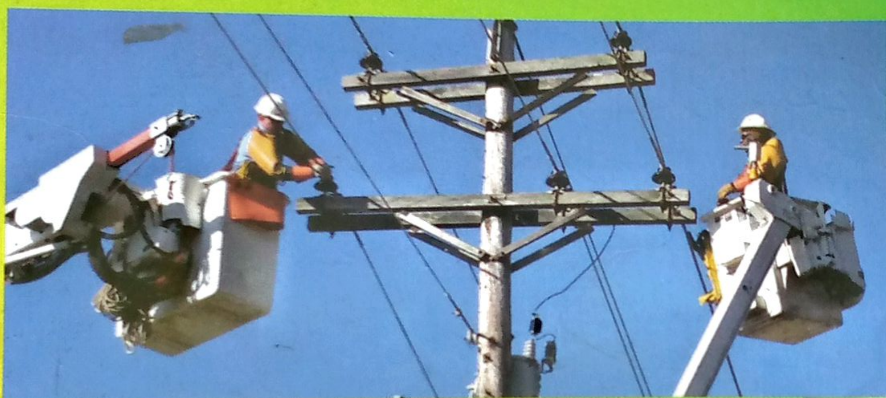
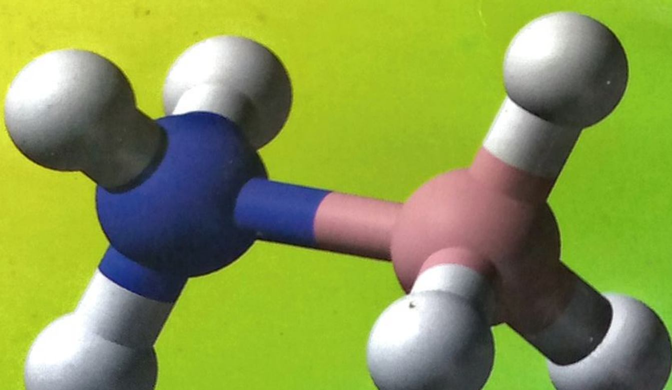
Chaibou Dambagi / Hamadou Boubacar / Adamou Amadou

Physique et Chimie Terminales C & D





Rappels de cours
Exercices et corrigés

EDITIONS ALPHA

Nouvelle édition 2017

QUELQUES OUTILS MATHÉMATIQUES

1. FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

. cos (a + b) = cos a cos b – sin a sin b

. sin (a+ b) = cos a sin b + sin a cos b

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

. $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$

. $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

. $\sin a + \sin b = 2\cos\dfrac{a-b}{2}\sin\dfrac{a+b}{2}$

. $\sin a - \sin b = 2\sin\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{a+b}{2}$

2. LES ANGLES

a) Les angles supplémentaires

Deux angles α et θ sont supplémentaires si : $\alpha + \theta = \pi$

$$\begin{cases} \cos\alpha = -\cos\theta \\ \sin\alpha = \sin\theta \end{cases}$$

b) Angles complémentaires

α et θ sont complémentaires si $\alpha + \theta = \dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \sin\theta \\ \sin\alpha = \cos\theta \end{cases}$$

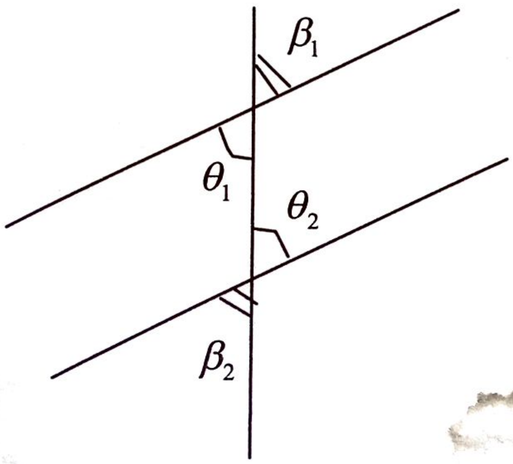
c) Les angles égaux

- angles alternes internes

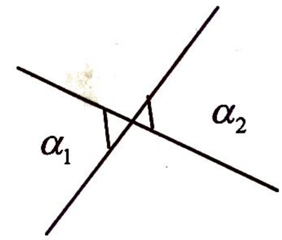
$\theta_1 = \theta_2$

- angles alternes externes

$\beta_1 = \beta_2$

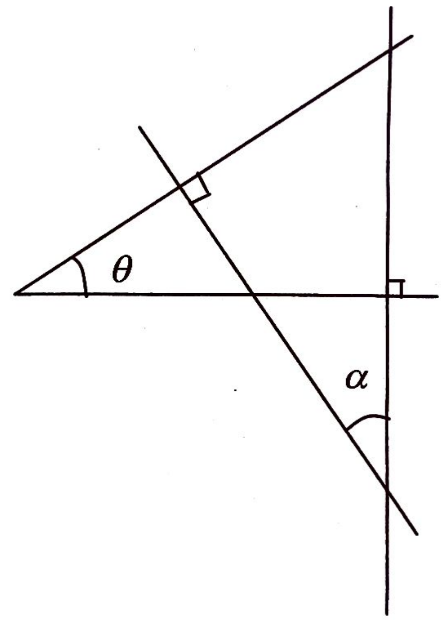


- angles opposés par le sommet



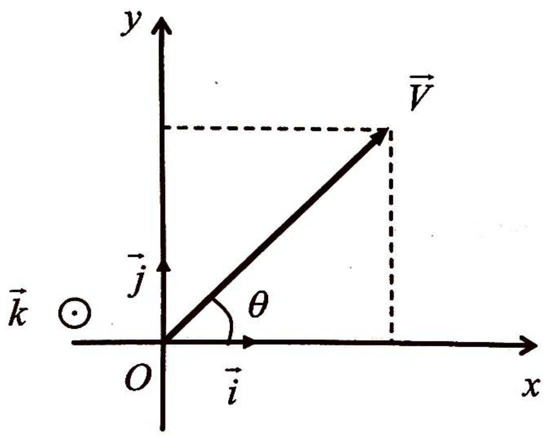
$$\alpha_1 = \alpha_2$$

- angles à cotés perpendiculaires

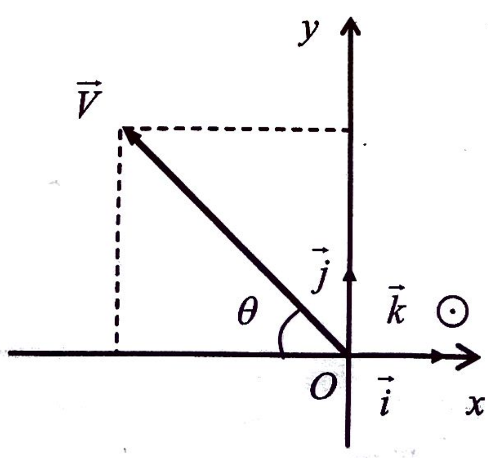


$$\alpha = \theta$$

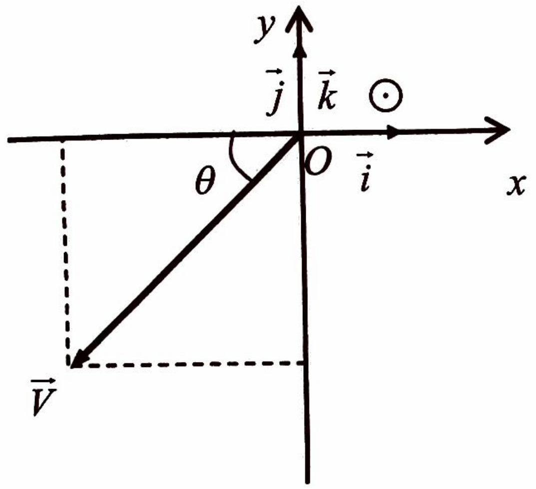
3. PROJECTION DE VECTEURS



$$\vec{V} \left| \begin{array}{l} V_x = V Cos\theta \\ V_y = V Sin\theta \\ V_z = 0 \end{array} \right.$$



$$\vec{V} \left| \begin{array}{l} V_x = -V \cos\theta \\ V_y = V \sin\theta \\ V_z = 0 \end{array} \right.$$



$$\vec{V}\left|\begin{array}{l} V_x = -V\cos\theta \\ V_y = -V\sin\theta \\ V_z = 0 \end{array}\right.$$

4. CALCUL VECTORIEL

a) Produit scalaire

$$\vec{u}.\vec{v} = u.v\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$$

Le produit scalaire est commutatif $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

b) Produit vectoriel

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{w}\left|\begin{array}{l} \text{direction orthogonale au plan } \left(\vec{u},\vec{v}\right) \\ \text{sens tel que } \left(\vec{u},\vec{v};\vec{w}\right) \text{ forme un triedre direct} \\ \text{norme } \left\|\vec{w}\right\| = u.v\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right) \end{array}\right.$$

5. DÉRIVÉES

Fonction $y = f(t)$	Dérivée $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$
t^n	nt^{n-1}
$Ln\ t$	$\frac{1}{t}$
$y = f(u)$, où $u = g(t)$	$\frac{dy}{du}\frac{du}{dt}$
e^t	e^t
cos t	- sin t
sin t	cos t
cos at	- a sin at
sin at	a cos at

6. QUELQUES PRIMITIVES USUELLES

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c \quad ; \quad \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c$$

$$\int e^t dt = e^t + c \quad ; \quad \int e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a} + c$$

$$\int S\text{int}\, dt = -Cost + c \quad ; \quad \int Sinatdt = \frac{-Cosat}{a} + c$$

$$\int Costdt = S\text{int} + c \quad ; \quad \int Cosatdt = \frac{Sinat}{a} + c$$

Chapitre 1 CINEMATIQUE

RAPPEL DU COURS

I GÉNÉRALITÉS

1. Définition.

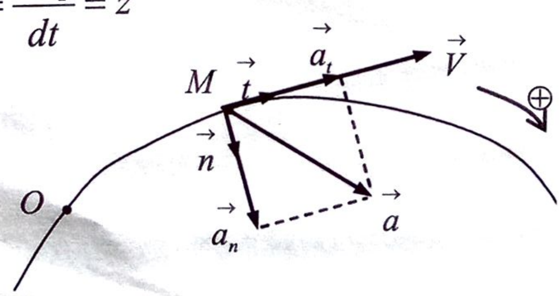
Soit un point mobile M ponctuel se déplaçant dans un repère d'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Vecteur position $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; Abscisse curviligne $s = \widehat{OM} = f(t)$.

