en fonction de Z, les points représentatifs des nucléides stables se placent tous au voisinage d'une courbe régulière, confondue avec la première bissectrice en son début. Cette courbe présente une certaine épaisseur car, pour Z fixé, autour de l'ordonnée $A-Z=Z$, il y a quelques points à plus ou moins quelques unités à cause des isotopes.

C'est pourquoi cette courbe épaisse est appelée : « **vallée** » **de la stabilité** (fig. 2).

Les noyaux radioactifs s'en écartent, à cause de leur excès ou défaut de neutrons, mais relativement peu.

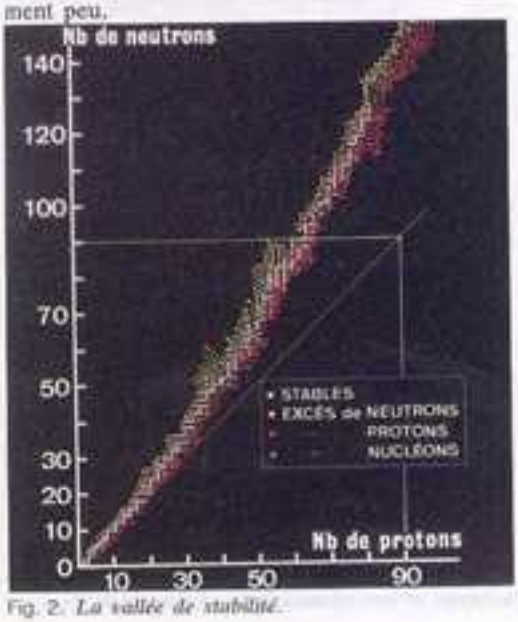


Fig. 2. *La vallée de stabilité.*

b) La loi : $A-Z=Z$, pour les noyaux légers

Dans le noyau où règne la force nucléaire, la structure la plus stable est : **une paire de protons plus une paire de neutrons.**
Ceci est un effet quantique, hors programme. Cette composition :

2 protons + 2 neutrons

est celle du noyau d'hélium, un des nucléides les plus solides qui soit. Pour les noyaux légers, soit pour $Z<20$ leur composition est un multiple de ceci et, le nombre de neutrons est égal au nombre de protons, à un près.

c) La loi : $A-Z>Z$, pour les noyaux lourds

Sur la courbe, le nuage de points de la vallée de stabilité s'élève régulièrement au-dessus de la première bissectrice pour $Z>20$. Ceci est dû au fait que la répulsion électrique entre protons dans le noyau, qui est peu importante comparée à l'attraction nucléaire mais qui néanmoins existe, affaiblit la liaison. Cet effet est d'autant plus grand que les noyaux possèdent plus de protons. Pour que les noyaux lourds soient stables, il faut qu'ils possèdent un léger excès de neutrons. Ces neutrons s'intercalant entre les protons, diminuent la répulsion électrique et stabilisent ainsi le noyau.

Le rapport $\frac{A-Z}{Z}$ augmente ainsi régulièrement avec Z, et tend vers 1,5 pour les noyaux les plus lourds.

2. « Solidité » du noyau

a) Force nucléaire et énergie de liaison

Proton et neutron sont composés essentiellement chacun de trois quarks. En eux, ces quarks sont maintenus ensemble par l'interaction forte. L'interaction forte a une portée — une influence — légèrement supérieure au rayon du nucléon et c'est ce résidu de force entre quarks, extérieur au nucléon, qui est le responsable de la cohésion du noyau.
Pour simplifier le langage, ce résidu est appelé : **force nucléaire.**
A cette force nucléaire d'attraction correspond une énergie potentielle de liaison pour chaque nucléon, qui peut se schématiser ainsi :

• *Pour un neutron*
Si un neutron est au voisinage d'un noyau, tant que ce neutron est à une distance supérieure à quelques fm, l'attraction nucléaire est nulle et le neutron est libre. Si la distance devient inférieure au rayon du noyau, la force nucléaire agit brusquement et fortement, et le neutron est lié. L'énergie potentielle de liaison (comptée négativement puisqu'il s'agit d'une attraction) se représente par un « puits de potentiel » profond, à parois verticales, qui piège le neutron.

Vu du neutron, la profondeur de ce puits est de l'ordre de quelques MeV (8 MeV en moyenne) (fig. 3).
C'est cette énergie qu'il faudrait fournir par une action extérieure telle qu'un choc sur le noyau, pour libérer le neutron.
Cette énergie de liaison, d'environ 8 MeV entraîne pour le neutron une perte de masse de 8 MeV/c^2. Le **neutron lié** a donc une masse **inférieure** à celle du **neutron libre.**
Le neutron libre est instable, il se désintègre (voir chapitre 18, paragraphe 3) en trois particules : proton + électron + antineutrino. Ceci est énergétiquement possible, car la masse du neutron libre est supérieure de 0,8 MeV/c^2 à la somme des masses de ces trois particules. Ceci n'est plus vrai pour le neutron lié, dont la masse est inférieure; c'est pourquoi le neutron lié ne se désintègre pas.

• *Pour un proton*
Au voisinage d'un noyau, un proton parce qu'il est électriquement chargé, est repoussé par les autres protons du noyau, mais, s'il possède une énergie cinétique suffisante pour vaincre cette répulsion, dès qu'il arrive au voisinage du noyau, la force d'attraction nucléaire agit et l'emporte de beaucoup sur la répulsion électrique. Son énergie de liaison (la profondeur du puits de potentiel nucléaire) est quasi identique, bien que légèrement moindre, à celle du neutron (fig. 4).

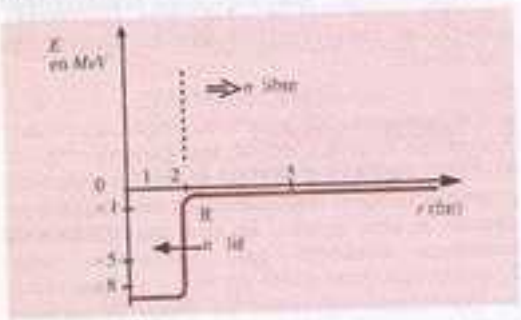


Fig. 3. *Puits de potentiel nucléaire du neutron.*

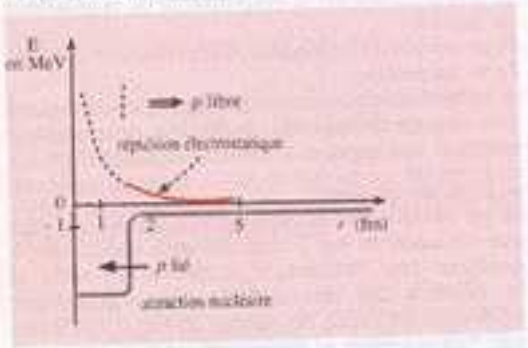


Fig. 4. *Puits de potentiel du proton.*
Le rayon R est donné par la relation $R = R_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}$ et la profondeur du puits est donnée par le diagramme de la figure 7.

b) Structure interne du noyau
La figure 5 présente le bilan énergétique d'un noyau. Le niveau zéro de l'énergie est celui des nucléons libres. A partir de ce zéro le bilan d'énergie des nucléons est :

— une énergie potentielle d'attraction nucléaire (comptée négativement);

— une légère énergie cinétique d'agitation des nucléons dans le noyau (donc positive), qui élève un peu les niveaux.

Dans le noyau, les nucléons n'ont pas tous même énergie, ils se placent sur des niveaux régulièrement espacés. L'intervalle d'énergie entre les niveaux est de 0,1 à 1 MeV; cet intervalle est d'autant plus réduit que le noyau est plus lourd. Les nucléons occupent ces niveaux par groupement de 2 protons + 2 neutrons, autant que faire se peut. Entre le dernier niveau occupé et le niveau zéro, il existe des niveaux d'énergie disponibles, normalement vides. Ces niveaux peuvent être temporairement occupés si le noyau est excité — donc possède un excédent d'énergie — après une désintégration ou un choc.

Si tel est le cas, le noyau se désexcite ensuite : les nucléons redescendent vers les niveaux d'énergie inférieurs et l'énergie excédentaire est évacuée par émission γ. Un photon γ est émis à chaque saut d'énergie d'un nucléon (fig. 6).

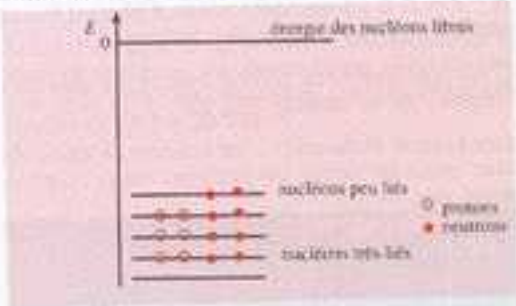


Fig. 5. *Structure interne du noyau.*

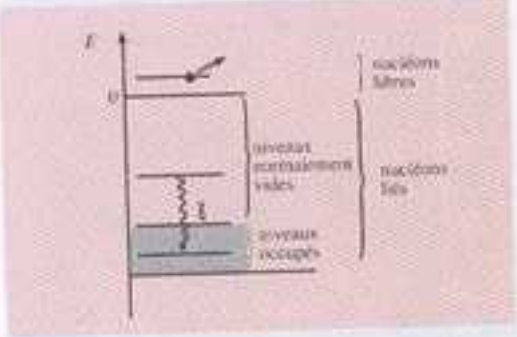


Fig. 6. *Les différents niveaux d'énergie possibles dans le noyau, et leur retour à l'état fondamental.*

4 ÉNERGIE DE LIAISON D'UN NOYAU

1. Calcul de l'énergie de liaison

Chaque nucléon est lié au noyau. La force nucléaire est attractive. Son travail, pour lier chaque nucléon au noyau, se traduit pour chacun d'eux par une énergie potentielle de liaison négative, le fameux puits dans lequel chacun est piégé.

La somme des énergies potentielles de liaison de chacun des nucléons représente l'énergie de liaison du noyau. C'est une énergie de formation, qui fut libérée lors de la création du noyau. C'est elle qu'il faudrait maintenant apporter au noyau formé pour le briser, de façon que chacun de ses nucléons se retrouve libre. Cette énergie de liaison est importante (les noyaux sont très solides), si importante, que sa correspondance en **perte de masse** est de l'ordre de 1 % de la masse du noyau, et est de ce fait parfaitement mesurable par des mesures de masse.

L'énergie de masse d'un noyau ${}^{A}_{Z}X$ est donc :

$$M \cdot c^2 = \left[(A-Z) \cdot m_n \cdot c^2 + Z \cdot m_p \cdot c^2\right] + \Delta E.$$

ΔE représente l'énergie de liaison du noyau (elle est comptée négativement selon les conventions de la thermodynamique).

2. Variation d'un noyau à l'autre

ΔE doit être approximativement proportionnelle à A, le nombre de nucléons, puisque chaque nucléon apporte sa contribution de l'ordre de quelques MeV. $\Delta E/A$ devrait donc être constant pour tous les noyaux et de l'ordre de -8 MeV. Mais certains noyaux sont plus solides que d'autres et ceci se visualise sur le diagramme de $\Delta E/A$ en fonction de A (fig. 7).

Les points représentatifs des nucléides solides se placent sur un diagramme d'une façon relativement régulière. Le diagramme présente un minimum très plat vers $A = 60$, ce qui correspond aux nucléides les plus solides.

• La remontée rapide du diagramme pour les *nucléides légers, qui* sont donc moins solides, est due à un « effet de bords » : les nucléons situés à la surface du noyau sont moins liés que ceux situés au centre, car ils ne subissent l'attraction nucléaire que du côté intérieur.

Certains points sont situés nettement en dessous de la moyenne, ils représentent des nucléides exceptionnellement solides : ce sont ceux qui correspondent à des structures multiples de 2 protons + 2 neutrons :

${}^{4}_{2}He \quad {}^{12}_{6}C \quad {}^{16}_{8}O \quad {}^{40}_{20}Ca \ldots$

• La remontée lente pour les noyaux lourds est due à la répulsion électrique entre protons.

3. Perspectives énergétiques

Les points situés au plus bas du diagramme représentent les nucléides qui possèdent la plus grande énergie de liaison par nucléon. Ce sont des noyaux mi-lourds.

Les noyaux légers et lourds présentent une énergie de liaison par nucléon plus faible aussi, si, par des réactions nucléaires appropriées :

— deux noyaux légers sont soudés pour former un noyau plus lourd, l'énergie de liaison par nucléon est plus importante et lors de la réaction, il y a libération d'énergie vers l'extérieur : c'est la **fusion nucléaire**;

— un noyau lourd est brisé en deux noyaux mi-lourds, l'énergie de liaison par nucléon est plus importante et il y a libération d'énergie vers l'extérieur : c'est la **fission nucléaire** (fig. 8).

Ces mécanismes et leurs applications sont détaillées chapitre 19.

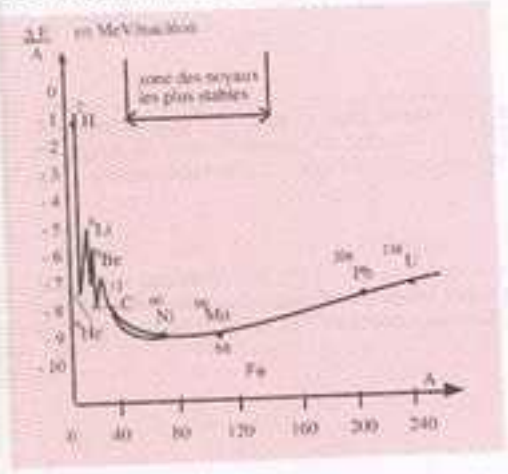


Fig. 7. *Diagramme de l'énergie de liaison par nucléon en fonction du nombre de masse.*

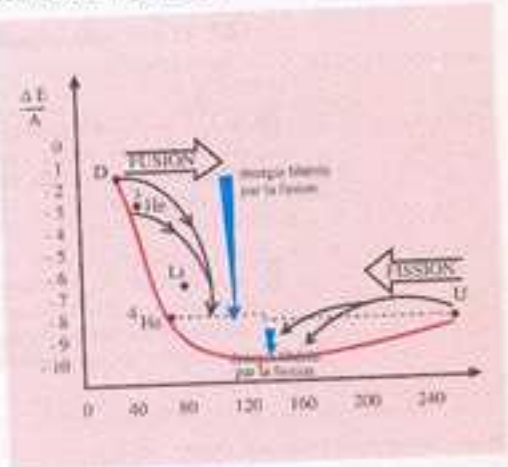


Fig. 8. *Principe de libération d'énergie par fusion et par fission.*

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

• Un noyau, représenté par le symbole, ${}^{A}_{Z}X$, est composé de Z protons et de $A-Z$ neutrons.

• Les dimensions des noyaux sont de l'ordre de quelques fm (10^{-15} m). Le rayon d'un noyau varie comme :

$$R = R_0 . A^{\frac{1}{3}}, \quad \text{avec } R_0 = 1{,}2 \text{ fm}.$$

• L'énergie de liaison nucléaire est un million de fois plus forte que l'énergie de liaison atomique. En moyenne elle est de −8 MeV par nucléon.
Pour un noyau, la somme des énergies de liaison de ses nucléons, ΔE, est telle, qu'elle entraîne une «perte de masse» sensible, selon la relation :

$$\Delta E = \Delta m . c^2.$$

ΔE et Δm sont négatifs.

• Les nucléides stables ont légèrement plus de neutrons que de protons. Dans le graphique $N = f(Z)$, la courbe de stabilité suit la première bissectrice au début, puis se situe régulièrement au-dessus ensuite pour les noyaux lourds.

• L'énergie de liaison par nucléon, $\Delta E/A$, n'est pas la même pour tous les noyaux, les noyaux **les plus solides sont ceux du milieu du tableau de classification périodique.** Les noyaux légers et les noyaux lourds sont nettement moins solides.

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

Un noyau contient A nucléons. La masse d'un nucléon est $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg, et le rayon R du noyau est donné par la relation :

$$R = R_0 . A^{\frac{1}{3}}, \quad \text{avec} \quad R_0 = 1{,}2 \times 10^{-15} \text{ m}.$$

Calculer

1) la masse volumique ρ du noyau;

2) sa masse volumique d'énergie ρ_E, en unités du SI et en unités pratiques (MeV, fm).

Le volume V d'une sphère de rayon R est égal à $V = \frac{4}{3}\pi . R^3$; $c = 3 \times 10^8$ m.s^{-1}.

SOLUTION

1) La masse volumique est le quotient de la masse par le volume :

— la masse d'un noyau de A nucléons est : $M = A . m$;

— son volume est :

$$V = \frac{4}{3}\pi . R^3 = \frac{4}{3}\pi . (R_0 . A^{\frac{1}{3}})^3 = \frac{4}{3}\pi . R_0^3 . A$$

D'où :

$$\rho = \frac{A . m}{\frac{4}{3}\pi . R_0^3 . A} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi . R_0^3}$$

Cette masse volumique est indépendante de A donc du noyau. Elle est légèrement inférieure à celle d'un nucléon seul, car, comme expliqué dans le cours, R_0 est pris légèrement supérieur au rayon d'un nucléon.

$$\rho = \frac{1{,}67 \times 10^{-27}}{\frac{4}{3}\pi . (1{,}2 \times 10^{-15})^3} = 2{,}3 \times 10^{17}$$

$$\boldsymbol{\rho = 2{,}3 \times 10^{17} \text{ kg.m}^{-3}}.$$

2) L'énergie de masse d'une masse m est égale à $m . c^2$, d'où la masse volumique d'énergie :

$$\rho_E = \frac{m . c^2}{\frac{4}{3}\pi . R_0^3} = \rho . c^2$$

$$= 2{,}3 \times 10^{17} \times (3 \times 10^8)^2 = \boldsymbol{2{,}07 \times 10^{34} \text{ J.m}^{-3}}.$$

Pour exprimer ce résultat en unités pratiques, il faut diviser ce nombre par $1{,}6 \times 10^{-19}$ pour obtenir des eV, puis par 10^6 pour passer au MeV, et par $(10^{15})^3$ pour transformer les m^{-3} en fm^{-3}.

$$\rho_E = \frac{2{,}07 \times 10^{34}}{1{,}6 \times 10^{-19} \times 10^6 \times (10^{15})^3} = 130$$

$$\boldsymbol{\rho_E = 130 \text{ MeV.fm}^{-3}}.$$

EXERCICE 2

Une cible de cuivre ($^{64}_{29}$Cu) est bombardée par des protons d'énergie cinétique $E_c = 7$ MeV.

1) Donner l'expression E_p de l'énergie potentielle électrique répulsive entre un proton et un noyau.

2) En écrivant la conservation de l'énergie mécanique pour le proton, en déduire la distance minimum d'approche du proton au noyau de cuivre.

3) Le proton heurte-t-il le noyau?
(Le rayon d'un noyau est donné par la relation $R = 1{,}2A^{\frac{1}{3}}$ fm.)

4) Mêmes questions quand le noyau de cuivre est bombardé par des neutrons de 2 MeV d'énergie cinétique.

$e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C; $\frac{1}{4\pi . \varepsilon_0} = 9 \times 10^9$.

SOLUTION

1) L'énergie potentielle répulsive électrique est :

$$E_p = \frac{1}{4\pi . \varepsilon_0} . \frac{q . q'}{r}$$

$q = e$: la charge élémentaire,

$q' = Z . e$: la charge du noyau de cuivre,

$$E_p = \frac{1}{4\pi . \varepsilon_0} . \frac{Z . e^2}{r} = 9 \times 10^9 \times (1{,}6 \times 10^{-19})^2 . \frac{Z}{r}$$

Pour la suite du calcul il est commode d'exprimer E_p en MeV et r en fm :

$$E_p = (9 \times 10^9) \times (1{,}6 \times 10^{-19}) \times \frac{10^{15}}{10^6} . \frac{Z}{r}$$

$$\boldsymbol{E_p = 1{,}44 \frac{Z}{r}} \qquad (E_p \text{ en MeV, } r \text{ en fm}).$$

Pour le cuivre $Z = 29$.

2) L'énergie mécanique du proton incident est :

$$E = E_c + E_p$$

L'énergie potentielle, nulle quand le proton est au loin, augmente au fur et à mesure qu'il s'approche du noyau. L'énergie cinétique diminue donc puis s'annule : le proton, repoussé, retourne en arrière.
La distance minimum d'approche est celle pour laquelle l'énergie cinétique est nulle.
Au loin : $E_p = 0$ donc $E = E_c = 7$ MeV.
Au point de rebroussement : $E_c = 0$, donc : $E = E_p$.
La distance minimum d'approche a, est donc telle que :

$$1{,}44 \times \frac{29}{a} = 7, \quad \text{soit :} \quad \boldsymbol{a = 6 \text{ fm}}.$$

3) Le rayon du noyau de cuivre est

$$R = 1{,}2 \times (64)^{\frac{1}{3}} = \boldsymbol{4{,}8 \text{ fm}}.$$

Le proton projectile n'atteint pas le noyau de cuivre.

4) Le neutron ne portant pas de charge électrique, il n'y a pas de répulsion et quelle que soit son énergie cinétique le neutron atteint le noyau.

2. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 3

On se propose d'étudier les niveaux d'énergie des noyaux par bombardement neutronique. On dispose d'un faisceau de neutrons de 14,00 MeV d'énergie cinétique. On place dans ce faisceau une cible faite du matériau à étudier, et on détecte les neutrons déviés à 90° de leur direction initiale.
Cette détection se fait par deux compteurs, distants de $L = 3$ m, et l'on mesure le « temps de vol » des neutrons entre ces deux compteurs.
Pour la suite on adoptera les notations suivantes :

M : masse du noyau cible ;
m : masse du neutron ;
p_i, E_i : quantité de mouvement et énergie cinétique du neutron incident ;
p'_1, E'_1 : mêmes quantités, du neutron après le choc ;
p'_2, E'_2 : mêmes quantités, du noyau cible après le choc.

Le matériau étudié est le plomb : $^{208}_{82}Pb$.

A) *Étude du choc élastique*

1) Les neutrons incidents sont-ils relativistes ?

2) Par conservation de la quantité de mouvement, en déduire une relation simple entre p_i, p'_1 et p'_2.

3) Écrire la relation de conservation de l'énergie.

4) Par combinaison des deux relations, en déduire E'_1 en fonction de E_i.
Calculer sa valeur, en MeV.

5) Calculer la vitesse $\left(\text{sous la forme } \beta = \frac{v}{c}\right)$ des neutrons diffusés.

6) Calculer t_0, leur temps de vol entre les deux compteurs, en nanoseconde (ns).

B) *Étude du choc inélastique*
Tous les chocs ne sont pas élastiques et le noyau de plomb peut se trouver, après choc, en un état excité Pb^*. La réaction est donc :

$$n + Pb \longrightarrow n + Pb^*$$

Soit δ_1, l'énergie d'excitation du noyau de plomb. Pour le premier niveau excité, $\delta_1 = 2,6$ MeV.

1) Vérifier que la relation trouvée en A) 2) entre les quantités de mouvement est toujours valable.

2) Écrire la relation de conservation de l'énergie.

3) Par combinaison des deux relations en déduire E'_1 en fonction de E_i.
Calculer sa valeur, en MeV.

4) Calculer le β des neutrons diffusés.

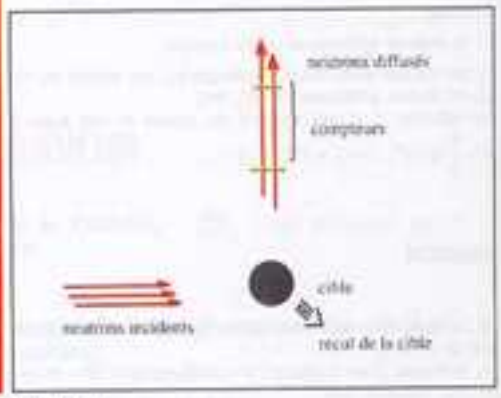
5) Calculer t_1, leur temps de vol.

6) Calculer $\Delta_1 t = t_0 - t_1$.

C) *Étude des états excités du plomb*
On observe que les mesures du temps de vol des neutrons diffusés présentent trois pics correspondant à des temps t_0, t_1 et t_2.

Le retard $\Delta_2 t = t_2 - t_0$ est égal à 8,1 ns. En déduire l'énergie d'excitation δ_2 du second niveau excité du plomb.

Données : $M_{(plomb)} = 208 m_{(neutron)}$;
$m \cdot c^2_{(neutron)} = 939,6$ MeV.



SOLUTION

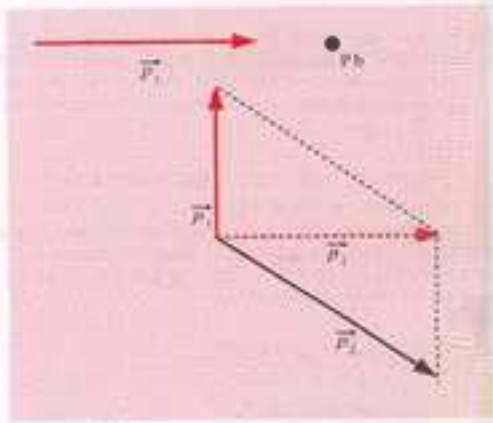
A) *Choc élastique*

1) Les neutrons incidents ne sont pas relativistes car $E_i \ll m \cdot c^2$.
Les neutrons diffusés non plus, car $E'_1 < E_i$, et le plomb après choc encore moins, car il est très lourd.
Les expressions de la mécanique newtonienne sont applicables on pourra donc utiliser :

$$E = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} = \frac{1}{2} m \cdot c^2 \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

2) Le graphique des quantités de mouvement est éloquent :

$$(p'_2)^2 = (p_i)^2 + (p'_1)^2. \qquad (1)$$



2. EXERCICES RESOLUS

3) La conservation de l'énergie se réduit à la conservation de l'énergie cinétique car le choc est élastique :

$$E_1 = E'_1 + E'_2. \qquad (2)$$

4) Puisque les particules ne sont pas relativistes, $E = \frac{p^2}{2m}$ ou $\frac{p^2}{2M}$ selon le cas, et la relation (1) s'écrit :

$$2M.E'_2 = 2m.E_1 + 2m.E'_1,$$

soit : $$E'_2 = \frac{m}{M}.(E_1 + E'_1) \qquad (3)$$

En reportant cette expression dans la relation (2), il vient :

$$E_1 = E'_1 + \frac{m}{M}.(E_1 + E'_1),$$

soit : $$E'_1 = E_1.\frac{\left(1 - \frac{m}{M}\right)}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)} = 14 \times \frac{207}{209} = 13,87$$

$E'_1 = 13,87$ MeV.

5) La vitesse des neutrons diffusés se calcule par :

$$E'_1 = \frac{1}{2} m.v^2 = \frac{1}{2} m.c^2.\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{1}{2} m.c^2.\beta^2,$$

d'où : $$\beta = \sqrt{\frac{2E'_1}{m.c^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 13,87}{939,6}} = 0,171\,8.$$

5) Le temps de vol des neutrons est :

$$t_0 = \frac{L}{v} = \frac{L}{\beta.c} = \frac{3}{0,171\,8 \times 3 \times 10^8} = 5,82 \times 10^{-8}$$

$t_0 = 58,2$ ns.

B) *Choc inélastique*

1) La relation entre quantités de mouvement est indépendante de la relation entre énergies, donc la relation trouvée précédemment en A) 2) est toujours valable :

$$(p'_2)^2 = (p_1)^2 + (p'_1)^2.$$

2) Dans la relation de conservation de l'énergie il faut tenir compte du fait qu'une partie de l'énergie cinétique incidente est captée par le noyau pour l'exciter :

$$E_1 = E'_1 + E'_2 + \delta_1.$$

3) La relation (3) reste inchangée :

$$E'_2 = \frac{m}{M}.(E_1 + E'_1).$$

Combinée avec la précédente, ceci donne :

$$E'_1 = \frac{E_1.\left(1 - \frac{m}{M}\right) - \delta_1}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)},$$

$$E'_1 = \frac{14 \times \left(\frac{207}{208}\right) - 2,6}{\left(\frac{209}{208}\right)} = 11,28$$

$E'_1 = 11,28$ MeV.

4) Le β des neutrons diffusés est :

$$\beta = \sqrt{\frac{2E'_1}{m.c^2}} = 0,155\,0.$$

5) Le temps de vol t_1 est :

$$t_1 = \frac{L}{\beta.c} = \frac{3}{0,155\,0 \times 3 \times 10^8} = 6,45 \times 10^{-8}$$

$t_1 = 64,5$ ns.

Le retard des neutrons diffusés inélastiquement sur les neutrons élastiques est :

$$\Delta_1 t = t_1 - t_0 = 64,5 - 58,2 = 6,3$$

$\Delta_1 t = 6,3$ ns.

C) *Calcul du second état excité du plomb*
Si $\Delta_2 t = 8,1$ ns, ceci signifie que :

$$t_2 = t_0 + \Delta_2 t = 58,2 + 8,1 = 66,3$$

$$t_2 = 66,3 \text{ ns.}$$

En faisant les calculs de la question B) à l'envers il vient :

$$\beta = \frac{L}{t_2.c} = 0,150\,6;$$

$$E'_1 = \frac{1}{2}(m.c^2).\beta^2 = 10,66;$$

or : $$E'_1 = \frac{14 \times \left(\frac{207}{208}\right) - \delta_2}{\left(\frac{209}{208}\right)} = 10,66.$$

d'où : **$\delta_2 = 3,2$ MeV.**

2. EXERCICES PROPOSES

EXERCICES D'APPLICATIONS
Sans calculs

Exercice 1

Quels sont les noms spécifiques des noyaux des atomes suivants : hydrogène, deutérium?

Exercice 2

La masse d'un atome est-elle rigoureusement égale à la somme des masses de son noyau et de ses électrons?

Exercice 3

La masse d'un noyau est-elle égale à la somme des masses de ses nucléons?

Exercice 4

Lorsqu'on fait un bilan énergétique d'une réaction nucléaire α, y a-t-il un inconvénient à utiliser les énergies de masse des atomes au lieu de l'énergie de masse des noyaux?

Exercice 5

Comparer les nombres de protons et de neutrons des couples de nucléides suivants :

$^{7}_{3}Li$ et $^{7}_{4}Be$; $^{11}_{5}B$ et $^{11}_{6}C$; $^{17}_{9}F$ et $^{17}_{8}O$.

Faire des schémas simplistes de ces couples de noyaux, en représentant les protons et les neutrons par des petits cercles de couleurs différentes. On dit que ces couples constituent des paires de « noyaux images ». Définir cette expression.

Exercice 6

De ces trois nucléides : $^{2}_{1}H$, $^{131}_{54}Xe$, $^{238}_{92}U$, quel est le plus solide?

Caractéristiques du noyau

* Exercice 7

L'isotope le plus abondant du cuivre est $^{63}_{29}Cu$. La masse de l'atome correspondant vaut 62,929 6 u.

1) Préciser la constitution du noyau de cet atome.

2) Quelle est, exprimée en u, la masse du noyau du nucléide correspondant?

3) On rappelle que le rayon du noyau atomique, assimilé à une sphère de rayon R, est donné (en fm) par $R = 1{,}2\sqrt[3]{A}$, où A désigne le nombre de masse. Calculer le volume et la masse volumique du noyau ^{63}Cu.
Quel est le volume occupé en moyenne par un nucléon dans le noyau?

4) Calculer la charge volumique (en $C.m^{-3}$) et la charge massique (en $C.kg^{-1}$) du noyau.

Exercice 8

On trouve dans les tables les valeurs suivantes (en eV) pour les énergies successives de 1re, 2e, ... 6e ionisation de l'atome de carbone : 11,3; 24,9; 47,8; 64,5; 393; 492. (L'énergie de 2e ionisation, par exemple, est l'énergie qu'il faut fournir à l'ion C^{+}, pour obtenir au repos l'ion C^{2+}.)

1) Calculer l'énergie qu'il faut fournir à l'atome de carbone pour l'ioniser totalement.

2) Quelle valeur négligé-t-on quand on calcule la masse d'un noyau d'atome de carbone en ôtant à celle de l'atome la masse des électrons? Est-ce important?

Energie de liaison

* Exercice 9

1) L'énergie de liaison nucléaire est d'environ 8 MeV par nucléon. Calculer l'énergie de liaison d'un noyau de néon : $^{20}_{10}Ne$.

2) En déduire l'énergie qu'il faudrait fournir à un noyau de néon pour l'éclater en ses nucléons.

3) Calculer, en exajoule, l'énergie qu'il faudrait fournir pour éclater tous les noyaux de néon contenus dans 1 m^3 de néon liquide. La masse volumique du néon liquide est de 1,2 $g.cm^{-3}$.

4) La production annuelle française d'énergie électrique est de 350 TWh. Calculer, en unité de temps appropriée (seconde, ou heure, ou année, ou siècle), la durée nécessaire pour produire l'énergie requise en question 3).

1 eV = $1{,}6 \times 10^{-19}$ J.
Nombre d'Avogadro : 6×10^{23} mol^{-1}.
méga = 10^{6} ; téra = 10^{12} ; exa = 10^{18}.
Masse d'un nucléon ≈ $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg.

Exercice 10

Dans les tables de constantes, on trouve les valeurs des masses des atomes pour les isotopes suivants :
Vanadium ^{50}V : 49,947 2 u ; ^{51}V : 50,944 0 u ;
titane ^{50}Ti : 49,944 8 u.

1) Calculer, en MeV, les énergies au repos des noyaux correspondants.

2) Calculer l'énergie minimale à fournir au noyau de vanadium 51 pour lui arracher un proton ou un neutron.

Exercice 11

L'isotope le plus abondant du fer correspond au nucléide $^{56}_{26}Fe$, dont la masse vaut 55,934 9 u (électrons compris). Calculer son énergie de liaison par nucléon.

Exercice 12

La masse du noyau d'oxygène $^{16}_{8}O$ est de 15,994 9 u. Quelle est, en MeV, l'énergie de liaison par nucléon dans ce noyau?

2. EXERCICES PROPOSES

Physique du noyau

*Exercice 13

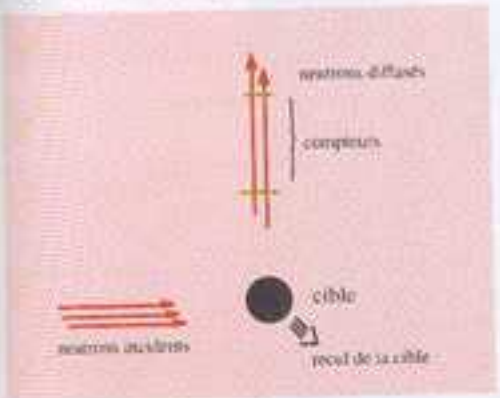
N.B. Cet exercice, énoncé tel quel, est difficile. Essayez, il devient facile après lecture de l'exercice corrigé n° 3.

On se propose d'étudier les niveaux d'énergie des noyaux par bombardement neutronique. On dispose d'un faisceau de neutrons de 14,00 MeV d'énergie cinétique, on place dans ce faisceau une cible faite du matériau à étudier, et on détecte les neutrons déviés à 90° de leur direction initiale.
Cette détection se fait par deux compteurs, distants de $L = 3$ m, et l'on mesure le « temps de vol » des neutrons entre ces deux compteurs.
Pour la suite on adoptera les notations suivantes :

M : masse du noyau cible;
m : masse du neutron;
p_1, E_1 : quantité de mouvement et énergie cinétique du neutron incident;
p'_1, E'_1 : mêmes quantités, du neutron après le choc;
p'_2, E'_2 : mêmes quantités, du noyau cible après le choc.