- Vecteur vitesse $\vec{V} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt}$; $\vec{V} \left| \begin{array}{l} Vx = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} \\ Vy = \dfrac{dy}{dt} = \dot{y} \\ Vz = \dfrac{dz}{dt} = \dot{z} \end{array} \right.$

- Vecteur accélération $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ soit $\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = \ddot{x} \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = \ddot{y} \\ a_z = \dfrac{dV_z}{dt} = \ddot{z} \end{array} \right.$

2. Vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{a}$ dans la base de frenet. $\left(\vec{t}, \vec{n}\right)$



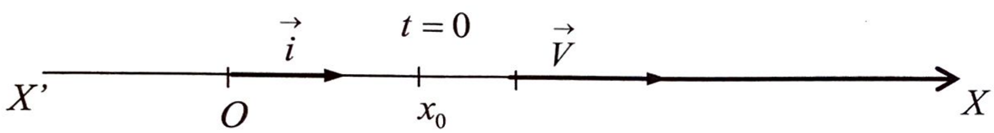
Vitesse $\vec{V} = \dfrac{ds}{dt}\vec{t} = \dot{s}\,\vec{t}$.

Accélération $\vec{a} = a_t\,\vec{t} + a_n\,\vec{n}$ $\quad a_t = \dfrac{dV}{dt}$ et $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$.

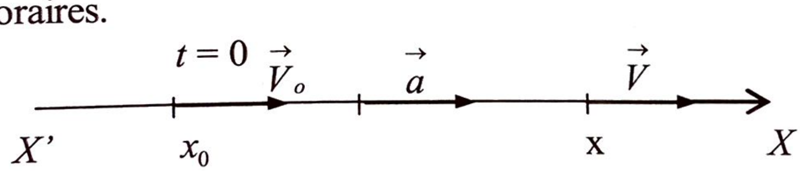
(ρ : rayon de courbure de la trajectoire au point M).

II **MOUVEMENTS PARTICULIERS**

1. Mouvement rectiligne uniforme :
   - La trajectoire est une droite.
   - Le vecteur vitesse $\vec{V}$ est constant et parallèle à la trajectoire (accélération nulle).
   - Equations horaires $a = 0,\ V = C^{te}\quad x = Vt + x_0$.



2. Mouvement rectiligne uniformément varié :
   - La trajectoire est une droite.
   - Le vecteur accélération $\vec{a}$ est constant et parallèle à la trajectoire.
   - Equations horaires.



$$a = C^{te} \qquad ; \qquad V = at + V_o \qquad ; \qquad x = \frac{1}{2}at^2 + V_o t + x_o$$

- Mouvement rectiligne uniformément accéléré : $\vec{a}\,.\,\vec{V} > 0$
- Mouvement rectiligne uniformément retardé : $\vec{a}\,.\,\vec{V} < 0$
- Relation entre x et V indépendante du temps : $V^2 - V_0^2 = 2a(x - x_o)$.

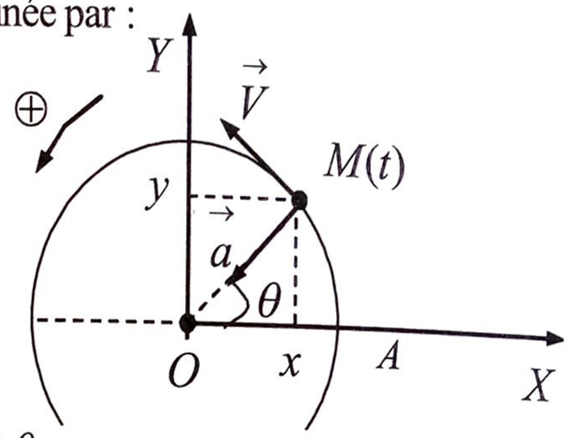
3. Mouvement circulaire uniforme.

Trajectoire : cercle de rayon R ; vitesse : valeur constante ;

A chaque instant la position du mobile peut être déterminée par :

- Le vecteur position :

$$\vec{OM}\left|\begin{array}{l} x = R\cos(\omega t+\varphi) \\ y = R\sin(\omega t+\varphi) \end{array}\right. \qquad \varphi : \text{ phase à } t=0$$



- L'abscisse curviligne $s = Vt + s_0$

- L'abscisse angulaire θ = mes $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ $\theta = \omega t + \theta_0$

- L'accélération est centripète : $\vec{a} = -\omega^2.\overrightarrow{OM}$

$$a = \frac{V^2}{R}$$

Vitesse du mobile $V = R\dot{\theta} = R\omega$

Exercices

Exercice N° 1

Un point M est en mouvement dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Les coordonnées *de* M sont $\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t+5 \end{cases}$

1. Quelle est l'équation cartésienne de la trajectoire ?

2. Quelle est la nature du mouvement ? On utilise les unités du *SI*.

<u>*Solution*</u>

1. Equation cartésienne de la trajectoire .

$$x = 4t \Rightarrow t = \frac{x}{4} \quad ; \quad y = 3(\frac{x}{4}) + 5 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + 5$$

2. Nature du mouvement

$$V_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow V_x = 4; V_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow V_y = 3; \|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^{\ 2} + V_y^{\ 2}} = 5ms^{-1}$$

$\vec{V} = \vec{cte}$. Donc le mouvement est rectiligne uniforme.

Exercice N° 2

Un mobile décrit l'axe $X'OX$ d'un mouvement uniforme.
A l'instant $t_1 = 1s$ l'abscissedu mobile est $x_1 = 8m$ *et à* $t_2 = 3s$ $x_2 = -4m$.
Former l'équation horaire du mouvement.

Solution

Mouvement rectiligne uniforme $x = Vt + x_o$.

A $t_1 = 1s$ $x_1 = 8\ m$

A $t_2 = 3s$ $x_2 = -\ 4\ m$

$\begin{cases} Vt_1 + x_0 = x_1 \\ Vt_2 + x_0 = x_2 \end{cases}$; $\begin{cases} V + x_0 = 8 \\ 3V + x_0 = -4 \end{cases}$; $V = -6\ m\,s^{-1}$; $x_o = 14m$

$$x = -6t + 14$$

E
xercice N° 3

Un mobile démarre à la vitesse $V_o = -8ms^{-1}$ et est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié, tel qu'à la date $t = 2\ s$, $x = 0$ et à la date $t = 6s$, $x = 0$.
1. Ecrire l'équation horaire du mouvement.
2. Quelles interprétations physiques peut-on donner aux dates 2s et 6s ?
3. Etudier les phases du mouvement.

Solution

1. Equation horaire du mouvement.

Mouvement rectiligne uniformément varié.

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$, $t = 2\ s, x = 0$ et $t = 6\ s, x = 0$

$\begin{cases} 2a - 16 + x_0 = 0 \\ 18a - 48 + x_0 = 0 \end{cases}$ $a = 2\text{ms}^{-2}$; $x_0 = 12\ m$

$$x = t^2 - 8t + 12$$

2. Interprétations physiques

$V = 2t - 8$, si $t = 2\ s$ $V = -\ 4\ m/s$; si $t = 6\ s$ $V = 4\ m/s$

A l'instant $t = 2s$ le mobile passe à l'origine dans le sens négatif et à l'instant $t = 6\ s$ il repasse à l'origine dans le sens positif.

3. Etude du mouvement.

$V=0 \Rightarrow 2t-8=0$; $t=4\,s$

t	0	4	$+\infty$
a	+		+
v	-	0	+
$a.v$	-	0	+

$t\in[0,4[$ $a.V<0$ le mouvement est rectiligne uniformément retardé.
$t=4s$, le mobile s'arrête et le mouvement change de sens.
$t\in]4,+\infty[$ $a.v>0$, le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

Exercice N° 4

1. Une automobile décrit une trajectoire dans un repère $(O, \vec{i})$, son accélération est constante. A l'instant $t=0s$, l'automobile part d'un point M_0.
A l'instant $t_1=3s$ l'automobile passe par le point M_1 d'abscisse $x_1=59$ à la vitesse $V_1=6ms^{-1}$.
Elle arrive ensuite au point M_2 d'abscisse $x_2=150m$ à la vitesse $V_2=20m.s^{-1}$

a) Etablir l'équation horaire du mouvement de l'automobile.

b) A quel instant t_2 l'automobile passe-t-elle par le point M_2 ?

c) Calculer la longueur L du trajet effectué par l'automobile pendant la phase d'accélération dont la durée est fixée à 20s.

2. A la date $T=1s$, une moto se déplaçant sur la même droite à la vitesse $V'=20\,ms^{-1}$ passe par le point M' d'abscisse $X'=5\,m$.
Pendant toute la durée du mouvement fixée à $20\,s$, la moto va d'abord dépasser l'automobile, ensuite l'automobile va rattraper la moto. Déterminer :

a) L'équation horaire du mouvement de la moto dans le repère $(O, \vec{i})$

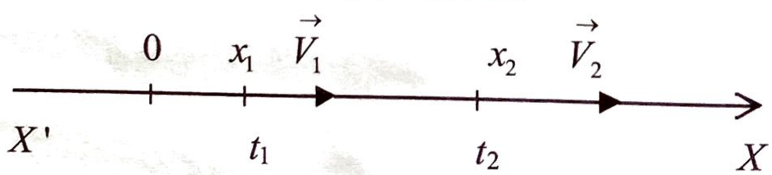
b) Les dates des dépassements.

c) Les abscisses des dépassements.

d) La vitesse de l'automobile au moment où elle rattrape la moto.

e) La distance parcourue par la moto entre la date $T=1s$ et la date où elle dépasse l'automobile.

Solution



1. a) Equation horaire du mouvement de l'automobile.

- Détermination de a : $a=\dfrac{V_2^2-V_1^2}{2(x_2-x_1)}$; $a=2ms^{-2}$

- Calcul de V_0 : $V_1=at_1+V_0 \Rightarrow V_0=V_1-at_1$; $v_0=6-2.3 \Rightarrow V_0=0\ ms^{-1}$.

- Calcul de x_0: $x_1=\frac{1}{2}at_1^2+V_0t_1+x_0$; $x_0=x_1-\frac{1}{2}at^2+V_0t_1$; $x_0=50m$, $x=t^2+50$

b) Calcul de t_2 ; x_2=150m

$t_2^2 = x_2-50 \Rightarrow t_2^2=100 \Rightarrow t_2=10s$

c) Calcul de L : *à* t=20s, $x = 20^2 + 50 = 450\ m$.

$L = x - x_0=450-50=400 \Rightarrow L=400m$

2. a) Equation horaire du mouvement de la moto.

Mouvement rectiligne uniforme. $x_m=20(t-1)+5 \Rightarrow x_m=20t-15$

b) Dates des dépassements.

$x = x_m \quad t^2+50=20t-15 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 20t + 65 = 0 \Rightarrow t_1 = 4,1s$ et $t_2 = 15,9s$.

La moto dépasse l'automobile à la date $t_1 = 4,1s$ et l'automobile rattrape la moto à $t_2 = 15,9\ s$.

c) Les abscisses des dépassements.

A $t_1 = 4,1s \qquad x_1 = 20\times4.1-15=67m$

$t_2=15.9s \qquad x_2=20\times15.9-15=303.m$

d) La vitesse de l'automobile à $t_2=15.9s$.

$v = 2t \Rightarrow v = 2\times15,9 = 31,8ms^{-1}$

e) distance parcourue par la moto entre les dates T=1s et 4,1s

Si $t = 4,1s$; $x_m=67m \quad d = x_m-x'$; $d = 67-5=62\ m$; $d = 62\ m$

Exercice N° 5

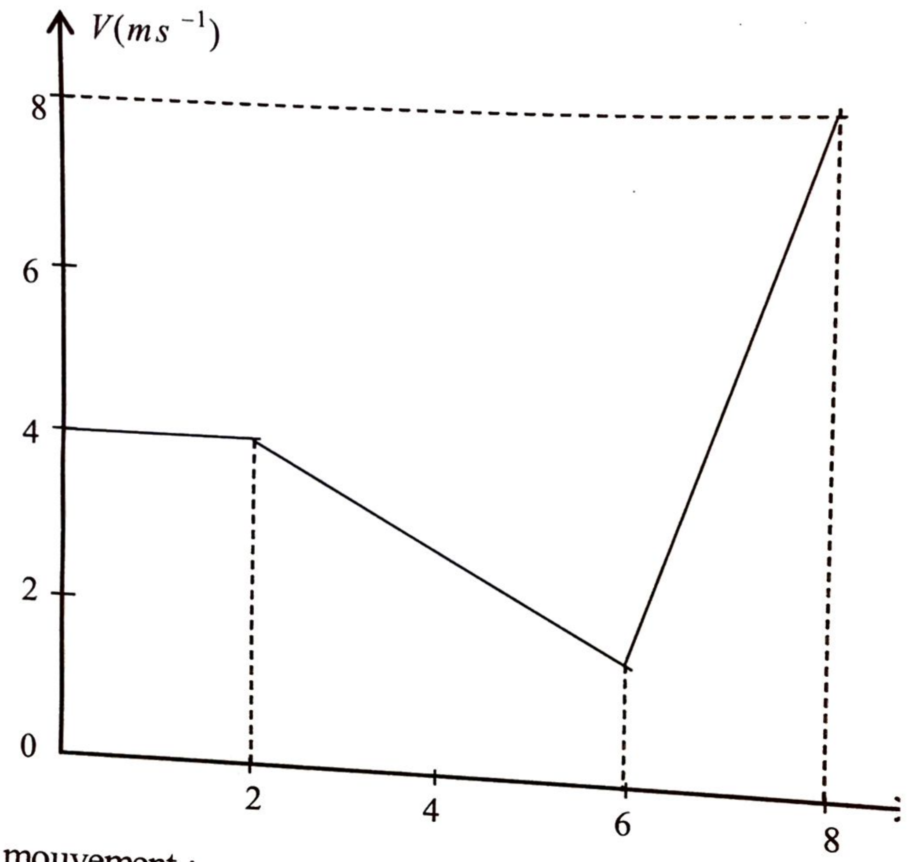
Un mobile est animé d'un mouvement de translation rectiligne dans un repère $(O,\vec{i})$.
Un chronomètre a relevé la vitesse en fonction du temps.
On a obtenu le tableau suivant :

$t(s)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$V(ms^{-1})$	4	4	4	3,3	2,7	2,1	1,5	4,7	8

1. Tracer le graphique $V=f(t)$ Echelles : *1cm pour 1s ; 1cm pour 1m/s.*
2. Etablir l'équation horaire du mouvement pour chaque phase. Préciser la nature du mouvement pendant chaque phase.
3. Déterminer la position du mobile à l'instant $t = 4s$.
4. Calculer la longueur du trajet parcouru par le mobile pendant la durée du mouvement.

Solution

1. Tracé du graphique $V=f(t)$.



2. Equation horaire du mouvement :

- 1[ère] phase t appartient à $[0\,;2\,s]$; $V=C^{te}$; le mouvement est rectiligne uniforme.

$x = Vt + x_o$; à $t = 0s$, $x_0 = 0 \Rightarrow x = Vt \Rightarrow x = 4t$

- 2[ème] phase $t \in [2\,;6s]$.

La vitesse diminue. On a alors un mouvement rectiligne uniformément retardé.

$$x = \frac{1}{2}a_2t^2 + V_{02}t + x_{02}; x_{02} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}a_2t^2 + V_{02}t$$

$$V = a_2t + V_{02} \Rightarrow a_2 = \frac{V - V_{02}}{t}; a_2 = \frac{1,5-4}{6-2} = -0,625ms^{-2}$$

$x=\frac{-0,625}{2}t^2+4t$ (Résolution faite en changeant l'origine des dates et l'origine des espaces).

Remarque : On peut aussi établir l'équation horaire en gardant les origines initiales. On trouve alors : $x = \frac{1}{2}a,(t-2)^2 + V_{o2}\ t^{-2} + x_1$ x_1 abscisse de la phase1.

$$x = \frac{-0,625}{2}t^2+5,25t-1,25$$

- 3è phase $t \in [6s, 8s]$

$V_{03} = 1{,}5\ ms^{-1}$; $V_3 = 8\ ms^{-1}$. Donc le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

$$x = \frac{1}{2}a_3t^2 + V_{03}t + x_{03} \quad ; \quad x_{03} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}a_3t^2 + V_{03}t \qquad a_3 = \frac{V - V_{03}}{t} = \frac{8 - 1{,}5}{8 - 6} = 3{,}25ms^{-2}$$

$x = \frac{3{,}25}{2}t^2 + 1{,}5t$ ou $x = \frac{3{,}25}{2}t^2 - 18t + 68{,}5$ sans changer les origines.

3. Position du mobile à $t = 4s$.

- 2s dans la phase 1 $\quad x_1 = 4\times 2 = 8\ m$
- 2s dans la phase 2 $\quad x_2 = \frac{-0{,}625}{2} \times 2^2 + 4 \times 2 = 6{,}75\ m$

La position du mobile est $x = x_1 + x_2 = 14{,}75\ m$.

4. La longueur totale du trajet.

$$d = x_1 + x_2 + x_3 \qquad x_1 = 8\ m$$

$$x_2 = -\frac{0{,}625}{2} \times 4^2 + 4 \times 4 = 11m \ ; \quad x_3 = \frac{3{,}25}{2} \times 2^2 + 1{,}5 \times 2 = 9{,}5\ m \ ; \quad d = 28{,}5m\mu$$

Exercice N° 6

On donne l'equation horaire d'un mobile M par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$M \begin{vmatrix} x = A \cos \omega\tau \\ y = A \sin \omega\tau \end{vmatrix}$ avec A = 10 cm et w = 10 rad. 5^1

1. Montrer que la valeur de la vitesse est constante.et la calculer.
2. Montrer que la valeur de son accélération est constante et la calculer.
3. Quelle est la trajectoire du mobile ? Que représente A ?
4. Quelle sont la direction et le sens de la vecteur accélération ?