Étude du noyau de calcium : $^{40}_{20}Ca$.
On constate que les mesures des temps de vol des neutrons diffusés présentent deux pics :
l'un correspond aux neutrons diffusés de manière élastique sur les noyaux de calcium;
le second aux neutrons qui ont diffusé en laissant le noyau de calcium dans un état excité.
Le retard des seconds sur les premiers est de 8,8 ns.
En déduire l'énergie d'excitation, δ, du noyau de calcium.

$m_n c^2 = 939{,}6$ MeV (masse du neutron)



*Exercice 14

On admet que, lorsque deux nucléons sont distants de r :

• l'énergie potentielle d'interaction répulsive coulombienne entre deux protons est donnée par $E_p = \frac{1{,}4}{r}$; cette énergie est comptée positivement, car il faut fournir de l'énergie au système pour rapprocher les protons;

• l'énergie potentielle d'interaction forte attractive entre deux nucléons est donnée approximativement, tant que leur distance r n'est pas trop petite, par $E'_p = -K \frac{d}{r} e^{-r/d}$, où d est la « portée » de l'interaction; cette énergie est comptée négativement, car il faut fournir de l'énergie au système pour séparer les nucléons.

Dans ces formules, l'énergie est donnée en MeV et les distances sont exprimées en fm ($1\ \text{fm} = 10^{-15}$ m). La portée vaut $d = 1{,}4$ fm, et la constante $K = 50$ MeV.

1) Quelles sont les valeurs conventionnelles de ces énergies potentielles lorsque les deux nucléons sont très éloignés l'un de l'autre (par exemple 1 mm)?

2) Pour quelle valeur r_0, l'énergie potentielle totale d'interaction $E_p + E'_p$, est-elle nulle? Comment interpréter physiquement cette valeur?

3) Comparer les valeurs des énergies potentielles d'interaction forte et coulombienne pour $r = d$, $r = 10d$ et $r = 100d$.

4) Pour quelles valeurs de r, l'énergie potentielle coulombienne peut-elle être considérée comme négligeable vis-à-vis de l'autre (car plus de 10 fois plus petite par exemple)? Pour quelles valeurs de r peut-on, inversement, ne pas tenir compte de l'interaction forte?

5) Retrouver le coefficient 1,4 de la formule de l'énergie potentielle coulombienne.

6) Tracer les courbes $E_p = f(r)$ et $E'_p = f(r)$ sur du papier millimétré.

Échelle des abscisses : 2,5 cm = 1 fm.
Échelle des ordonnées : 1 cm = 10 MeV, puis 1 MeV.

Pourquoi la zone $r < 2$ fm, n'a-t-elle guère de sens physique?

7) Le noyau de deutérium a une énergie de liaison de −2,3 MeV. Quel serait selon ce modèle, le rayon du deuton?

Pour en savoir plus

L'EXPÉRIENCE DE RUTHERFORD

1. L'expérience historique

En 1909 deux élèves de E. Rutherford observaient les déviations que subissaient des particules α (noyaux d'hélium) lors de la traversée d'une mince feuille d'or.
L'épaisseur de la feuille : 0,3 µm, était suffisamment faible pour que les particules α n'interagissent qu'avec un seul noyau d'or lors de la traversée de la feuille. Les α, après traversée, étaient détectés par un écran de sulfure de zinc sur lequel ils créaient des points scintillants par leurs impacts, et ces scintillations étaient observées et comptées à l'aide d'un microscope (fig. 9).

Ils constatèrent d'abord que la très grande majorité des α n'était pas déviée, ce qui indiquait déjà que les atomes d'or étaient relativement vides.

Ils constatèrent ensuite que quelques-uns étaient néanmoins déviés, cette déviation pouvant atteindre des angles importants, supérieurs à 90°, ce qui signifie une diffusion vers l'arrière.
Le nombre de α déviés diminue rapidement avec leur angle de déviation : 1 pour 200 000 à 90°, moins de 1 pour 10° à 150°.
E. Rutherford a alors calculé cette répartition des impacts en fonction de l'angle θ, en supposant que ces déviations étaient dues à la répulsion électrique entre les particules α (de charge $+2e$) et un noyau central quasi ponctuel de charge $+Z.e$ ($Z = 79$ pour l'or).
Les nombres observés suivaient bien la loi théorique ce qui prouva l'existence d'un noyau de très faible dimension.

2. Son interprétation

Les α sont d'autant plus déviés qu'ils s'approchent plus près du noyau, et à énergie cinétique initiale donnée cela dépend de la distance de leur trajectoire initiale au noyau d'or. Jusqu'à quelle distance du noyau les α peuvent-ils s'en approcher?
Si E_c est leur énergie cinétique, en supposant qu'ils soient lancés dans l'axe du noyau, ils seront arrêtés, à la distance a, et feront ensuite demi-tour quand l'énergie potentielle de répulsion électrique : $\frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}.\frac{2e.Z.e}{a}$, sera égale à E_c.
Ce qui, pour des α de 5 MeV donne $a = 45$ fm, distance bien supérieure au rayon du noyau (fig. 10).

En répétant l'expérience avec des α plus énergiques (9 MeV) et des noyaux plus légers (type Aluminium $Z = 13$) la distance minimum d'approche diminue : $a = 4$ fm, et devient de l'ordre de grandeur du rayon du noyau; et pour les α très déviés — ceux qui se sont approchés le plus près du noyau — le nombre d'impacts ne suit plus la loi de répulsion électrique, il est supérieur. Ceci est dû aux chocs α-noyau et donc à l'interaction nucléaire qui s'additionne à la répulsion électrique.
Cette déviation des points expérimentaux de la diffusion arrière, par rapport à la loi théorique, renseigne donc sur le rayon du noyau.

3. Son actualisation

Ce type d'expériences de diffusion de particule énergique sur une autre particule pour en sonder la structure, se refait régulièrement au fil des progrès techniques. La prochaine, qui doit commencer en 1991, fera des collisions entre des électrons de 30 GeV et des protons de 900 GeV et essayera de sonder non pas le proton, ceci fut fait en 1972, mais ses quarks mêmes, pour voir si les quarks sont des particules élémentaires ou s'ils sont composites.

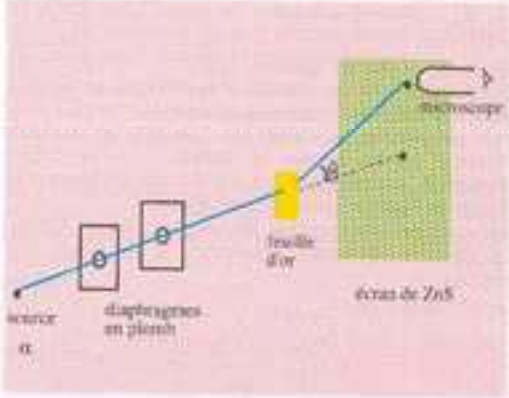


Fig. 9. *L'expérience de Rutherford.*

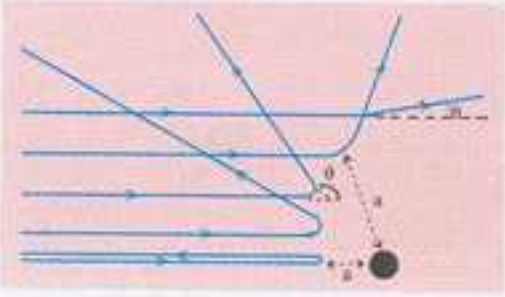
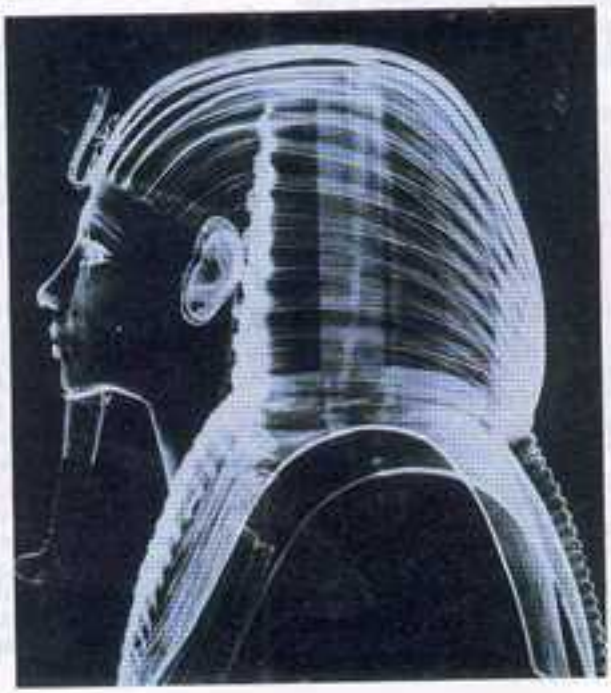


Fig. 10. *Analyse de l'expérience de Rutherford. Ce sont les particules les plus déviées qui renseignent le mieux sur les dimensions du noyau.*

18 Réactions nucléaires spontanées

1 Phénomènes radioactifs.
2 Radioactivité α.
3 Radioactivité β^-.
4 Radioactivité β^+.
5 Désexcitation γ.
6 Familles radioactives.
7 Quelques détecteurs de particules.
8 Utilisation des radionucléides.



Le masque d'or de Tout Ankh Amon (1346 av. J.-C.) radiographié aux rayons γ.

1 PHÉNOMÈNES RADIOACTIFS

1. Qu'est-ce que la radioactivité?

C'est l'émission spontanée et continue de particules par certaines substances : les **radionucléides** (le radium est la plus connue).

Cette émission est **spontanée,** elle est donc incontrôlable par l'homme. Elle commence dès la création de la substance :
— quelques minutes après le Big-Bang pour les corps radioactifs naturels;
— dès leur fabrication en laboratoire pour les corps radioactifs artificiels.
Elle est **continue,** on ne peut l'arrêter, mais elle décroît avec le temps.
La radioactivité naturelle fut découverte par H. Becquerel physicien français en 1896, et la radioactivité artificielle le fut par I. et F. Joliot-Curie en 1934.

2. Quelles radioactivités?

Une radioactivité est un phénomène **nucléaire,** elle ne dépend que du **noyau.** Elle est donc indépendante de l'édifice qui contient le noyau : solide, liquide gazeux, neutre ou ionisé, de structure atomique ou moléculaire.
Elle est due à la cassure spontanée de noyaux qui lors de leur création, avaient une composition en neutrons-protons telle, qu'ils s'inscrivaient en dehors de la vallée de stabilité dans le graphique $N = f(Z)$.

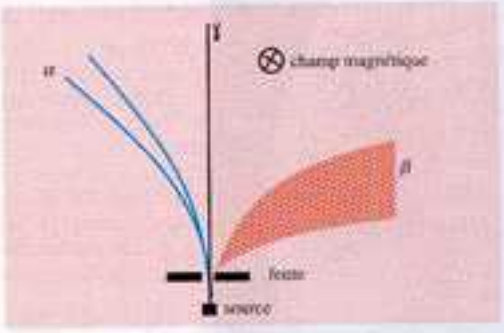


Fig. 1. *Schéma des émanations radioactives naturelles, appelées α, β, γ par Rutherford, selon leurs trajectoires dans un champ magnétique.*
Il comprend, pour l'essentiel :
— les raies α;
— le spectre continu des β^- ;
— la trajectoire rectiligne des γ.
(La radioactivité β^+, artificielle, ne figure pas sur ce schéma qui fut dessiné avant sa découverte.)

Suivant une classification historique on appelle :

- **radioactivité** α : l'émission d'un noyau d'hélium ${}^4_2He$ (que l'on nomme particule α);
- **radioactivité** β^- : l'émission d'électrons;
- **radioactivité** β^+ : l'émission de positrons;
- **désexcitation** γ : l'émission de photons γ lors du retour à l'état fondamental d'un noyau excité (fig. 1).

Les énergies mises en jeu sont de l'ordre des énergies de liaisons nucléaires : quelques MeV.

3. Lois de la radioactivité

Elles sont de deux types :

- *les lois « externes » au noyau :*
— conservation de l'énergie;
— conservation de la quantité de mouvement.
- *les lois « internes » au noyau :*
— conservation de la charge électrique;
— conservation du nombre de nucléons.

4. Décroissance radioactive

a) Expérience

Le rayonnement d'une source de polonium ${}^{203}_{84}Po$ (radioactif α) est mesuré avec un compteur geiger (voir p. 385) associé à une échelle électronique. On appelle **activité** de la source le nombre de désintégrations par seconde.
On constate que cette activité diminue au cours du temps suivant une loi exponentielle :

$$A = A_0 . e^{-\lambda . t},$$

où A_0 est une constante multiplicative qui dépend de la puissance de la source, et λ une constante caractéristique du radionucléide (sa signature radioactive). On l'appelle : la **constante radioactive** (plus λ est grand, plus l'activité décroît rapidement), elle s'exprime en s^{-1} dans le SI.
Cette décroissance exponentielle de l'activité est une loi générale de la radioactivité, que ce soit pour les émissions α, β^-, β^+, ou γ.

b) Étude théorique

Soit un échantillon de substance radioactive comportant N noyaux non encore désintégrés à la date t. La probabilité de désintégration d'un de ces noyaux est un **phénomène aléatoire,** elle est indépendante de t. Par exemple, un noyau d'uranium ${}^{238}_{92}U$ a autant de chances de se désintégrer pendant l'heure qui suit que pendant une heure dans un an. Il est impossible de prévoir à quel instant sa désintégration aura lieu. On dit que le noyau ne vieillit pas et n'a pas mémoire de son passé : un noyau « jeune » a autant de chances de se désintégrer qu'un noyau « vieux ». Entre les dates t et $t + dt$, le nombre de noyaux dans l'échantillon diminue, car des noyaux se désintègrent.

Le nombre de noyaux $-dN$, qui se désintègrent pendant la durée dt, est proportionnel à dt et au nombre N de noyaux présents à la date t :

$$dN = -\lambda . N . dt$$

Le signe $-$ indique que le nombre de noyaux intacts diminue dans l'échantillon. λ est la constante radioactive déjà rencontrée.
La relation précédente s'écrit :

$$\frac{dN}{N} = -\lambda . dt,$$

soit par intégration : $\ln N = -\lambda . t + C$, ou : $N = C . e^{-\lambda t}$.

La constante, C, est déterminée par les conditions initiales : à la date $t = 0$ il y avait $N = N_0$ noyaux radioactifs dans la source, d'où :

$$N = N_0 . e^{-\lambda . t}$$

L'équation peut aussi s'écrire : $-\frac{dN}{dt} = \lambda . N.$

C'est l'expression de la vitesse de désintégration radioactive. C'est l'**activité** A, de la source :

$$A = -\frac{dN}{dt} \quad \text{d'où :} \quad A = \lambda . N.$$

Soit en remplaçant N par sa valeur :

$A = \lambda . N_0 . e^{-\lambda . t}$ ou encore : $A = A_0 . e^{-\lambda . t}$.

On retrouve bien la loi de décroissance exponentielle, mise en évidence par l'expérience.

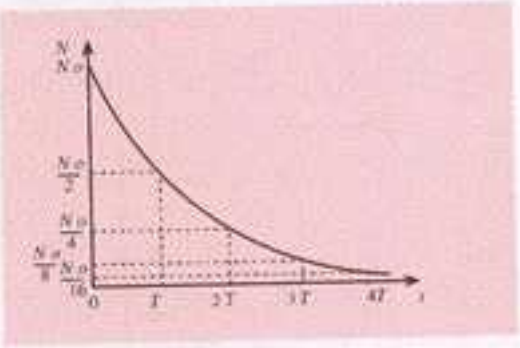


Fig. 2. *Décroissance exponentielle du nombre de noyaux radioactifs en fonction du temps.*
Au bout de n périodes, le nombre de noyaux présents est : $N = \frac{N_0}{2^n}$.

c) *Période d'un radionucléide*

Le phénomène n'est pas périodique, mais la coutume veut que l'on caractérise la vitesse de décroissance du comptage, par la durée T, au bout de laquelle l'activité est réduite de moitié. On l'appelle la **période** (ou demi-vie) du radionucléide.

La période est donc la durée T au bout de laquelle la moitié des noyaux initialement présents dans un échantillon a disparu (fig. 2).

En faisant $N = \frac{N_0}{2}$ pour $t = T$ dans la formule $N = N_0 . e^{-\lambda t}$ on obtient :

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda . T}$$

d'où la correspondance : $T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}$.

Comme la constante radioactive, la période est évidemment une caractéristique du radionucléide.
Selon ce radionucléide, les périodes peuvent varier de 10^{-15} s à 10^{23} s (de la femtoseconde à 3 millions de milliards d'années).

5. Unités

a) *Unité d'activité*

C'est le **becquerel** (Bq). Il correspond à une désintégration par seconde.

b) *Unité de dose absorbée*

Une substance soumise à une irradiation reçoit de l'énergie.
On appelle dose absorbée, l'énergie « déposée » dans l'unité de masse de la matière exposée. Elle s'exprime donc en joule par kilogramme. Elle a reçu un nom spécifique : le gray (Gy).

$$1 \text{ Gy} = 1 \text{ J} . \text{kg}^{-1} \text{ dans le SI.}$$

c) *Unité d'équivalent biologique de dose*

Dans le cas particulier où la substance irradiée est du tissu humain, on définit l'équivalent biologique de dose, qui chiffre la fraction de la dose effectivement communiquée aux tissus et qui les détruit.
L'unité du SI est le **sievert** (Sv).

$$1 \text{ Sv} = 1 \text{ J} . \text{kg}^{-1}.$$

La relation entre la dose absorbée (la cause) et l'équivalent biologique de dose (l'effet) est d'ordre médical. Elle dépend essentiellement du rayonnement, de sa nature et de son énergie. On admet qu'un vol Paris-New York occasionne une irradiation de 5×10^{-5} Sv à cause des rayons cosmiques et que la dose reçue due à l'environnement naturel est de 5 mSv par an.

Remarque : Pour traiter de ces problèmes, quelques services officiels utilisent encore à tort, des anciennes unités :
— le curie $= 3{,}7 \times 10^{10}$ Bq;
— le rem $= 10^{-2}$ Sv.

2 RADIOACTIVITÉ α

La radioactivité α est caractéristique des noyaux lourds : $A > 200$, $Z > 82$.

1. Équation-bilan de la désintégration

Cette radioactivité correspond à la désintégration spontanée d'un noyau père ${}^{A}_{Z}X$, en un noyau fils ${}^{A-4}_{Z-2}Y$, plus stable, avec émission d'un noyau d'hélium ${}^{4}_{2}He$, la particule α.
La réaction nucléaire est donc :

$$ {}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He $$

Exemple : ${}^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}He$.
Cette réaction conserve bien le nombre de protons Z et de neutrons N.
Lors de la transformation de ${}^{A}_{Z}X$ en ${}^{A-4}_{Z-2}Y$, $\Delta Z = -2$ et :

$$\Delta N = [(A-4)-(Z-2)]-[A-Z] = -2.$$

Dans le graphique N, Z, le passage de X à Y suit donc un trajet parallèle à la première bissectrice, et le noyau fils Y, est plus proche de la vallée de stabilité que ne l'est le noyau père X (fig. 3).

2. Dynamique de la réaction : $X \longrightarrow Y + \alpha$

La réaction est exoénergétique. L'énergie libérée ΔE provient du fait que la désintégration se fait avec diminution de masse :

$$(m_Y + m_\alpha) < m_X.$$

a) Bilan énergétique

L'énergie libérée ΔE, vient de la différence des énergies de masse $E = m \cdot c^2$ entre les produits finals $(Y + \alpha)$ et le corps initial (X) :

$$\Delta E = (m_Y \cdot c^2 + m_\alpha \cdot c^2) - m_X \cdot c^2 = \Delta m \cdot c^2.$$

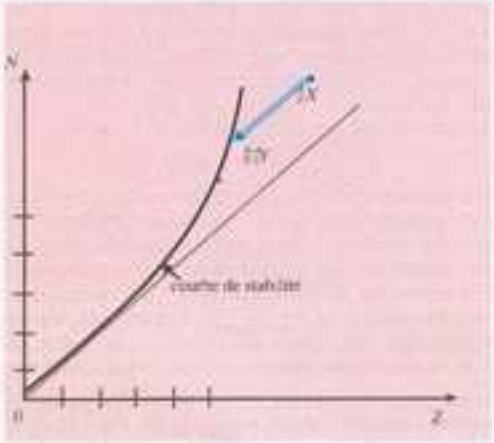


Fig. 3. *La désintégration α d'un noyau lourd X rapproche le noyau fils Y de la courbe de stabilité.*

Cette différence est due au fait que les énergies de liaison des nucléons dans les noyaux X, Y et α sont différentes. Le noyau d'hélium est le plus solide qui soit. Son « défaut de masse » est important et est donc la cause essentielle de cette différence d'énergie (fig. 4).
Exemple :

$${}^{212}_{84}Po \longrightarrow {}^{208}_{82}Pb + {}^{4}_{2}He \quad \Delta E = -8{,}95 \text{ MeV}.$$

Cette énergie est **négative** (vu du système initial le noyau X), donc libérée, c'est pourquoi la réaction est exoénergétique; elle se retrouve sous forme d'énergie cinétique des produits finals. Exprimée en unité de masse atomique ($u = 931{,}5 \text{ MeV}/c^2$), elle est faible devant la masse des partenaires :

$$|\Delta E| \approx 0{,}01 \text{ u}; \quad m_\alpha \approx 4 \text{ u}; \quad m_Y \approx 200 \text{ u}.$$

Les particules α ne sont donc pas relativistes.

b) Équation de conservation de la quantité de mouvement

En général le noyau père X, est immobile, donc la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{0} = \vec{p}_Y + \vec{p}_\alpha.$$

Les quantités de mouvement des produits de désintégrations sont opposées, donc colinéaires et égales en valeur.

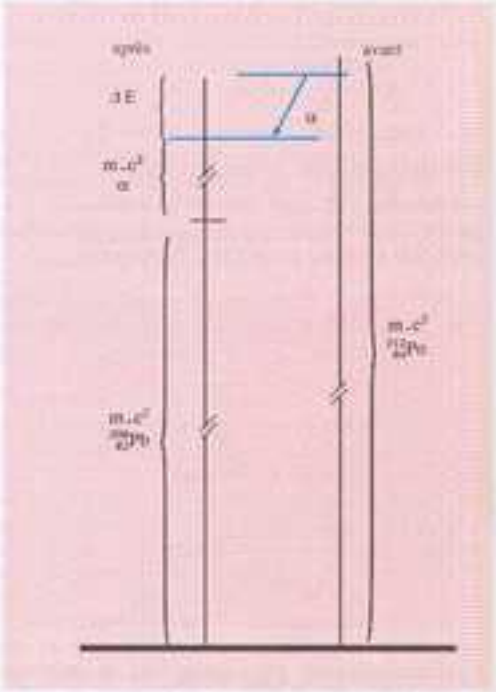


Fig. 4. *Bilan énergétique d'une désintégration α. Pour simplifier on ne représente que la partie dessinée en rouge.*

c) Équation de la conservation de l'énergie

Elle s'écrit :

$$E_X = E_Y + E_\alpha,$$

ces énergies étant les énergies totales.
Pour le noyau père, immobile, son énergie se réduit à son énergie de masse :

$$E_X = m_X \cdot c^2;$$

et pour les particules filles :

$$E = m \cdot c^2 + \frac{1}{2} m \cdot v^2.$$

d) Énergie cinétique des α

Les deux équations deviennent :

— conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{0} = m_Y \cdot \vec{v}_Y + m_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha;$$

— conservation de l'énergie :

$$m_X \cdot c^2 = m_Y \cdot c^2 + \frac{1}{2} m_Y \cdot v_Y^2 + m_\alpha \cdot c^2 + \frac{1}{2} m_\alpha \cdot v_\alpha^2.$$

La première équation fournit v_Y en fonction de v_α :

$$v_Y = \frac{m_\alpha}{m_Y} \cdot v_\alpha.$$

Et la seconde, par substitution, l'énergie cinétique de la particule α :

$$E_{c_\alpha} = \frac{1}{2} m_\alpha \cdot v_\alpha^2$$

$$= \frac{(m_X \cdot c^2 - m_Y \cdot c^2 - m_\alpha \cdot c^2)}{1 + \frac{m_\alpha}{m_Y}} = \frac{|\Delta E|}{1 + \frac{m_\alpha}{m_Y}} = |\Delta E|.$$

$E_{c_\alpha} = |\Delta E|$ car le rapport $\frac{m_\alpha}{m_Y}$ est petit $\left(\approx \frac{4}{200}\right)$.

La particule α emporte pratiquement toute l'énergie disponible. Ainsi $E_{c_\alpha} = 8{,}81$ MeV dans l'exemple du polonium.

e) Vitesse des particules α

Elle est faible.

$\frac{v}{c} \approx 0{,}07$ soit : $v = 20\,000$ km.s^{-1}.

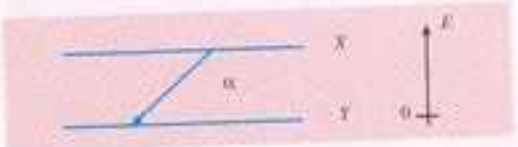


Fig. 5. *Schéma d'une désintégration α. Par convention, on représente la variation d'énergie du trajet X ⟶ Y par une flèche qui a même inclinaison que celle du trajet X ⟶ Y dans le diagramme N, Z.*

3. Diagramme énergétique

Pour l'ensemble des corps radioactifs α, les énergies cinétiques E_{c_α} s'échelonnent entre 4 et 9 MeV.
Mais pour une désintégration donnée, l'énergie cinétique E_{c_α} est bien définie, et les particules α émises sont monocinétiques.
Le spectre d'énergie des α est donc une raie.
La désintégration α se représente par un schéma qui ne montre que la différence des énergies de masse (fig. 5).

En fait, l'analyse fine au spectrographe magnétique montre que lors de la désintégration de nombreux radionucléides α, les particules α émises n'ont pas toutes même énergie, mais constituent des groupes distincts monocinétiques, d'intensités différentes; ce sont les **raies α** (fig. 6). L'énergie cinétique des particules α est donc quantifiée. C'est le phénomène dit de structure fine. Ceci s'interprète par le fait que l'émission α peut laisser le noyau fils Y, en un état excité Y*, donc en un niveau d'énergie supérieur à celui de son état fondamental.

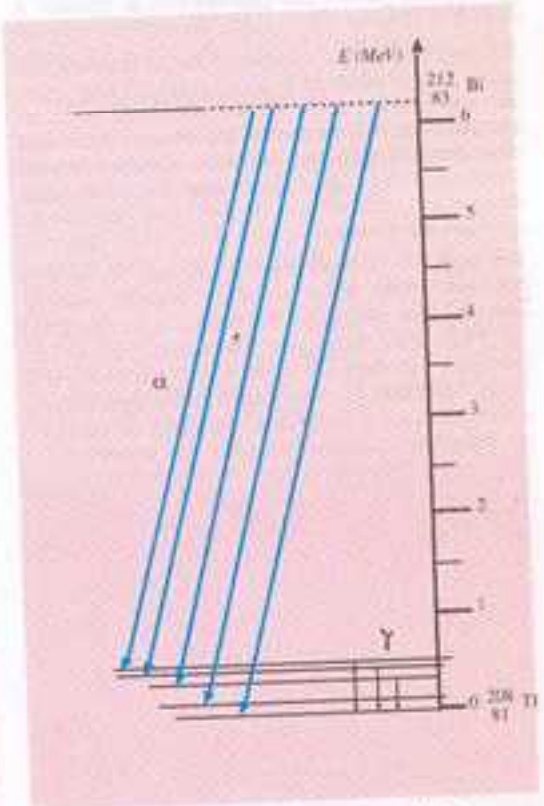


Fig. 6. *Schéma de la désintégration du $^{212}_{83}$Bi. Le noyau de thallium fils, $^{208}_{81}$Tl peut se retrouver dans l'état fondamental ou dans l'un quelconque des quatre états excités.*

Le noyau Y^*, se désexcite ensuite par l'émission d'un photon γ.
Par exemple :

$$^{212}_{83}Bi \longrightarrow {}^{208}_{81}Tl^* + {}^{4}_{2}\alpha,$$

puis :

$$^{208}_{81}Tl^* \longrightarrow {}^{208}_{81}Tl + \gamma.$$

Ce spectre du bismuth présente 5 raies α (fig. 7), auxquelles s'ajoutent les 4 raies γ de désexcitation directes du noyau de thallium, accompagnés de toutes les transitions γ possibles entre les différents niveaux excités du thallium.

4. Relation entre l'énergie de désintégration et la période

Les périodes des radioéléments α varient dans un très large domaine, de la microseconde au milliard d'années, alors que leurs énergies cinétiques diffèrent seulement d'un facteur 2, de 4 à 9 MeV.
D'une manière générale, plus l'énergie disponible $|\Delta E|$ est grande, plus la période est courte.

5. Pouvoir pénétrant des rayons α

En rencontrant et traversant de la matière, les particules α perdent progressivement leur énergie par interaction avec les électrons de cette matière, car ils ionisent les atomes sur leur passage par répulsion électrique. Comme ils sont lents et lourds ils créent une ionisation très dense.

En moyenne ils perdent 30 eV par paire ion-électron créée. Leur parcours dépend évidemment de leur énergie et du milieu traversé, il est de l'ordre de quelques cm dans l'air, et de quelques µm dans les solides. A la fin ils captent deux électrons et deviennent ainsi des atomes d'hélium. Les α sont donc très peu pénétrants, un écran de carton suffit pour les arrêter.

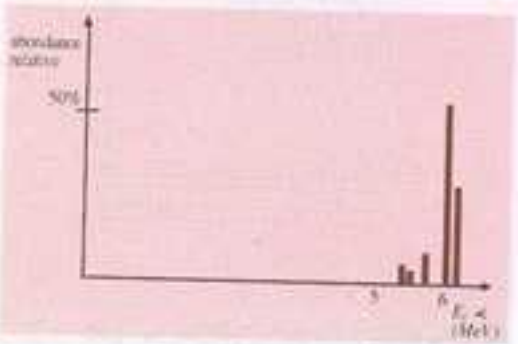


Fig. 7. Spectre d'énergie des particules α émis par le bismuth.

3 RADIOACTIVITÉ β^-

La radioactivité β^- (émission d'électrons) est le propre des noyaux trop riches en neutrons.

1. Caractéristiques de la désintégration β^-

a) Origine des électrons émis

L'étude des radionucléides β^-, montre que le noyau père $^{A}_{Z}X$, se transforme en un noyau fils $^{A}_{Z+1}Y$, un de ses neutrons devenant proton. Ce qui prouve qu'il s'agit bien d'une désintégration du noyau et que l'électron émis ne provient pas du cortège électronique mais du noyau même.

b) Spectre d'énergie des rayons β^-

Les mesures au spectrographe magnétique montrent que les électrons émis présentent un spectre continu d'énergie. Le graphique d'abondance des électrons en fonction de leur énergie ne se présente pas selon une raie (ou des raies) comme pour les particules α, mais selon une courbe régulière continue (fig. 8).
L'énergie cinétique des β^- s'étend depuis zéro jusqu'au maximum permis par le bilan énergétique de la réaction. Or le calcul fait pour la désintégration α, a montré que si la désintégration du noyau père se fait en deux corps, l'énergie de la particule émise est déterminée; de plus, il semble qu'apparemment il n'y ait pas conservation de la quantité de mouvement, car les quantités de mouvement finales, de l'électron et du noyau fils, ne sont pas rigoureusement opposées.
L'interprétation admise est que lors de la désintégration β^-, le noyau père éclate **en trois corps**, et que le troisième corps emporte l'énergie et la quantité de mouvement qui apparemment manquent.

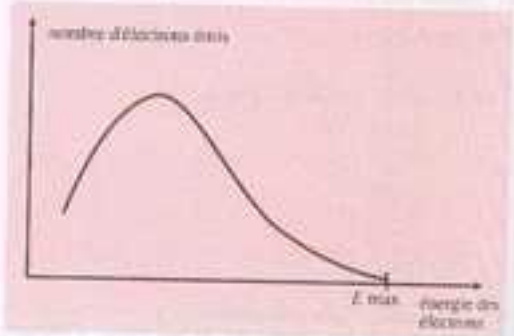


Fig. 8. Spectre d'énergie des électrons émis par un radionucléide β^-.

Cette troisième particule sortante doit être : électriquement neutre; de masse nulle, puisque certains électrons en bout de spectre emportent toute l'énergie disponible; et n'avoir pratiquement pas d'interaction avec la matière puisqu'on ne l'avait pas détectée.

2. Mécanismes de la désintégration β^-

a) Équation-bilan

Ce petit neutre manquant, (de masse nulle) est un **antineutrino**, de symbole $\bar{\nu}$ (il fut imaginé par W. Pauli en 1930). Il accompagne l'électron dans sa sortie du noyau, et la désintégration β^- s'écrit :

$$^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e^{-} + {}^{0}_{0}\bar{\nu}$$

Exemple : $^{14}_{6}C \longrightarrow {}^{14}_{7}N + {}^{0}_{-1}e^{-} + {}^{0}_{0}\bar{\nu}$.

Les antineutrinos sont effectivement difficilement détectables; ils peuvent traverser la terre sans interagir.

b) Réaction élémentaire

L'émetteur β^- le plus simple est le neutron n, qui se désintègre en proton, p :

$$^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{0}_{-1}e^{-} + {}^{0}_{0}\bar{\nu}.$$

Pour un neutron libre, le bilan énergétique est de $\Delta E = -0{,}8$ MeV et sa période est de 8 min.

La radioactivité β^- d'un nucléide est due à la désintégration d'un des neutrons de son noyau.

— Elle n'a pas lieu pour les noyaux stables, car dans ces noyaux les nucléons ont en moyenne, à cause de l'énergie de liaison nucléaire, un défaut de masse de 8 MeV, qui rend leur énergie de masse inférieure à la somme de celles du proton et de l'électron libres.

— Elle n'a lieu que pour les noyaux dans lesquels les neutrons sont peu liés.

c) Représentation dans le graphique N, Z

Lors de la transformation de $^{A}_{Z}X$ en $^{A}_{Z+1}Y$, $\Delta Z = +1$ et $\Delta N = (A-(Z+1))-(A-Z) = -1$.

Le passage se fait donc selon un trajet parallèle à la seconde bissectrice, et le noyau fils Y est plus proche de la courbe de stabilité que ne l'était son père X (fig. 9).

d) Bilan énergétique

L'énergie libérée se calcule comme pour la désintégration α par :

$$\Delta E = (m_Y \cdot c^2 + m_e \cdot c^2) - m_X \cdot c^2.$$

Elle se retrouve sous forme d'énergie cinétique de l'électron, de l'antineutrino et du noyau fils Y; mais selon le calcul fait p. 375, les particules légères emportent la majeure partie de cette énergie, qui se répartit donc entre l'électron et l'antineutrino. Elle est de l'ordre du MeV. Les électrons étant très légers, leur énergie cinétique est supérieure à leur énergie de masse, ils sont donc relativistes.

e) Représentation du bilan énergétique (fig. 10)

La radioactivité β^- (comme la radioactivité α) peut laisser le noyau fils Y, dans un état excité Y^*.

A chacun des niveaux d'arrivée correspond un spectre continu différent d'électrons. Le noyau fils se désexcite ensuite par émission γ.

3. Pouvoir pénétrant des β^-

Les électrons sont beaucoup plus pénétrants que les particules α. Comme eux, en traversant la matière ils perdent leur énergie par ionisation, en créant des paires ion-électrons sur leur passage. Mais la densité de paires formée est environ mille fois plus faible pour les β^-, que pour les α. Ceci est dû au fait que, à énergie égale, les β^- sont beaucoup plus rapides, car moins lourds, que les α. Il leur faut donc un parcours plus long pour perdre de l'énergie. En moyenne ce parcours est de 10 m dans l'air et de 0,1 mm dans les métaux.

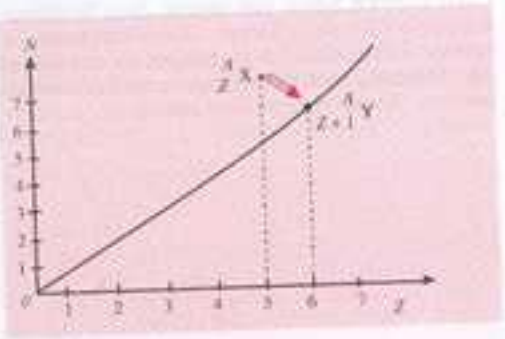


Fig. 9. *Les noyaux situés à gauche de la courbe de stabilité se désintègrent par émission β^-.*
Dans le cas de la figure $^{12}_{5}B \longrightarrow {}^{12}_{6}C + {}^{0}_{-1}e^{-} + {}^{0}_{0}\bar{\nu}$.

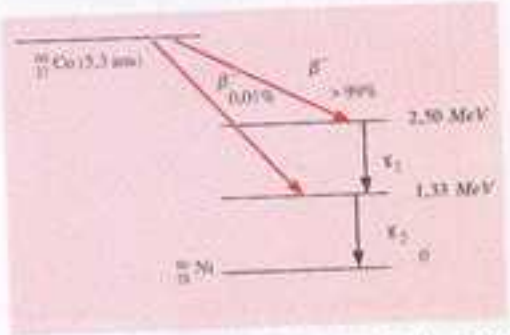


Fig. 10. *Schéma de la désintégration β^- du cobalt. Par convention, la flèche de passage $X \longrightarrow Y$ a même inclinaison que celle du diagramme N, Z.*

$$^{60}_{27}Co \longrightarrow {}^{60}_{28}Ni + {}^{0}_{-1}e^{-} + {}^{0}_{0}\bar{\nu}.$$

4 RADIOACTIVITÉ β^+

Elle concerne les noyaux trop riches en protons. De tels radionucléides n'existent pas dans la nature, mais ils sont facilement produits en laboratoire, c'est pourquoi ce phénomène s'appelle aussi **radioactivité artificielle.**

1. Découverte de la radioactivité artificielle

Le 11 janvier 1934, I. et F. Joliot-Curie entreprennent une série d'expériences élégantes. Ils placent pendant 10 min, une feuille d'aluminium à 1 mm d'une source de polonium radioactif α, et la transportent ensuite au-dessus d'un compteur Geiger. Ils constatent alors que cette feuille d'aluminium, initialement inerte, est devenue radioactive, et après une demi-heure d'observation les Joliot annoncent «l'existence d'un nouveau type de radioactivité».
La réaction nucléaire créée par les particules α sur l'aluminium était :

$$^{4}_{2}He + ^{27}_{13}Al \longrightarrow ^{30}_{15}P + ^{1}_{0}n.$$

Cet **isotope artificiel** $^{30}_{15}P$ du phosphore, est radioactif β^+, avec une période de 3 min 15 s.

2. Mécanismes de la radioactivité β^+

a) Équation-bilan

Cette radioactivité est analogue à la précédente : les noyaux (artificiels) riches en protons, se désintègrent cette fois en émettant un **positron** e^+ et un **neutrino** ν.
D'où le schéma :

$$^{A}_{Z}X \longrightarrow {}_{Z-1}^{A}Y + ^{0}_{1}e^{+} + ^{0}_{0}\nu$$

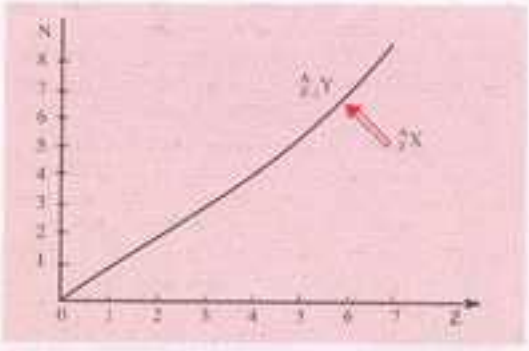


Fig. 11. *Les noyaux situés à droite de la courbe de stabilité se désintègrent par émission β^+. Dans le cas de la figure :*

$$^{13}_{7}N \longrightarrow ^{13}_{6}C + ^{0}_{1}e^{+} + ^{0}_{0}\nu.$$

Exemple : la désintégration du phosphore observée par les Joliot-Curie :

$$^{30}_{15}P \longrightarrow ^{30}_{14}Si + ^{0}_{1}e^{+} + ^{0}_{0}\nu,$$

réaction historique de la découverte de cette radioactivité.
Autre exemple :

$$^{11}_{6}C \longrightarrow ^{11}_{5}B + ^{0}_{1}e^{+} + ^{0}_{0}\nu.$$

b) Réaction élémentaire

C'est la désintégration du proton en neutron :

$$^{1}_{1}p \longrightarrow ^{1}_{0}n + ^{0}_{1}e^{+} + ^{0}_{0}\nu.$$

Elle est impossible pour les protons libres, car elle est endoénergétique : $\Delta E = 1{,}80$ MeV.
Néanmoins, elle peut avoir lieu dans le noyau si les énergies de liaisons du noyau père X, et du noyau fils Y, sont suffisamment différentes pour que la réaction devienne exoénergétique.

c) Représentation dans le graphique N, Z

La trajectoire de X vers Y est : $\Delta Z = -1$ et $\Delta N = +1$. Elle est donc parallèle à la seconde bissectrice, dans le sens opposé de celle de la radioactivité β^- (fig. 11).
Le fils Y se rapproche évidemment de la courbe de stabilité.

d) Diagramme énergétique

La flèche de passage $X \longrightarrow Y$ a par convention, même inclinaison que pour la désintégration α (fig. 12).
Les périodes des radionucléides β^+ sont du même ordre de grandeur que celles des radionucléides β^-.

3. Capture électronique

Pour diminuer son excès de protons, un noyau lourd peut aussi capter directement un des électrons atomiques situés sur le niveau d'énergie le plus proche de lui, le niveau K :

$$^{A}_{Z}X + ^{0}_{-1}e^{-} \longrightarrow {}_{Z-1}^{A}Y + ^{0}_{0}\nu.$$

Cette capture laisse une lacune dans le niveau d'énergie K de l'atome. Ultérieurement le cortège électronique se réarrange; les transitions électroniques sont accompagnées d'émission de photons X qui signent la réaction.

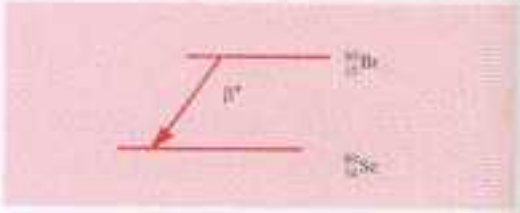


Fig. 12. *Schéma de la désintégration β^+ du Brome :*

$$^{82}_{35}Br \longrightarrow ^{82}_{34}Se + ^{0}_{1}e^{+} + ^{0}_{0}\nu.$$

5 DÉSEXCITATION γ

La désexcitation γ est le retour à l'état fondamental d'un noyau préalablement excité par une réaction nucléaire. Elle suit les désintégrations α et β lorsque celles-ci laissent le noyau fils en un état excité Y^*, ce qui est d'ailleurs le cas le plus fréquent.
Le rayonnement γ est constitué de photons très énergiques et donc de très courtes longueurs d'ondes. Leur domaine d'énergie va du keV à la dizaine de MeV.

1. Mécanisme de la désexcitation γ

a) Période γ

La désexcitation n'est pas immédiate. Il s'écoule un intervalle de temps, aléatoire, entre le moment t, où le noyau excité Y^* est créé (après une désintégration α ou β par exemple), et le moment t', où il se désexcite.
C'est cet intervalle de temps $t' - t$, qui régit la durée de vie de l'excitation du noyau Y^*. La distribution de cette durée suit une loi de probabilité exponentielle, caractérisée par une période.
Les périodes des émetteurs γ varient de 10^{-16} s à 10^{10} années. Elles dépendent de l'énergie des photons émis (plus ils sont énergiques plus la période est courte), et aussi de la structure interne du noyau émetteur.
Elles sont complètement indépendantes des réactions qui ont créé l'excitation nucléaire.

b) Équation-bilan

Elle s'écrit :

$$^{A}_{Z}Y^* \longrightarrow {}^{A}_{Z}Y + \gamma$$

c) Caractéristiques des photons γ émis : les raies γ

Les photons γ émis, correspondent à l'énergie libérée lors de transitions à l'intérieur du noyau. Après excitation, les nucléons changent de niveau d'énergie de façon que le noyau acquiert la structure la plus stable. L'énergie du photon en est leur différence :

$$E_\gamma = E_1 - E_2$$

Comme les niveaux d'énergie dans le noyau forment un spectre discret, leurs différences ne peuvent prendre que des valeurs discrètes, et par conséquent le spectre des rayons γ est un spectre de raies.

d) Diagramme énergétique

Par convention la flèche de passage $Y^* \longrightarrow Y$ est tracée verticale (fig. 13).

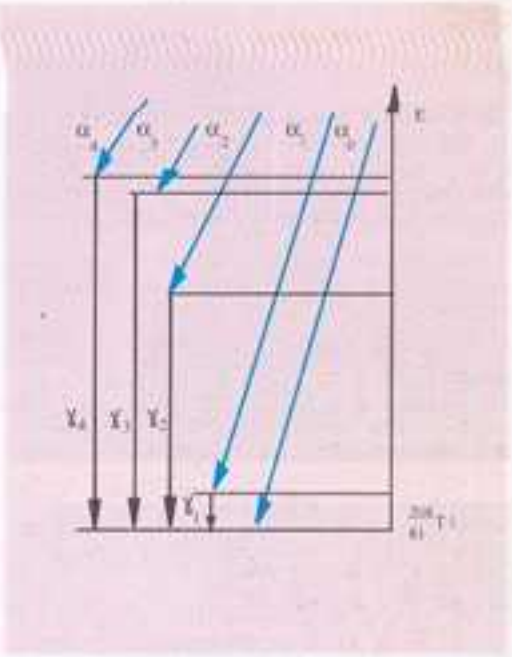


Fig. 13. *Les quatre états excités du thallium.*

2. Interaction des γ avec la matière

a) Mécanismes d'interaction

Les photons γ émis sont très pénétrants, car étant neutres ils ionisent peu le milieu sur leur passage et ne perdent donc leur énergie que lentement.
Ils interagissent donc différemment des particules chargées.
Par ordre d'énergie décroissante, ils peuvent :

— *créer des paires électron-positron.* Dans le voisinage d'un noyau, un photon peut se matérialiser en une paire $e^- + e^+$, c'est le processus dominant à haute énergie;

— *choquer un électron.* A chaque choc le photon γ perd une fraction de son énergie qui est transmise à l'électron heurté;

— *être capturé.* Progressivement, au fil des chocs, l'énergie du photon γ diminue. Lorsqu'elle atteint les valeurs des liaisons atomiques (quelques eV), le photon devient de la lumière visible et est absorbé.

b) Pouvoir pénétrant

Si un faisceau de photons γ pénètre dans un matériau, son intensité I (nombre de photons qui traversent l'unité de surface par unité de temps) en un point d'abscisse x à l'intérieur du matériau, sera moindre car une partie de ses photons aura été absorbée.

Si le faisceau s'enfonce d'une épaisseur dx supplémentaire, son atténuation $-\frac{dI}{I}$ sera proportionnelle à dx :

$-\frac{dI}{I} = -\mu . x$. (μ est un coefficient d'absorption). D'où :

$$I = I_0 . e^{-\mu . x}.$$

L'intensité des photons γ diminue donc exponentiellement avec l'épaisseur traversée (fig. 14).

On caractérise le pouvoir pénétrant des photons γ dans un matériau donné, par l'épaisseur nécessaire pour atténuer l'intensité de moitié. On l'appelle la demi-épaisseur d'écran, e.

Par définition de e : $I = \frac{I_0}{2}$ pour $x = e$, donc :

$$e = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0{,}693}{\mu}.$$

•La demi-épaisseur d'écran dépend de l'énergie des photons γ et du matériau absorbant. Elle est de l'ordre de quelques centimètres pour le plomb, et de quelques mètres pour le béton.

3. Conversion interne

En parallèle avec l'émission de photon γ, la désexcitation d'un noyau peut se faire en communiquant directement l'énergie excédentaire à un électron atomique de niveau K. Cet électron est donc éjecté de l'atome avec une énergie bien déterminée : c'est le phénomène de conversion interne.

Si cette désexcitation par conversion interne fait suite à une désintégration β^-, les électrons K éjectés qui sont monoénergétiques vont s'ajouter aux électrons de radioactivité, qui eux ont un spectre continu d'énergie.

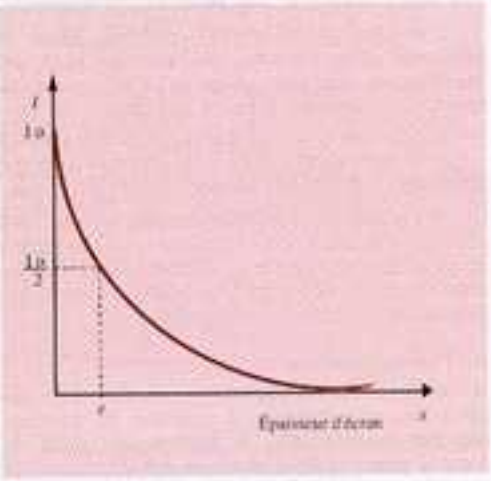


Fig. 14. *Variation de l'intensité des rayons γ en fonction de l'épaisseur de matière traversée.*

6 FAMILLES RADIOACTIVES

Une famille radioactive est composée d'un ensemble de radionucléides, tous issus d'un noyau initial instable qui, de père en fils, par désintégrations en cascades, conduisent à un noyau final stable.

Pour être observable de nos jours dans la radioactivité naturelle, il faut donc que dans la filiation radioactive le radionucléide père ait une période de l'ordre de grandeur de l'âge de la terre (5 milliards d'années).

Trois familles ont subsisté, celles du :

- **Thorium :** $^{232}_{90}Th$ $\quad T = 4{,}4 \times 10^{17}$ s.
- **Uranium 238 :** $^{238}_{92}U$ $\quad T = 1{,}4 \times 10^{17}$ s.
- **Uranium 235 :** $^{235}_{92}U$ $\quad T = 0{,}2 \times 10^{17}$ s.

La seconde famille est la plus connue : l'uranium $^{238}_{92}U$ est présent en fraction de 4×10^{-4} dans l'écorce terrestre. Dans sa filiation, l'uranium 238 qui est radioactif α, se désintègre en $^{234}_{90}Th$ qui lui-même par radioactivité β se désintègre en $^{234}_{91}Pa$ qui lui-même... jusqu'au plomb $^{206}_{82}Pb$, stable (fig. 15).

L'activité de chaque radionucléide de la famille dépend de sa constante radioactive λ, et du nombre de noyaux présents, mais ce nombre dépend lui-même de l'activité de son père, et ainsi de suite.

Les activités de chaque membre de la famille tendent à s'égaliser sur l'activité du radioélément le plus lent : le père. C'est l'**équilibre séculaire.**

L'activité de l'uranium 238, $^{238}_{92}U$, est si faible, qu'elle impose son rythme à toute sa descendance, et l'activité de chacun décroît lentement avec pour période la longue période de l'uranium 238, l'ancêtre de la famille.

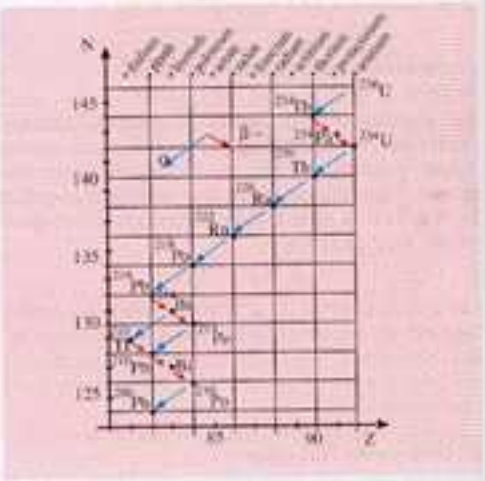


Fig. 15. *La famille radioactive de l'uranium 238.*

7 QUELQUES DÉTECTEURS DE PARTICULES

1. Détecteurs de particules chargées

a) Compteur Geiger

Il est constitué d'un cylindre métallique avec, en son axe, un fil conducteur mince porté à un potentiel positif (1 kV). Il est rempli d'un mélange hélium-argon à la pression atmosphérique et est fermé par une fenêtre mince de mica. Les particules chargées, α et β, ionisent le gaz neutre. Les électrons sont attirés par le fil anode et les ions par le cylindre cathode, et ceci crée un microcourant qui est amplifié à l'extérieur. Les photons γ, qui sont très peu ionisants, sont mal détectés par ce type de compteur.

b) Scintillateur

Un scintillateur est un pièce de plastique dans laquelle est noyée de la substance fluorescente. Quand une particule chargée traverse le scintillateur, elle ionise le produit fluorescent dont l'électron éjecté, en se recombinant, émet de la lumière. Cette lumière est canalisée par le support de plastique et conduite à un photomultiplicateur, qui ainsi compte les particules qui passent (fig. 16).

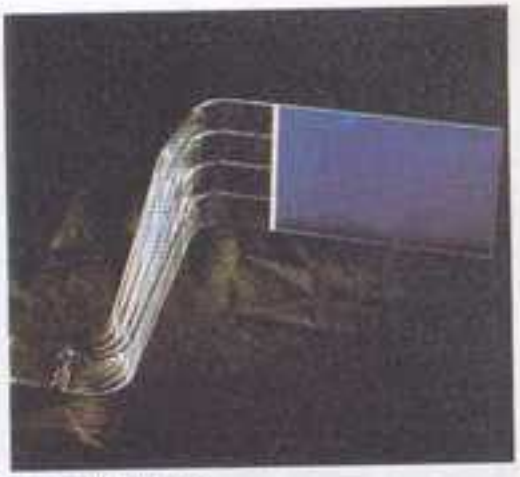


Fig. 16. *Scintillateur.*

c) Chambres à fils

Une chambre à fils est une enceinte plate contenant du gaz inerte (Ar, CO_2 ...), dans laquelle sont disposés :

— deux plans de fils parallèles faisant cathode;

— un plan de fils, à mi-distance des précédents, faisant anode (fig. 17).

Les numéros des fils touchés donnent les coordonnées du point de passage de la particule.

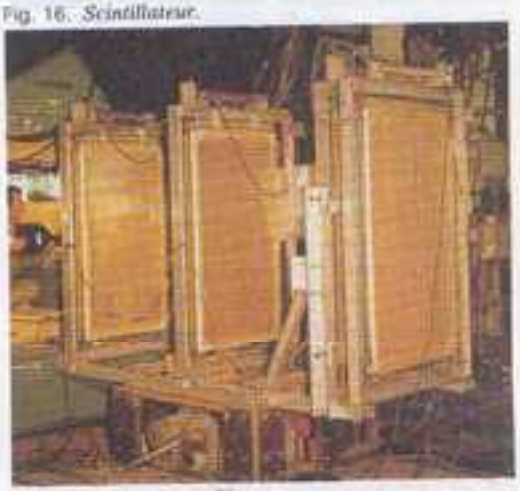


Fig. 17. *Chambres à fils.*

2. Détecteurs de particules neutres

On fait interagir les particules neutres sur de la matière dense, et ces interactions créent des particules chargées que l'on sait détecter.

a) Détecteurs de neutrons

Ce sont des sandwichs fer-scintillateur.

b) Détecteurs de photons

Pour des raisons d'efficacité ce sont des sandwichs plomb-scintillateur.

c) Détecteurs de neutrinos

Ils sont basés sur le même principe, mais comme les neutrinos interagissent très peu, la masse de fer, ou de marbre, intercalée entre les scintillateurs, se chiffre en milliers de tonnes (fig. 18).



Fig. 18. *Les neutrinos interagissent dans le marbre, les particules chargées produites sont détectées par les chambres à fils et les scintillateurs.*
Le détecteur complet pèse 1 500 t; il est installé au C.E.R.N. (Genève).

8 UTILISATION DES RADIONUCLÉIDES

Les radionucléides sont utilisés en biologie, médecine, industrie. Ils sont aisément fabriqués en soumettant les éléments chimiques naturels à une irradiation contrôlée.
Cette irradiation se fait :

— par des neutrons, auprès des réacteurs;

— par des particules chargées, auprès de petits accélérateurs tels que des cyclotrons.

1. Applications biologiques

En 1913, un jeune chercheur hongrois G. de Hevesy était tenu en échec par la séparation d'un isotope naturel radioactif du plomb, le $^{212}_{82}Pb$, du plomb ordinaire le $^{207}_{82}Pb$.

Transformant son échec en réussite, G. de Hevesy eut l'idée d'utiliser la **quasi-identité des propriétés chimiques et physicochimiques**, des deux isotopes, pour étudier le comportement du plomb dans la réaction d'échanges d'ions entre $Pb(NO_3)_2$ et $PbCl_2$, en remplaçant partiellement le plomb par son isotope radioactif et en suivant le cheminement de celui-ci à l'aide d'un compteur. La méthode des indicateurs nucléaires était née.

Cette méthode connut un développement remarquable en biologie dès que l'on sut fabriquer (après la découverte de la radioactivité artificielle) des isotopes radioactifs des principaux constituants du corps humain. Les molécules et les ions qui portent un « indicateur nucléaire » (c'est-à-dire un isotope radioactif) se fixent, au cours des réactions du milieu vivant, sur certains tissus normaux ou pathologiques.

Par leurs rayonnements on peut suivre leurs mouvements, dans un sens ou dans l'autre, à travers les membranes biologiques.

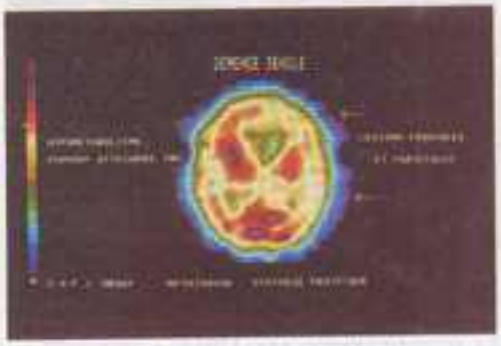


Fig. 19. *Pénétration de méthionine dans le cerveau.*

a) Autoradiographie

On injecte un indicateur, par exemple de l'iode $^{131}_{53}I$, par piqûre. Une heure après, l'iode est fixée dans les follicules de la thyroïde. On prélève du tissu et on le pose sur une émulsion photographique qui est impressionnée par les rayons γ. On observe la photographie au microscope électronique ou à travers une gammacaméra (fig. 19).

b) Mesure des vitesses des réactions

De la même façon, on peut avoir accès aux paramètres de la cinétique des réactions de la vie des cellules. On a pu montrer ainsi que tous les constituants de l'organisme étaient sans cesse dégradés pour être aussitôt synthétisés. Ils étaient donc sujets à un renouvellement métabolique, les produits de dégradation et les intermédiaires de synthèse se mêlant au sein d'un « pool » métabolique à renouvellement rapide.

2. Applications médicales

Elles sont de deux types : la recherche du mal et son traitement.

a) L'investigation clinique

On injecte dans le corps un radionucléide sélectif émetteur β^+, qui se fixe préférentiellement sur l'organe à étudier. Les e^+ émis ne parcourent que quelques mm, car ils rencontrent les électrons des molécules des tissus et s'annihilent en deux photons γ, de 0,51 MeV chaque, émis dans des directions opposées. On détecte les γ, et l'on sélectionne les impacts simultanés ce qui donne la direction de l'émission. En tournant le détecteur autour du patient on obtient avec une très grande précision le point d'émission (fig. 20).



Fig. 20. *Caméra à positrons.*

On fait ceci avec les isotopes β^+ des principaux éléments chimiques constitutifs de l'organisme $^{11}_{6}C$, $^{13}_{7}N$, $^{15}_{8}O$...
Ces radionucléides sont de périodes courtes, 20 min pour le $^{11}_{6}C$, et s'éliminent rapidement. Ils doivent être fabriqués sur place, à l'hôpital même. On obtient par cette méthode une carte de localisation très précise des cheminements de ces éléments. Par exemple, un taux de renouvellement supérieur à la normale, signe la présence de cellules tumérales.

b) La thérapie

L'isotope radioactif est utilisé comme émetteur de rayonnements ionisants destinés à détruire un tissu malade.

• La radiothérapie externe
Elle est essentiellement pratiquée avec le cobalt 60. Le $^{60}_{27}Co$ est émetteur γ et ces γ sont monoénergétiques ce qui permet de calculer précisément la dose absorbée par le malade (fig. 21).

• La radiothérapie interstitielle
On implante directement un petit échantillon radioactif dans le tissu à détruire, par exemple pour soigner le cancer du plancher de la bouche.

3. Applications industrielles

Les principales techniques utilisées sont :

a) Utilisation des traceurs

En dissolvant un peu de substance radioactive dans un fluide (eau-pétrole) on peut suivre ses mouvements par la mesure de la radioactivité aux points de forage.

b) Chimie sous rayonnements

De même que les U.V. et les rayons X accélèrent des réactions chimiques, les rayons γ en accélèrent d'autres, telles que les polymérisations et les durcissements.

c) Absorption des γ

Pour explorer l'intérieur des pièces métalliques on utilise des γ, beaucoup plus pénétrants que les rayons X. Cette technique permet de vérifier la qualité des soudures, de détecter les défauts d'homogénéité du métal, de contrôler les épaisseurs (fig. 22).
Pour les mesures d'épaisseur des feuilles et des couches minces, selon le même principe on mesure l'absorption des γ, et un compteur est relié à des systèmes d'automatisation qui régulent l'épaisseur de la feuille fabriquée (papier-tôle) ou de la couche déposée (peinture, galvanoplastie).

4. Le carbone 14, l'horloge du monde

On peut dater des objets vieux de 5 à 50 siècles en mesurant leur teneur en $^{14}_{6}C$.
Le carbone 14 est un radioélément artificiel produit de manière continue dans l'atmosphère, par le bombardement de l'azote atmosphérique par des neutrons cosmiques lents :

$$^{1}_{0}n + {}^{14}_{7}N \longrightarrow {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}p.$$

Le $^{14}_{6}C$ formé est radioactif β^-, avec une période de 5730 ans. Il s'échange avec le $^{12}_{6}C$, le carbone ordinaire, dans les molécules de dioxyde de carbone atmosphérique, selon une proportion de 10^{-6} qui reste constante.

Les êtres vivants (humains, animaux, végétaux) ingèrent indifféremment les deux isotopes qui demeurent ainsi en proportion relative constante (10^{-6}) dans l'organisme vivant.
Après la mort, le $^{14}_{6}C$ ne peut se renouveler dans le corps, et comme il est radioactif sa teneur diminue au fil du temps, ce qui permet de dater l'instant de la mort.
Par exemple, si une momie est dans un sarcophage depuis 5730 ans, la teneur en $^{14}_{6}C$ de la momie sera moitié de celle d'un être humain et celle du sarcophage sera moitié de celle d'un arbre actuel.



Fig. 21. *Irradiateur au cobalt (centre René Huguenin).*

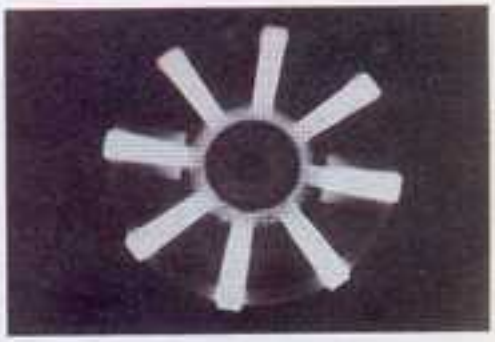


Fig. 22. *Radiographie d'une pièce métallique.*

Fiche expérimentale

L'EXPÉRIENCE CRAB

- **Mesure du pouvoir pénétrant des rayonnements β et γ**
- **Interprétation des résultats compte tenu des incertitudes expérimentales**

CRAB est l'acronyme de **C**ompteur de **RA**diations **B**êta et gamma. Ce sigle recouvre trois choses distinctes mais liées :
— un compteur de radiations, pour les mesures,
— une note proposant une analyse des résultats en fonction des incertitudes expérimentales,
— un logiciel de traitement des données selon cette analyse.
La partie mesures est maintenant au programme de terminale. L'analyse que nous avons proposée, et qui est résumée ici, est facultative.

I) MESURE DU POUVOIR PÉNÉTRANT DES β ET γ

1) Appareillage

Le compteur CRAB comprend (fig. 23) :
— une source radioactive de césium 137, émetteur β^- et γ ; sa période est de 30 ans, et son activité est de 3×10^7 Bq ;
— une série d'écrans absorbeurs en aluminium, et une autre série d'écrans en plomb ;
— un compteur Geiger et son électronique associée pour les comptages ;
— une horloge électronique.

2) Comptages

L'activité de la source diminue d'années en années mais durant l'expérience, elle est constante. Le but du T.P. est de mesurer les pouvoirs pénétrants des β et des γ dans l'aluminium et dans le plomb.



Fig. 23. *Le compteur CRAB.*

Pour cela, on introduit entre la source et le compteur, des écrans d'épaisseurs croissantes. La durée des comptages doit être constante. 20 ou 50 s sont de bons choix.

- On intercale d'abord les **écrans d'aluminium.** Ces écrans sont constitués de feuilles d'aluminium « de ménage » du commerce.
Les feuilles utilisées ont 0,0165 mm d'épaisseur. Elles sont découpées et collées par 1, 2, 5... sur des supports en couronne pour faciliter la manipulation. On compte d'abord, selon la durée choisie, sans écran puis avec une feuille, puis deux etc. Les comptages diminuent en fonction de l'épaisseur x du ou des écrans interposés et les résultats semblent au début suivre une décroissance exponentielle qui correspond à l'absorption des β. Ensuite les comptages restent constants car la source émet aussi des γ qui ne sont pas absorbés par quelques mm d'aluminium (fig. 24).
- On intercale ensuite les **écrans de plomb.**
Ces feuilles de plomb ont 3 mm d'épaisseur. Le plomb absorbe les γ qui traversaient l'aluminium, les comptages diminuent et l'on obtient une belle allure exponentielle (fig. 25).

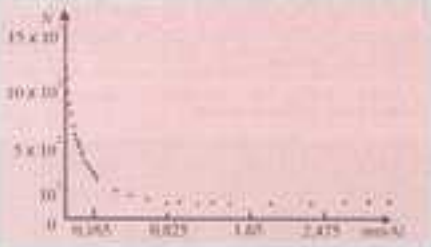


Fig. 24. *Graphique des comptages β avec écrans d'aluminium.*



Fig. 25. *Graphique des comptages avec écrans de plomb.*

3) Résultats

On représente cette absorption des rayonnements dans un matériau, par une loi théorique du type (voir p. 380) :

$$N = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{e} x},$$

e est la demi-épaisseur d'écran, c'est l'épaisseur du matériau qui réduit l'intensité des particules de moitié.

• *Pour les* γ, en cherchant l'abscisse qui correspond à $\frac{N_0}{2}$ (γ_1), on obtient :

$$e_{(\gamma\text{-Pb})} \sim 7 \text{ mm.}$$

• *Pour les* β, il faut soustraire des comptages obtenus, les nombres dus aux γ, et en traçant la courbe (fig. 26), on obtient :

$$e_{(\beta\text{-Al})} \sim 0{,}1 \text{ mm.}$$

• Ces résultats montrent que les β sont très peu pénétrants ($\frac{1}{10}$ mm d'aluminium suffit pour en arrêter la moitié), alors que les γ sont déjà plus dangereux (7 mm de plomb pour le même pouvoir d'arrêt).

4) Questions

La théorie assez simple proposée, rend-elle compte des mesures?
Quelle est la validité de nos résultats?
En effet si toute connaissance est expérimentale, toute expérience est entachée d'incertitudes.

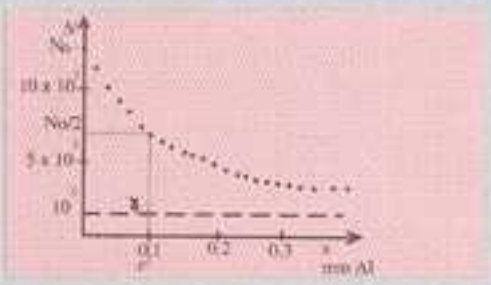


Fig. 26. Agrandissement du début de la courbe d'absorption des β.

II) LA PRISE EN COMPTE DES INCERTITUDES DES MESURES

1) Incertitude sur un point mesuré

On considère le comptage n, obtenu lorsqu'on a interposé l'écran d'épaisseur x.
L'émission radioactive est un phénomène aléatoire et si l'on répétait un grand nombre de fois ce même comptage, les comptages n obtenus, auraient une *distribution* poissonienne que l'on peut approximer, si les n sont grands, par une distribution gaussienne (fig. 27) :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n - n_0}{\sigma}\right)^2},$$

• n_0, la valeur centrale est inconnue, on peut l'approcher en faisant la moyenne des mesures, mais comme on ne fait qu'une seule mesure en pratique, nous dirons que la valeur centrale, c'est la valeur de la fonction théorique : $n_0 \sim F$.
Dans notre expérience $F = A \cdot e^{-\frac{\ln 2}{e} x}$
x est l'épaisseur de l'écran interposé,
A est un coefficient multiplicatif,
e est la demi-épaisseur d'écran du matériau.
Pour l'instant A et e sont inconnus;
• σ est la caractéristique de la distribution, elle définit sa largeur. *Pour les distributions poissonniennes* (voir cours de mathématiques), $\sigma = \sqrt{n_0}$ donc $\sigma = \sqrt{F}$.
Pour nous, expérimentateurs, **σ sera la mesure de l'incertitude de notre mesure.** C'est une définition. Cela signifie que si F est calculé, une mesure n, peut être proche ou lointaine de F, mais que en moyenne, la différence $n - F$ est égale à σ.
En pratique, pour les comptages élevés, $\sigma = \sqrt{F}$ est petit devant F, donc n est proche de F et comme F, pour l'instant est inconnue, on fait l'approximation : $\sigma = \sqrt{n}$.

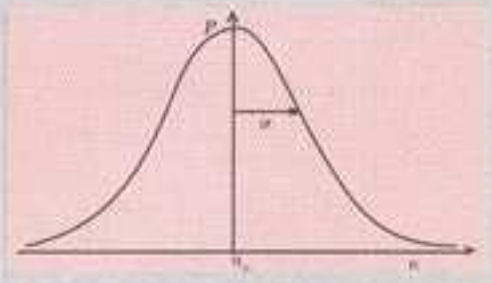


Fig. 27. Distribution gaussienne d'un grand ensemble de mesures.

Chaque point de mesure devrait être représenté par une gaussienne centrée sur F, de largeur $\sigma = \sqrt{F}$ (fig. 28 A). On simplifie le dessin en représentant seulement la **« barre d'erreur »**, c'est-à-dire $\pm\sigma$ autour de F (la théorie) (fig. 28 B), et enfin comme F est inconnu, par la même « barre d'erreur » autour de n (la mesure) (fig. 28 C).