<u>Solution</u>

1. a) Montrons que V est constante.

$\vec{v} \begin{vmatrix} \dot{x} = A\ \omega\ \sin\omega t \\ \dot{y} = A\ \omega\ \cos\omega t \end{vmatrix}$

$$V = \sqrt{\dot{\chi}^2_+ + y^2 =)}\ \sqrt{(-A\omega\sin\omega t)^2 + (A\omega\cos\omega t)^2}$$

$$V = A\omega\ \sqrt{\sin^2\omega t\ +\ \cos^2\omega t}$$

$$V = A\omega = cte$$

$$AN : V = \theta{,}1\ .\ 10 = 1m\ \text{s}^{-1}$$

2. Montrons que A est constante.

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l}\ddot{x}=A\omega^2 \cos \omega t\\ \ddot{y}=A\omega^2 \sin \omega t\end{array}\right.$$

$$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=A\omega^2=cte$$

$$AN: a=0{,}1\ .\ 10=10m\ s^{-2}$$

3. Nature de trajectorie

$$x^2+y^2=A^2\left(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t\right)$$

$x^2+y^2=A^2$ *équation* d'un cercle de centre 0 et de rayon A.

4. On $\vec{a}=-\omega^2\ \vec{OM}$

$\vec{a}$ est porté par le rayon et dirigée vers le centre ($\vec{a}$ est centripète).

Exercice N° 7

Les équations paramétriques du mouvement d'un mobile M se déplaçant dans un plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ sont : $\begin{cases}x=3+2\cos(2t+1)\\ y=4+2\sin(2t+1)\end{cases}$. On utilise les unités du *S.I.*

1. a) Montrer que la valeur de la vitesse du mobile est constante.
   b) Montrer que la valeur de l'accélération du mobile est constante.
   c) Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile.
   d) En déduire la nature du mouvement.
2. a) Représenter la trajectoire du mobile dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ à l'échelle 1/100.
   b) Placer sur cette trajectoire les positions : M_0, M_1, M_2, M_3 correspondant respectivement aux instants $t_0=0s$, $t_1=0{,}285s$, $t_2=1{,}07\ s$, $t_3=1{,}856\ s$.
   c) Représenter (sans Echelle) les vecteurs vitesse et accélération au point M_0.

Solution

1. a) Montrons que la vitesse de *M* est constante.

$$\dot{x}=-4\sin(2t+1)$$

$\dot{y}=4\cos(2t+1)$;V= $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$; $V=4\sqrt{[\sin^2(2t+1)+\cos^2(2t+1)]}=4ms^{-1}$; $V=C^{te}$

b) Montrons que l'accélération du mobile est constante.

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l}\ddot{x}=-8\cos(2t+1)\\ \\ \ddot{y}=-8\sin(2t+1)\end{array}\right. \quad ;a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}\quad ;\quad a=8\ ms^{-2}\ ;\quad a=C^{te}$$

c) Equation cartésienne de la trajectoire : $(x-3)^2+(y-4)^2=4$.

d) Nature du mouvement :

- La trajectoire est un cercle de rayon 2 m, de centre $I(3\ ;4)$
- La valeur de la vitesse est constante.

Donc le mouvement est circulaire uniforme.

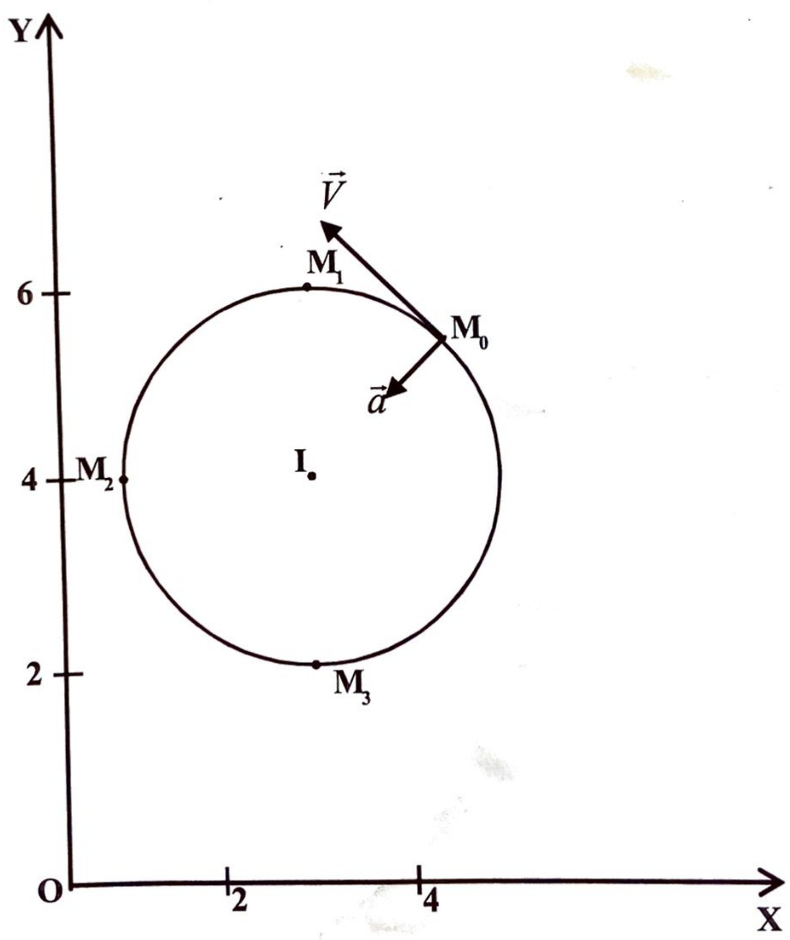
3. a) Représentation de la trjectoire (voir schéma).

b) Positions des points M_0, M_1, M_2, M_3 (voir schéma).

Détermination des coordonnées.

$M_0(4\ ;5{,}7)$; $M_1(3\ ;6)$; $M_2(1\ ;4)$; $M_3(3\ ;2)$.

c) Représentation de $\vec{V}$ et $\vec{a}$ au point M_0.



Exercice N° 8 : BAC Niger 2005 Série D 2ème groupe

Un écolier résidant loin de son établissement prend régulièrement le bus pour s'y rendre. En sortant de son domicile, il aperçoit sur une ligne droite le bus à l'arrêt et qui s'apprête à partir. Il court alors vers le bus avec une vitesse constante Vo = 6m/s. Quand il est à 25 m du bus, celui-ci démarre avec une accélération constante $a_b = 1 m/s^2$.

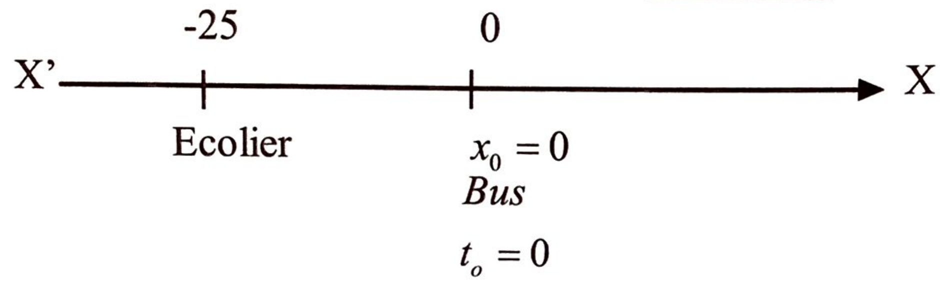
1. Etablir les équations horaires des mouvements de l'écolier et bus.
2. L'écolier rattrapera-t-il le bus ? Justifier graphiquement.
3. A quelle vitesse constante mininale devrait courir l'écolier s'il veut rattraper le bus ?

4. Après un déplacement de 100m, le bus s'arrête. Déterminer :
   a) La durée de son déplacement ;
   b) La durée de l'arrêt du bus pour que l'écolier le rattrape.

N.B : Dans tout le problème on assimilera l'écolier et le bus à des points matériels.

Solution

1.



Equation horaire du Bus:

$a_b = 1m/s^2 = c^{te}$ la trajectoire est une droite $\Rightarrow MRUA$

$$x_b = \frac{1}{2}t^2 \qquad t=0\ x_b=0 \quad V_b = 0$$

Equation horaire de l'écolier:

$V_e = 6m/s = c^{te}$ la trajectoire est une droite $\Rightarrow$ M.R.U

$x_e = V_e t + x_{oe}$ $\qquad x_e = 6t - 25$

2. L'écolier rattrape le bus

$$x_e = x_b \Rightarrow \frac{1}{2}t^2 - 6t + 25 = 0$$

$$\Delta = (36)^2 - 4\ (25)\ x\frac{1}{2} = -14 < 0$$

$\Delta < 0$ pas de soution l'écolier ne rattrage pas le bus.

3.
Lorsque l'écolier rattrape le bus : $x_e = x_b$

$$x_b = \frac{1}{2}t^2 \qquad x_e = V_e t - 25$$

$$\frac{1}{2}t^2 = V_e t - 25 \qquad \frac{1}{2}t^2 - V_e t + 25 = 0$$

$$t^2 - 2V_e t + 50 = 0 \qquad \Delta' = V_e^2 - 50 \geq 0$$

$$V_e^2 - 50 = 0 \Rightarrow V_e = \pm 5\sqrt{2} m/s$$

$$V_e = \pm 5\sqrt{2} m/s \qquad V_e = 7{,}07 \text{ m s}^{-1}$$

4. a) La durée du déplacement.

$$x_b = \frac{1}{2}t_b^2 = 100 \Rightarrow t_b^2 = 200 \Rightarrow t_b = 10\sqrt{2}\ s \quad t_b = 14{,}14\ \text{s}$$

b) La durée de l'arrêt du bus.

Temps mis par élève pour atteindre le bus.

$$x_e = V_e t_e - 25 = 100$$

$$V_e t_e = 125 \Rightarrow t_e = \frac{125}{V_e} = \frac{25\sqrt{2}}{2} s \qquad t_e = 17{,}68\ \text{s}$$

Durée de l'arrêt du bus.

$$\Delta t = t_e - t_b = \frac{25\sqrt{2}}{2} - 10\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\frac{25}{2} - \frac{20}{2}\right)$$

$$\Delta t = 3{,}54 s$$

Exercice N° 9

Un mobile A, animé d'un mouvement uniformément varié se déplace sur une trajectoire rectiligne. Il démarre du point 0 à l'instant t = 0, et atteint un point O_1, situé à 1m de 0 dans le sens positif, au bout de 4s. Un deuxième mobile B se déplace sur la même trajectoire d'un mouvement uniforme. Il passe du point 0 à l'instant t = 4,5 s et au point 0_1 à l'instant t = 5,6 s.

1. Calculer l'accélération du mouvement de A.
2. Quelle est la vitesse de A lorsqu'il passe en 0_1 ?
3. Ecrire l'équation horaire du mouvement de A.
4. Calculer la vitesse de B.
5. Ecrire l'équation horaire du mouvement de B.
6. A quelles instants les deux mobiles se croissent-ils ?

Solution

1. Calcul de l'accélération de A.

A est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié. Son équation horaire est de la forme : $x=\frac{1}{2}at^2+V_0t+x_0$ $V_0=0$ $x_0=0$

$$x=\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a=\frac{2x}{t^2} \quad pour\ t = 4s \quad x = 1m$$

$$a=\frac{2.1}{4^2}= 0{,}125 m.s^{-2}$$

2. Vitesse de A au passage en 0_1.

$V = at$ $V = 0{,}125.4 = 0{,}5 m.s^{-1}$

3. Equation horaire de A

$$x=\frac{0{,}125}{2}t^2 = 0{,}0625t^2$$

Origine des espaces : point 0.

Origine des dates : instant où A démarre de 0.

4. Calcul de la vitesse de B.

B est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

$$x = V_Bt + x_0$$

A $t = 4{,}8$ s $x = 0 = V_Bt + x_0 \Rightarrow$ $\begin{cases} 4{,}8\ V_B + x_0 = 0\ (a) \\ 5{,}6\ V_B + x_0 = 1\ (b) \end{cases}$

A $t = 5{,}6$ s $x = 1 = 5{,}6\ V_B + x_0$

$(b)-(a)$ $0{,}8V_B = 1 \Rightarrow V_B=\frac{1}{0{,}8}=1{,}25 m.s^{-1}$

5. Equation horaire du mouvement de B.

$$x_0 = -6\text{ m}$$

$$x = 1{,}25t - 6$$

6. Croisseement : $x_A = x_B$

$0{,}0625\,t^2 - 1{,}25t + 6 = 0$

$t_1 = 8s$ et $t_2 = 12s$

Exercice N° 10

Un automobiliste roule sur un tronçon d'autoroute à la vitesse de 130km. h^{-1}. Soudain, un obstacle fixe apparait sur la voie à une distance D = 120m. Le conducteur freine immédiatement et réduit sa vitesse à 105 km h^{-1} au bout d'un durée $\theta = 1$s.

1. Calculer la valeur de la décélération (accélération négative, supposée constante).
2. En supposant la décélération constante, à quelle distance de l'obstacle la voiture va-t-elle s'arrêter ?
3. On envisage maintenant l'éventualité suivante : le conducteur ne réagit pas tout de suite et commence à freiner une seconde après l'apparition de l'obstacle. Il impose alors à son véhicule la décélération calculée au (1).

A quelle distance de l'obstacle va-t-elle s'arrêter ?

Solution

$V_0 = 130$ km.$h^{-1} = 36{,}11$m.s^{-1} $V_1 = 105$ km.$h^{-1} = 29{,}17$ m.s^{-1}.

1. Calcul de la décélération :
   - Origine des espaces : point d'où l'automobiliste aperçoit l'obstacle.
   - Origine des dates : instant où apparaît l'obstacle.

Equation horaire de l'automobile : $x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t$

$$V = at + V_0$$

$A \quad t = 1\,s \quad at + V_0 = 29{,}17 \Rightarrow \quad a = \frac{29{,}17 - 36{,}11}{1} = -6{,}9 m.s^{-2}$

2. Calculons à quelle distance de l'obstacle va s'arrêter l'automobile.

Equations horaires : $x = \frac{-6{,}94}{2}t^2 + 36{,}11t$

$\dot{x} = -6{,}94t + 36{,}11$

Temps mis par l'automobile pour s'arrêter.

$$V = -6{,}94t + 36{,}11 = 0 \Rightarrow t = \frac{36{,}11}{6{,}94}t^2 = 5{,}2s$$

Calcul de l'abscisse x_2 où s'arrête l'automobile.

$x_2 = -3{,}47\,(5{,}2)^2 + 36{,}11 \times 5{,}2 = 93{,}94$m

L'automobile s'arrête alors à $(120 - 93{,}94)$m $= 26{,}06$m de l'obstacle.

3. Equations horaires si l'automobiliste réagit 1s après l'apparition de l'obstacle (origines des espaces et des dates inchangées).

$x = -3{,}47\,(t-1)^2 + 36{,}11\,(t-1) + 36{,}11 = -3{,}47\,t^2 + 43{,}05t - 3{,}47$

Pour t = 5,2 s Calculons x : $x = -3,47 + (5,2)^2 + 43,05 \times 5,2 - 3,47$

$x = 126,56$ m

x > D L'automobiliste ne s'arrête pas avant l'obstacle. Il y a eu choc.

Exercice N° 11

Une automobile démarre lorsque le feu passe au vert avec une accélération $a = 2,5\ m.s^{-2}$ pendant une durée $\theta = 7,0$ s ; ensuite le conducteur maintient sa vitesse constante.

Lorsque le feu passe au vert, un camion roulant à la vitesse $V = 45\ km.h^{-1}$, et situé à une distance d = 20 m du feu, avant celui-ci. Il maintient sa vitesse constante.

Dans un premier temps, le camion va doubler l'automobile, puis dans une deuxième phase, celle-ci va le dépasser.

En choisissant :

- Comme origine des dates, l'instant où le feu passe au vert,
- Comme origine des espaces, la position du feu tricolore, déterminer :

1. a) L'équation horaire du mouvement de l'automobile dans sa première phase.
   b) L'équation horaire du mouvement du camion.
   c) Déterminer à quelle date le camion rattrape l'automobile. Quelle est la vitesse de l'auto à cet instant ?
2. a) Montrer qu'à la fin de son mouvement uniformément accéléré le camion est toujours en avance sur l'automobile.
   b) Déterminer à quelle date, l'automobile rattrape le camion.

Solution

1. a) Equation horaire du mouvement de l'automobile dans sa première phase :

M.R.U.V. $x_A = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0$ $\qquad x_0 = 0 \quad V_0 = 0$

$$x_A = \frac{2,5}{2}t^2 = 1,25t^2 \quad (1)$$

b) Equation horaire du mouvement du camion.

M.R.U. $x_C = V_Ct + x_0$ $\qquad x_0 = -20m \quad V_0 = 12,5m.s^{-1}$

$$x_C = 12,5t - 20 \quad (2)$$

c) Date où le camion rattrape l'automobile.

$$x_A = x_C \Rightarrow 1,25\,t^2 = 12,5t - 20 \Rightarrow 1,25t^2 - 12,5t + 20 = 0$$

$$\Delta = 56,25 \qquad t_1 = \frac{12,5 - \sqrt{56,25}}{2,5} = 2s \qquad t_2 = \frac{12,5 + \sqrt{56,25}}{2,5} = 7,8s$$

$t_1 = 2$ s

Vitesse de l'automobile à cet instant :

$V_A = 2{,}5t$ $\quad t = 2$ s $\quad V_A = 5 m.s^{-1}$

2\. a) A la fin de son mouvement uniformément accéleré le camion est en avance.

Si à t = 7 s $\quad x_C > x_A$

Calculons : $x_C = 12{,}5 \times 7 - 20 = 67{,}5$ m

$x_A = 1{,}125 \times 7^2 = 61{,}25$ m. Donc le camion est un avance sur l'automobile.

b) Equation de l'automobile dans sa deuxième phase :

M.R.U $\quad x'_A = V'_A(t-7) + x_0 \quad V'_A = 2{,}5.7 = 17{,}5 m.s^{-1}$ vitesse de l'auto à la fin de la première phase.