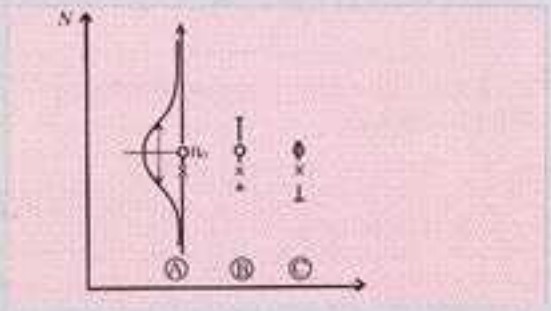


Fig. 28

2) L'estimateur de la qualité de l'expérience

Pour chaque écran interposé, le comptage obtenu N, est donc entaché d'une incertitude $\sigma = \sqrt{N}$. Pour comparer l'expérience à la théorie on calcule pour chacun de ces points la valeur de la fonction F, et notre estimateur sera pour l'ensemble des mesures, la quantité χ^2 (prononcez : ki-carré) :

$$\chi^2 = \sum_J \left(\frac{N-F}{\sigma}\right)^2$$

J est le nombre d'écrans interposés.
C'est une généralisation de la méthode dite des *« moindres carrés »* programmée dans les calculettes, avec deux différences notables :
— la fonction F n'est pas une loi linéaire, mais une fonction quelconque qui dépend du phénomène étudié;
— chaque point est pondéré par son incertitude : les points peu précis (à grand σ) interviennent peu dans la valeur numérique du χ^2.

3) Le traitement statistique

a) La recherche des meilleurs paramètres

• **Pour les comptages γ,** la fonction F dépend de deux paramètres : A et e.
Quelles sont leurs valeurs? Les meilleures valeurs des paramètres sont celles qui rendent le χ^2 minimum.
Avec un ordinateur deux méthodes sont utilisables :
— soit résoudre le système :

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial A} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\chi^2}{\partial e} = 0,$$

ce système se résoud par itérations;
— soit faire des essais systématiques en A et e, et construire une carte du χ^2, autour de valeurs raisonnables, pour trouver le point de coordonnées (A, e) qui correspond aux χ^2 minimum.

• **Pour les comptages β,** la fonction théorique doit tenir compte du fond constant de γ. La fonction sera donc du type :

$$F = A.e^{-\frac{x.n.\beta}{e}} + G,$$

et il y aura trois paramètres à déterminer A, e et G, selon : $\frac{\partial\chi^2}{\partial A} = 0$, $\frac{\partial\chi^2}{\partial e} = 0$ et $\frac{\partial\chi}{\partial G} = 0$.
Les points mesurés étant entachés d'incertitudes, les paramètres qui s'en déduisent par calcul, le sont aussi. Ce calcul est plus complexe et ne sera pas détaillé ici.

b) La mesure de la comptabilité expérience-théorie

Les meilleurs paramètres étant obtenus, on peut, en injectant ces valeurs des paramètres dans la formule théorique, calculer le χ^2 minimum, et cette valeur du χ^2 chiffre la comptabilité.

• *Qu'est-ce qu'une bonne comptabilité?*
En moyenne, pour la meilleure courbe, l'écart $N - F$, entre les mesures et la théorie doit être égal à l'incertitude, donc χ^2 devrait être égal aux nombres de points J mesurés. Mais une courbe est d'autant plus déformable, donc adaptable à l'expérience, qu'elle contient plus de paramètres ajustables. Soit K, ce nombre (ici $K = 2$: A et e ou $K = 3$: A, e et G).
On démontre alors que l'espérance mathématique du χ^2 est égal au nombre de mesures diminué du nombre de paramètres :

$$E(\chi^2) = \text{Nb mesures} - \text{Nb paramètres} = J - K.$$

Il existe une formule qui donne la probabilité d'obtenir un tel χ^2, en fonction de J et de K.

• On peut visualiser la *qualité de l'adaptation* en traçant pour chaque point, la différence $N - F$, et en la comparant à la barre d'erreur.

III) APPLICATION A L'EXPÉRIENCE CRAB

1) Valeurs du χ^2

• Pour les comptages γ
En ajustant, par la méthode du χ^2 minimum la fonction, $F = A.e^{-\frac{x.n.\beta}{e}}$, aux valeurs mesurées, on obtient :

$$A = 876 \pm 29, \quad e = 7{,}22 \pm 0{,}16 \text{ mm}$$

et

$$\chi^2_{min} = 5{,}9.$$

La valeur attendue du χ^2 est de $7 - 2 = 5$.
L'ajustement peut donc être considéré comme *très bon*.

• Pour les comptages β
La fonction cette fois est du type :

$$F = A.e^{-\frac{x.n.\beta}{e}} + G,$$

et le calcul donne :

$$A = 10614 \pm 40, \quad e = 0{,}1273 \pm 0{,}005 \text{ mm},$$

$$G = 969 \pm 9 \quad \text{et} \quad \chi^2_{min} = 631.$$

La valeur attendue du χ^2 est de $32 - 3 = 29$, l'ajustement est donc extrêmement *mauvais*.

2) Adaptation des courbes théoriques aux points mesurés

Les valeurs des paramètres A, e (et G) obtenues, on peut tracer la courbe théorique et la comparer aux points expérimentaux, ou mieux encore, tracer les différences $N - F$, en fonction de x, et les comparer aux « barres d'erreurs ».

• Pour les γ (fig. 29 et fig. 30)
Les différences sont de l'ordre de grandeur des incertitudes, ce que reflète la valeur du χ^2_{min} obtenue. La fonction exponentielle *représente bien* l'absorption des γ par le plomb.

• Pour les β (fig. 31 et fig. 32)
Les différences sont nettement plus grandes que les incertitudes. La valeur du χ^2_{min} le confirme. De plus, ces différences présentent une évolution relativement régulière, ce qui signifie que ce mauvais χ^2 n'est pas dû à de mauvaises mesures, mais que la fonction théorique essayée *ne représente pas* le phénomène physique.

3) Interprétation de ces résultats

Écrire que l'absorption des β dans l'aluminium suit une loi exponentielle, est une hypothèse trop simpliste, car les β ne sont pas monoénergétiques (les γ le sont).
Or il est évident que le pouvoir pénétrant dépend de l'énergie de la particule. La formule $A.e^{-\frac{x}{e}}+G$ implique une seule valeur de e, ce qui n'est justifié que pour des particules monoénergétiques.
Les β ne sont pas monoénergétiques, car la désintégration β se fait en trois corps :

$$^{137}_{55}Cs \longrightarrow {}^{137}_{56}Ba + e^- + \bar{\nu}$$

En poursuivant l'argumentation on peut dire que le mauvais ajustement pour les β est la **signature expérimentale de l'émission d'un antineutrino.** Ce n'est qu'une signature, pas une preuve. Pour prouver, il faudrait construire une formule qui tienne compte de l'émission en trois corps et qu'ensuite cette formule s'adapte bien à l'expérience, c'est une autre étude.

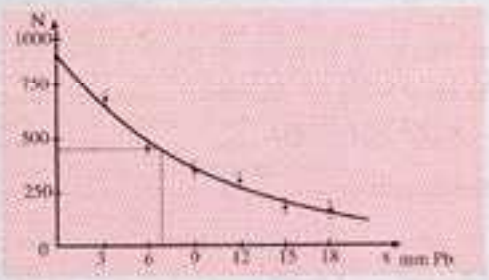


Fig. 29. *Les résultats de l'absorption γ, avec les barres d'erreurs et la courbe théorique.*

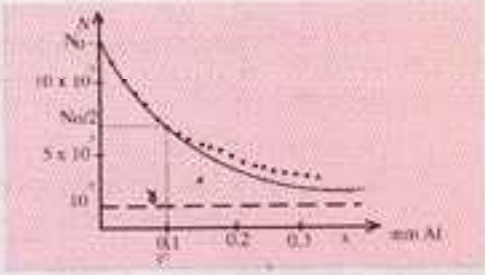


Fig. 31. *Les résultats de l'absorption β et la courbe théorique censée les représenter. Les barres d'erreur ne peuvent être dessinées à cette échelle.*

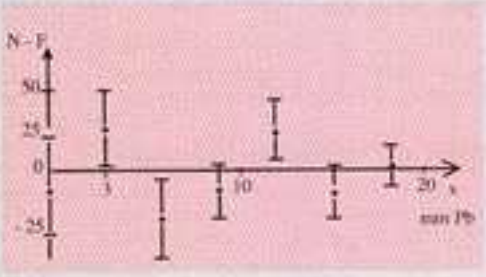


Fig. 30. *Les différences expérience-théorie, pour les γ. La concordance est bonne.*

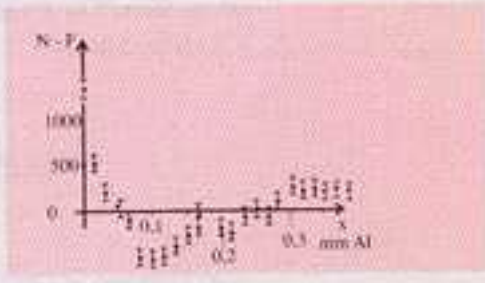


Fig. 32. *Les différences expérience-théorie, pour les β. La divergence est manifeste.*

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

- La radioactivité est un phénomène nucléaire, spontané, aléatoire.

- Le nombre de noyaux radioactifs d'une source décroît en fonction du temps selon la loi :

$$N = N_0 . e^{-\lambda . t}$$

L'activité d'une source est égale au nombre de désintégrations par seconde :

$$A = \lambda . N$$

Elle s'exprime en becquerel (Bq).
La période T, ou demi-vie, est donnée par la relation :

$$\lambda . T = \ln 2 = 0{,}693.$$

- Les principales radioactivités sont :
- Radioactivité α :

$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He$$

Les α sont monocinétiques, très peu pénétrants.

- Radioactivité β^- :

$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}_{Z+1}{}^{A}Y + {}^{0}_{-1}e^- + {}^{0}_{0}\bar{\nu}$$

Les électrons ne sont pas monocinétiques car il y a émission d'un antineutrino. Les β^- sont peu pénétrants.

- Radioactivité β^+ :

$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}_{Z-1}{}^{A}Y + {}^{0}_{1}e^+ + {}^{0}_{0}\nu$$

C'est la radioactivité artificielle aux applications nombreuses.

- Désexcitation γ :

$${}^{A}_{Z}Y^* \longrightarrow {}^{A}_{Z}Y + \gamma$$

Elle suit une réaction nucléaire, spontanée ou provoquée. Les photons γ sont très pénétrants.

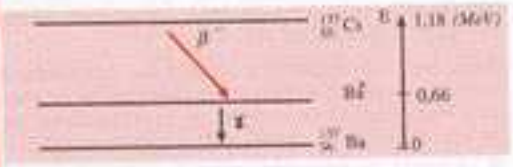
1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

Ce problème est lié à la fiche expérimentale CRAB.

On détecte et compte, à l'aide d'un compteur Geiger, les particules β^- et γ émises par une source radioactive de césium $^{137}_{55}Cs$.

Le schéma radioactif du césium est, pour l'essentiel celui-ci :



L'activité de la source est de 3×10^5 Bq, la période du $^{137}_{55}Cs$ est de 30 ans.

1) Quelle sera l'activité de cette source dans 5 ans? Exprimer en % la perte d'activité de la source.

2) Quel est, actuellement, le nombre de particules émises chaque seconde par cette source?

3) Le nombre mesuré est inférieur à celui calculé, pour deux raisons :

a) L'acceptance géométrique du montage. Le compteur est placé à 4,5 cm de la source et sa fenêtre d'entrée est un cercle de 6 mm de diamètre.

Calculer l'acceptance, c'est-à-dire le rapport entre la surface de la fenêtre d'entrée à la surface d'une sphère de 4,5 cm de rayon (qui si elle existait, recueillerait toutes les particules émises).

En déduire le nombre de β^- et de γ que l'on devrait compter par seconde.

b) L'efficacité de détection du compteur. En fait on compte 12 765 coups en 50 s, dont on sait (par l'étude ultérieure de leur absorption) que 860 sont dus aux γ.

Calculer l'efficacité de détection pour les β, et pour les γ.

Pourquoi ces deux valeurs sont-elles différentes?

4) Calculer, puisque l'activité et la période sont connues :

a) la constante radioactive λ de la source, en s^{-1};

b) le nombre de noyaux de Cs de la source;

c) la masse de Cs dans la source (une mole d'atomes de césium pèse 137 g; la constante d'Avogadro vaut 6×10^{23} mol^{-1}).

Exprimer le résultat en µg.

d) Les γ sont monoénergétiques à 0,662 MeV, les β ne le sont pas, on admet que leur énergie moyenne est de 0,2 MeV.

Calculer l'énergie dégagée par la source chaque seconde (c'est sa puissance), en ne tenant plus compte des efficacités de détection.

Exprimer cette puissance émettrice en $MeV.s^{-1}$ et en watt. ($1\ eV = 1{,}6 \times 10^{-19}$ J.)

5) Si l'on savait, par un dispositif plus performant que celui précédemment utilisé, recueillir cette puissance, quelle masse de césium serait nécessaire pour produire 100 kW, puissance d'un moteur de voiture?

SOLUTION

1) L'activité d'une source décroît avec le temps :

$A = A_0 . e^{-\lambda . t}$, soit : $A = A_0 . e^{-(\ln 2) \frac{t}{T}}$

Avec $t = 5$ ans et $T = 30$ ans ceci donne :

$$A = 3 \times 10^5 \times 0{,}89 = \mathbf{2{,}67 \times 10^5\ Bq.}$$

et la perte d'activité est : $\frac{\Delta A}{A} = \frac{3 - 2{,}67}{3} = 0{,}11$ soit **11 %.**

2) 1 Bq = 1 désintégration par seconde, mais la source émet 2 particules par désintégration : soit $3 \times 10^5 \beta$ et $3 \times 10^5 \gamma$ donc : **6×10^5 particules par seconde.**

3) *a)* L'acceptance a, est le rapport entre la surface réelle et la surface possible.

$$a = \frac{\pi . \frac{d^2}{4}\ \text{(compteur)}}{4\pi . R^2\ \text{(espace)}} = \mathbf{1{,}1 \times 10^{-3}.}$$

Le nombre de β attendu est :

$$3 \times 10^5 \times 1{,}1 \times 10^{-3} = \mathbf{330\ par\ seconde.}$$

Le nombre de γ est identique.

b) En pratique, par seconde, on compte :

en β : $\frac{(12\,765 - 860)}{50} = \mathbf{238\ coups.}$

en γ : $\frac{860}{50} = \mathbf{17\ coups.}$

d'où les efficacités de détection :

en β : $\frac{238}{330} = 0{,}72$, soit : **72 %.**

en γ : $= 0{,}05$, soit : **5 %.**

La différence vient du fait que le compteur Geiger compte les ionisations produites dans le gaz; les β, chargés, sont ionisants; les γ, neutres, le sont très peu.

4) *a)* La relation entre T et λ est : $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$

en se rappelant que : 1 an = $\pi \times 10^7$ s, on a :

$$\lambda = \frac{0{,}693}{\pi . 10^7 \times 30} = \mathbf{7{,}3 \times 10^{-10}\ s^{-1}.}$$

b) $A = \lambda . N$, d'où :

$$N = \frac{3 \times 10^5}{7{,}3 \times 10^{-10}} = \mathbf{4 \times 10^{15}\ noyaux.}$$

c) La masse de césium est :

$$m = \frac{0{,}137 \times 4 \times 10^{15}}{6 \times 10^{23}} = 9 \times 10^{-11}\ \text{kg} = \mathbf{0{,}09\ \mu g}$$

moins d'un dixième de microgramme.

d) Par seconde, la source émet :

$3 \times 10^5 \beta$ de 0,2 MeV d'énergie chaque,

$3 \times 10^5 \gamma$ de 0,662 MeV d'énergie chaque,

soit une puissance de :

$2{,}6 \times 10^5\ MeV.s^{-1} = 2{,}6 \times 10^{11}\ eV.s^{-1}$

$= 4{,}2 \times 10^{-8}\ J.s^{-1} = \mathbf{4{,}2 \times 10^{-4}\ W.}$

1. EXERCICES RESOLUS

Remarquons que la densité de puissance est :

$$\frac{4{,}2\times10^{-8}}{9\times10^{-11}}=466\ \text{W.kg}^{-1}.$$

5) Pour avoir 100 kW de puissance il faudrait donc une masse de césium égale à :

$$\frac{100\times10^{3}}{466}=\mathbf{215\ kg},$$

pas trop lourd, mais très cher.

EXERCICE 2

L'élément carbone est composé principalement des deux isotopes stables, le $^{12}_{6}C$ (98,90 % d'atomes) et le $^{13}_{6}C$ (1,10 % d'atomes). D'autre part, le carbone contient encore une très petite partie de l'isotope radioactif $^{14}_{6}C$ ($T = 5\,730$ années), qui est formé continuellement sous forme de dioxyde de carbone CO_2 dans l'atmosphère terrestre, par l'effet des radiations cosmiques et qui se mélange par l'intermédiaire du cycle CO_2 de la nature, aux isotopes $^{12}_{6}C$ et $^{13}_{6}C$.

1) Quel est la relation mathématique existant entre la constante radioactive λ, et la période T.

2) Pour le taux de désintégration du carbone participant au cycle CO_2 de la nature, on trouve la valeur de 13,6 désintégrations par minute et par gramme de carbone.
Quand une matière végétale (p. ex. un arbre) meurt, elle ne participe plus au cycle CO_2 de la nature.
Par conséquent le taux de décomposition du carbone diminue.
Pour un morceau de bois ayant fait partie d'un navire Viking, on mesure en 1983, 12,0 désintégrations par minute et par gramme de carbone.
En quelle année l'arbre ayant fourni ce bois a-t-il été abattu?

3) On suppose que le nombre de 12,0 désintégrations par minute et par gramme de carbone donné, comporte une erreur de ± 0,2 désintégration par minute et par gramme de carbone. Quelle est l'erreur commise dans le calcul de l'âge du bois à la 2ème question?

4) Quelle est la valeur du rapport isotopique $^{12}_{6}C/^{13}_{6}C$ du carbone participant au cycle CO_2 de la nature? (1 année = 365 jours); $N_A = 6{,}02\times10^{23}$ mol^{-1}.

SOLUTION

1) C'est une question de cours.

$N=\frac{N_0}{2}$ pour $t = T$ d'où :

$$N=N_0.e^{-\lambda.t}\longrightarrow\ \frac{N_0}{2}=N_0.e^{-\lambda.T},$$

soit : $$\lambda=\frac{\ln 2}{T}=\frac{0{,}693}{T}\quad (T\text{ en s}).$$

2) L'activité d'une source est par définition :

$$A=-\frac{dN}{dt}=\lambda.N,\qquad A=A_0.e^{-\lambda.t}.$$

L'activité de l'échantillon est : $A = 12$ désintégrations par minute.

L'activité pour 1 g de carbone du CO_2 de la matière est de 13,6 désintégrations.min^{-1}. Celle de 1 g de carbone du bois mort est de 12 désintégrations.min^{-1}.
Si t est le nombre d'années depuis que l'arbre a été abattu :

$$A=A_0.e^{-\lambda.t},\quad\text{d'où :}\quad t=\frac{1}{\lambda}.\ln\frac{A_0}{A},$$

$$t=\frac{T}{0{,}693}.\ln\frac{A_0}{A}=\frac{5\,730}{0{,}693}\ln\left(\frac{13{,}6}{12}\right)=1\,035\text{ années}.$$

Les mesures étant faites en 1983, l'arbre a été abattu en 1983-1035 = en l'an 948.

Remarque : Le rapport des activités est indépendante de l'unité de temps choisie, c'est pourquoi les activités sont exprimées ici en nombre de désintégrations par minute, alors que la période est exprimée en années.

3) Le calcul de l'imprécision sur t peut être conduit de deux façons à partir de la relation entre t et A :

$$t=\frac{T}{\ln 2}.\ln\frac{A_0}{A}.$$

a) Par le calcul numérique :

Si $A = (12 - 0{,}2)$ désintégrations.min^{-1}, ceci conduit à $t = 898$ années.

Si $A = (12 + 0{,}2)$ désintégrations.min^{-1}, ceci conduit à $t = 1\,176$ années.

donc : $848 < t < 1\,176$,

soit : $t = 1\,035 \pm$ **138 années.**

b) Par le calcul variationnel :
Une petite variation dA de A, entraîne une petite variation dt de t. Le rapport $\frac{dt}{dA}$ est égal à la dérivée de t par rapport à A, donc :

$$\frac{dt}{dA}=\frac{T}{\ln 2}.\frac{1}{A}$$

donc $$dt=\left(\frac{T}{\ln 2}.\frac{1}{A}\right)dA=\frac{5\,730}{0{,}693}.\frac{0{,}2}{12}=138$$

l'incertitude sur t est de **138 ans.**

4) L'activité d'une source est reliée au nombre d'atomes radioactifs présents par :

$$A=\lambda.N\quad\text{d'où}\quad N=\frac{T}{\ln 2}.A$$

Pour l'application numérique il faut exprimer la période en minutes puisque A est donné en nombre de désintégrations par minute.

$$N_{^{14}C}=\frac{5\,730\times383\times24\times60\times13{,}6}{0{,}693}=5{,}9\times10^{12}$$

Dans 1 g de carbone il y a donc :

$5{,}9\times10^{12}$ atomes de carbone 14.

Le carbone 12 est dans une proportion de 0,989, donc dans 1 g de carbone le nombre de $^{12}_{6}C$ est :

$$N_{^{12}C}=\frac{1}{12}\times0{,}989\times6{,}02\times10^{23}=4{,}96\times10^{22}.$$

Le rapport $\frac{N_{^{12}C}}{N_{^{14}C}}$ vaut donc $\mathbf{8{,}40\times10^{11}}$.

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 3

Le polonium $^{214}_{84}Po$, radionucléide α, se désintègre en donnant un noyau de plomb dans son état fondamental.

1) Écrire l'équation-bilan de la désintégration en précisant les nombres de nucléons A, et de protons Z, des partenaires.

On donne :

Po : $m = 209,936\,9$ u

Pb : $m = 205,929\,6$ u

He : $m = 4,001\,5$ u

et : $u = 931,5$ MeV/c^2.

2) a) Écrire l'équation de la conservation de la quantité de mouvement lors de la désintégration, le noyau de polonium étant immobile.

b) Écrire de même l'équation de la conservation de l'énergie totale sans faire l'hypothèse, bien que connue et vérifiée, que les particules α ne sont pas relativistes.

c) En déduire l'expression de la quantité de mouvement des α.

d) Calculer cette valeur, en MeV/c.

3) a) Calculer l'énergie de masse des α, en MeV.

b) Calculer leur énergie totale.

c) Calculer leur vitesse en km.s^{-1}.

d) Calculer leur énergie cinétique.

SOLUTION

1) La particule α est un noyau d'hélium ^4_2He. La réaction nucléaire conserve le nombre de nucléons, donc $A(Pb) = 214 - 4$, et la charge électrique, donc $Z(Pb) = 82 - 2$.

$$^{214}_{84}Po \longrightarrow {}^{210}_{82}Pb + {}^{4}_{2}He.$$

2) a) Le noyau initial étant immobile, les quantités de mouvement du fils (Pb) et de la particule α sont opposées :

$$\vec{0} = \vec{p}_{Pb} + \vec{p}_{\alpha}$$

donc de modules égaux.

b) La conservation de l'énergie totale s'écrit :

$$E_{Po} = E_{Pb} + E_{\alpha}$$

En fonction de la quantité de mouvement cette énergie s'exprime par :

$$E = \sqrt{(p.c)^2 + (m.c^2)^2}.$$

Pour ce noyau père, ceci se réduit à l'énergie de masse, et en notant $p = p_{Pb} = p_{\alpha}$ la valeur commune de la quantité de mouvement des fils, il vient :

$$m_{Po}.c^2 = \sqrt{(p.c)^2 + (m_{Pb}.c^2)^2} + \sqrt{(p.c)^2 + (m_{\alpha}.c^2)^2}.$$

c) Cette équation en $p.c$ se résout par deux élévations au carré successives :

$$p.c = \frac{\sqrt{(m_{Po}.c^2)^2 - (m_{Pb}.c^2)^2 - (m_{\alpha}.c^2)^2)^2 - 4(m_{\alpha}.c^2 \times m_{Pb}.c^2)^2}}{2m_{Po}.c^2}$$

d) On peut calculer $p.c$ d'abord en u.c^2, puis en MeV :

$$p.c = 0,213 \text{ u}.c^2 = 198,8 \text{ MeV},$$

donc : $\boldsymbol{p_{\alpha} = 198,8 \text{ MeV/}c.}$

3) a) $\boldsymbol{m_{\alpha}.c^2 = 3\,727,4 \text{ MeV}.}$

b) Avec la formule : $E = \sqrt{(p.c)^2 + (m.c^2)^2}$, on calcule :

$$\boldsymbol{E_{\alpha} = 3\,732,7 \text{ MeV}.}$$

c) Pour obtenir la vitesse, il suffit d'utiliser la relation :

$$\frac{v}{c} = \frac{p.c}{E}$$

d'où : $\dfrac{v}{c} = 0,053\,26,$

soit : $\boldsymbol{v = 16\,000 \text{ km.s}^{-1}.}$

d) Par définition de l'énergie totale :

$$E = E_c + m.c^2,$$

donc : $\boldsymbol{E_c = 5,3 \text{ MeV}.}$

19 Réactions nucléaires provoquées

1 Réactions nucléaires.
2 Réactions de fission.
3 Réacteurs et surgénérateurs.
4 Réactions de fusion.
5 Énergie nucléaire.



Le nucléaire dans la défense nationale : L'Inflexible, sous-marin dont la propulsion est assurée par un réacteur à fission et dont les armes sont 16 fusées intercontinentales porteuses de bombes à fusion.

1 RÉACTIONS NUCLÉAIRES

1. Différences avec les réactions atomiques

Les réactions atomiques consistent à faire interagir deux atomes, ou deux molécules. Lorsque les cortèges électroniques des deux protagonistes (atomes ou molécules) sont au contact, l'interaction électromagnétique agit et les électrons les moins liés peuvent s'interchanger dans les nuages électroniques, ce qui modifie leurs niveaux d'énergie. Les atomes se retrouvent groupés différemment en de nouvelles molécules. Les énergies mises en jeu sont de l'ordre de l'électronvolt (eV). L'étude de ces réactions s'appelle la chimie...

2. Spécificité des réactions nucléaires

Les réactions nucléaires consistent à faire interagir deux noyaux. Lorsque les noyaux sont au contact, la force nucléaire agit et les nucléons les moins liés peuvent s'interchanger dans les noyaux, ce qui crée de **nouveaux noyaux.** Les énergies mises en jeu sont de l'ordre du mégaélectronvolt (MeV). L'étude de ces réactions s'appelle la physique nucléaire.

3. Lois de la physique nucléaire

Les réactions nucléaires obéissent aux quatre grandes lois :

• *externes au noyau :*
— conservation de la quantité de mouvement;
— conservation de l'énergie.
L'énergie doit être prise au sens de l'énergie totale, énergie de masse comprise, car les réactions nucléaires en changeant la composition des noyaux peuvent produire des variations notables des énergies de liaison. Cette variation d'énergie de liaison, donc d'énergie de masse, si elle est négative vue du système interagissant, se retrouvera sous forme d'énergie cinétique des produits finals. C'est ce qui est recherché industriellement.

• *internes au noyau :*
— conservation du nombre de nucléons, mais avec possibilité de changement proton-neutron;
— conservation de la charge électrique.
Cette conservation doit se faire au niveau du noyau car les électrons du cortège n'interviennent pas dans l'équilibre de la réaction.

L'écriture des réactions nucléaires doit donc respecter :

— la conservation du nombre A;
— la conservation du nombre Z.

4. Quelques réactions nucléaires

a) La première observée

La première réaction nucléaire fut observée par E. Rutherford en 1919.
Des particules α émises par une source radioactive sont envoyées sur une cible d'azote. La très grande majorité des événements sont des chocs élastiques de la particule α sur un noyau d'azote, mais quelques-uns présentent l'émission d'un proton énergique. L'expérience fut reprise, et comprise, par Blackett en 1924, en introduisant une source α dans une chambre à détente, emplie d'azote. Sur 415 000 clichés, 8 présentaient la réaction cherchée : il s'était produit un changement dans la structure du noyau cible, l'azote devenant oxygène, avec émission d'un proton suivant la réaction :

$$^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \longrightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}.$$

b) Une expérience historique

Ce fut celle faite en 1934 par I. et F. Joliot-Curie et qui conduisit à la découverte de la radioactivité artificielle (voir chapitre 18, 4).
Une feuille d'aluminium est irradiée par les rayons α d'une source de Polonium.
Il se produit la réaction nucléaire suivante :

$$^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{27}_{13}\mathrm{Al} \longrightarrow {}^{30}_{15}\mathrm{P} + {}^{1}_{0}n$$

et le phosphore 30 est radioactif β^+ avec une période de 3 min 15 s.
Pour vérifier ceci, les Joliot firent une série de réactions chimiques brillantes pour mettre en évidence la présence de phosphore dans la plaque d'aluminium **avant** que celui-ci ne se désintègre.

c) D'autres réactions nucléaires

Aussitôt ce résultat publié, Cockroft et Walton en Grande-Bretagne, qui disposaient d'un petit accélérateur à protons irradient du carbone et produisent la réaction :

$$^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{12}_{6}\mathrm{C} \longrightarrow {}^{13}_{7}\mathrm{N}.$$

Et aux U.S.A., E. Lawrence lit la note des Joliot et comprend qu'avec son cyclotron, qui à cette époque était réglé pour accélérer des deutons (noyaux du deutérium), il créait sans le savoir des radionucléides artificiels dans les murs de son laboratoire. Il réalise aussitôt la réaction :

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{12}_{6}\mathrm{C} \longrightarrow {}^{13}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{0}n,$$

et confirme ainsi la possibilité de réaliser des réactions nucléaires.

5. Recherche nucléaire

Depuis, les réactions nucléaires sont systématiquement étudiées en laboratoire. Plusieurs accélérateurs fonctionnent en France, citons-en deux très performants : le **GANIL** (Grand Accélérateur National à Ions Lourds) situé à Caen, capable d'accélérer tous les noyaux à quelques MeV par nucléons avec une grande intensité et une grande précision, et le **SATURNE** (parce que ce fut le premier accélérateur annulaire construit en France) à Saclay, capable d'accélérer les noyaux légers jusqu'à 3 GeV par nucléons (fig. 1).

Quelques réactions nucléaires sont d'une importance pratique considérable, ce sont celles qui seront étudiées dans la suite du chapitre.



Fig. 1. *SATURNE.*

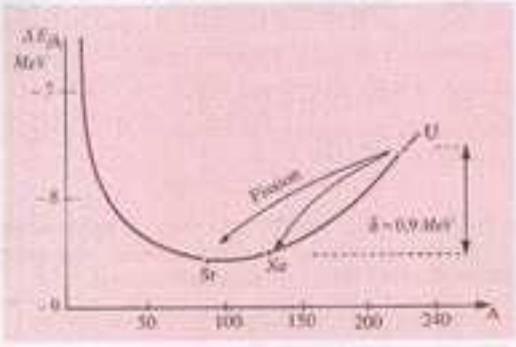


Fig. 2. *Bilan énergétique de la fission.*
En moyenne, dans les fragments, chaque nucléon a une énergie de liaison supérieure (en valeur absolue) de 0,9 MeV à celle qu'il avait dans le noyau lourd.

2 RÉACTIONS DE FISSION

1. Idée directrice

Le terme « **fission** » est emprunté au vocabulaire des biologistes : division en deux des cellules vivantes.
En physique nucléaire il signifie la **cassure d'un noyau lourd en deux noyaux mi-lourds,** les « fragments », de compositions assez voisines.
La caractéristique essentielle de la fission est d'être très **exoénergétique** pour les noyaux lourds.
L'énergie libérée vient du fait que **l'énergie de liaison par nucléon dans les fragments, est plus forte que dans le noyau initial** (fig. 2). Pour l'uranium le gain est d'environ 200 MeV par noyau.
Bien qu'exoénergétique la fission n'est spontanée que pour les noyaux de nombre de masse $A > 250$. C'est pourquoi de tels noyaux n'existent pas dans la nature.
Mais elle a pu être provoquée, et être exploitée industriellement, à partir des noyaux d'uranium et de plutonium, grâce à plusieurs découvertes.

2. Historique

L'idée de bombarder pour les étudier, des noyaux lourds par des neutrons, est de E. Fermi. C'est O. Hahn, en 1939, qui identifia le baryum dans un composé d'uranium irradié par des neutrons, ce qui prouvait que ces neutrons provoquaient la cassure du noyau d'uranium en des noyaux plus légers.
Peu après, F. Joliot-Curie et ses collaborateurs au Collège de France, découvrirent que cette cassure provoquait, outre deux fragments mi-lourds, 2 à 3 neutrons selon la réaction de cassure.

Exemples :

$$^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{94}_{38}\mathrm{Sr} + {}^{140}_{54}\mathrm{Xe} + 2^{1}_{0}n$$

$$^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{93}_{39}Y + {}^{138}_{53}I + 3^{1}_{0}n.$$

Ils prédirent que ces neutrons émis pouvaient initier d'autres cassures sur les autres noyaux d'uranium du milieu et qu'ainsi pouvait s'établir une réaction en chaîne (chacun des neutrons produits par une cassure pouvant provoquer la cassure d'un autre noyau, etc.), cette succession de réactions exoénergétiques créant de l'énergie récupérable.
La première « pile nucléaire » fut construite aux U.S.A. par E. Fermi en 1943. Depuis le parc de centrales nucléaires des pays industrialisés se développe régulièrement.

3. Physique de la fission

Les seuls nucléides qui jouent un rôle dans la fission à l'échelle industrielle sont l'uranium 235, l'uranium 238 et le plutonium 239 :

$$^{235}_{92}U \quad ^{238}_{92}U \quad ^{239}_{94}Pu.$$

a) Détail du mécanisme de fission

Ce qui empêche la fission spontanée de ces noyaux lourds en deux fragments mi-lourds, est la présence d'une barrière de potentiel électrique, qui s'oppose à la séparation de ces deux fragments.
L'explication est identique à celle qui conduit à l'établissement du puits de potentiel du proton dans un noyau :
si dans un noyau Y, deux fragments X' et X se forment, quelle est l'énergie entre ces deux fragments?

• Pour l'établir on imagine ces deux fragments déjà séparés et on rapproche l'un X' de l'autre X, pour reconstituer le noyau.
Soient R' et R leurs rayons et d leur distance mutuelle, le zéro de l'énergie est choisie comme la somme de leurs énergies de masse (elle correspond à d infini).
— Tant que $d > R' + R$, au fur et à mesure que X' se rapproche de X, il subit une répulsion électrique puisque tous deux sont chargés positivement; cette répulsion crée entre eux une énergie potentielle (positive);
— quand $d = R' + R$, la force d'attraction nucléaire agit et les deux fragments se soudent pour constituer le noyau Y, dont l'énergie de masse, parce qu'il est **moins** lié, se situe **au-dessus** du niveau pris comme zéro (fig. 3).

• On considère maintenant Y, le noyau lourd, prêt pour la fission dans lequel les deux fragments X et X' se sont préformés. Ils ne peuvent se séparer et retomber au niveau zéro car le niveau auquel ils se trouvent (celui de Y) est inférieur à celui de la barrière électrique et la fission spontanée ne peut avoir lieu. Pour franchir cette barrière et donc initier la fission il faut apporter un supplément d'énergie de l'ordre de quelques MeV. Le plus facile est de le faire par la **capture d'un neutron,** car le neutron non chargé ne subit pas de répulsion électrique à l'approche du noyau Y, ce qui facilite sa capture même s'il est de très basse énergie.