$x_0 = 1{,}25.7^2 = 61{,}25$

$x'_A = 17{,}5\ (t - 7) + 61{,}25 = 17{,}5t - 61{,}25$ (3)

Date où l'automobile rattrape le camion (2) = (3)

$17{,}5t - 61{,}25 = 12{,}5t - 20 \Rightarrow t = 8{,}25$ s

Exercice 12

Un mobile M décrit une trajectoire rectiligne munie d'un repère d'espace $(O\ \vec{i})$; son vecteur accélération est constant pendant toute la durée du mouvement qui est fixée à $t_F = 5_s$

A l'instant $t_o = 0$, le mobile part du point M_o, d'abscisse $x_o = -0{,}5$ m, avec une vitesse $v_o = -1$ m - s^{-1}. Puis, il passe au point M_1, d'abscisse $x_1 = +5$ m, avec la vitesse $V_1 = +4{,}7$ m s^{-1}.

1° Calculer l'accélération a du mobile.

2° Calculer la date t_1 à laquelle le mobile passe au point M_1

3° Donner l'équation horaire du mobile.

4° A la date T = 2 s, un deuxième mobile M part de l'abscisse $x_1 = +5$ m, avec un mouvement rectiligne uniforme dont la vitesse est V = 4 m. s^{-1}.

a) Calculer la date t_R de la rencontre des deux mobiles.

b) Calculer l'abscisse x_R où aura lieu cette rencontre.

5° Vérifier ces deux derniers résultats à l'aide des représentations graphiques des équations horaires des deux mobiles.

Solution

1\. Accélération du mobile M :

Le mouvement est uniformément varie donc son accélération est donnée par la relation :

$$V_1^2 - V_0^2 = 2a\ (x_1 - x_0)$$

$$a = \frac{V_1^2 - V_0^2}{2(x_2 - x_0)} ; a = 1{,}92 m\ s^{-2}$$

2. Date t_1 où le mobile passé en M_1 :

$$V_1 = at_1 + Vo \ ; \ t_1 = \frac{V_1 - V_0}{a} \ ; \ t_1 = 2.97 \ s$$

3. Equation horaire du mobile M :

L'équation de l'abscisse du mobile est de la forme :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_o t + x_o \ avec \ a = 1{,}92 \text{m s}^2 \ ; \text{V}_o = -1 \text{m s}^1 \ ;$$

D'où, x étant en mètres : $x_0 = -0{,}5$ m.

$$x = 0{,}96\ t^2 - t - 0{,}5$$

4. Etude de la rencontre des deux mobiles.

a) - Recherche de l'équation horaire du deuxième mobile M' :

- Repère $(O\ \vec{i})$
- Origine des temps : l'instant de départ du deuxième mobile : le temps est alors note t'.
- L'équation horaire s'écrit en notant x' son abscisse.

$$x' = v'\ t' + x_1$$

Revenons au temps t : puisque le second mobile débute son mouvement à l'instant T, on a:

$$t' = t - T$$

L'équation horaire du deuxième mobile s'écrit donc :

$$x' = V'(t - T) + x'_1 : x' = 4\ (t - 2) + 5 \ ; x' = 4t - 3.$$

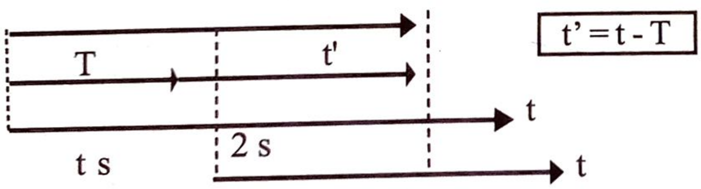


Fig 23

Date de la rencontre t_R

Au point de rencontre, les abscisses des deux mobiles sont égales :

$$X = 0{,}96t_R^2 - t_R - 0{,}50 = x' = 4t_R - 3$$

Soit : $0{,}96t_R^2 - 5t_R + 2{,}5 = 0$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = 25 - 4\ .\ 2{,}50\ .\ 0{,}96 = 15{,}4 \qquad \sqrt{\Delta} = 3{,}92$$

$$t_R = \frac{5 \pm 3{,}92}{2\ x\ 0{,}96} \ (deux \text{ solutions a priori})$$

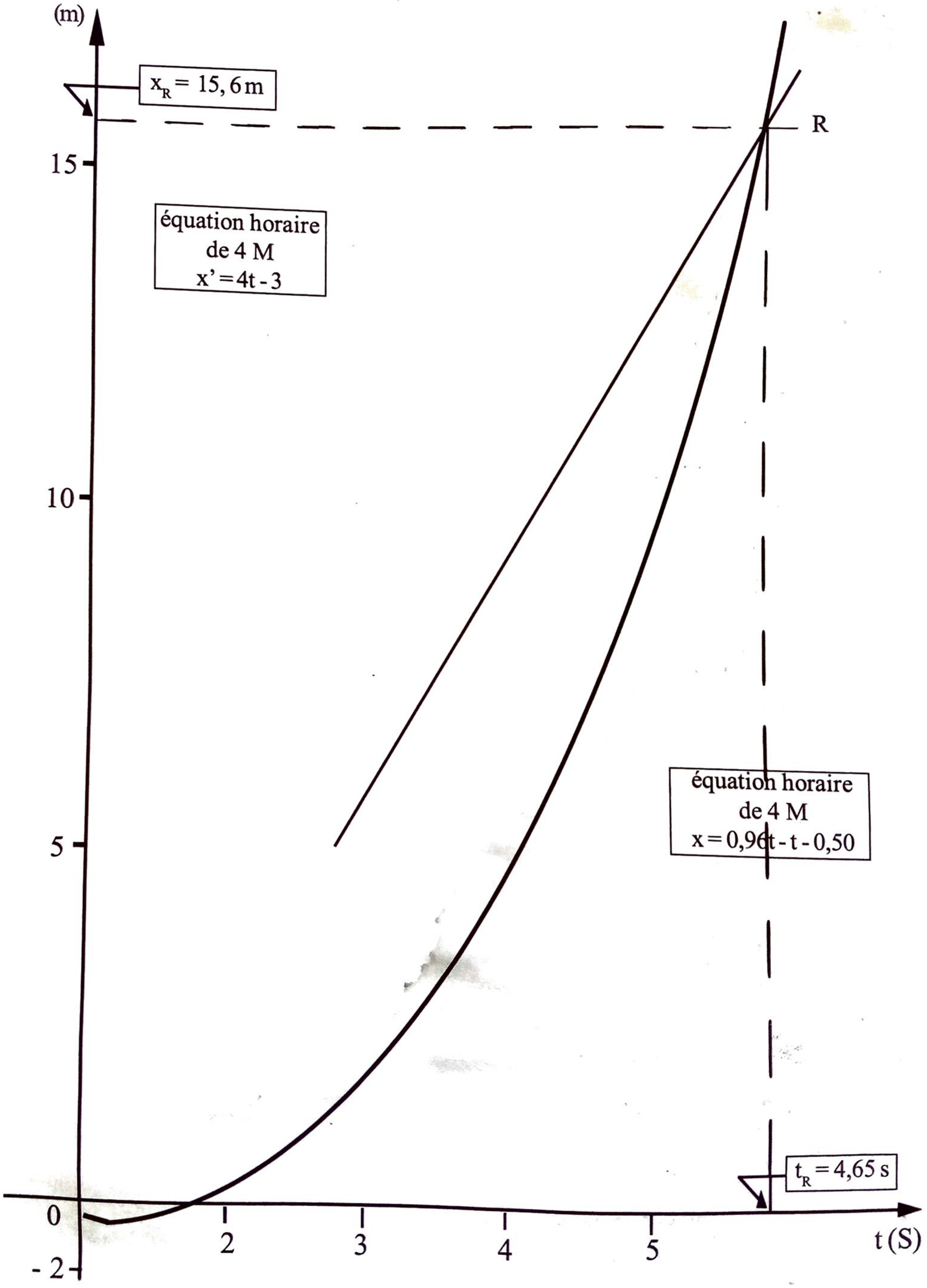
On ne retient que la solution comprise dans l'intervalle (2 s ; 5 s)

$$t_R = 4{,}65 \text{ s.}$$

b) L'abscisse de la rencontre vaut donc :

$x_R = 4t_R - 3$: $x_R = 15{,}6$ m.

5. Vérification à l'aide des représentations graphiques des équations horaires des deux mobiles : voit la figure 24. Les coordonnés du point sont conformes aux résultats trouvés.



Chapitre 2

MOUVEMENT DU CENTRE D'INERTIE

RAPPEL DU COURS

I THÉORÈME DU CENTRE D'INERTIE : T.C.I

1. Enoncé : Dans un référentiel galiléen, la somme des forces appliquées à un solide est égale au produit de la masse par le vecteur accélération de son centre d'inertie.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

2. Conseils pour appliquer le T.C.I

- Choisir un référentiel galiléen (en le précisant).
- Choisir le système.
- Faire un schéma clair où figurent les directions et sens des forces.
- Choisir des axes convenables afin de projeter la relation vectorielle et déterminer les inconnues.

II THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE : T.E.C

1. Enoncé : Dans un repère galiléen la variation de l'énergie cinétique d'un solide est égale à la somme algébrique des travaux effectués par les forces s'exerçant sur le solide pendant la durée de la variation.

$$\Delta Ec = E_{c2} - E_{c1} = \sum W_{(\vec{F})}$$

2. Conseils pour appliquer le T.E.C. :

- Choisir un référentiel galiléen.
- Choisir le système.
- Préciser l'état initial et l'état final.
- Faire le bilan des forces appliquées au système.
- Ecrire le T.E.C.

Exercices

Exercice N° 1

Une piste est constituée d'une partie rectiligne AB de longueur $l = 5m$, inclinée d'un angle $\alpha = 15°$ avec l'horizontale, suivie d'une partie circulaire de rayon $r = 0{,}5m$. L'ensemble de la piste est située dans un plan vertical.

1. Un mobile ponctuel de masse $m = 200g$ est lâché en A sans vitesse. Il est soumis le long du trajet AB à une force de frottement constante f . Il passe en B avec la vitesse $V_B = 3\ ms^{-1}$. La valeur de g est 9,8 ms^{-2}.

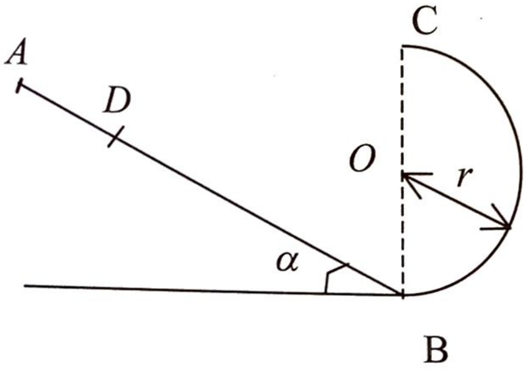
Exprimer et calculer la valeur de la force de frottement.

2. Le mobile se déplace maintenant sans frottement. On le lâche sans vitesse d'un point D situé entre A et B tel que $DB = x$. On suppose que le changement de pente en B ne provoque pas de variation de vitesse.

a) Exprimer la vitesse du mobile en C en fonction de r, α, x et g.

b) Exprimer en fonction de r, α, x, g et m la valeur de la réaction exercée par la piste sur le mobile en C.

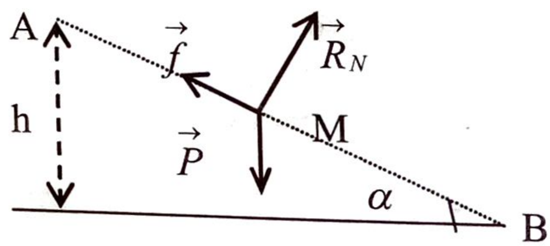
c) Quelle valeur minimale faut-il donner à x pour que le mobile quitte la piste circulaire en C ?



Solution

1. Expression de f :

- Repère considéré : repère terrestre supposé galiléen.
- Système étudié : mobile de masse m.
- Etat initial (A), état final (B).
- Bilan des forces : poids ($\vec{P}$) ; réaction ($\vec{R}$).



T .E.C $\quad \Delta E_c = \sum W_{(\vec{F})}$

$$\frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = \mathrm{W}(\vec{P}) + \mathrm{W}(\vec{R}_N) + \mathrm{W}(\vec{f}).$$

$V_A = 0$; $\mathrm{W}(\vec{R}_N) = 0$ car $\vec{R}_N \perp \vec{AB}$. $\quad \Rightarrow f = m\left(g \sin\alpha - \dfrac{V_B^2}{2\ell}\right)$

$$\frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_D^2$$

AN : $m = 0{,}2\ kg$; $g = 9{,}8\ ms^{-2}$; $V_B = 3\ ms^{-1}$; $l = 5\ m$; $\alpha = 15^0$; $f = 0{,}33\ N$

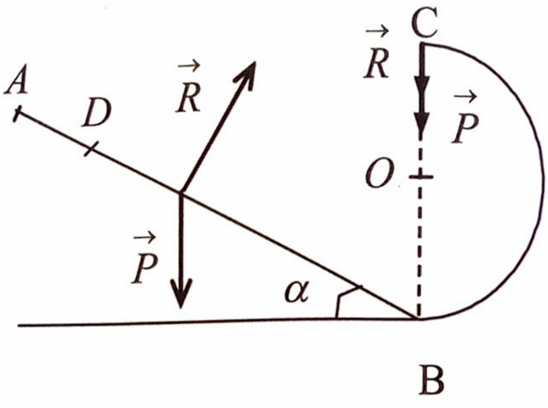
2. a) Expression de la vitesse V_C en fonction de r, g, α et x

- Vitesse en B.

T.E.C entre D et B : $\dfrac{1}{2}mV_B^2 - \dfrac{1}{2}mV_D^2 = \mathrm{W}(\vec{P}) + \mathrm{W}(\vec{R})$

$V_D = 0$ et $W(\vec{R}) = 0$; $\frac{1}{2}mV_B^2 = mgx\sin\alpha \Rightarrow V_B^2 = 2gx\sin\alpha$

Vitesse en C



T.E.C entre B et C

$\frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$ $\frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = -2mgr$ $V_C^2 = V_B^2 - 4gr \Rightarrow$

$V_C = \sqrt{2g(x\sin\alpha - 2r)}$

b) Expression de la réaction en C en fonction de r, g, α, x et m.

T.C.I $\sum\vec{F} = m\,\vec{a}$

$\vec{R} + \vec{P} = m\,\vec{a}$ projetons sur la normale en C : $R + P = ma_n \Rightarrow R = m(\frac{V_C^2}{r} - g)$

$R = m\,[\frac{2g}{r}(x\sin\alpha\ 2r) - g]$; $R = mg\,(\frac{2x}{r}\sin\alpha - 5)$

c) Valeur minimale de x pour que le mobile quitte la piste en C.

$R \geq 0 \Leftrightarrow mg(\frac{2x}{r}\sin\alpha - 5) \geq 0$; $\frac{2x}{r}\sin\alpha \geq 5$

$x_{min} = 4{,}8\ m$

Exercice N° 2

Un mobile de masse $m = 1kg$ est lancé à $t = 0s$ d'un point A avec une vitesse $\vec{V}_0$. La première partie du trajet se déroule sur un rail horizontal de longueur $AB = l = 2m$. Au cours de cette phase le mobile est soumis à une force de frottement constante f.
En B le mobile aborde un rail à profil circulaire (de centre O) de rayon $r = 5m$. Au cours de cette phase on néglige tout frottement.

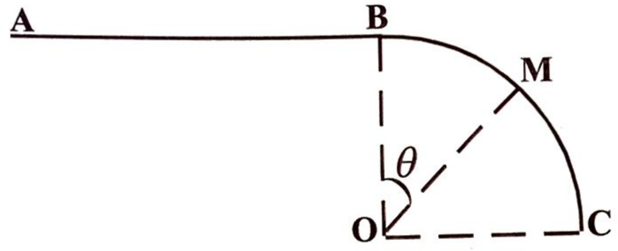
1. a) Exprimer en fonction de V_0, l, m et f la vitesse du mobile en B.
   b) Calculer V_B, sachant que $V_0 = 10\ ms^{-1}$ et $f = 20\ N$.
   c) Exprimer en fonction de V_0, V_B, f et m la durée du trajet AB. Calculer t_1.
2.- Déterminer la valeur de f pour laquelle le mobile arrive en B avec une vitesse nulle.

3.- Le mobile quitte B sans vitesse initiale le point M est repéré par $\theta = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM})$. Donner l'expression de la réaction en fonction de θ, m, g, r et V_M

4. a) Etablir l'expression de V_M en fonction r, g et θ.

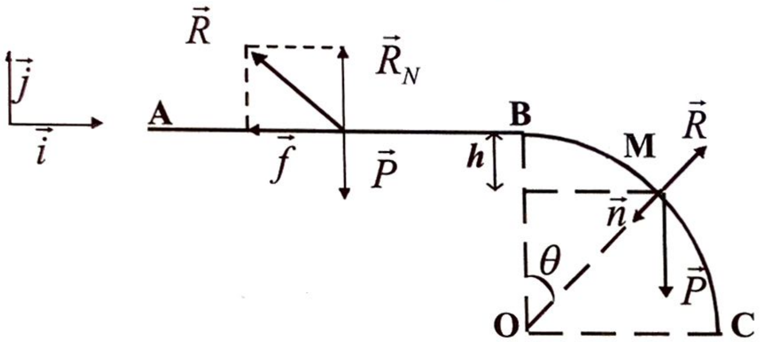
b) En déduire l'expression de R en fonction π, g et θ et m.

5. Déterminer l'angle $\theta_o = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$, lorsque le solide quitte la piste en un point D.



Solution

1. a) Expression de la vitesse du mobile au point B en fonction de V_0, l, m et f.



- Repère considéré : repère terrestre considéré comme galiléen.
- Système étudié : mobile de masse $m = 1\ kg$.
- Etat initial : point A ; état final : point B.

- Bilan des forces : $\vec{P}$ et $\vec{R}$.

Appliquons le T .E C. $\Delta Ec = \sum W_{(\vec{F})}$

$$\frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_N) + W(\vec{f})$$

$W(\vec{P}) = W(\vec{R}_N) = 0$ car $\vec{P}$ et $\vec{R}_N$ sont perpendiculaires au déplacement.

$$\frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = -f.l \Rightarrow V_B^2 = V_0^2 - \frac{2fl}{m}$$

$$V_B = \sqrt{V_0^2 - \frac{2fl}{m}}$$

c) Exprimer t_1 en fonction de V_0, V_B, f, et m.

Appliquons le T.C.I : $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

Projetons sur $(O, \vec{i})$: $-f = ma \Rightarrow a = -\dfrac{f}{m}$.

$a = C^{te}$, donc le mouvement est rectiligne uniformément varié $V = at + V_0$.