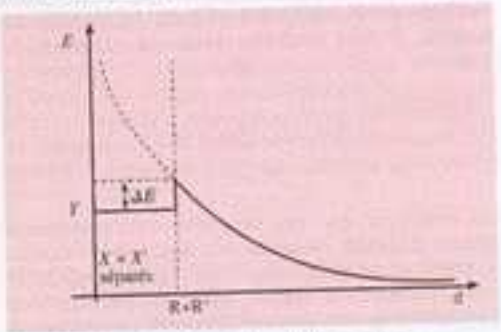


Fig. 3. *Graphique énergétique de la fission.*
La courbe d'énergie potentielle électrique est du type :

$$E_{el} \propto \frac{Z \cdot e \cdot Z \cdot e}{d}.$$

ΔE est la barrière de potentiel, c'est le supplément d'énergie que doit apporter le neutron pour rendre la fission possible.

b) Cas de l'uranium 235

La capture du neutron par le noyau d'uranium 235, produit un autre noyau dit « noyau composé » :

$$^{1}_{0}n + ^{235}_{92}U \longrightarrow ^{236}_{92}U^*,$$

et ce noyau est dans un état excité.
Son énergie d'excitation vient de deux sources :
— l'énergie cinétique incidente du neutron, comprise entre 0,025 eV et 2 MeV;
— l'énergie libérée par la liaison du neutron dans le noyau composé.
Il se trouve que, lorsqu'il est à l'état fondamental, ce noyau composé $^{236}_{92}U^*$, est relativement stable pour un noyau lourd, mais évidemment moins stable que ses fragments, sinon la fission serait impossible. L'énergie de liaison du neutron est de 7 MeV et cette énergie libérée, devenue énergie d'excitation de l'uranium 236 est suffisante pour que les fragments franchissent la barrière de potentiel électrique, même si l'énergie cinétique du neutron est très faible.
Or plus les neutrons sont lents, plus les réactions de capture sont faciles (ceci est un effet quantique hors programme).
Les neutrons émis par les réactions de fission ont une énergie cinétique moyenne de 2 MeV: pour faciliter leur capture ultérieure par l'uranium 235 ils sont ralentis par chocs multiples sur des noyaux légers (qui constituent le **modérateur**) jusqu'à ce que leur énergie cinétique descende à 0,025 eV. Le neutrons de 2 MeV sont dits « **rapides** ». Les neutrons de 0,025 eV sont dits « **thermiques** » car cette valeur d'énergie cinétique est celle que leur procurerait l'agitation thermique à une température ordinaire (300 K).

c) Cas du plutonium 239

De même, par capture de neutron il se produit un noyau composé :

$$^{1}_{0}n + ^{239}_{94}Pu \longrightarrow ^{240}_{94}Pu^*$$

qui ensuite se scinde en deux fragments et quelques neutrons, et ceci quelle que soit l'énergie cinétique du neutron incident.

Les nucléides $^{235}_{92}U$ et $^{239}_{94}Pu$ sont dits **fissiles.**

d) Cas de l'uranium 238

Par le même mécanisme, sous l'impact d'un neutron il se produit un noyau composé :

$$^{1}_{0}n + ^{238}_{92}U \longrightarrow ^{239}_{92}U^*.$$

La fission n'est possible que s'il s'ajoute une énergie excédentaire fournie par l'énergie cinétique du neutron incident.

— Si cette énergie est inférieure à 1 MeV la fission n'a pas lieu, et le noyau composé instable se désintègre par radioactivité β^-.
L'intérêt est que, par deux désintégrations β^- successives, ce noyau instable conduit au plutonium $^{239}_{94}Pu$, le nucléide fissile :

$$^{239}_{92}U^* \xrightarrow{\beta^-} {}^{239}_{93}Np \xrightarrow{\beta^-} {}^{239}_{94}Pu.$$

L'uranium $^{238}_{92}U$ qui ainsi, par irradiation neutronique produit du combustible nucléaire (le $^{239}_{94}Pu$) est dit **fertile.**

— Si cette énergie est supérieure à 1 MeV, la fission se fait, mais les neutrons rapides ont une probabilité de capture assez faible, et cette réaction est donc relativement rare.

c) Propriétés des fragments

Lors de la fission d'un noyau lourd, un grand nombre de réactions de cassures sont possibles car il n'y a pas de contraintes sur la nature des fragments. La figure 4 présente la courbe de l'abondance relative des fragments produits lors des multiples fissions d'une réaction en chaîne. Cette courbe présente deux maxima, l'un vers $A = 96$, et l'autre vers $A = 140$.
Ces fragments présentent un excès de neutrons, car ils proviennent d'un noyau lourd, donc riche en neutrons. Par exemple, dans la fission de l'uranium 235, $^{235}_{92}U$, le noyau composé $^{236}_{92}U^*$ a un rapport $\frac{A-Z}{Z} = 1{,}56$, bien supérieur à celui des noyaux stables qui ont même masse que les fragments.
Les fragments de fission sont donc radioactifs β^- (fig. 5).

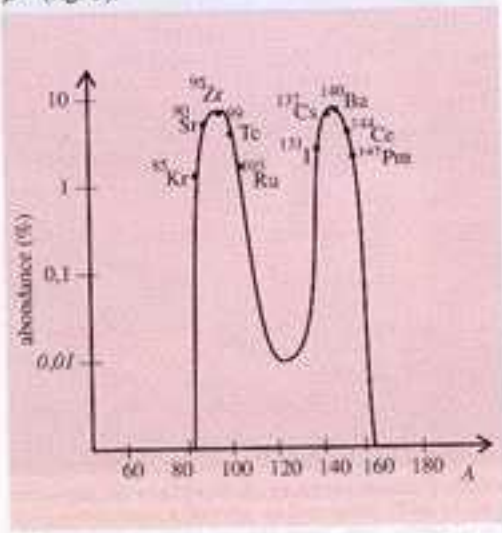


Fig. 4. *Abondance relative des fragments de fission.*

4. Bilan énergétique

• L'énergie libérée, d'environ 200 MeV par fission, se retrouve répartie parmi les produits finals selon le tableau ci-dessous.

Énergie libérée au moment de la fission en 10^{-14} s	Énergie cinétique des fragments	: 167 MeV
	Énergie cinétique des neutrons	: 5 MeV
	Énergie des photons γ	: 6 MeV
Énergie différée due à la radioactivité des fragments	Énergie cinétique des électrons	: 8 MeV
	Énergie des photons γ	: 6 MeV
	Énergie des neutrinos	: 12 MeV
	Total	: 204 MeV

Mais 200 MeV par noyau brisé, correspondent à 80 GJ par **gramme** d'uranium consommé. Pour obtenir une énergie égale il faudrait brûler **2 tonnes** de pétrole.

• Cette énergie crée un échauffement du cœur du réacteur. L'énergie calorifique ainsi produite est évacuée par un fluide caloporteur, pour être ensuite transformée en énergie électrique.

• En France, près de 70 % de l'électricité est d'origine nucléaire. Cela représente plus du quart de l'énergie, toutes formes confondues, consommée par l'industrie et les usages domestiques.

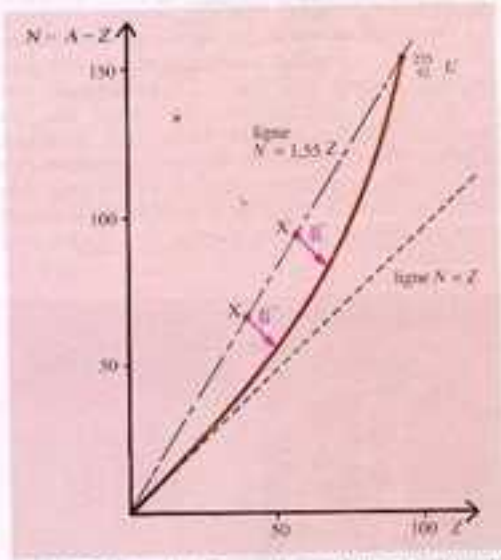


Fig. 5. *Position des fragments de fission par rapport à la vallée de stabilité.*
Ils ont approximativement le même rapport $\frac{A-Z}{Z}$ *que l'uranium dont ils sont issus, soit 1,55, ce qui pour* $A = 96$ *donne* $Z = 38$ *et* $A - Z = 58$ *et pour* $A = 140$ *donne* $Z = 55$ *et* $A - Z = 85$. *Leurs points figuratifs sont bien au-dessus de la vallée de stabilité. Ils sont donc radioactifs* β^-.

3 RÉACTEURS ET SURGÉNÉRATEURS

Les réacteurs nucléaires de puissance sont de deux types :

1. Réacteurs à eau pressurisée

(ou **P.W.R. Pressurized Water Reactor**, car ils sont construits selon un procédé mis au point aux U.S.A.) (fig. 6 et 7).

a) Combustible

C'est l'uranium 235, qui existe à l'état naturel. En effet, le minerai d'uranium est composé de 0,7 % d'uranium 235, $^{235}_{92}U$ fissile, et de 99,3 % d'uranium 238, $^{238}_{92}U$ peu fissile, mais fertile.

Pour la bonne marche des réacteurs, l'uranium est enrichi en uranium 235 combustible par un facteur 5, donc jusqu'à 3,5 % dans l'usine Eurodif de Pierrelatte (Drôme).

Ce mélange enrichi est utilisé sous forme d'oxyde, en pastilles enfermées dans des gaines métalliques dans le cœur du réacteur.

b) Ralentissement des neutrons

Les neutrons produits par la réaction en chaîne ont 2 MeV d'énergie cinétique et doivent être ralentis jusqu'à 0,025 eV. Le **modérateur** est l'eau vapeur pressurisée. Par choc sur les noyaux d'hydrogène de l'eau, les neutrons perdent peu à peu leur énergie cinétique (les noyaux du modérateur doivent être légers, car lors d'un choc le transfert d'énergie est d'autant plus important que les masses des corps sont voisines).

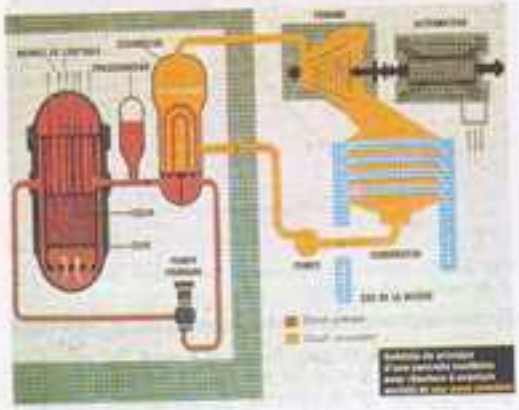


Fig. 6. *Schéma de principe d'un P.W.R.*

c) Contrôle

Les réactions en chaîne doivent être contrôlées pour obtenir un régime permanent (et non une explosion!). Cela implique que le rythme des réactions demeure constant, donc que le nombre de neutrons présents dans le cœur du réacteur demeure constant.
Pour cela, au-dessus, sont disposées des barres de cadmium ou de bore, matériaux neutrophages. Ces **barres de contrôle** sont plus ou moins descendues dans le cœur selon le régime de marche voulu.

d) Circuit thermique

La vapeur pressurisée sert à la fois de modérateur et de fluide caloporteur pour extraire la chaleur. Sa pression est de 156 bar et sa température de 325 °C. Elle est fortement radioactive. Elle circule dans le circuit primaire de refroidissement en passant dans un échangeur de chaleur où elle se refroidit en échauffant la vapeur du circuit secondaire. La température d'échange est de 270 °C. La vapeur du circuit secondaire est envoyée ensuite dans les turbines des alternateurs, mais 270 °C est une température relativement basse pour un cycle thermodynamique, aussi le rendement thermique n'est-il que de 33 %.

e) Bilan de consommation

Un réacteur est chargé à 60 t d'uranium enrichi. Cette charge est renouvelée par tiers tous les ans. La consommation annuelle d'un réacteur est donc de 20 t d'uranium enrichi.
Sur un an de fonctionnement le bilan est celui-ci :



Fig. 7. *Centrale nucléaire de Dampierre en Burly. Une centrale comprend en général 4 réacteurs. On distingue bien, pour chaque unité, le bâtiment du réacteur et la grande tour de refroidissement.*

pour 20 t de combustible :
— la majeure partie de l'uranium 235 qu'il contient est consommée par la fission : 550 kg;
— la fission de l'uranium 238, plus rare, ne porte que sur 100 kg;
— la formation de plutonium consomme 350 kg d'uranium 238 et produit une quantité égale de plutonium;
— la fission de ce plutonium formé, en consomme 200 kg.
Donc une tonne de combustible seulement a été utilisée (550 kg de $^{235}_{92}U$ + 450 kg de $^{238}_{92}U$). Des vingt tonnes initiales il reste 19 t d'uranium très appauvri et 150 kg de plutonium qui est récupéré pour l'amorçage des surgénérateurs et pour les usages militaires.
Mais pour obtenir ces 20 t d'uranium enrichi il a fallu traiter 100 t d'uranium naturel à cause de l'enrichissement d'un facteur 5. Le **rendement en uranium consommé** est donc de 1 % seulement (fig. 8).

f) Puissance fournie

Un réacteur fournit une puissance thermique, l'ingénierie la transforme en puissance électrique, avec un rendement d'un tiers. La puissance électrique d'un réacteur P.W.R. est de 925 MW pour les centrales construites vers 1975 (qui correspondent au bilan de consommation précédent) et de 1300 MW pour les récentes.
Le parc nucléaire français est présenté à la fig. 9.

2. Surgénérateurs

• Dans un P.W.R., des quatre réactions qui s'y produisent :
— fission de l'uranium 235;
— fission de l'uranium 238;
— formation de plutonium;
— fission du plutonium,
la première est prépondérante, et de loin, et elle utilise ainsi près de la moitié des neutrons qui interagissent.
Il y a donc essentiellement consommation de l'uranium 235, matériau rare, et peu de l'uranium 238, relativement abondant.
D'où l'idée de privilégier les trois dernières réactions en diminuant fortement la première, et pour cela de fonctionner avec des neutrons non ralentis, donc rapides, ce qui la défavorise.
De plus, comme la troisième réaction (la formation de plutonium) et un peu plus fréquente que la quatrième (la fission de celui-ci), le réacteur à neutrons rapides, non seulement ne consommera que de l'uranium 238, mais fabriquera un excès de plutonium, matériau fissile précieux. D'où le nom de **surgénérateur.**

Dans un surgénérateur les réactions sont amorcées par une charge de plutonium qui subit la fission :

$$n + Pu \longrightarrow X + Y + 2 \text{ à } 3 \text{ neutrons.}$$

Ces neutrons ne doivent pas être ralentis. Le fluide caloporteur choisi (qui ne doit pas être modérateur) est le sodium liquide sous pression. La température du cœur est de 560 °C. Dans l'échangeur, le sodium chauffe la vapeur d'eau du circuit secondaire à 510 °C, ce qui constitue, pour le fonctionnement des turbines, des conditions plus favorables que celles d'un P.W.R. et le rendement thermodynamique est de 40 %.
Cette filière semble donc attrayante mais sa technologie est délicate.
Le surgénérateur Super Phénix en France a été couplé au réseau électrique en 1986. Un surgénérateur fonctionne en R.F.A., un en U.R.S.S., un troisième est en construction au Japon.

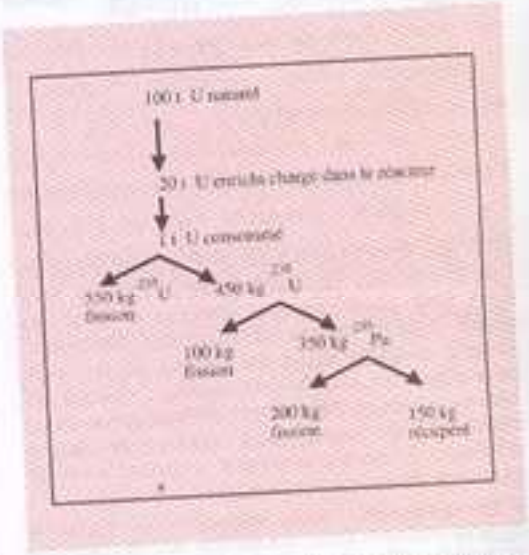


Fig. 8. *Bilan de la consommation d'uranium dans une centrale nucléaire.*



Fig. 9. *Le parc nucléaire français.*

4 RÉACTIONS DE FUSION

Les noyaux légers sont moins liés que les noyaux mi-lourds. La **fusion** consiste à imaginer, et réaliser, des réactions nucléaires qui agglomèrent **deux noyaux très légers** (donc peu liés) **en un noyau moins léger** (mais davantage lié). La différence des énergies de liaison entraîne une libération d'énergie.

1. Fusion contrôlée

a) *Réaction de base*

Actuellement, dans les centres de recherche, toutes les études portent sur la réaction suivante :

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + ^{3}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{1}_{0}n$$

deutérium + tritium ⟶ hélium + neutron

ou, en notation abrégée :

$$d + t \longrightarrow \alpha + n.$$

Cette réaction, simple, est très exoénergétique :

$$\Delta E = -17{,}6 \text{ MeV} \qquad \text{(fig. 10).}$$

Pour que cette réaction ait lieu, il faut accélérer l'un des noyaux initiaux (ou les deux), car tous deux sont électriquement chargés et pour les réunir il faut vaincre la répulsion électrique, jusqu'à ce qu'ils soient au contact où là, selon un mécanisme maintenant connu, l'énergie de liaison nucléaire l'emportera de beaucoup sur la répulsion électrique pour former le noyau d'hélium. L'énergie cinétique nécessaire est de plusieurs centaines de keV.

• En laboratoire cette réaction est facile à réaliser :
— le tritium, qui est gazeux, est inclus dans une lame de cuivre;
— les noyaux de deutérium sont accélérés à 1 ou 2 MeV et frappent cette cible;
— la signature de la réaction est l'émission d'un neutron monoénergétique de 14,1 MeV.

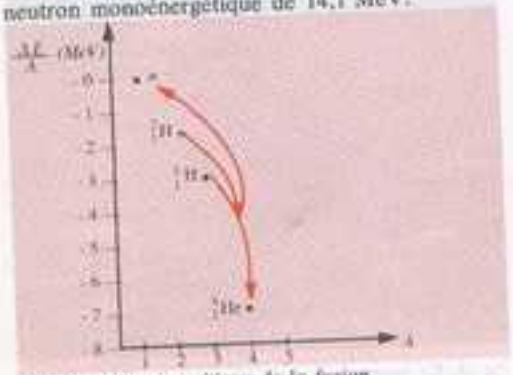


Fig. 10. *Bilan énergétique de la fusion.*

• A l'échelle macroscopique, le problème est de communiquer de l'énergie au deutérium et au tritium, tout en les maintenant localisés pour qu'ils interagissent entre eux.
Il faut donc confiner le milieu.

b) *Méthodes à l'étude*

• *Le confinement inertiel*
Le mélange deutérium-tritium est enfermé dans une bille de verre de 100 µm de diamètre.
L'énergie nécessaire au démarrage de la réaction est apportée par le tir du plus puissant laser disponible.
Son faisceau, en frappant la bille, échauffe et comprime le mélange (fig. 11).

• *Le confinement magnétique*
L'énergie cinétique nécessaire à l'amorçage de la réaction est créée par une élévation de la température du milieu.
La relation entre la température T d'un milieu, et l'énergie cinétique moyenne E_c, des particules en ce milieu est :

$$E_{c\,(\text{eV})} \approx 10\,000\ T_{(\text{K})}.$$

Pour obtenir $E_c = 100$ keV il faut donc porter la température à un milliard de degrés!

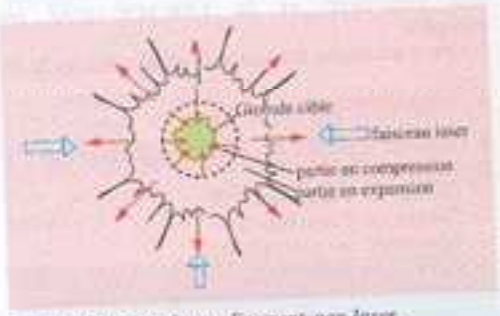


Fig. 11. *Principe du confinement par laser.*



Fig. 12. *Le JET (Joint European Torus) : appareil de recherche commun France-U.K.-R.F.A., construit à Culham U.K.*

En pratique 100 millions de degrés suffiraient, car cette valeur est une moyenne autour de laquelle il existe une distribution des valeurs des températures. Certains noyaux acquéreraient ainsi une énergie suffisante pour amorcer la réaction, qui ensuite continuerait d'elle-même à cause de l'énergie qu'elle libère.
Le confinement est de nature magnétique. La réaction a lieu dans un tore. Le plasma est maintenu confiné au centre du tore par des champs magnétiques intenses, créés par des bobinages enroulés autour de celui-ci.

c) Perspectives offertes

La fusion contrôlée, si la technique en était maîtrisée, offre d'énormes possibilités énergétiques.

• Le deutérium est abondant.
Il y a 30 g.m^{-3} d'eau lourde, D_2O ou HDO, dans l'eau ordinaire, y compris celle des océans.

• Le tritium est facilement produit par irradiation neutronique du lithium :

$$^1_0n + {}^6_3\mathrm{Li} \longrightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^3_1\mathrm{H},$$

et le lithium existe en minerai.
Les réserves énergétiques pour la fusion sont estimées être supérieurs à 10^{11} MTep (MTep = million de tonnes équivalent pétrole). Si l'on compare à la consommation mondiale qui est annuellement de quelques 10^4 MTep, la fusion contrôlée apporterait une solution aux problèmes d'énergie pour des millénaires.
Au point de vue pratique, les étapes nécessaires pour passer du stade laboratoire au stade industriel, conduisent à envisager une filière fusion vers l'an 2020.

• Cette forme d'énergie est non polluante, les produits finals ne sont pas radioactifs.

2. Fusion stellaire

La lumière et la chaleur que le soleil rayonne sont dues aux réactions de fusion qui ont lieu en son sein. Toutes les étoiles de l'univers tirent leur énergie, donc leur brillance, de réactions de fusion.

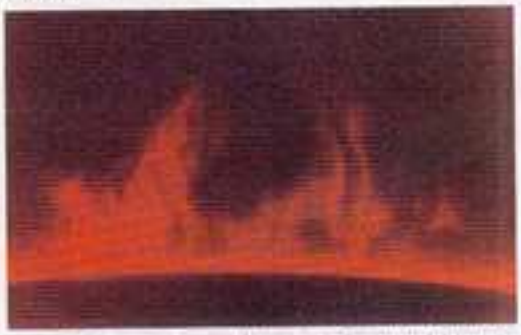


Fig. 13. *Les réactions de fusion dans le Soleil. Une protubérance gazeuse due à un « réacteur de fusion » local.*

Au cours de la vie d'une étoile, plusieurs réactions de fusion se produisent, mais une domine toutes les autres en importance, c'est la **synthèse de l'hélium à partir de l'hydrogène,** l'atome interstellaire.

• Cette synthèse de l'hélium se fait en trois étapes :
— synthèse du deutérium à partir de l'hydrogène :

$$^1_1\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H} \longrightarrow {}^2_1\mathrm{H} + {}^0_1e^+ + {}^0_0\nu,$$

ou plus simplement :

$$p + p \longrightarrow d + e^+ + \nu;$$

— synthèse de l'hélium 3 :

$$^1_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \longrightarrow {}^3_2\mathrm{He} + \gamma;$$

— synthèse de l'hélium 4 :

$$^3_2\mathrm{He} + {}^3_2\mathrm{He} \longrightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_1\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H}.$$

En multipliant les deux premières réactions par deux et en additionnant, le bilan est :

$$4\,{}^1_1\mathrm{H} \longrightarrow {}^4_2\mathrm{He} + 2\,{}^0_1e^+ + 2\,{}^0_0\nu + 2\gamma.$$

ou plus simplement :

$$4p \longrightarrow \alpha + 2e^+ + 2\nu + 2\gamma$$

(cette dernière écriture est globale, les réactions nucléaires se font par choc, un contre un).

• Ces réactions ont lieu à 30 millions de degrés.

• Ce bilan est très exoénergétique :

$$\Delta E = -26{,}7 \text{ MeV}$$

par noyau d'hélium formé.

• L'énergie nécessaire pour initier la première de ces réactions est apportée par l'interaction gravitationnelle qui attire entre eux les atomes d'hydrogène interstellaires. Ensuite, l'énergie dégagée par la réaction entretient la combustion (fig. 13).

• Dans la première des réactions de synthèse de l'hélium, un neutrino est créé, c'est dire que cette réaction est régie par l'interaction faible (voir p. 329). De telles réactions sont très peu probables, ce qui temporise la combustion et explique que les étoiles aient une longue vie (quelques milliards d'années).

• Quand tout l'hydrogène de l'étoile est brûlé, la combustion nucléaire continue :
— fusion de deux noyaux d'hélium en un noyau de béryllium;
— fusion d'un noyau d'hélium et d'un noyau de béryllium en un noyau de carbone. Et ainsi de suite jusqu'à la synthèse des noyaux les plus stables, ceux situés au minimum de la courbe $\Delta E/A = f(A)$.
La fusion régit donc l'évolution de notre univers.

5 ÉNERGIE NUCLÉAIRE

1. Usage de l'énergie nucléaire

L'énergie nucléaire n'a pas été inventée par l'homme, c'est une conséquence de l'interaction forte entre quarks, et elle existe depuis, au moins, le big-bang.
Les chercheurs l'ont découverte, les ingénieurs l'ont appliquée, les « princes qui nous gouvernent », élus de la nation, ont décidé de l'utiliser.
La particularité de l'énergie nucléaire, en fission ou en fusion, est d'être **extrêmement concentrée** : le cœur d'un réacteur ne fait que quelques mètres cubes, et une bombe à hydrogène n'est guère plus grosse qu'une tête humaine.
Actuellement en France :

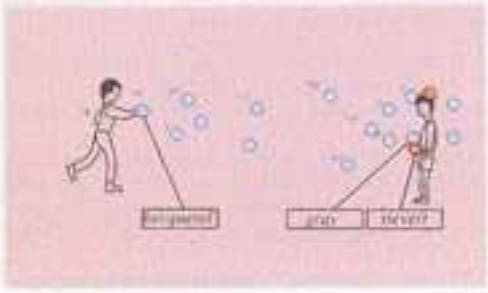
a) Du point de vue industriel

Le parc des centrales nucléaires classiques, à eau pressurisée couvre 70 % de la production d'électricité.
Le surgénérateur Super Phénix est le plus puissant d'Europe (1 300 MW).
Les recherches se poursuivent activement pour la maîtrise de la fusion, tant sur le sol national qu'en collaboration européenne (le JET) (fig. 12).

b) Du point de vue de la défense nationale

• Les bombes « A »
Elles sont basées sur la fission explosive de l'uranium ou du plutonium. Elles sont miniaturisées et peuvent être portées par des missiles type « pluton » lancés à partir de véhicules roulants.

• Les bombes « H »
Elles sont basées sur la fusion de noyaux légers (hydrogène, deutérium, tritium, lithium). Elles peuvent être portées :
— par les bombardiers nucléaires type mirage 2000, soit basés à terre, soit embarqués sur nos deux porte-avions;
— par les fusées à longue portée enterrées au plateau d'Albion;
— par les fusées intercontinentales embarquées sur les sous-marins nucléaires, dont deux d'entre eux au moins sont en permanence à la mer.



2. Gestion des déchets radioactifs

Les déchets radioactifs peuvent être source de nuisances à cause de la radioactivité qu'ils contiennent. La radioactivité étant incontrôlable, ce sont ses porteurs qu'il faut gérer et stocker en milieux protégés (fig. 14).

a) Nuisances

• Lors d'une irradiation du corps humain, l'échauffement peut causer des brûlures, mais surtout, des cellules très fragiles peuvent être détruites, d'où des lésions qui peuvent être graves et irréversibles (fig. 15).
Pour le public, les risques peuvent provenir :
— d'une irradiation interne : par ingestion de radioéléments qui se trouveraient dans la chaîne alimentaire, ou par inhalation de radioéléments qui seraient dispersés en aérosols dans l'atmosphère;
— d'une irradiation externe :
c'est très peu probable, sauf à proximité d'un accident majeur.
Les normes officielles de radioprotection imposent pour le public une dose maximale admissible d'irradiation de 5 mSv par an.
En France, un individu est soumis à une irradiation naturelle externe de 2 à 4 mSv par an. Elle est due :
— à la radioactivité des roches;
— à l'inhalation des émanations de radon, créées par la désintégration de l'uranium du sol.

b) Origine des déchets radioactifs

Les déchets proviennent, pour 15 % des radioéléments utilisés dans l'industrie, la recherche, la médecine, et pour 85 % de l'industrie nucléaire (fonctionnement des réacteurs, retraitement du combustible).
Lorsque le combustible nucléaire a été utilisé dans le réacteur pendant 3 ans, il en est retiré. Le combustible irradié, dont l'activité est considérable, est dans une première étape stocké en piscine afin d'attendre la diminution de l'activité des produits à périodes courtes (fig. 16). En un mois l'activité a déjà diminué d'un facteur 10. Ce stockage en immersion dure 3 ans.
Ensuite le combustible est retraité : les gaines le contenant sont cisaillées, et il est attaqué par l'acide nitrique concentré et chaud. La solution obtenue est soumise à des opérations de séparation, essentiellement par solvants.

Fig. 14. Schématiquement, il est possible de situer la relation entre les trois unités de mesure dans l'image suivante : un enfant lance des objets en direction d'un camarade. Le nombre d'objets envoyés peut se comparer au becquerel (nombre de désintégrations par seconde), le nombre d'objets reçus par le camarade, au gray (dose absorbée) les marques laissées sur son corps selon la nature des objets, lourds ou légers, au sievert (effet produit).



Fig. 16. *L'une des piscines de l'usine de retraitement de La Hague.*

c) Conditionnement et stockage

• *Des déchets technologiques.*
D'abord, leur encombrement est réduit par compactage et/ou incinération; ensuite les résidus sont enrobés de béton, ou de bitume, ou de polymères.
Ils sont concentrés par sédimentation, évapo- semi-enterrés et protégés.

• *Des liquides de moyennes activités.*
Ils sont concentrés, par sédimentation, évaporation..., et réduits en des résidus boueux. Ces boues sont enrobées comme les déchets technologiques et stockés de même.

• *Des solutions de très haute activité.*
Ces solutions représentent de faibles quantités, mais ont une activité un million de fois supérieure aux précédentes. Elles sont pour l'instant stockées telles quelles, en des cuves refroidies.

En parallèle les méthodes de vitrification s'industrialisent. Les blocs de verre seront soit stockés dans des mines profondes désaffectées, soit immergés au milieu de l'Atlantique.

	Symptômes prodromiques		Caractères cliniques			Traitement possible, évolution clinique et issue					
	Nausées, vomissements etc.		Syndrome organique principalement touché	Symptômes caractéristiques	Période critique après l'exposition	Traitement	Délai de guérison	Pourcentage	Létalité	Si les lésions sont mortelles	
Dose reçue (Gy)	Incidence	Délai d'apparition								Décès survenant dans les	Causes habituelles de la mort
1-2	100 %	Minutes	nerveux, cérébral et cardiovasculaire	- crampes musculaires - ataxie - lipothymie - vision floue - coma	1-48 heures	Symptomatique	—	selon aspect	100 %	1-48 heures	Collapsus cardiaque
2-4,5	100 %	0-3 heures	gastro-intestinal	- diarrhée - fièvre - déshydratation - hémorragie	5-14 jours	Palliatif	—	très sombre	80-100 %	2 semaines	Exténuation Collapsus
5-10	100 %	1 heure	Tissus hématopoïétiques	- thrombopénie - leucopénie - hémorragies - infections - agranulocytose (7 Gy)	14 semaines	- Greffes de moelle osseuse - traitement de leucocytes - soins intensifs (isolement, antibiotiques, réhydratation, etc.)	sérieuses mais	incertain (dépend du succès du traitement)	4-90 %	semaines ou mois	Infections Saignements
10-20	80 %	1 heure	Tissus hématopoïétiques	- leucopénie et thrombopénie sévères	—		Plusieurs semaines	Excellent	—	—	—
20	0 %	—	—	—	—		—	Excellent	—	—	—

Fig. 15. *Irradiation totale de l'organisme chez l'homme.*
Classification schématique des genres de doses, symptômes, traitements et issues.

L'essentiel

CE QU'IL FAUT SAVOIR

• Les réactions nucléaires sont des réactions entre noyaux. Après la réaction, les noyaux sont différents des noyaux d'avant la réaction.

Ces réactions nucléaires vérifient les lois de conservation
— de la quantité de mouvement;
— de l'énergie (totale, incluant l'énergie de masse);
— de la charge électrique;
— du nombre de nucléons.

• La **fission** est la cassure d'un noyau lourd en deux noyaux mi-lourds.

La **fission** d'un noyau d'uranium 235, sous l'impact d'un neutron libère environ 200 MeV d'énergie.

Les produits de fission, riches en neutrons, sont radioactifs β^-.

• La **fusion** est l'agglomération de deux noyaux très légers en un noyau moins léger.

La suite des trois réactions qui conduit à la **fusion** de quatre noyaux d'hydrogène en un noyau d'hélium, libère 27 MeV.

Le réactions de fusion sont à l'origine de l'énergie stellaire.

1. EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

Une réaction de fission de l'uranium peut s'écrire :

$$^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \longrightarrow {}^{139}_{53}I + {}^{x}_{39}Y + y\,{}^{1}_{0}n.$$

1) Déterminer x et y.

2) Calculer la perte de masse dans cette réaction.

3) Calculer en joule, l'énergie libérée par 1 kg d'uranium 235.

masses : $^{235}_{92}U$: 235,044 u ; $^{139}_{53}I$: 138,905 u.

$^{x}_{39}Y$: 93,906 u ; $^{1}_{0}n$: 1,009 u.

$$1\ u = \frac{10^{-3}}{N_A}\ kg ; \quad N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ mol^{-1} ;$$

$$c = 3 \times 10^{8}\ m.s^{-1}.$$

SOLUTION

1) • x s'obtient par la conservation de la charge électrique :

$$x = 92 - 53 = \mathbf{39}.$$

Y est l'yttrium.

• y s'obtient par la conservation du nombre de nucléons :

$$y = (235 + 1) - (139 + 94) = \mathbf{3}.$$

2) La perte de masse est égale à la différence des sommes des masses après et avant la réaction :

$$\Delta m = (m_I + m_Y + 3m_n) - (m_U + m_n)$$

$$\mathbf{\Delta m = -0{,}215\ u.}$$

Remarque : Comme $u = 931{,}5$ MeV, on retrouve bien que : $\Delta E = -0{,}215 \times 931{,}5 = -200$ MeV.

3) La perte relative de masse est, pour une réaction :

$$\frac{\Delta m}{m_U} = \frac{-0{,}215}{235{,}044} = -9{,}15 \times 10^{-4}.$$

Pour 1 kg de combustible la perte de masse est donc $\Delta m = -9{,}15 \times 10^{-4}$ kg, ce qui correspond à une libération d'énergie $\Delta E = \Delta m . c^2$:

$$\Delta E = -9{,}15 \times 10^{-4} \times (3 \times 10^{8})^2 = -8{,}23 \times 10^{12}\ J$$

$$\mathbf{\Delta E = -82{,}3\ TJ} \qquad (T = téra = 10^{12})$$

EXERCICE 2

Rôle du modérateur dans les réacteurs

1) On étudie le choc élastique, non relativiste, d'une particule de masse m, sur un noyau immobile, de masse M. Le choc est supposé de plein fouet, particule et noyaux se déplaçant sur le même axe, avant et après le choc.

Soient v_1 et E_1 la vitesse et l'énergie cinétique de la particule avant le choc, v_1' et E_1' les mêmes quantités après, et v_2' la vitesse de recul du noyau cible.

a) Exprimer v_1' en fonction de v_1, m et M en s'appuyant sur la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique.

b) En déduire E_1' en fonction de E_1, m et M.

c) Étudier ce qui devient E_1' dans les trois cas suivants : $M = m$; $M > m$; $M \gg m$.

2) Dans un réacteur, les neutrons produits par la fission ont une énergie cinétique moyenne de 2 MeV. Or, leur probabilité de capture par les noyaux d'uranium 235, pour faire une fission suivante, est d'autant plus grande qu'ils sont plus lents. Il faut donc les ralentir par chocs jusqu'à ce qu'ils aient une énergie cinétique de l'ordre de 0,025 eV. Pour cela on introduit dans le réacteur un modérateur dont les noyaux ont une masse M. Les chocs neutron-modérateur ne sont pas tous de plein fouet, lorsque : le neutron frôle le noyau sans le toucher il garde son énergie cinétique E_1, lorsque le choc est de plein fouet son énergie cinétique devient E_1'. On démontre que l'énergie cinétique la plus probable E, est la moyenne de ces deux extrêmes :

$$E = \frac{1}{2}(E_1 + E_1').$$

a) Exprimer E en fonction de E_1, m et M.

b) Exprimer $E_{1,n}$, l'énergie cinétique des neutrons après n chocs.

c) Combien de chocs le neutron doit-il subir pour être ralenti de 2 MeV à 0,025 eV, selon la nature du modérateur ?

— Le modérateur contient essentiellement des protons, ce qui est le cas des P.W.R. à eau pressurisée, d'où : $M = m$.

— Le modérateur contient des noyaux de carbone (graphite), d'où : $M = 12m$.

— il n'y a pas de modérateur et les neutrons choquent les noyaux d'uranium, d'où : $M = 235m$.

SOLUTION

1) a) La conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$m . v_1 = m . v_1' + M . v_2',$$

et la conservation de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m . v_1^2 = \frac{1}{2} m . v_1'^2 + \frac{1}{2} M . v_2'^2.$$

Par élimination de v_2' il vient :

$$\mathbf{v_1' = -\left(\frac{M - m}{M + m}\right) . v_1}.$$

b) $E_1' = \frac{1}{2} m . v_1'^2 = \frac{1}{2} m . \left(\frac{M - m}{M + m}\right)^2 . v_1^2$

$$= \left(\frac{M - m}{M + m}\right)^2 . E_1.$$

c) • Si $M = m$, $\mathbf{E_1' = 0}$ car $v_1' = 0$.

La particule est arrêtée (c'est le « carreau » de la pétanque).

• Si $M > m$, alors $\mathbf{E_1' < E_1}$, **et la particule est ralentie.**

• Si $M \gg m$, alors $\mathbf{E_1' \simeq E_1}$,

la particule rebondit sur la cible qui lui semble infiniment lourde, elle n'est pratiquement pas ralentie.

1. EXERCICES RESOLUS

2) *a*) L'énergie cinétique moyenne du neutron après un choc est donc :

$$E = \frac{1}{2}(E_1 + E_1') = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\right] . E_1,$$

$$E = \frac{M^2 + m^2}{(M+m)^2} . E_1.$$

b) A chaque choc, l'énergie cinétique du neutron est réduite du facteur $\frac{M^2+m^2}{(M+m)^2}$, donc après n choc :

$$E_{(n)} = \left[\frac{M^2+m^2}{(M+m)^2}\right]^n . E_1.$$

c) • Nombre n de chocs, si $M = m$?

$$0{,}025 = \left[\frac{1+1}{(1+1)^2}\right]^n \times 2 \times 10^6$$

soit : $\left(\frac{2}{4}\right)^n = 1{,}25 \times 10^{-8}$,

ou en inversant : $2^n = 0{,}8 \times 10^8$,

ce qui donne : $n = 26$.

• Si $M = 12m$, le même type de calcul conduit à :

$$\left[\frac{12^2+1^2}{(13)^2}\right]^n = 1{,}25 \times 10^{-8}$$

$$n = 118.$$

• Et pour $M = 235m$, on trouve de même :

$$n = 2\,146.$$

La vapeur d'eau est le meilleur modérateur.

EXERCICE 3

Descente dans l'étoile

Dans une étoile, on trouve essentiellement des noyaux d'hydrogène, qui par le cycle dit : « proton-proton », conduisent à la synthèse de l'hélium.

1) *a*) Écrire l'équation-bilan de ce cycle.

b) Quelle est l'énergie libérée au cours de ce cycle, en MeV et en joule?

2) Dans une étoile, on trouve aussi des noyaux de carbone. Ceux-ci sont utilisés comme point de départ d'une autre chaîne de réactions nucléaires. Cette chaîne de réactions s'appelle le cycle CNO. C'est un cycle fermé comprenant six réactions nucléaires. Le carbone $^{12}_{6}C$ qui est utilisé comme réactif initial, réapparaît à la fin du cycle quand un noyau d'hélium est formé.

a) Compléter les bilans des six réactions nucléaires suivantes qui interviennent dans ce cycle :

$$^{12}_{6}C + \ldots \longrightarrow {}^{13}_{7}N$$
$$^{13}_{7}N \longrightarrow {}^{13}_{6}C + \ldots$$
$$^{13}_{6}C + \ldots \longrightarrow {}^{14}_{7}N$$
$$^{14}_{7}N + \ldots \longrightarrow {}^{15}_{8}O$$
$$^{15}_{8}O \longrightarrow {}^{15}_{7}N + \ldots$$
$$^{15}_{7}N + {}^{1}_{1}H \longrightarrow {}^{12}_{6}C + \ldots$$

b) Montrer que le bilan global de ce cycle est identique à celui du cycle proton-proton vu à la question 1).

Données numériques (toutes ne sont pas utiles) :

$c = 300\,000\ km.s^{-1}$; $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\ C$

— masse de l'électron $= 5{,}486 \times 10^{-4}$ u ;

— masse des noyaux :

$^{1}_{1}H = 1{,}0073$ u, $^{2}_{1}H = 2{,}0134$ u

$^{3}_{2}He = 3{,}0149$ u, $^{4}_{2}He = 4{,}0015$ u

$u = 1{,}661 \times 10^{-27}\ kg = 931{,}5\ MeV/c^2$.

La masse du neutrino sera négligée.

SOLUTION

1) Les trois réactions sont :

$$^{1}_{1}H + {}^{1}_{1}H \longrightarrow {}^{2}_{1}H + {}^{0}_{1}e^{+} + {}^{0}_{0}\nu$$
$$^{1}_{1}H + {}^{2}_{1}H \longrightarrow {}^{3}_{2}He + \gamma$$
$$^{3}_{2}He + {}^{3}_{2}He \longrightarrow {}^{4}_{2}He + 2\,{}^{1}_{1}H$$

a) En multipliant les deux premières réactions par 2 et en additionnant, le bilan global est :

$$\mathbf{4\,{}^{1}_{1}H \longrightarrow {}^{4}_{2}He + 2\,{}^{0}_{1}e^{+} + 2\,{}^{0}_{0}\nu + 2\gamma.}$$

b) L'énergie libérée est due à la différence des masses des produits finals et initaux :

$$\Delta m = (m_{He} + 2m_e) - (4m_H),$$
$$= -0{,}0266\ u,$$

d'où :

$$\Delta E = -\Delta m . c^2 = \mathbf{-24{,}78\ MeV = -4 \times 10^{-12}\ J.}$$

2) Le bilan des six réactions du cycle CNO est le suivant :

(1) $^{12}_{6}C + {}^{1}_{1}H \longrightarrow {}^{13}_{7}N + \gamma$

(2) $^{13}_{7}N \longrightarrow {}^{13}_{6}C + {}^{0}_{1}e^{+} + {}^{0}_{0}\nu$

(3) $^{13}_{6}C + {}^{1}_{1}H \longrightarrow {}^{14}_{7}N + \gamma$

(4) $^{14}_{7}N + {}^{1}_{1}H \longrightarrow {}^{15}_{8}O + \gamma$

(5) $^{15}_{8}O \longrightarrow {}^{15}_{7}N + {}^{0}_{1}e^{+} + {}^{0}_{0}\nu$

(6) $^{15}_{7}N + {}^{1}_{1}H \longrightarrow {}^{12}_{6}C + {}^{4}_{2}He$

$$4\,{}^{1}_{1}H \longrightarrow {}^{4}_{2}He + 2\,{}^{0}_{1}e^{+} + 2\,{}^{0}_{0}\nu + 3\gamma$$

Le bilan nucléaire est le même que celui de la question 1). Ce cycle dit CNO est beaucoup moins fréquent que le précédent.

2. EXERCICES PROPOSÉS

EXERCICES D'APPLICATION

Réactions nucléaires

***Exercice 1**

On accélère faiblement, sous une tension de l'ordre de 1 000 V, des noyaux de deutérium, leur communiquant ainsi une quantité de mouvement et une énergie cinétique très faibles. Cette énergie est néanmoins suffisante pour que ces noyaux, ainsi accélérés, produisent, lorsqu'ils frappent une cible de cuivre contenant du tritium inclus, une réaction de fusion selon le schéma :

$$d + t \longrightarrow \alpha + n$$

On utilisera les valeurs rassemblées dans le tableau ci-dessous

Nucléide	Composition en nucléons	Masse en u
Neutron	${}^{1}_{0}n$	1,008 66
Deutérium	${}^{2}_{1}d$	2,013 55
Tritium	${}^{3}_{1}t$	3,015 50
Alpha	${}^{4}_{2}\alpha$	4,001 50

avec l'unité de masse atomique $u = 931,5\ MeV/c^2$.

1) Vérifier d'après la composition des particules en présence :
— la conservation du nombre de protons;
— la conservation du nombre de neutrons.

2) Calculer, en unité de masse atomique u, le défaut de masse Δm, de la réaction. En déduire l'énergie libérée par la fusion, exprimée en MeV.

3) On pose les hypothèses suivantes :
— la quantité de mouvement et l'énergie cinétique des noyaux de deutérium incidents sont si faibles, qu'on pourra considérer que le système constitué par les particules α et n émises, possède une quantité de mouvement initiale nulle et une énergie cinétique initiale égale à l'énergie libérée par la fusion;
— cette énergie étant elle-même faible devant les énergies de masse des particules concernées, on pourra, pour la simplicité des calculs, utiliser les formules de la mécanique non relativiste.
Écrire dans ces conditions, pour les particules émises, les relations traduisant :
— la conservation de la quantité de mouvement;
— la conservation de l'énergie.
En déduire l'énergie cinétique E_c en MeV, et la quantité de mouvement, p, en MeV/c, du neutron émis.

4) Le noyau de deutérium n'ayant qu'un proton ne porte qu'une charge électrique. Calculer l'énergie acquise par ce noyau sous une tension de 1 000 V, en eV et en MeV. En déduire sa quantité de mouvement en MeV/c. Les hypothèses imposées dans la question 3) étaient-elles justifiées?

Exercice 2

Des protons possédant une énergie de l'ordre du dixième de MeV, peuvent provoquer la fission du lithium avec émission de deux particules α, selon :

$${}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}H \longrightarrow 2\,{}^{4}_{2}He$$

L'énergie produite lors de cette transformation est communiquée sous forme d'énergie cinétique E_c aux deux particules α émises. Calculer E_c en eV.
On donne en u :
masse nucléaire ${}^{7}_{3}Li = 7,014\,4$;
masse nucléaire ${}^{4}_{2}He = 4,001\,5$;
masse proton $= 1,007\,3$;
$u = 931,5$ MeV.

Réactions de fission

***Exercice 3**

Le plutonium ${}^{241}_{94}Pu$ est un nucléide fissile produit dans les réacteurs nucléaires. Le plutonium 241 est radioactif β^- et sa période est 13,2 ans. Il engendre ainsi l'américium (Am), lui-même radioactif α (période 460 ans) qui se désintègre en un noyau de neptunium (Np).

A) 1) Écrire les équations des deux réactions de désintégration successives.

2) Calculer en MeV l'énergie libérée par la désintégration de l'américium.

3) Le noyau d'américium est supposé au repos dans le repère du laboratoire. On fait l'hypothèse que le noyau de neptunium et la particule α ne sont pas relativistes.

a) Justifier cette hypothèse.

b) En appliquant les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie, montrer que le rapport des énergies cinétiques de la particule α et du noyau de neptunium est l'inverse du rapport de leur masse. En déduire l'énergie cinétique maximale de la particule α.

B) De la charge de combustible irradié extrait d'un réacteur nucléaire, on prélève un échantillon contenant une masse de 1 kg de plutonium 241 « non fissionné ».

1) Calculer l'activité de cet échantillon due au plutonium. (On rappelle que l'activité d'une substance radioactive est le nombre de noyaux désintégrés par unité de temps.)

2) Au bout de combien de temps l'activité est-elle divisée par 1 000?

Données numériques :

masse du noyau d'américium : 241,056 7 u;

masse du noyau de neptunium : 237,048 0 u;

masse de la particule α : 4,001 5 u;

masse de l'atome de plutonium : 241,056 7 u;

$1\ u = 931,5\ MeV/c^2 = 1,67 \times 10^{-27}$ kg.

2. EXERCICES PROPOSES

Exercice 4

Une centrale nucléaire qui utilise la fission de l'uranium 235, fournit une puissance électrique de 900 MW, la transformation de l'énergie thermique en énergie électrique s'effectuant avec un rendement de 33 %. Quel est l'ordre de grandeur de la masse d'uranium 235 nécessaire à un an de fonctionnement? fonctionnement?

N.B. : On admettra qu'une fission de l'uranium 235 libère une énergie de 200 MeV.

Exercice 5

Parmi les nombreuses réactions qui peuvent avoir lieu dans une réaction nucléaire, on étudie le bilan de la fission suivante :

$$^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \longrightarrow {}^{\ldots}_{54}Xe + {}^{95}_{\ldots}Sr + 2\,{}^{1}_{0}n$$

Les deux produits formés sont radioactifs. Les énergies de cohésion par nucléon sont respectivement : 7,7 MeV pour l'uranium; 8,4 MeV pour le xénon; 8,7 MeV pour le strontium.

1) Dans le bilan de la réaction, remplacer les points par les nombres manquants.

2) Donner l'expression de la masse des différents atomes intervenant dans cette réaction, en fonction de la masse M_p du proton et de celle M_n du neutron (les masses demandées pourront être exprimées en MeV/c^2).

3) Calculer la variation de masse qui se produit lors de la fission d'un atome d'uranium 235, suivant le bilan précédent, en précisant s'il s'agit d'une augmentation ou d'une diminution (le résultat pourra être exprimé en MeV/c^2).

4) En déduire l'énergie libérée par la fission de 1 kg d'uranium 235; le résultat devra être exprimé en joule. On donne les valeurs numériques suivantes :

constante d'Avogadro $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ mol^{-1}$;

célérité de la lumière dans le vide $c = 3 \times 10^{8}\ m.s^{-1}$;

charge élémentaire $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\ C$.

* Exercice 6

1) Dans une centrale nucléaire, l'une des réactions de fission de l'uranium 235 peut se résumer ainsi :

$$^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{94}_{40}Zr + {}^{140}_{54}Te + \ ?$$

a) Compléter l'équation de la réaction.

b) Calculer l'énergie produite par la désintégration d'un gramme d'uranium 235 exprimée en MJ (Mégajoule) sachant que l'énergie moyenne de cohésion par nucléon est :

7,7 MeV pour ^{235}U, 8,8 MeV pour ^{94}Zr

8,45 MeV pour ^{140}Te.

c) Pour que cette réaction puisse produire une énergie constante en fonction du temps comment doit-on utiliser les produits de la réaction?

2) Parmi les produits de la fission, on trouve dans le cœur de la centrale nucléaire les produits radioactifs suivants qui se désintègrent selon les réactions dont on complétera les équations :

$^{137}_{55}Cs \longrightarrow {}^{137}_{56}Ba + ?$ Période $T_1 = 30$ ans

$^{87}_{37}Rb \longrightarrow {}^{87}_{38}Sr + ?$ Période $T_2 = 5 \times 10^{11}$ ans

$^{87}_{35}Br \longrightarrow {}^{87}_{36}Kr + e^{-} + ?$ Période $T_3 = 55$ s

a) Préciser les caractères comparés des différents rayonnements qui se produisent.

b) Écrire la loi de variation du nombre N d'atomes restant, en fonction du temps, si on désigne par N_0 le nombre d'atomes à $t = 0$ et par T la période. Représenter $N = f(t)$ pour une durée égale à 4 périodes.

c) Calculer le pourcentage d'atomes radioactifs restant, pour chacune des 3 désintégrations, au bout de 3 ans de séjour dans la piscine dite de refroidissement. Il n'est pas demandé plus de précision que ne peuvent en fournir les calculatrices courantes.

d) Si initialement on avait introduit dans la piscine 1 g de chacun des 3 produits radioactifs, quelle serait la vitesse de désintégration de chacun des produits restants au moment de la sortie de la piscine 3 ans après?
Prendre pour unité de temps, le jour.
Si on admet que, pour l'homme, le danger des substances radioactives est fonction du nombre de radiations cumulées par jour, quel est parmi les trois, le produit le plus dangereux?

Données : $N_A = 6{,}022 \times 10^{23}\ mol^{-1}$;
$1\ MeV = 1{,}6 \times 10^{-19}\ MJ$.

* Exercice 7

On donne :

charge électrique élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\ C$;

masse de l'électron : $m = 0{,}91 \times 10^{-30}\ kg$;

célérité de la lumière dans le vide : $C = 3 \times 10^{8}\ m.s^{-1}$;

masse de la particule α : $m_\alpha = 0{,}67 \times 10^{-26}\ kg$;

constante d'Avogadro : $N_A = 6{,}022 \times 10^{23}\ mol^{-1}$;

numéro atomique de l'uranium (U) : 92;

numéro atomique du neptunium (Np) : 93;

numéro atomique du plutonium (Pu) : 94.

Dans un réacteur nucléaire surrégénérateur, des neutrons issus de la fission d'un noyau d'uranium 235 peuvent transformer un noyau d'uranium 238 inutilisable en tant que combustible nucléaire en plutonium 239 qui, lui, est un noyau fissile. On envisage la succession de réactions nucléaires : un noyau d'uranium 235 subit une fission qui libère des neutrons; les quatre réactions nucléaires suivantes sont alors possibles successivement.

a) Un noyau d'uranium 238 capture un de ces neutrons;

2. EXERCICES PROPOSÉS

b) le noyau obtenu subit alors une désintégration de type β^- ;

c) le nouveau noyau obtenu subit une nouvelle désintégration de type β^- ;

d) le dernier noyau formé subit enfin une désintégration de type α.

A) *Bilan d'une réaction de fission*
Écriture des réactions

1) La fission d'un atome d'uranium 235 dégage en moyenne une énergie de 200 MeV.

a) Combien de fissions par seconde se produisent dans un réacteur nucléaire dont la puissance est : $P = 1{,}3$ GW?

b) Quelle masse M d'uranium 235 est utilisée chaque jour dans un tel réacteur? Exprimer le résultat en kg puis en g.

2) Écrire le schéma des quatre réactions nucléaires dans l'ordre *a*, *b*, *c*, *d*. Vérifier que l'uranium 235 se forme au cours de la réaction *d*. Énoncer les deux lois de conservation qui permettent d'écrire ces schémas.

B) *Énergie et vitesse des particules*

1) La particule α (ou hélion) est émise au cours de la réaction *d*. Elle possède une énergie cinétique de 5,1 MeV. Calculer la vitesse v_α de cet hélion en utilisant la mécanique classique. Justifier cette approximation.

2) Calculer E_{0e}, l'énergie de masse de l'électron. Donner le résultat en joule et en MeV.

C) *Choc élastique d'un hélion sur un neutron au repos*
On considère un hélion de vitesse $\vec{v}_\alpha$ produit au cours de la réaction *d*. Il rencontre en un point *A* de l'espace un neutron immobile. Les deux particules supposées ponctuelles sont projetées avec des vitesses $\vec{v}'_\alpha$ pour l'hélion et $\vec{v}'_n$ pour le neutron, $\vec{v}_\alpha$, $\vec{v}'_\alpha$ et $\vec{v}_n$ étant colinéaires.

1) Écrire la conservation de la quantité de mouvement relative à ce choc. Quelle autre loi de conservation peut-on écrire si le choc est parfaitement élastique?

2) En déduire $\vec{v}'_\alpha$ et v'_n.

On donne $v_\alpha = 15 \times 10^6$ m.s^{-1}.

On suppose que m_α, masse de la particule α est égale à 4 fois m_n, masse du neutron.

D) *Déviation de l'hélion par un champ électrique*
Après plusieurs chocs avec des neutrons immobiles, l'hélion, de charge $q = 2e$, arrive avec une vitesse $\vec{v}_0$ en *O*. Il est soumis à un champ électrique $\vec{E}$ sur une distance ℓ dans un condensateur plan dont les armatures sont distantes de *d*. Faire un schéma en précisant la direction et le sens de $\vec{E}$ pour que la déviation ait lieu vers le bas, et le signe des charges portées par les armatures. Déterminer v_0 sachant que la tangente de l'angle θ de déviation à la sortie du condensateur est $\tan\theta = 9{,}55 \times 10^{-2}$.
On donne :
$U = 1\,000$ V aux bornes des armatures; $\ell = 0{,}04$ m;
$d = 0{,}02$ m.

L'énergie du Soleil

*** Exercice 8**

Une grande partie de l'énergie émise par le Soleil est attribuée à un ensemble de réactions nucléaires dont le bilan peut s'écrire :

$$4\,{}^1_1\mathrm{H} \longrightarrow {}^4_2\mathrm{He} + 2\,{}^0_{+1}\mathrm{e}^+ + 2\,{}^0_0\nu + 2\gamma$$

1) *a*) Le neutrino ${}^0_0\nu$ accompagne souvent l'émission du positron. Est-ce une particule facile à détecter?

b) A quelle particule le rayonnement γ est-il associé? Donner, dans le cas qui nous intéresse, un ordre de grandeur de la longueur d'onde du rayonnement γ (par exemple : 1 pm, 1 nm, 1 µm, 1 mm, 1 m).

2) Pour la réaction écrite ci-dessus, calculer littéralement la perte de masse Δm du système; le résultat fera apparaître m, M_1 et M_2 (grandeurs définies dans les données à la fin de l'énoncé).
Donner sa valeur numérique en unité de masse atomique.
Quelle sorte de réaction nucléaire est ici mise en jeu?
Calculer la fraction $\alpha = \dfrac{\Delta m}{4M_1}$ de la masse du système qui est convertie en énergie.

3) *Réserve d'énergie*
La masse actuelle du Soleil est estimée à 2×10^{30} kg. Admettons que seule la réaction ci-dessus intervient et qu'une proportion de 10 % de la masse totale est placée dans les conditions où la réaction peut se produire.
Évaluer la masse M_ℓ que le Soleil peut encore perdre dans ces conditions pour rayonner l'énergie correspondante dans les siècles futurs (on l'exprimera en kg).

4) *Espérance de vie du Soleil*
La puissance totale rayonnée par le Soleil est $3{,}7 \times 10^{26}$ W. Calculer la masse μ perdue par seconde par le Soleil (en kg.s^{-1}). On peut rapprocher ce résultat de celui de la question précédente pour évaluer approximativement l'espérance de vie du Soleil.
Calculer cette durée T en seconde, puis en année (à titre indicatif, l'âge actuellement admis pour le Soleil est 5×10^9 ans).

Données : $1\ \mathrm{eV} = 1{,}602 \times 10^{-19}$ J;

$N_A = 6{,}023 \times 10^{23}$ mol^{-1};

$1\ \mathrm{u} = \dfrac{10^{-3}}{N_A} = 1{,}660 \times 10^{-27}$ kg;

célérité de la lumière : $c = 2{,}998 \times 10^8$ m.s^{-1};

masse de l'électron ou du positron :

$m = 0{,}000\,548\,6$ u;

masse du noyau ${}^1_1\mathrm{H}$: $M_1 = 1{,}007\,284$ u;

masse du noyau ${}^4_2\mathrm{He}$: $M_2 = 4{,}001\,502$ u.

2. EXERCICES PROPOSES

Réactions de fusion

EXERCICE 9

Pour un gaz de particules en équilibre thermique, l'énergie cinétique des particules est reliée à sa température par la relation :

$$E = 0{,}86 \times 10^{-4} T \quad \begin{cases} E \text{ en eV} \\ T \text{ en K} \end{cases}$$

1) Quelle est l'énergie cinétique des particules en équilibre thermique à la température ordinaire, $T = 300$ K?

2) A quelle température faudrait-il porter un mélange deutérium-tritium pour que les noyaux aient une énergie cinétique supérieure à l'énergie de répulsion électrique, de l'ordre de 200 keV, de façon que la réaction de fusion s'amorce?

Exercice 10

On peut ramener schématiquement le problème de la fusion nucléaire, à l'union de 4 protons, aboutissant, après diverses réactions à un noyau d'hélium, avec dégagement d'une énergie de 25 MeV.
En supposant que ces protons proviennent des atomes d'hydrogène contenus dans deux molécules d'eau, calculer :

1) L'énergie qu'on pourrait recueillir à partir d'un centimètre cube d'eau.

2) La masse d'eau correspondant à la consommation annuelle moyenne en énergie d'un foyer français (= 2 000 kWh).

3) La masse d'eau correspondant à la consommation annuelle de la France en énergie électrique (= 205 TWh).

EXERCICES DESTINÉS A TESTER LES CAPACITÉS

Exercice 11 A.1.a.

Définir les termes suivants :

fusion; fission; fragments; surgénérateurs.

Exercice 12 A.1.b.

Donner l'ordre de grandeur
— de l'énergie dégagée par la fission d'un noyau d'uranium 235 (en MeV);
— de la puissance d'un réacteur nucléaire (en MW);
— de l'énergie libérée par la synthèse d'un noyau d'hélium (en MeV).

Exercice 13 A.1.c.

Quelles sont les lois de conservation à respecter dans les réactions nucléaires? Les réactions dans un réacteur produisent-elles des neutrinos ou des antineutrinos?
Même question pour les réactions de fusion dans le Soleil? Pourquoi n'utilise-t-on pas l'eau comme modérateur dans les surgénérateurs?

Exercice 14 A.2.b.

Calculer l'énergie cinétique minimale des particules α qui provoquent la réaction suivante :

$$^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{27}_{13}\mathrm{Al} \longrightarrow {}^{30}_{15}\mathrm{P} + {}^{1}_{0}n$$

$m\,{}^{4}_{2}\mathrm{He} = 4{,}002\,6$ u; $m\,{}^{27}_{13}\mathrm{Al} = 26{,}981\,5$ u;
$m\,{}^{30}_{15}\mathrm{P} = 29{,}978\,3$ u; $m\,{}^{1}_{0}n = 1{,}008\,7$ u;
1 u = 931,5 MeV/c^2.

Exercice 15 B.1.

Demander, par écrit ou par téléphone, au service des relations publiques du C.E.A. ou de l'E.D.F. des renseignements concernant :
— le pourcentage d'électricité d'origine nucléaire en France;
— l'état actuel des recherches sur la fusion contrôlée;
— où en est l'utilisation de la vapeur des centrales pour l'horticulture et la pisciculture.

Exercice 16 B.2.

Rédiger en 100 ± 10 mots l'origine de l'énergie solaire pour un public de niveau classe de 6e.

Exercice 17 B.3

Représenter point par point la courbe

$$y = \frac{A}{[(x-90)^2 + 10^2] \times [(x-140)^2 + 10^2]}$$

Quel résultat physique cette formule peut-elle représenter?

Exercice 18 B.4.

Préparer, dans la langue étrangère de votre choix, quatre transparents pour illustrer un exposé sur la fission, niveau terminale.

Exercice 19 C.1.a.

Écrire l'ensemble des réactions, qui par fusion du noyau d'hélium avec un autre hélium ou avec les produits formés, conduit au silicium ${}^{28}_{14}\mathrm{Si}$. Trouver la chaîne qui demande le moins de réactions.

Exercice 20 C.2.a.

— Pourquoi un réacteur n'explose-t-il pas?
— Pourquoi le soleil n'explose-t-il pas?

*** Exercice 21** C.2.b.

Une particule α émise par le Soleil le quitte avec une vitesse radiale v.
L'énergie potentielle gravitationnelle est donnée par la relation :

$$E_p = G \cdot M_\odot \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_\odot} - \frac{1}{d}\right)$$

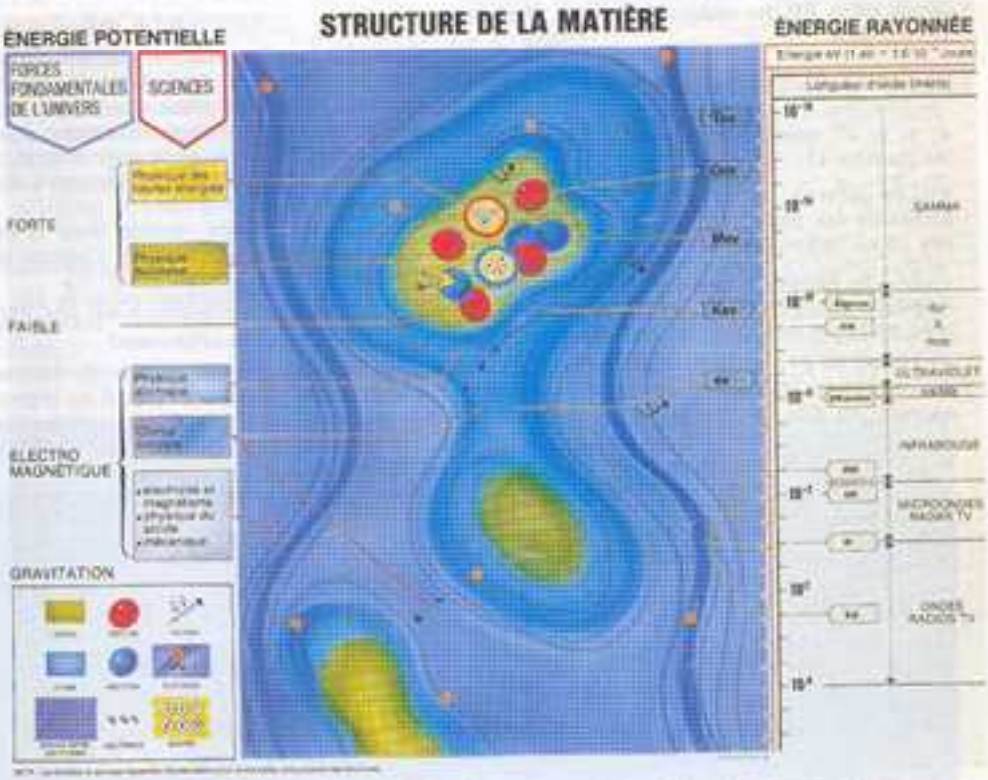
En déduire la vitesse minimale que doit posséder la particule α pour ne pas retomber sur le Soleil.
(d est la distance de la particule α au centre du Soleil, $d \geq R_\odot$.)
Même question pour un électron.
Même question pour un neutrino.

20 Lecture : les particules

1 Les particules au lycée.

2 Les particules vues d'un centre de recherche

3 Les particules en l'univers.



Composition psychédélique sur la hiérarchie dans la structure de la matière qui nous compose.

1 LES PARTICULES AU LYCÉE

Prenons le programme de terminale C et versons-le sur un tamis qui n'en retient que les particules. Que trouvons-nous?

1. Des idées nouvelles

a) La mécanique relativiste

b) L'équivalence énergie-masse

— La possibilité de création d'énergie, dans les réacteurs.
— La possibilité de création de matière, auprès des accélérateurs, mais cette matière est instable.

c) Une nouvelle unité, le MeV

Cette nouvelle unité d'énergie, beaucoup plus petite que le joule, a été rendue nécessaire par le fait qu'entre le monde ordinaire macroscopique, et celui de la particule élémentaire, il y a le facteur d'Avogadro : $N_A = 6 \times 10^{23}$. Ce facteur est énorme. Supposons que pour murmurer « toi aussi mon fils », dans les circonstances que l'on sait, J. César ait exhalé 2 L d'air, que nous prenions ces 2 L et les brassions dans toute l'atmosphère terrestre, à chaque inspiration chacun de nous inhale 200 à 300 des molécules qui ont vibré sur ces paroles.

2. Des nouvelles particules

a) p, n, e^- vous étaient connues avant l'étude du chapitre 15.

b) Les mésons π : π^+, π^0 et π^- sont les particules les plus fréquemment produites lors des chocs inélastiques.

c) Le γ, appelé photon en tant que grain d'énergie de la lumière, se comporte comme pure particule lorsqu'il est énergique.

d) Le ν, le e^+, et le $\bar{\nu}$ sont cités dans les désintégrations radioactives β^- et β^+. Le ν joue en outre un rôle fondamental dans la régulation des réactions de fusion de l'hydrogène lors de la synthèse de la matière stellaire.

3. Des compléments d'information

a) Les antiparticules existent

• Le positron e^+ est l'antiparticule de l'électron, l'antineutrino $\bar{\nu}$ est l'antiparticule du neutrino ν, le π^- celle du π^+.

• De même on sait créer en laboratoire des antiprotons et des antineutrons.

b) La création de particules, ou d'antiparticules obéit à certaines règles strictes

• *La conservation du nombre de nucléons.*
Par exemple si l'on veut créer un antiproton, il faut impérativement pouvoir créer en même temps un proton. Aussi, la réaction de création d'antiproton la plus simple est-elle (fig. 1) :

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}$$

Dans d'autres réactions de chocs inélastiques, ou de désintégrations β par exemple, un proton peut devenir neutron mais le nombre de $(p + n)$ se conserve. Il n'a pas changé depuis la création de notre monde.

• *La conservation du nombre de particules légères.*
— Dans la réaction dite de matérialisation du γ : $\gamma \longrightarrow e^- + e^+$,
il y a création d'une paire $e^- e^+$.
— Dans la désintégration β^- :

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu},$$

il se crée une particule : e^-, et une antiparticule a priori différente : le $\bar{\nu}$. Mais de même que le neutron apparaît comme une forme neutre du proton, le neutrino apparaît comme une forme neutre de l'électron, et la règle s'écrit :
le nombre de $(e + \nu)$ se conserve lors des interactions.
Cette règle est bien vérifiée dans la première des réactions de synthèse de l'hélium dans les étoiles : $p + p \longrightarrow d + e^+ + \nu$
(e^+ est une antiparticule, ν est une particule)

c) Le γ serait-il un aristocrate?

Il suffit d'allumer sa lampe de bureau pour produire des photons. Pourquoi les règles précédentes, de limitation de production, ne s'appliquent-elles pas au photon γ? ni d'ailleurs aux π^0?



Fig. 1. *Création d'un antiproton.*

4. D'autres spécimens dans la zoologie des particules

a) Les particules étranges

Parmi elles, citons les particules K, de masse 500 MeV/c^2; elles sont éphémères, on peut les observer dans les clichés de chambre à bulles.

• Le K^+ : $\tau = 10^{-8}$ s qui se désintègre en :

$$K^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu.$$

• Le K^0 qui bizarrement a deux temps de vie, $\tau = 10^{-10}$ s'il se désintègre en :

$$K^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^- \quad \text{(fig. 2)}$$

$\tau = 5 \times 10^{-8}$ (500 fois plus long) s'il se désintègre en : $K^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$

ou : $\pi + e + \nu$

et leurs antiparticules.

Les particules K, elles aussi ne peuvent être produites que par paires de particule-antiparticule. On explique cela en disant qu'elles portent un autre nombre quantique qui doit se conserver lors des interactions, l'étrangeté S.

b) Deux autres particules

Le μ^+ :

Masse 105 MeV/c^2, $\tau = 2 \times 10^{-6}$ s.

On le rencontre dans la désintégration du π^+, qui meurt en :

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad \text{(fig. 3)}.$$

Le μ apparaît comme un électron lourd (200 fois plus lourd que l'électron), et comme lui il possède un neutrino associé : le ν_μ.

Ce nouveau neutrino est différent de celui qui apparaît dans les réactions avec électrons, il ne conduit pas aux mêmes réactions. Aussi par la suite le neutrino binomé avec l'électron sera notée ν_e.

c) Et d'autres encore...

Aucune des diverses particules citées dans ce paragraphe n'est nécessaire pour construire notre monde.

Ce sont des particules **inutiles,** mais elles existent.



Fig. 2. *Les particules incidentes sont des antiprotons. Un antiproton s'annihile avec un des protons de l'hydrogène de la chambre en donnant deux K^0. Chacun des deux K^0 se désintègre en $\pi^+ + \pi^-$.*

5. Une question : le proton est-il une particule élémentaire?

La réponse est **non.** Pourquoi? Parce que l'expérience le dit. Quelle expérience? Une expérience type celle de Rutherford actualisée. En lançant des particules α de 9 MeV sur une feuille d'or, Rutherford a montré qu'il existait, au centre de l'atome, un point dur : son noyau, de rayon 8 fm.

Ce type d'expérience fut répété en 1958 en lançant des électrons de 100 MeV sur de l'hydrogène liquide, et l'on a montré que le rayon du proton était de 1 fm.

Ensuite en lançant, d'abord des électrons de 20 GeV, puis ultérieurement des neutrinos de 30 GeV (pour s'affranchir de tout problème lié à la charge électrique) sur des protons, on a pu montrer par l'allure des neutrinos diffusés, qu'il existait des grains durs dans le proton.

Ces grains, ces structures plus élémentaires que le proton, sont des **quarks.**

Deux sortes de quarks forment le proton, et le neutron.

Le u (up) :

nombre de nucléons : 1/3; charge : 2/3 !!!

Le d (down) :

nombre de nucléons : 1/3; charge : −1/3 !!!

Le proton serait donc composé essentiellement de 3 quarks :

$$p = u\,u\,d,$$

le neutron aussi :

$$n = u\,d\,d\,.$$

Une addition élémentaire montre que ceci conduit bien à un nombre de nucléon égal à 1 pour le proton et le neutron, et à une charge électrique de +1 pour le proton et de 0 pour le neutron.



Fig. 3. *Désintégration d'un π^+, suivie de la désintégration du μ^+.*

Dans ce formalisme, les mésons π ne sont plus des particules élémentaires, ils sont formés d'une paire de quark-antiquark, ainsi :

$$\pi^+ = u\,\bar{d},$$
$$\pi^0 = u\,\bar{u} \quad \text{ou} \quad d\,\bar{d},$$
$$\pi^- = \bar{u}\,d.$$

L'apparente facilité avec laquelle on produit des π s'explique alors. On ne produit pas un π : on produit en réalité selon la loi générale une paire de particule + antiparticule : quark + antiquark.
La conservation du nombre de nucléons lors des interactions n'est qu'une forme de la conservation du nombre de quarks.
Exemple : $n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}$

s'écrit : $\begin{pmatrix} u \\ d \\ d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u \\ u \\ d \end{pmatrix} + e^- + \bar{\nu},$

ce qui revient à une désintégration du quark d :

	$d \longrightarrow$	u	e^-	$\bar{\nu}$
nombre de quarks :	1	1	0	0
nombre de particules légères :	0	0	1	−1.

Cette réaction vérifie les deux lois de conservation énoncées.

6. Deux réflexions

a) Quelles sont les particules élémentaires au programme des lycées?

Si nous faisons, pour l'instant, oubli des particules inutiles, les particules élémentaires rencontrées peuvent se classer ainsi :

- le γ;
- les légères $\begin{pmatrix} e \\ \nu \end{pmatrix}$;
- les quarks $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$.

b) A quoi est due cette facilité de production du γ qui semble n'appartenir qu'à lui?

Le γ n'est effectivement pas une particule comme les autres, il est le **messager d'une interaction.**

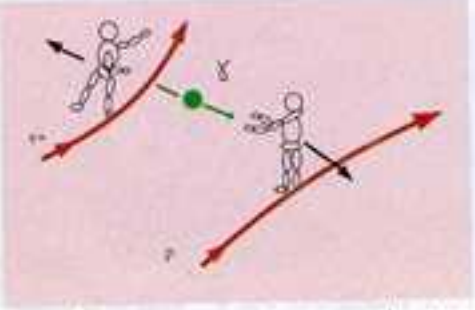


Fig. 4. *Échange d'un γ entre le positron et le proton.*

2 LES PARTICULES VUES D'UN CENTRE DE RECHERCHE

1. Quelques propriétés des particules

a) Qu'est-ce qu'une particule?

C'est très simple :

Une particule n'a pas de dimension, pas de forme, pas de structure interne.

Elle est porteuse de nombres quantiques qui se conservent lors des interactions. La plupart sont stables.

b) Les interactions entre particules

Les particules interagissent entre elles selon quatre mécanismes cités p. 328 dont voici le détail de fonctionnement.

1. L'interaction ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Elle est due à la **charge électrique** (+1, 0, −1) que portent les particules : $F \propto \frac{1}{r^2} \cdot q \cdot q'$.

Elle joue peu de rôle à l'échelle macroscopique car la matière est électriquement neutre au-delà de la dimension des molécules. Mais elle est importante à l'échelle des atomes et des particules. Son intensité décroît comme $\frac{1}{r^2}$. C'est donc une interaction à **longue portée,** à l'échelle atomique.
Détaillons son fonctionnement, par exemple, dans le choc élastique : positron-proton :

$$e^+ + p \longrightarrow e^+ + p.$$

— Il n'y a pas de choc direct e^+ sur p. Au fur et à mesure que le e^+ s'approche, la répulsion électrique s'intensifie et finalement le dévie. Le champ électrique créé par la charge du proton a repoussé le positron.
— Une autre façon d'interpréter cette déviation est de dire que : lorsque le positron s'est approché du proton à une distance d'interaction, celui-ci a sorti de son intérieur un photon γ, et l'a lancé en direction du positron (fig. 4).
Par conservation de la quantité de mouvement le proton a reculé. Le γ se propage du proton au positron et finalement le heurte, le positron l'absorbe et sous l'impact recule aussi.
On dit que le photon est le **propagateur** du champ électrique ou encore le **médiateur** de l'interaction électromagnétique.
Nous voyons (fig. 5) l'évolution en fonction de ce nouveau concept de la représentation de l'interaction.
— Pour la diffusion électron-proton, qui est due à une attraction cette fois, il faut imaginer pour une illustration simpliste un photon boomerang pour obtenir le bon sens de variation des quantités de mouvement (fig. 6).
Ce concept, que l'interaction entre particules se fasse via une particule médiateur qui propage le

champ de l'interaction d'une particule à l'autre est général pour les quatre types d'interaction.

2. L'interaction GRAVITATIONNELLE

Elle est due à la charge massique des particules en présence. Elle est positive ou nulle, et toujours attractive :

$$F = \frac{1}{r^2} . m . m'.$$

Son intensité est si faible qu'elle ne joue aucun rôle dans la physique des particules. Sa portée est infinie, puisqu'elle décroît en $\frac{1}{r^2}$. Son médiateur est le **GRAVITON** *G*, de masse nulle, non encore découvert.

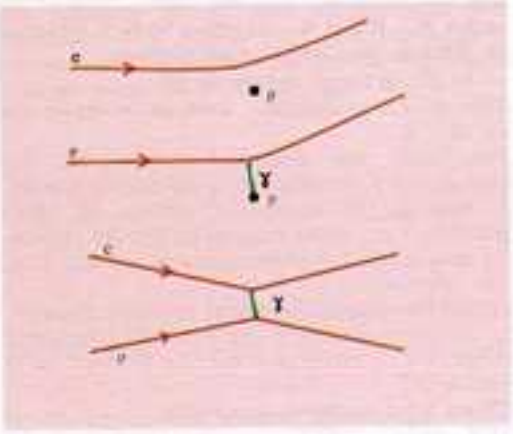


Fig. 5. *Évolution de la représentation de la réaction :* $e^- + p \longrightarrow e^- + p$.

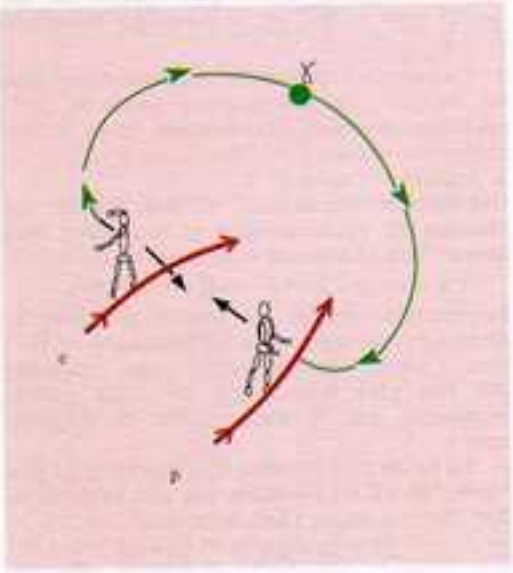


Fig. 6. *Échange d'un* γ *entre l'électron et le proton.*

3. L'interaction FORTE

Elle est due à la **charge forte** que portent les quarks. On l'appelle, pour amuser les esprits, la **couleur.** Il existe trois valeurs de la charge forte, le bleu, le rouge, le jaune. La charge forte des antiquarks est l'anticouleur de celle des quarks (antibleu, antirouge, antijaune).

L'étude de l'interaction forte s'appelle parfois la chromodynamique.

• Sa portée est finie et courte : 1 fm. Son intensité est bien supérieure à celle de l'interaction électromagnétique; c'est pourquoi elle la masque complètement dans les interactions entre quarks. Son médiateur est le **GLUON : g**, de masse nulle, de charge électrique nulle, et il est stable.

Le gluon peut être créé lors des interactions fortes, il peut être échangé puisque c'est un médiateur, et il meurt par quarkonisation :

$$g \longrightarrow u\,\bar{u} \text{ ou } d\,\bar{d},$$

réaction similaire à la mort du photon par matérialisation $\gamma \longrightarrow e^+ e^-$.

• Le gluon est donc une **colle à quarks.**

Lorsque les quarks (ou antiquarks) agglomérés par les gluons forment un nucléon (p ou n) ou un π, leurs couleurs doivent former du blanc.

Exemples :

pour un proton :	*u* bleu *u* rouge *d* jaune
pour un π^- :	*u* jaune *d* antijaune.

La matière ne voit pas les charges fortes individuelles, elle ne voit donc pas la couleur, on dit qu'elle est daltonienne.

• Quelle est la structure interne du proton?

On y trouve les 3 quarks *u*, *u*, *d* déjà mentionnés, on les appelle les quarks de valence; et une mer de paires de quarks-antiquarks ($u\bar{u}$, $d\bar{d}$ et d'autres) et tous ces quarks échangent constamment entre eux de nombreux gluons (fig. 7).

Notre proton si familier, a un intérieur aussi compliqué que celui d'une montre suisse.

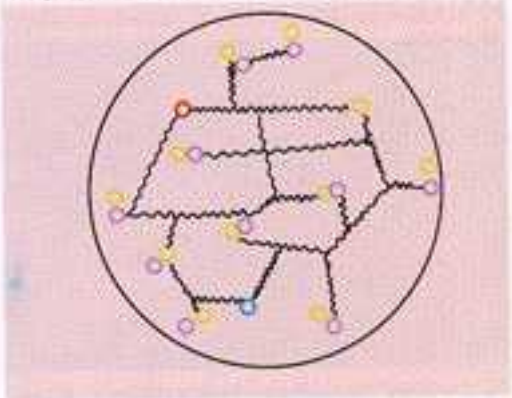


Fig. 7. *L'intérieur d'un proton.*

Le mécanisme des chocs de protons étudiés en T.P. est donc :

— pour le choc élastique : un échange de gluons (fig. 8);
— pour le choc inélastique : une émission d'un gluon par l'un des protons. Le gluon se matérialise près du second proton, et l'ensemble des 4 quarks et de l'antiquark présents se réarrange pour former $p + \pi^0$ (fig. 9 et fig. 10) ou $n + \pi^+$.
Nous avons vu dans le chapitre 15 p. 333, que la force nucléaire, responsable de la cohésion des noyaux n'était qu'un résidu de l'interaction forte entre les quarks qui composent les nucléons de ce noyau.
L'interaction forte est donc beaucoup plus forte que la force nucléaire, et l'on conçoit que, jusqu'à présent, on n'ait pu briser le proton et libérer ainsi les quarks.
Malgré une chasse intense, essentiellement basée sur la recherche de particules à charge électrique 1/3, aucun quark libre n'a encore été observé.

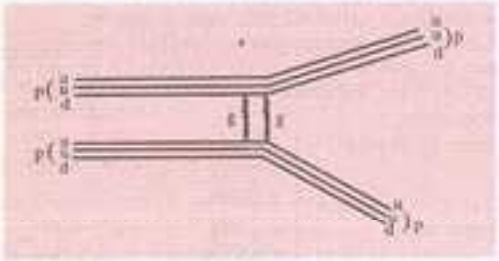


Fig. 8. *Choc élastique proton-proton : l'échange de gluons.*

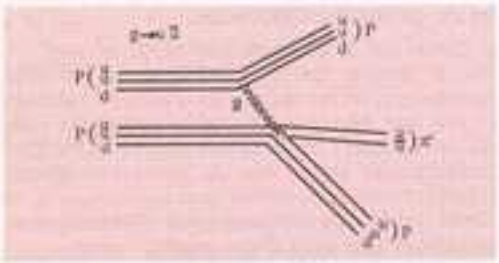


Fig. 9. *Choc inélastique proton-proton : la théorie.*



Fig. 10. *Choc inélastique proton-proton : l'expérience.*

4. L'interaction FAIBLE

Elle est due à la **charge faible** que possède toute particule.
Comme son nom l'indique son intensité est faible. Aux énergies ordinaires elle se situe entre celle de l'interaction gravitationnelle et celle de l'électromagnétique.
Elle est si faible qu'elle est en général masquée par les deux autres (électromagnétique et forte) sauf quand celles-ci sont impossibles. Elle est de très courte portée, de l'ordre de 2 am (attomètre = 10^{-18} m), soit $\frac{1}{500}$ du rayon du proton, c'est une interaction de contact.
Son, ou plutôt ses, médiateurs sont lourds. Ils ont été découverts au C.E.R.N. en 1983, ce sont :
— les W : W^+ et W^- de masse 90 GeV/c^2 (près de 100 fois plus lourd qu'un proton);
— le Z^0, la forme neutre du W.
Tous trois sont instables, avec un temps de vie de 10^{-24} s.
Pour que, aux énergies atteintes par les accélérateurs, l'interaction faible soit détectable, il faut qu'elle apparaisse comme la seule possible, c'est-à-dire mettant en jeu des particules sans couleur et électriquement neutres, donc des neutrinos.
Quand un neutrino intervient dans une réaction, le mécanisme de cette réaction est l'interaction faible, avec comme médiateur un échange de W (ou de Z^0).
Citons trois exemples importants :

1) Le choc neutrino-proton. Il se représente par la figure 11 avec échange de Z_0.

2) La radioactivité β^-. La désintégration du neutron (fig. 12) se fait parce qu'un de ses quarks émet un W^- qui se désintègre ensuite en $e^- + \bar{\nu}$.

3) La première réaction de nucléosynthèse dans les étoiles : un des protons émet un W^+, lui-même devenant ainsi neutron, et le W^+ se désintègre ensuite en $e^+ + \nu$.

• Analysons l'exemple 2.
Oublions le mécanisme, et son graphe. La réaction est exoénergétique et le neutron libre devrait immédiatement éclater en :

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad \Delta E = -0{,}8 \text{ MeV}.$$

Revenons au graphe. Le neutron doit pour se désintégrer par interaction faible émettre un W^-, donc sortir de lui-même une particule 100 fois plus lourde que lui. Cela semble impossible par la conservation de l'énergie mais :
— La loi de conservation de l'énergie peut être violée (de ΔE) à condition que ceci se passe en une durée si brève (Δt), telle que :

$$\Delta E \times \Delta t = 6 \times 10^{-25} \text{ GeV.s}$$

(c'est l'inégalité de Heisenberg), ce qui pour $\Delta E = 100$ GeV, donne $\Delta t = 6 \times 10^{-27}$ s.

Notons que même si le W^- émis avait une vitesse proche de celle de la lumière, ceci correspondrait à un parcours de :

$$3\times10^{8}\times6\times10^{-27}=2\times10^{-18}\ \text{m}=2\ \text{am}$$

c'est la portée de l'interaction faible.

— La probabilité qu'une telle violation ait lieu est d'autant plus faible que la violation demandée (ici 100 GeV) est supérieure à l'énergie disponible (ici 0,8 MeV).

— Ceci explique que le neutron ait un temps de vie de 900 s. Il doit attendre en moyenne 900 s pour pouvoir, en l'espace de 6×10^{-27} s, violer la loi de la conservation de l'énergie d'un facteur 10^{8} pour se désintégrer.

• Il en est de même pour les exemples 1) et 3). En l'exemple 1, pour la même raison énergétique les échanges de Z^0 sont extrêmement peu probables, c'est pourquoi les neutrinos solaires peuvent pratiquement traverser la terre sans interagir avec ses nucléons (fig. 13).

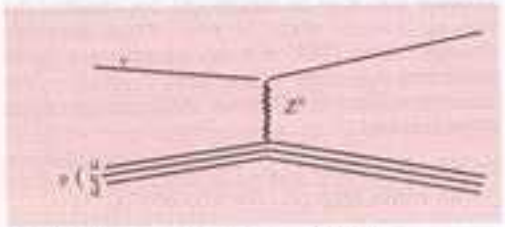


Fig. 11. *Choc neutrino-proton : la théorie.*

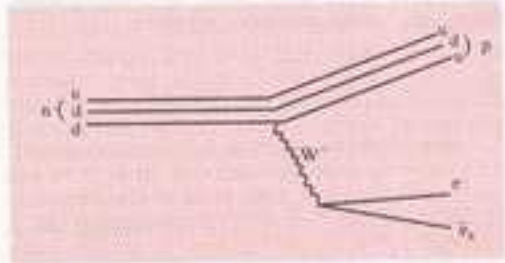


Fig. 12. *Point de vue théorique de la radioactivité β⁻.*



Fig. 13. *Choc neutrino-proton : l'expérience.*
Les ν sont produits par l'accélérateur du CERN, les particules secondaires créées lors du choc sont détectées par des chambres à fils, l'événement est reconstitué par ordinateur.

• En l'exemple 3, l'échange de W^+ est aussi peu probable, ce qui explique que ces réactions soient rares : cette réaction ralentit et régularise la combustion nucléaire de l'hydrogène et empêche ainsi l'étoile naissante d'exploser.

c) La comparaison des intensités de ces quatre interactions

• La hiérarchie des intensités des quatre interactions; forte, électromagnétique, faible, gravitationnelle, diminue lorsque l'énergie des particules interagissantes augmente.

C'est ainsi qu'à 100 GeV, l'énergie du L.E.P., l'interaction faible devient aussi intense que l'interaction électromagnétique et dans les collisions $e^- + e^+$ (électron-positron) l'échange de Z_0 (médiateur de l'interaction faible) est aussi probable que l'échange de γ (médiateur de l'interaction électromagnétique). On a pu ainsi unifier les deux mécanismes sous le nom de force électrofaible.

La figure 14 montre l'évolution de ces intensités.

• A 10^{15} GeV les trois interactions : forte, électromagnétique et faible, deviennent d'intensités égales et ceci laisse espérer une théorie unifiée des trois interactions via un médiateur commun, le leptoquark : χ. La distinction entre particules d'interactions électromagnétiques (électrons...), et particules d'interactions fortes (quarks), deviendrait caduque et il serait ainsi possible, via le χ comme médiateur, de passer de l'une à l'autre.

Dans cette hypothèse les protons (et les diamants) ne seraient pas éternels et se désintégreraient selon la réaction : $p \longrightarrow e^+ + \pi^0$ (fig. 15).

La vie moyenne du proton serait de 10^{32} années! Un calcul simple montre qu'un être humain perdrait ainsi 2 à 3 protons au cours de sa vie.

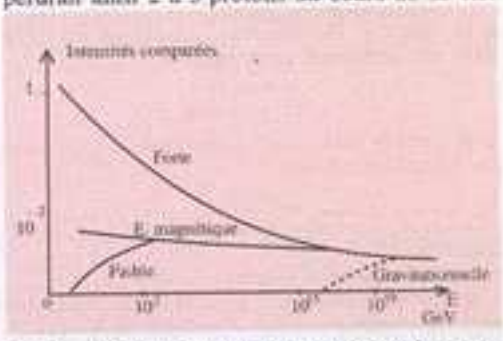


Fig. 14. *Évolution des intensités respectives des quatre interactions.*

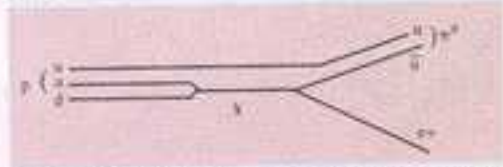


Fig. 15. *Mécanisme théorique de la désintégration du proton.*

2. De nouvelles particules élémentaires

a) D'autres particules légères

Parmi les particules légères, l'électron e, et son neutrino ν_e sont bien connus. Nous avons rencontré lors de l'étude de la désintégration du π le mu : μ et son neutrino ν_μ. On a découvert un troisième électron lourd, le tau : τ (classé dans les particules légères bien qu'il soit plus lourd qu'un proton, parce qu'il est, comme l'électron, insensible aux interactions fortes). Son neutrino associé prévu le ν_τ n'a pas encore été découvert.
Il existerait donc 6 particules légères : (e, ν_e), (μ, ν_μ), (τ, ν_τ).

b) D'autres quarks

Les groupements de quarks peuvent former :

• Soit des états liés, et dans ce cas la masse du composé est inférieure à la somme des masses des quarks, ce qui confère à cet état une certaine stabilité. Exemples :

$$uud = p$$
$$u\bar{d} = \pi^+$$
$$u\bar{u} = \pi^0.$$

• Soit des états résonnants, et dans ce cas la masse du composé est supérieure à la somme des masses des quarks. Ces états sont très instables mais ont pu être identifiés. La liste en est longue.
Les observations d'états liés ou résonnants a conduit à envisager l'existence d'autres quarks que u et d :

• le quark s (l'étrange), découvert en 1964 dans les particules « étranges ». Ainsi :

$$K^+ = u\bar{s}$$
$$K^0 = d\bar{s};$$

• le quark c (le charme), découvert en 1974 dans les particules « charmées » :

$$J/\psi = c\bar{c}$$
$$D^0 = c\bar{u} \text{ (fig. 16)};$$

• le quark b (la beauté), découvert en 1976 dans les particules « belles » :

$$\tau = b\bar{b};$$

A ce jour, un événement en $b\bar{u}$, un seul, a été identifié.
On connaît donc 5 quarks : u, d, s, c, b.
Une analogie formelle avec les six particules légères connues conduit à prédire un 6e quark, ce serait le top : t. On le cherche.



Fig. 16. *Un événement charmé.*

c) Le tableau des particules élémentaires

En cette théorie ce tableau est assez simple :
— six particules légères;
— six quarks;
— trois médiateurs.
Total : 15.

Particules médiateurs	Z^0, $W^\pm$		γ	g
Particules légères	$\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$	
Particules quarks	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$	

Parmi ces quinze particules, cinq sont explicitement au programme de terminale : (e, ν) (u, d) et γ.

d) Une bizarrerie des étranges

• La découverte des particules étranges a été le premier indice de la complexité des choses (une rue en France porte le nom d'une particule étrange) et en 1964 on a mis en évidence qu'ils présentaient une anomalie dans leur désintégration : le K^0 peut se désintégrer sous deux modes :

— un mode court : $\tau = 1 \times 10^{-10}$ s;
— un mode long : $\tau = 5 \times 10^{-8}$ s.

L'on s'est aperçu que le mode long présentait une légère dissymétrie dans sa désintégration. Parmi les modes possibles retenons :

$$K^0 \longrightarrow \pi^- + e^+ + \nu$$
et : $$K^0 \longrightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}$$

Le premier est en excès de 7 $^0/_{00}$ sur le second. Cet excès ne dure que tant que vit le π et son μ de désintégration, mais entre la désintégration du K^0 à 5×10^{-8} s et la désintégration du μ associé au π à 10^{-6} s il y a eu un **excès d'antimatière** de 7 $^0/_{00}$.

• Un mécanisme analogue a été imaginé par Sakharov pour expliquer que notre univers soit constitué de matière sans traces d'antimatière. Après le big-bang, en moins de 10^{-35} s, les premières particules matérialisées, les χ se sont désintégrés en quarks-antiquarks mais de façon légèrement dissymétrique (comme le K^0), avec un excès de 10^{-9} de quarks sur les antiquarks. Quarks et antiquarks se sont ensuite annihilés, sauf les quarks en excès, qui en se regroupant par 3 ont formé les nucléons de notre univers actuel. Comme pour le K^0 cette asymétrie n'est que temporaire et elle disparaîtra par désintégration des produits formés (ici les nucléons), donc dans 10^{32} années environ.

3. Les moyens et les méthodes d'étude

a) Que chercher?

— Le 3e neutrino : le ν_τ;
— le 6e quark, le top : t;
— des structures dans les quarks;
— les neutrinos sont-ils massifs?
— le proton est-il éternel?

b) Où chercher?

Auprès des accélérateurs (fig. 17).

c) Comment?

Les accélérateurs actuels se divisent en deux grandes catégories :

— *Les accélérateurs à cible fixe.*

Les particules, une fois accélérées au maximum des possibilités de la machine sont extraites et envoyées sur une cible (fig. 18). Elles interagissent avec les nucléons de la cible, les particules secondaires formées sont sélectionnées, et envoyées à leur tour sur une cible où leurs interactions produisent d'autres particules dont les trajectoires sont localisées par une suite de détecteurs.

— *Les collisionneurs.*

L'anneau de l'accélérateur est empli régulièrement de particules et d'antiparticules qui tournent en sens inverse dans les mêmes champs magnétiques :

— $\bar{p}p$ au C.E.R.N. et aux U.S.A.;
— $e^- e^+$ au C.E.R.N. dans le L.E.P.

L.E.P. = Large Electron Positron collider. Son diamètre est de 9 km. C'est, à ce jour, la plus grande machine construite par l'homme.

La collision frontale des particules-antiparticules dégage beaucoup plus d'énergie que la collision particule-cible fixe. Par contre le nombre de rencontres est moindre. La tendance actuelle étant à la course à l'énergie, les projets d'accélérateurs sont du type collisionneur.

Les détecteurs entourent le point où les faisceaux se croisent (fig. 19). Ils sont de symétrie cylindrique, fermés par des « bouchons » dans le sens des faisceaux. L'un des quatre détecteurs en construction pour le L.E.P. a une masse de 5 000 t, comparable à celle de la tour Eiffel.



Fig. 18. *Un hall d'expérience.*



Fig. 19. *Un des détecteurs du L.E.P., actuellement en construction.*

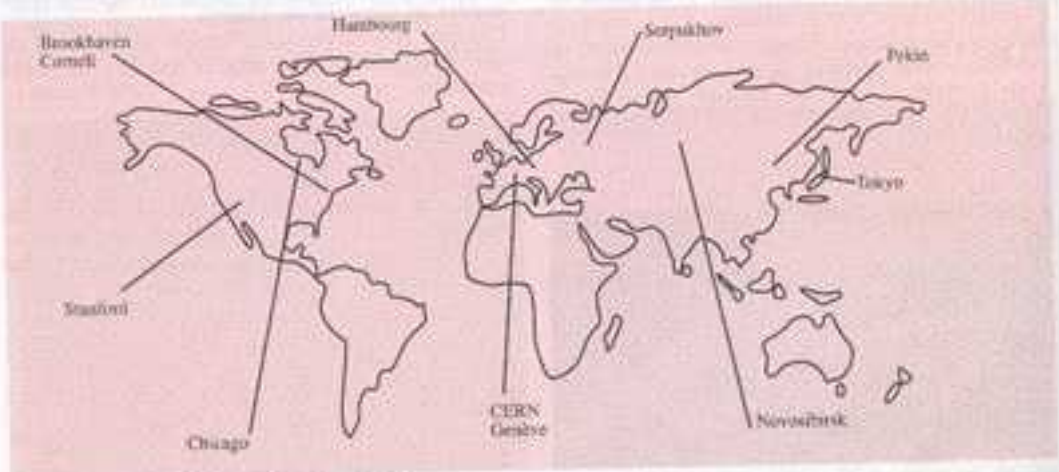


Fig. 17. *Les accélérateurs dans le monde.*

3 LES PARTICULES EN L'UNIVERS

1. L'état actuel de l'univers

a) Bilan macroscopique

L'univers est composé essentiellement de vide et d'étoiles. Les étoiles sont groupées en galaxies (fig. 20), et les galaxies sont groupées en « bulles » de galaxies.

b) L'univers en nombres

Son âge est de 15×10^9 années.
Son rayon est de 10 Ga.l. soit 10^{26} m.
Sa masse est de 10^{52} kg soit 10^{80} nucléons
et sa masse volumique est de 3×10^{-28} kg.m^{-3}.
Une autre façon de se représenter cette masse volumique est de dire que par mètre cube, il y a :
0,1 proton; 0,02 neutron; 0,1 électron;
10^7 neutrinos et antineutrinos; 3×10^8 photons.

Remarques :

— Le rapport du nombre de photons au nombre de nucléons est $= 10^9$.
Ces photons ont une longueur d'onde de 4 mm et constituent un bruit de fond lors de l'écoute radioélectrique des étoiles.

— Il y a beaucoup de neutrinos et le problème de la mesure de leur masse se pose pour prédire l'évolution de l'univers. Si la masse du neutrino n'était pas nulle, mais seulement de 30 eV, la masse de l'univers serait 100 fois la masse actuellement calculée.

c) Un peu de mécanique

Les galaxies semblent fuir, et plus elles sont lointaines plus elles fuient rapidement, leur vitesse pouvant atteindre 0,9 c.
Ces galaxies semblent venir d'un même point. D'où l'hypothèse d'une explosion initiale il y a 15 milliards d'années : le **big-bang.**
Ensuite il y eut une expansion, et le rayon de l'univers crût d'abord comme $t^{\frac{1}{2}}$ (t étant le temps) puis comme $t^{\frac{2}{3}}$ avec corrélativement un refroidissement général, la température décroissant comme $t^{-\frac{1}{2}}$ et la densité d'énergie E décroissant de même puisque l'univers se dilatait.



Fig. 20. *La galaxie « des chiens de chasse ».*

2. Scénario pour une naissance

• $t = 0 \quad E = \infty$.

Au début était le chaos.
A ce niveau d'énergie, l'interaction gravitationnelle est aussi importante que les trois autres : forte, électromagnétique et faible, et les dimensions de l'univers sont si réduites, inférieures à 1 µm, qu'il faudrait faire intervenir une théorie quantique de l'interaction gravitationnelle (qui n'est pas encore établie), pour l'expliquer, et cette époque inconnue dure jusqu'à :

• $t = 10^{-43}$ s $\quad E = 10^{19}$ GeV.

Le règne des médiateurs.
Il y a matérialisation de l'énergie sous forme de χ, ces médiateurs communs à l'interaction unifiée : forte, électromagnétique, faible.

• $t = 10^{-35}$ s $\quad E = 10^{15}$ GeV.

Que les quarks soient.
Les χ, de masse $\approx 10^{15}$ GeV/c^2 ne peuvent plus être produits par matérialisation, car la densité d'énergie est trop faible. Ceux qui ont été produits se désintègrent en paires quarks-antiquarks $q + \bar{q}$ ou en paires $e^+ + e^-$ ou en quarks-électrons, etc. mais en ne respectant pas complètement la parité particule-antiparticule. Il existe une légère dissymétrie en faveur de la matière dans la désintégration des χ. Elle est de 10^{-9} en proportion.
Ensuite quarks-antiquarks s'annihilent :

$$q + \bar{q} \longrightarrow 2\gamma,$$

et de toute la matière et l'antimatière qui s'était matérialisée, il ne reste finalement que les 10^{-9} d'excès de matière :

des quarks : u, d, s, c, b, t
des particules légères : $e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$
et un nuage de : γ, W, Z.

A cette énergie les particules ne peuvent se souder et forment un plasma.
Cet état représente actuellement la limite de ce que l'on peut étudier auprès des accélérateurs existants.

• $t = 10^{-10}$ s $\quad E = 100$ GeV.

Stop à l'anarchie.
L'énergie diminuant, l'interaction forte prédomine, c'est la fin du mélange de quarks. Les quarks instables s, c, b, t ainsi que τ et μ se désintègrent, et il ne reste que :

$u \quad d$
e
γ

Que le proton soit.
Ensuite les quarks u et d s'agglomérèrent en protons, et il n'existe alors que :

$p \quad e \quad$ et $\quad \gamma$.

Ces γ proviennent de l'annihilation $q + \bar{q}$, c'est cette proportion de $10^9\gamma$ pour un proton qui fait dire que l'assymétrie était de 10^{-9}.
Ultérieurement, la longueur d'onde de ces photons suit la dilatation de l'univers et ce sont ces photons qui actuellement créent ce bruit de fond radioélectrique de 4 mm de longueur d'onde qui vient de l'espace.

• $t = 10^{-6}$ s $\quad E = 1$ GeV.

Les premiers neutrons.
Par chocs, les neutrons sont produits selon la réaction :

$$p + e \longrightarrow n + \nu$$

mais cette réaction, endoénergétique, s'arrête lorsque l'énergie est inférieure à la différence des énergies de masse neutron-proton.
Ceci explique que la proportion de neutrons ne soient que 20 % de celle des protons. La réaction s'arrête à :

• $t = 1$ s $\quad E = 1$ MeV.

Les premiers noyaux.
— Les protons et neutrons se groupent en noyau d'hélium : c'est la nucléosynthèse.
— Il demeure un excès de protons, ceci dure jusqu'à :

• $t = 3$ min $\quad E = 100$ keV.

Enfin les atomes.
Les électrons entourent les noyaux :

$e + p \longrightarrow$ atome d'hydrogène
$2e + \alpha \longrightarrow$ atome d'hélium.

Hydrogène et hélium, dans les proportions relatives 90-10 % sont les constituants majoritaires de notre univers.

• $t = 100\,000$ ans $\quad E = 0{,}1$ eV.

Et les étoiles furent.
Il naît une étoile tous les 1 000 ans. Cela commence par une instabilité gravitationnelle du gaz interstellaire (hydrogène-hélium). L'attraction gravitationnelle procure aux atomes une énergie suffisante pour amorcer la première réaction nucléaire (chap. 19) : figure 21.

• $t =$ quelques milliards d'années $\quad E = 0{,}02$ eV.

Aujourd'hui.



Fig. 21. *Une étoile naissante : Trifide.*

3. L'apocalypse

L'univers continue son expansion, ce qui diminue régulièrement sa densité d'énergie et le refroidit (fig. 22).

Si les neutrinos sont de masse nulle, cette expansion sera sans fin. Si leur masse est supérieure à 30 eV, la masse de l'univers est telle, que l'attraction gravitationnelle « rappellera » les galaxies aujourd'hui en fuite, et l'univers se contractera et **implosera,** puis aussitôt réexplosera en un second big-bang et le même scénario se répétera.

Mais au fil des temps, les nucléons se désintègrent avec une période de 10^{32} années, ce qui signifie que dans quelques 10^{33} années il n'y aura plus de matière.

Il ne restera que de l'énergie diluée sous forme de photons.

L'évolution de l'univers serait donc identique à celle des K^0 : peu après la naissance (du K^0, de l'univers) il se produit lors des désintégrations une anomalie (excès d'antimatière pour le K^0, de matière pour l'univers) et cette anomalie disparaît plus tard.

	K^0	*Univers*
• *Date d'apparition de l'anomalie*	5×10^{-8} s	10^{-35} s
• *Importance de l'anomalie*	0,007	10^{-9}
• *Date de fin*	10^{-6} s	10^{30} s

Ce sera la fin, du moins telle que conduit à la prévoir nos connaissances actuelles des particules élémentaires, à moins que, comme l'écrivit Shakespeare :

« There are more things in heaven and earth than are dreamt of in your philosophy. »



Fig. 22.

ch. 1

ex. 3. 1) $x = 10t$; 2) $x = -10t$; 3) $x = -100 + 10t$; 4) $x = -10t$.
ex. 5. parabole; $\vec{v} = 4\vec{i} + 4t.\vec{j}$; $\vec{a} = 4\vec{j}$.
ex. 6. 1) 0,5 m.s^{-1}; 2) 4 m.s^{-1} et 8 m.s^{-1}.
ex. 8. 1) $v_x = -0,5x$; $x_0 = 0$; 2) $t_1 = 0,5$ s.
ex. 9. $x - x_0 = 2,5$ m; $t = 1$ s.
ex. 10. 1) $x_c = 3,2$ m; 2) 1,6 s; 3) 1,82 s.
ex. 11. 1) $x_1 = 10$ m; 2) $x_1 = 20$ m et $x_2 = 25$ m; 3) 5 m.s^{-1}; 0 m.s^{-1}; -10 m.s^{-1}.
ex. 12. 1) $x_1 = 1,95$ m; $v_{x_0} = -1$ m.s^{-1} et $x_2 = 1,8$ m; $v_{x_0} = -2$ m.s^{-1}; 4) $v_{x_{max}} = -1,5$ m.s^{-1}.
ex. 15. 1) $z = -\frac{5}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$; 2) $x_0 = 1,2$ m; $z_0 = 0,8$ m; 3) $\vec{v}_0 = 3\vec{i}$; 4) non; 5) $t = 0,8$ s.
ex. 16. 2) 0,3 m.
ex. 17. 1) $v = \frac{2\pi . r}{T}$; 3) $a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2} . r$.
ex. 20. 1) $\vec{a} = 0,5\vec{i} + 0,3\vec{k}$.
ex. 22. 2) 18,9 s.

ch. 2

ex. 4. $t = 4,47$ s.
ex. 5. $h = 11,25$ m.
ex. 6. $h = 30,625$ m; $E = 60$ J.
ex. 13. $R_x = \frac{5}{3} m . g . \sin \alpha_0 = 0,14$ N; $R_y = m . g . \cos \alpha = 0,87$ N.
ex. 14. 2) $R = 582$ N et $T = 310$ N.
ex. 16. $a = 5$ m.s^{-2}; $T = 650$ N; $\vec{T}' = -\vec{T}$.
ex. 19. $F = 63$ N.
ex. 22. 1) $v'_{1x} = -1$ m.s^{-1}; $v'_{2x} = 2$ m.s^{-1}; 2) OC' = 40,8 cm.

ch. 3

ex. 1. 2) $a = 3 \times 10^{-10}$ m.s^{-2}.
ex. 2. 2) $v_0 = 30$ km.s^{-1}; $a = 6 \times 10^5$ m.s^{-2}.
ex. 3. $a = 0,034$ m.s^{-2}.
ex. 4. $v_0 = 111$ m.s^{-1}.
ex. 5. 2) $h = R_T (\sqrt{2} - 1) = 2650$ km.
ex. 11. $= 76$ ans.
ex. 13. $v_{1y} = 1,08$ m.s^{-1}.
ex. 14. $\theta = 54°$.
ex. 20. 3) $E = -E_c = \frac{E_p}{2}$.
ex. 21. 4) 11,2 km.s^{-1}; 8) 42,2 km.s^{-1}.

ch. 4

ex. 3. $v = 77,46$ m.s^{-1}.
ex. 4. $v = 11,7$ m.s^{-1}.
ex. 8. $U = 10^5$ V.
ex. 10. $S_1 S_2 = 3,5$ cm.
ex. 11. $U_R = 4$ V; $U_R = 1$ V; $T_a = T_R = T = 1,6$ ms; $\theta = 0,2$ ms.
ex. 13. 2) $\alpha = 81,8°$; 3) 3,6 m.
ex. 20. 2) a) $q . \vec{E} = -m . \vec{g}$, or $\vec{g} = -9,8\vec{j}$ N/m; $\vec{E} = -9800\vec{j}$.

ch. 5

ex. 8. 1) $X_m = 0,05$ m; $T = \frac{2\pi}{25} = 0,25$ s; 2) $x_0 = 0,025$ m; $v_0 = 1,08$ m.s^{-1}; $a_0 = -17,625$ m.s^{-2}.
ex. 11. 1) $x = 0,2 \sin(10\pi . t)$; $x = \frac{0,02}{\pi} . \cos(10\pi . t)$; $a = 2\pi . \cos(31,42t)$; 2) $k = 39,5$ N.m^{-1}.
ex. 13. $F(x) = -\cos\left(10x + \frac{\pi}{4}\right)$; $F(x) = -20x$.
ex. 17. 1) $T_0 = 0,5$ s; 2) $T_0 = 1,19$ s.
ex. 21. 1) $E_p = 0,001$ J; $E_c = 2,5 \times 10^{-4}$ J; 2) $E_c = 0,03$ J; $v = 0,58$ m.s^{-1}; 3) $X_m = 0,05$ m.
ex. 26. 1) $X_m = 0,2$ m; $T = 0,89$ s; 2) 0,4 J; 3) $v = 2$ m.s^{-1}; $E_c = \frac{g . k . m^2}{m + M}$; 4) $E_p = \frac{1}{2} k . x^2 - m . g . x$; 5) $X_m = 0,11$ cm; $T = 1$ s.
ex. 29. a) $h = 0,025$ m; b) $X_m = 2,5$ cm; $N = 1,8$ Hz; c) $X_m = 0,5$ cm; $N = 1,8$ Hz.
ex. 37. $E = \frac{1}{2} k . X_m^2 = \frac{1}{2} m . V_m^2 = \frac{4\pi^2 . m . N_0^2 . X_m^2}{2}$.
ex. 44. $T = 2\pi . \sqrt{\frac{m}{2k}}$.

ch. 6

ex. 5. 1) R inchangé; 2) R divisé par 2; 3) R inchangé.
ex. 10. $F = 6 \times 10^{-10}$ N; $F = 9,1 \times 10^{-30}$ N.
ex. 12. 1) $I_0 = 0,006$ A; 2) $\beta = \frac{\alpha}{2}$ si $I = I_0$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{2 \sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}$ si $I = 2I_0$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{2 + \cos \alpha}$ si $I = \frac{I_0}{2}$.
ex. 16. 1) $E_c = e . U$; $p = \sqrt{2m . e . U}$; $v = \sqrt{\frac{2e . U}{m}}$; 2) β et β'; 3) $R = \frac{\sqrt{\frac{2m . U}{e}}}{B}$.
ex. 18. 1) a) $v = \sqrt{\frac{2q . U}{m}}$; b) $R = \frac{m . v}{q . B}$; c) $R . B = \sqrt{\frac{2U . m}{q}}$.
ex. 21. 1) b) $v_0 = 6 \times 10^6$ m.s^{-1}; $t = 8,7 \times 10^{-9}$ s; 2) b) $v_0 = 4 \times 10^6$ m.s^{-1}; $T = 2,82 \times 10^{-8}$ s.
ex. 32. 1) $x = a$; 2) $I > 13$ A; 3) $x_1 = 0,07$ m; $x_2 = 9,33$ m.

ch. 7

ex. 4. 1) $v = 7,4 \times 10^{-4}$ m.s^{-1}; 2) $v = 5,7 \times 10^{-4}$ m.s^{-1}.
ex. 6. $F_m = \frac{F_0}{\cos \alpha}$.
ex. 13. $\phi = 6 \times 10^{-3} \cos(100t)$.
ex. 16. 1) $\phi = B . a^2$; 2) $\phi = B . a^2 . (\cos \theta + \sin \theta)$; 3) $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{4}$.
ex. 28. 1) $L = 280$ mm; $B_0 = 7 \times 10^{-5}$ T; 2) $B = 6,8 \times 10^{-5}$ T; 3) $B_0 = 6,93 \times 10^{-5}$ T.
ex. 33. $\phi = B_0 . \sin\left(\frac{\pi . x}{a}\right) . a^2$.

ch. 8

ex. 6. 1) $\phi = -0,176$ Wb; 2) $e = -3,53$ V.
ex. 8. 1) $\theta = -\omega . t$; 2) $\phi = 4,5 \times 10^{-3} \cos(20\pi . t)$; $e = 0,282 \sin(20\pi . t)$.
ex. 10. 1) $d = \frac{\ell}{2 \sin \alpha}$; 2) $\phi = 2B . \tan \alpha . \left(\frac{\ell}{2 \cos \alpha} - x\right)^2$; 3) $e = 2B . v . (\ell - x . \tan \alpha)$.
ex. 12. 1) $I = 0$; 2) $I = 0,4$ A; 3) $I = 0,1$ A.
ex. 16. 2) $e = -20$ V; $L = 0,5$ H; 3) $e = 0$; $R = 10\ \Omega$.
ex. 19. 1) a) $v = 0,72$ m.s^{-1}; b) $t_1 = 0,278$ s; 2) $v = 4,16$ m.s^{-1}.

ch. 9

ex. 4. $i = 0,10 \times 10^{-3} \cos\left(\omega_0 . t + \frac{\pi}{2}\right)$; $q = 7 \times 10^{-11} \cos^2 \omega_0 . t$; $E_{mag} = 5 \times 10^{-11} \cos^2\left(\omega_0 . t + \frac{\pi}{2}\right)$; $E_{elec} = 4,9 \times 10^{-11} \cos^2 \omega_0 . t$.

ex. 9. 850 Hz ; 40 Hz.

ex. 11. $E = 7{,}2 \times 10^{-4}$ J ; $i = 0{,}12 \cos\left(\omega_0 . t + \frac{\pi}{2}\right)$.

ex. 17. 1) $L = 0{,}02$ H ; 2) $i = 5 \times 10^{-3} \cos\left(10000 . t + \frac{\pi}{2}\right)$; $\omega_0 = 10\,000$ rad . s^{-1}.

ch. 10

ex. 3. $q = 5 \times 10^{-9}$ C ; $t = 1{,}11 \times 10^{-6}$ s.

ex. 8

e	s
< 3 V	6 V
> 3 V	0

e_1	e_2	e_3	s_2
< 3 V	6 V	6 V	0
> 3 V	0	0	6 V

ex. 13. 2) $T = 1{,}11$ ms ; 3) 0,55 ms.

ex. 16. porte ET.

ex. 28. 1) $u_R = e^{-t/\tau} . (U_1 - U_2)$;

2) $U_1 = U_{01} . e^{-t/\tau} + E_1 . (1 - e^{-t/\tau})$;

$U_2 = U_{02} . e^{-t/\tau} + E_2 . (1 - e^{-t/\tau})$;

3) $U_{max} = \left[\frac{E_1 . (1 - e^{-t_1/\tau}) + E_2 . (1 - e^{-t_1/\tau}) . e^{-t_1/\tau}}{1 - e^{-(t_1+t_2)/\tau}}\right] . e^{-t_2/\tau} + E_2 . (1 - e^{-t_2/\tau})$;

$$U_{max} = \frac{E_1 . (1 - e^{-t_1/\tau}) + E_2 . (1 - e^{-t_2/\tau}) . e^{-t_1/\tau}}{1 - e^{-(t_1+t_2)/\tau}}$$

ch. 11

ex. 2. $\tan \varphi = Q . \left(\frac{\omega^2 - 1}{\omega}\right)$.

ex. 5. 2) $\varphi = 0{,}87$ rad ; $i = 0{,}8 \cos(\omega . t - 0{,}87)$; 3) $R = 8{,}75\ \Omega$; $L = 0{,}045$ H.

ex. 7. 1) $Z = 25\ \Omega$; $L = 0{,}7$ mH ; 2) $C = 44\ \mu$F.

ex. 9. $I = 1{,}27$ mA.

ex. 13. $\cos \varphi = 0{,}82$; 104 W ; 127 W.

ex. 18. 1) $P = 355$ W ; 2) $\cos \varphi = 0{,}8$; 3) $c = 17\ \mu$F.

ex. 22. 1) $i = -\omega . Q_m . \sin(\omega . t)$; 4) $\frac{E}{E_0} = \frac{Q}{2\pi}$.

ch. 12

ex. 18. 2) $\overline{OA} = -20$ cm ; $A'B' = 15$ mm ; image droite ; 4) $G = 6{,}25$; 5) $G = 3$.

ex. 19. $f_1 = 20$ cm.

ex. 20. $f = 50$ cm. $D > 4f$.

ex. 21. $C = 2{,}5$ δ ; $f = 40$ cm.

ex. 22. 1) $R_1 = 57{,}8$ mm ; 2) $n = 1{,}585$; 3) $C = 0$.

ex. 23. 1) $\gamma = -22$.

ex. 24. 2) $\overline{OA} = -26$ cm.

ex. 27. 2) b) $\overline{OA'} = 4{,}725$ cm ; 3) $\alpha = 35°$.

ch. 13

ex. 7. $\overline{OA'} = 50$ mm ; $\overline{OA} = 55{,}55$ mm ; tirage = 55,55 − 50 = 5,55 mm.

ex. 8. Le diamètre de la tache sur la pellicule est :

$$x = d \times \frac{0{,}3144}{50{,}3144} = 0{,}255 \text{ mm} > 0{,}02 \text{ mm}.$$

ex. 14. $OA' = 75{,}282\,3$ mm (avec $f = 75$ mm) $\gamma_1 = 0{,}003\,76$;

$\overline{OA'} = 304{,}47$ mm (avec $f = 300$ mm) $\gamma_2 = 0{,}015$; $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 4$.

ex. 18. pour $d = 25$ mm $\frac{r}{d} = \frac{A_2'A_2}{OA_2'} \longrightarrow r = 0{,}382\,6$ mm $> 0{,}1$ mm (image floue) ; pour $d = 5$ mm : $r = 0{,}075\,72 < 0{,}1$ mm (image nette).

ex. 19. $f_2 = -8$ cm ; $A'B' = 0{,}21$ cm ; $A''B'' = 0{,}175$ cm.

ex. 21. 2) télécbjectif. Encombrement = 136 mm ; $A'B' = 2{,}56$ mm.

ch. 14

ex. 3. 1) figure symétrique $\longrightarrow$ $i' = i$ pour le rayon ;

3) $D_1 = i + i_1' - A$; $D_2 = i + i_2' - A$; $D_2 > D_1$; $\frac{\Delta D}{\Delta n} = \frac{D_2 - D_1}{B . \left(\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2}\right)}$

ex. 7. 1) $\alpha = D_0 = 4{,}77°$;

2) $\frac{\Delta\delta}{\Delta\alpha} = \frac{\delta_C - \delta_F}{\alpha_C - \alpha_F} = \frac{\delta_C - \delta_F}{f_1 . (D_C - D_F)} = \frac{\delta_C - \delta_F}{f_1 . (n_C - n_F) . A} = 51{,}4$ mm . mm^{-1}.

ex. 9. 1) $A = 1{,}5840$; $B = 1{,}370 \times 10^{-2}\ \mu$m^2 ; 2) a) 1,7113 ; 1,7229 ; 1,7420 ; b) 27.

ex. 10. 1re équation : $\frac{1}{f_0} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{f}$; 2e équation : $\frac{1}{\gamma_1 . f_1} + \frac{1}{\gamma_2 . f_2} = 0$

d'où : $f_0 = 307$ mm, $f_2 = -520$ mm, origine de la seconde équation

schémati dont : $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ en $\frac{2}{f_1} = (n_1 - 1) . A_{1n}$ et $\partial n_1 = n_{1C} - n_{1F}$, idem pour f_0.

ex. 17. 1) b) $a . \sin \alpha = k . \lambda$, $\alpha = 0{,}8815$ rad ; c) 0,9 mm.

2) a) courx. ; b) $\frac{dI'}{d\lambda} = \frac{k}{a . \cos i'} = \frac{k . n}{\cos i'}$ rad . m^{-1} ; c) cos i' extre-

mum $\longrightarrow$ $i' = 0 \longrightarrow i = 0{,}8815$ rad ; 3) $\frac{\lambda}{d\lambda} = k . I . n$; 7,8 pm.

ex. 21. A) courx. ; B) 1) $k = 6 \longrightarrow$ 13 images ; 2) $i' = 27{,}36°$; 3) 0,88 m rad . mm^{-1} ; 0,53 mm ; c) 1) $i = 27{,}36°$; non ; 2) 0,78 m rad . mm^{-1} ; 0,47 mm.

ch. 15

ex. 6. 1) $\Delta E_c = 8$ keV ; 2) E = 0,54 MeV ; $v = 113\,311$ km . s^{-1} ; 3) 10 collisions.

ex. 8. 1) $E = 2{,}938$ GeV ; 2) $E = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . E_0$; $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}$;

$\beta = 0{,}947\,665$; 3) $\Delta t = 3{,}5 \times 10^{-10}$ s ; 4) $\Delta E' = 0{,}2$ MeV ; $E' = 2{,}938\,2$ GeV ; 5) $\beta = 0{,}947\,672$; 6) $\Delta\beta = 7 \times 10^{-6}$; $\Delta v = 2{,}1$ km . s^{-1} ; 7) $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 6 \times 10^{14}$ m . s^{-2}.

ex. 18. $p_1^2 = p_2^2 . \cos^2 \theta_2 + p_3^2 . \cos^2 \theta_3$; $0 = p_2 . \sin \theta_2 + p_3 . \sin \theta_3$;

$\cos^2 \theta_2 = \frac{p_2^2 + p_1^2 - p_3^2}{2p_1 . p_2}$; $\cos \theta_3 = \frac{p_3^2 + p_1^2 - p_2^2}{2p_1 . p_3}$.

ex. 19. 1) $p_x = p_1' . \sin \theta$; $p_1 = p_1' + p_2' . \cos \theta$;

$p_2' = \sqrt{p^2 + (p_1 - p)^2}$ (1) ; 2) $E_0 + E_0 = E_1' + E_2'$;

$E_1' = E_1 + E_0 - E_2'$ (2) ; 4) $E_1' = 1{,}84$ GeV ; 5) $> 2 \times 10^9$.

ex. 26. candidats neutres : κ_1, γ_1, κ_2 ; pour γ_1 et γ_2 : $m . c^2 = 0$, donc $v = c$, donc $t = 50$ ns ; pour κ : $v = c \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}$, voir ex. 8, donc $t = 62$ ns, ces particules sont des neutrons.

ex. 28. E de chaque photon = 20,022 GeV ; $E = \Sigma E = 40{,}044$ GeV ; $\vec{P} = \Sigma \vec{p} = 0$ d'où $M . c^2 = 40{,}044$ GeV ; proton incident :

$$P = p ; \; E = \sqrt{(p . c)^2 + (m . c^2)^2} ;$$

proton cible : $P = 0$; $E = m . c^2$; énergie de masse du système :

$$(M . c^2)^2 = \left(\sqrt{(p . c)^2 + (m . c^2)^2} + m . c^2\right)^2 - (p . c)^2$$

d'où $p = 854$ GeV/c.

ch. 16

ex. 4. 1) 13,6 eV ; 2) $E_n = E_2 - E_1 = 10{,}2$ eV ; 3) 122 nm ;

4) $\nu = \frac{1}{h} . \left(\frac{13{,}6}{2^2} - \frac{13{,}6}{n^2}\right)$; $\lambda = 657$ nm ($n = 3$).

ex. 6. $\ell_2 \longrightarrow N\ell_1 + N\ell_2$; chaque B_2 est suivie d'une L_1, donc $N\ell_2 + \ell_2 = N\ell_1$; d'où : $\ell_1 : \ell_2 = 4 : 1$.

ex. 9. $E = 22$ keV.

ex. 11. 1) $\alpha = 0{,}87$; $k = 49{,}5 \times 10^9$; 2) $Z = 37$: Rubidium.

ex. 16. 1) E initial $= \frac{1}{2} m . v^2$; E final $= -\frac{13{,}6}{2^2}$

$$\Delta E = -\frac{13{,}6}{2^2} - \frac{1}{2} m . v^2 .$$

2) $|\Delta E| = h . \nu$ minimal pour $v = 0 \longrightarrow \nu = 8{,}2 \times 10^{14}$ Hz.

ex. 17. 1) $E_1 = -\frac{13{,}6}{2^2} = -3{,}4$ eV ;

2) $E_n = -13{,}6$ eV ; $k . T$ (eV) $= 0{,}862\,5 \times 10^{-4} . T$;

a) $\frac{N}{N_0} = 8 \times 10^{-39} \approx 0$; b) $\frac{N}{N_0} = 4 \times 10^{-5}$; décelable ;

c) $\frac{N}{N_0} = 2 \times 10^{-2}$ mais, voir cours.

ch. 17

ex. 7. 1) $2p + 3n$; 2) 62,9317 u ; 3) 458 fm^3 ; $2,3 \times 10^{17}$ $kg.m^{-3}$; 7,23 fm^3 ; 4) $c_v = 1,0 \times 10^{17}$ $C.m^{-3}$; $c_m = 4,4 \times 10^7$ $C.kg^{-1}$.

ex. 9. 1) 160 MeV ; 2) $E = 160$ MeV ; 3) 0,92 EJ ; 4) $\approx 3,5$ mois.

ex. 10. 1) ^{56}V : 46 525,82 MeV ; ^{56}V : 47 454,36 MeV ; T : 46 523,58 MeV ; 2) 7,52 MeV ; 11,05 MeV.

ex. 11. $\delta = 3,3$ MeV.

ex. 14. 1. $E_p = 0$. $E_n' = 0$. 2) $r_0 = 5,47$ fm. 3) $\left|\frac{E_n'}{E_n}\right| = 18,6$. $2,2 \times 10^{-3}$; 7×10^{-40} ; 4) $|E_p'| = 50\ E_p$ pour $r = 0$; $E_p = 100\ |E_p'|$ pour $r = 12$ fm. 5) $E_p = 9 \times 10^9 \times \left(\frac{1,6 \times 10^{-19}}{r}\right)^2$ en SI. 6) contact. 7) sur graphique de E_p' seul. $\longrightarrow$ $r = 3,2$ fm.

ch. 18

ex. 3. 1) $\frac{dN}{dt} = V - \lambda . N$ équation identique à celle de la charge d'un condensateur $\longrightarrow$ $\lambda . N = V.(1 - e^{-\lambda t})$; $\lambda . N_{max} = V = 10^6$ s^{-1} ; 2) 49,3 h ; 3) si $\lambda . N_0 = 0,9$ V $\longrightarrow$ $N_0 = 6,92 \times 10^{24}$ $\longrightarrow$ $N = 6 \times 10^{27}$.

ex. 5. 1) $(\lambda . N)_{Sr} = (\lambda . N)_{Rb}$ $\longrightarrow$ $T_{Sr} = 4,5 \times 10^{10}$ années ; 2) 14 %.

ex. 8. 1) $x = 3$; $y = 2$; $x' = 5$; $y' = 4$; 2) *a*) 15 438 $km.s^{-1}$; *b*) oui ; *c*) 4,24 µs.

ex. 14. 1) $^{24}Na \longrightarrow {}^{24}Mg + e^- + \bar{\nu}$; 2) *a*) 5 MeV ; *b*) 0,88 MeV ; 10×10^{20} Hz, 301 fm ; $6,85 \times 10^{20}$ Hz, 451 fm ; $3,3 \times 10^{20}$ Hz, 905 fm.

ex. 17. 1) $k . v_0 = \Delta E_c$; 2) $\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta E}{2M . v^2}$; *a*) $9,8 \times 10^{-11}$; non ; *b*) $9,55 \times 10^{-5}$; oui.

ex. 23. 1) $^{93}Rb \longrightarrow {}^{93}Sr + e^- + \bar{\nu}$; $N_{Rb} = N_0 . Rb e^{-\lambda t}$ on selon les notations de l'énoncé : $^{93}Rb = {}^{93}Rb_0 . e^{-\lambda t}$; $^{93}Sr = {}^{93}Rb_0 - {}^{93}Rb = {}^{93}Rb_0 (1 - e^{-\lambda t}) = {}^{93}Rb (e^{\lambda t} - 1)$; 2) à la date t : $^{93}Sr = {}^{93}Sr_0 + {}^{93}Rb (e^{\lambda t} - 1)$: (nombre d'atomes initial + nombre d'atomes formés) d'où

$$\frac{^{93}Sr}{^{93}Sr} = \frac{^{93}Sr_0}{^{93}Sr} + \frac{^{93}Rb}{^{93}Sr} (e^{\lambda t} - 1)$$

$\frac{^{93}Sr}{^{93}Sr}$ et $\frac{^{93}Rb}{^{93}Sr}$ sont mesurés, $\frac{^{93}Sr_0}{^{93}Sr} = \frac{7}{9,06}$

seul t est inconnu et se calcule.

ch. 19

ex. 1. 2) $\Delta m = -0,018\,89$ u ; $\Delta E = 17,6$ MeV ; 3) $E = 14,1$ MeV ; $p = 163$ MeV/c ; 4) $p = 2$ MeV/c, soit car $2 \ll 163$.

ex. 3. A) 1) $^{241}_{94}Pu \longrightarrow {}^{241}_{95}Am + e^- + \bar{\nu}$; $^{241}_{95}Am \longrightarrow {}^{237}_{93}Np + {}^{4}_{2}He$; A) 2) 6,7 MeV ; A) 3) *a*) $\Delta E = m_\alpha . c^2$; *b*) 6,6 MeV ; B) 1) $4,2 \times 10^{17}$ Bq ; B) 2) 131,5 années.

ex. 6. 1) *a*) $^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{95}_{42}Zr + {}^{139}_{57}La + 2{}^{1}_{0}n$; *b*) $7,8 \times 10^8$ MJ ; *c*) ralentir les neutrons ; 2) *a*) 3 réactions β^-, émission de e^- et $\bar{\nu}$; *b*) $N = N_0 . e^{-\lambda t}$ $\left(\lambda = \ln\frac{2}{T}\right)$; *c*) 0,933 ; 1 ; 0 ; *d*) $-\frac{dN}{dt} = \lambda . N = 2,6 \times 10^{16}$; $2,6 \times 10^7$; 0 ; Cs.

ex. 7. A) 1) *a*) 4×10^{16} ; *b*) 1,865 kg.jour^{-1} ; A) 2) $^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{239}_{92}U$; $^{239}_{92}U \longrightarrow {}^{239}_{93}Np + e^- + \bar{\nu}$; $^{239}_{93}Np \longrightarrow {}^{239}_{94}Pu + e^- + \bar{\nu}$; $^{239}_{94}Pu \longrightarrow {}^{235}_{92}U + {}^{4}_{2}He$.

B) 1) 15 600 $km.s^{-1}$; C) 1) $M_\alpha . v_\alpha = M_\alpha . v_\alpha' + M_n . v_n$; $\frac{1}{2} M_\alpha . v_\alpha^2 = \frac{1}{2} M_\alpha . v_\alpha'^2 + \frac{1}{2} M_n . v_n^2$; C) 2) $v_n' = \left(\frac{M_n - M_\alpha}{M_n + M_\alpha}\right) . v_n = \frac{3}{5} v_n = 9 \times 10^6$ $m.s^{-1}$; $v_\alpha' = \frac{2M_n}{M_n + M_\alpha} . v_n = \frac{8}{5} v_n = 24 \times 10^6$ $m.s^{-1}$; D) $v_n = 10^8$ $m.s^{-1}$.

ex. 8. 2) $-0,026\,536\,8$ u ; $6,58 \times 10^{-3}$; 3) $1,38 \times 10^{27}$ kg ; 4) $\mu = 4 \times 10^9$ kg (4 millions de tonnes par seconde) ; $T = 10 \times 10^9$ ans.

ex. 21. $-\frac{1}{2} m . v^2$ = variation de l'énergie potentielle de l'infini à la surface du soleil $v = \sqrt{\frac{2G . M_\odot}{R}}$.

— idem pour un électron ;
— le neutron, de masse nulle, a toujours $v = c$.

INDEX ICONOGRAPHIQUE

Page couverture, ph. © Ivaldi-Invision ; p. 7, ph. © HANS/Top ; p. 8, fig. 1-2, ph. Jeanbor © Photeb, fig. 3, ph. © Pichon/Presse Sports, fig. 4, ph. David F. Malin © Anglo-Australian Telescope board/Arch. Photeb ; p. 9, fig. 5, ph. © Dubos/C.E.R.N. ; p. 11, fig. 13a, 13b, ph. © Ruyer/Explorer ; p. 12, fig. 14a, 14b, 15, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 13, fig. 17, ph. © Editorial Development center/Archives Photeb ; p. 25, ph. © Scala ; p. 26, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 36, ph. © Pressdc/Presse Sports ; p. 43, ph. © N.A.S.A./Archives Photeb ; p. 45, fig. 3, ph. © Col. P.P.P./Archives Photeb ; fig. 4, ph. © Diaz/Rapho ; fig. 5, p. © Science Source/Explorer ; p. 49, fig. 13, ph. © Aérospatiale ; p. 58, fig. 18, ph. © C.N.E.S. 1987, Distribution Spot-Image ; p. 64, ph. © Pasnik/Explorer ; p. 66, fig. 7, ph. © Dr. Edgerton/S.P.L./Cosmos ; p. 67, fig. 9, ph. © Dr. Edgerton/S.P.L./Cosmos ; p. 68, fig. 2, ph. © Kraft/Explorer, fig. 3, ph. © J. Rousseau ; p. 69, fig. 7, ph. © Dr. Edgerton/S.P.L./Cosmos ; p. 70, ph. © Photeb ; p. 77, ph. © Col. © C.E.R.N., p. 89, fig. 13, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 72, fig. 20-21-22, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 73, fig. 23-24-25, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 77, ph. © Col. P.P.P./Archives Photeb ; p. 85, ph. © S.N.C.F. ; p. 86, fig. 1, ph. © S. Franchi/Sygma ; fig. 2, Ph. Jeanbor © Arch. Photeb ; p. 93, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 94, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 105, ph. © The Bettmann Archive ; p. 107, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 108, fig. 5a-b, (6-1), ph. Jeanbor © Photeb ; p. 109, fig. 12-13, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 115, ph. © Cahuzac ; p. 153, ph. © Airbus ; p. 160, fig. 17a-b-c, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 118, ph. © C.S.F.-I.C. Gerard/Archives Photeb ; p. 131, ph. © Airbus ; p. 140, ph. © Cahuzac ; p. 153, ph. © Airbus ; p. 160, fig. 17a-b-c, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 161, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 166, fig. 28-29, 2 ph. Jeanbor © Photeb ; p. 165, ph. © Airbus ; p. 164, fig. 28-29, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 176, ph. © Legrand ; p. 177, ph. © Tokimeca ; p. 182, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 197, ph. © Philips ; p. 201, ph. © L.P.N 115. Paris ; p. 218, fig. 23-24, ph. © Charlet, p. 231, fig. 33, ph. © Charlet ; p. 221, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 223, ph. © Roux/S.O.D.I.L. photothèque I.D.F. ; p. 224, fig. 1 et 3, ph. © Charlet ; p. 227, 4, 5, 6, ph. © Charlet ; p. 228, 4, 5, 6, ph. © Charlet ; p. 229, fig. 2, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 243, ph. © S.O.P.E.L.E.M. ; p. 247, ph. © Photomicrocos-Oxmicro ; p. 250, fig. 25-26-27-28, ph. © E.N.C.P.B. ; p. 263, ph. © Nikon ; p. 264, ph. © 1987, V. Hamelin/Jad-AS ; p. 265, ph. © Nikon ; p. 267, fig. 2/6, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 269, ph. © Krafft ; p. 270, fig. 11-12, 2ph. © Musée Curie/Institut du radium/Arch. Photeb ; p. 282, fig. 25, ph. © Dubos/C.E.R.N., fig. 27, ph. © M. Chapiro ; p. 283, ph. © Jeanbor © Photeb ; p. 289, ph. © M. Chapiro ; p. 289, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 292, fig. 35, ph. © Dubos/C.E.R.N., fig. 37, ph. © M. Chapiro, p. 294, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 307, ph. © Dubos/C.E.R.N. ; p. 309, ph. © Dubos/C.E.R.N. ; p. 314, 3 ph. © Dubos/C.E.R.N. ; p. 315, fig. 10 et 11, ph. © M. Chapiro, p. 294, ph. Jeanbor © Photeb ; p. 307, ph. © Dubos/C.E.R.N. ; p. 309, ph. © Dubos/C.E.R.N. ; p. 314, 3 ph. © Dubos/C.E.R.N. ; p. 315, fig. 10 et 11, ph. © Dubos/C.E.R.N. ; p. 318, ph. © Dubos/C.E.R.N. ; p. 319, 2 ph. © Dubos/C.E.R.N., fig. 12, ph. © C.E.A. ; p. 316, fig. 13, ph. © C.E.R.N., fig. 14, ph. © Dubos/C.E.R.N. ; p. 324, ph. © Dubos/C.E.R.N. ; p. 325, ph. © C.E.A. ; p. 326, ph. © Dubos/C.E.R.N. ; p. 333, ph. © 1989 by Sidney Harris-American Scientist Magazine ; p. 334, ph. © Dubos/C.E.R.N. ; p. 336, ph. © Ernst Klett Verlag Gmbh Co KG Stuttgart diffusé par Jeanbor © Photeb ; p. 348, ph. © Ernst Klett Verlag Gmbh Co KG Stuttgart diffusé par Jeanbor © Photeb ; p. 358, ph. © C.E.A. ; p. 361, ph. © C.E.A. ; p. 365, ph. © C.E.A. ; p. 375, ph. © C.E.A./D.R.P.C. ; p. 385, 3 ph. © C.E.R.N., Genève ; p. 386, fig. 19, ph. © J. Bougenot/C.E.A./D.R.P.C. ; fig. 20, ph. © C.E.A. ; p. 387, 2 ph. © C.E.A. ; p. 388, ph. © Bonazzi/Jeanbor ; p. 405, ph. © C.E.A. ; p. 405, ph. © C.E.A./D.R.P.C. ; p. 406, 2 ph. © C.E.A. ; p. 407, fig. 9, ph. © C.E.A. ; p. 408, ph. © C.E.A./D.R.P.C. ; p. 409, ph. © Observatoire du Pic du midi ; p. 411, ph. © C.E.A. ; p. 419, ph. © P. Bacon, 1981 ; p. 420, ph. © Dubos/C.E.R.N. ; p. 421, 2 ph. © Dubos/C.E.R.N. ; p. 424, ph. © Dubos/C.E.R.N. ; p. 425, ph. © Dubos/C.E.R.N. ; p. 426, ph. © Dubos/C.E.R.N. ; p. 427, 2 ph. © C.E.R.N. ; p. 428, ph. © Hale Observatories ; p. 429, 2 ph. © Hale Observatories.

Imprimé en France par I.M.E. - 25-Baume-les-Dames
Dépôt légal 1re édition : Avril 1989 - Dépôt légal : Juillet 1990 - N° imprimeur : 7353