Au point B : $V_B = at_1 + V_0 \Rightarrow t_1 = \dfrac{V_B - V_O}{a} \Rightarrow t_1 = \dfrac{-(V_B - V_O) \cdot m}{f}$

Calcul de $t_1 = \dfrac{-(4{,}47-10)}{20} \times 1 = 0{,}276s$; $t_1 = 0{,}2$

2. - Déterminons f pour la quelle $V_B = 0$

$$V = \frac{2}{B} = V = \frac{2}{0} - 2f\frac{l}{m} = 0 \Rightarrow f = \frac{mV_0^2}{2l}$$

AN $\quad f = \dfrac{1 \text{ x } 10^2}{2 \text{ x } 2} = 25N$

3 - Expression de R en fonction de θ, m, g π et V_M.

T.C.I. $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ Projetons sur $\vec{n}$

$$-R + P\cos\theta = m\,V\frac{V_M^2}{\pi} \Rightarrow R = mg\cos\theta - m\frac{V_M^2}{\pi}$$

4 - a) Expression de V_M (π g et θ)

T.E.C. entre B et M

$$\frac{1}{2}mV\frac{2}{M} = \omega(\vec{P}) + \omega(\vec{R}) = mgh,\ h = r(1 = \cos\theta)$$

$$V = \frac{2}{M}2g\pi(1\cos\theta) \quad V_M = \sqrt{2g\pi(1-\cos\theta)}$$

b) R en fonction de $R = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta)\ \theta = mg(3\cos\theta - 2)$

5 - Déterminons θ_o En D $R = 0$

$$mg(3\cos\theta_o - 2) = 0 \Rightarrow \cos\theta_o = \frac{2}{3} \Rightarrow mg\ \theta_o = 48,\ 18°$$

ExerciceN° 3 : (Bac D Niger 2000)

On prendra l'intensité de la pesanteur $g = 9{,}8ms^{-2}$.

1. Une sphère S de masse $m = 200g$, assimilable à un point matériel, est attachée à l'extrémité d'un fil de masse négligeable, inextensible et de longueur $L = 1m$. L'autre extrémité du fil est attachée à un point fixe O. On écarte S de sa position d'équilibre, le fil faisant un angle $\alpha_m = 60°$ avec la verticale de O, puis on la lâche sans vitesse.

a) Quelle sera la trajectoire de S ?

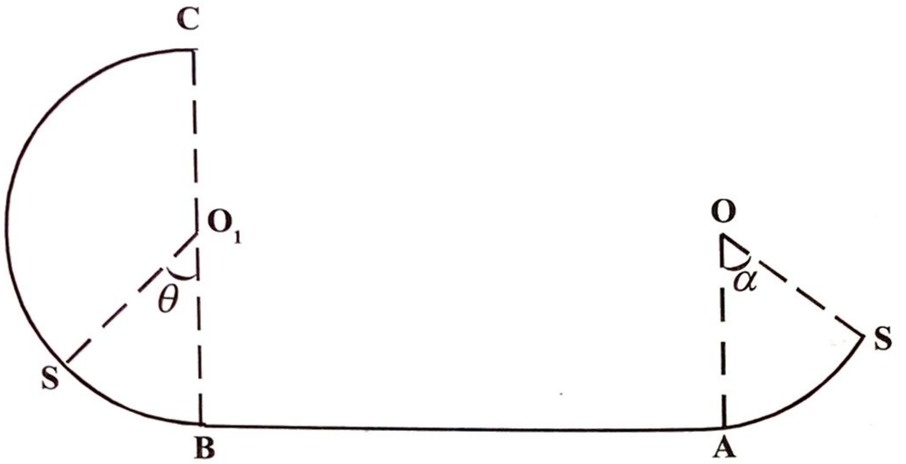
b) Déterminer la vitesse de la sphère S en fonction de l'angle α que fait le fil avec la verticale à un instant t quelconque après qu'elle soit lâchée.

c) Calculer cette vitesse au passage à la position d'équilibre. Préciser sa direction.

2. La première fois où la sphère S passe par sa position d'équilibre le fil se détache d'elle. S continue alors son mouvement sans frottement, sur une piste constituée d'une partie horizontale AB et d'une partie circulaire BC de rayon $r = 1m$ et de centre O_1 au dessus de B sur la verticale.

a) Déterminer la vitesse V_B de S au point B.

b) En repérant la position de S sur la partie circulaire BC, par l'angle θ que fait le rayon O_1S avec O_1B.déterminer la position où la vitesse sera nulle. Que se passera-t-il après ?

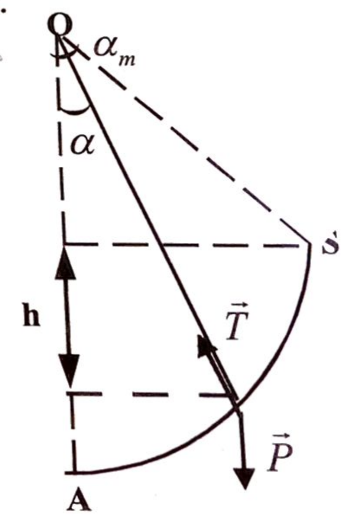


Solution

1. a) La sphère S décrit un arc de cercle de centre O et de rayon L.

b) Vitesse de la sphère S à un instant t quelconque en fonction de α.

- Repère terrestre considéré comme galiléen.
- Système : sphère.
- Bilan des forces : $\vec{P}$, $\vec{T}$.



Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$\Delta Ec = W(\vec{P}) + W(\vec{T})$ $W(\vec{T})=0$ Car $\vec{T} \perp$ au déplacement

$\frac{1}{2}mV^2 = mgh$ $h = L\cos\alpha - L\cos\alpha_m$

$V^2 = 2gL(\cos\alpha - \cos\alpha_m)$ $V = \sqrt{2gL(\cos\alpha - \cos\alpha_m)}$

c) Vitesse au passage à la position d'équilibre : $\alpha = 0$.

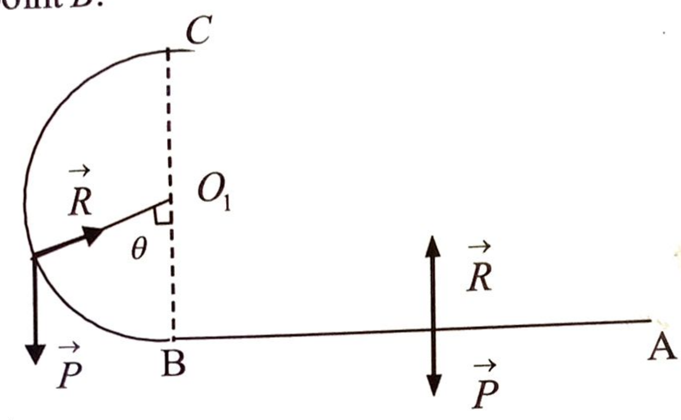
$V_A = \sqrt{2gL(1 - \cos\alpha_m)}$ $\alpha_m = 60°$

$AN: \; V_A = \sqrt{9,8} = 3,13 ms^{-1}$

Direction de $\vec{V}_A$: $\vec{V}_A$ est tangente à la trajectoire en A : cercle de centre O de rayon L.

$\vec{V}_A$ est horizontale.

2. a) Déterminer la vitesse V_B de S au point B.



T.E.C : $\frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = 0 \Rightarrow V_B = V_A = 3{,}13ms^{-1}$

b) Déterminons la position où la vitesse sera nulle.

T.E.C : $\frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$; $W(\vec{R}) = 0$

$-\frac{1}{2}mV_B^2 = -mgh = -mg(r - r\cos) \Rightarrow \cos\theta = 1 - \frac{V_B^2}{2gr}$

AN: $\cos\theta = 1 - \frac{9{,}8}{2\times9{,}8\times1} = 0{,}5 \Rightarrow \theta = 60°$.

Le mobile S rebrousse chemin.

Exercice N° 4

Un corps assimilable à un point matériel de masse m, se déplace sans frottements sur une piste ABC située dans un plan vertical. La piste comporte un tronçon rectiligne AB qui fait avec la verticale de B un angle α et un tronçon circulaire BC de centre O qui se termine par une partie verticale CH.

1. Le corps est lancé de A vers B. Exprimer l'accélération et en déduire la nature du mouvement.
2. Calculer la vitesse minimale avec laquelle il faut le lancer du point A pour qu'il arrive en B avec une vitesse nulle.
3. Le corps quitte B avec une vitesse nulle. A un instant t quelconque, sa position M est repérée par son abscisse angulaire $\theta = (\vec{OB}, \vec{OM})$.

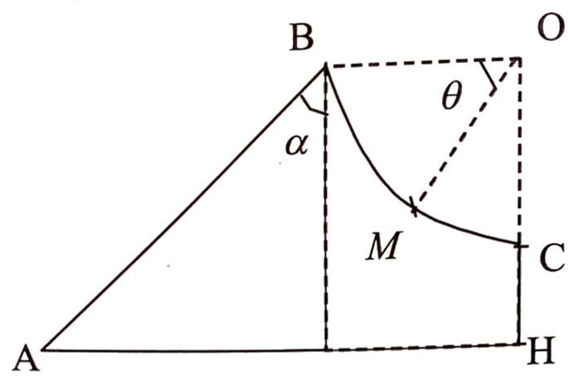
a) Etablir l'expression de la vitesse du corps au point M en fonction de g, r et θ. Calculer cette valeur pour $\theta = 30°$.

b) Etablir l'expression de l'intensité de la réaction $\vec{R}$ de la piste sur le corps en fonction de m, g et θ.

Calculer R pour $\theta = 30°$.

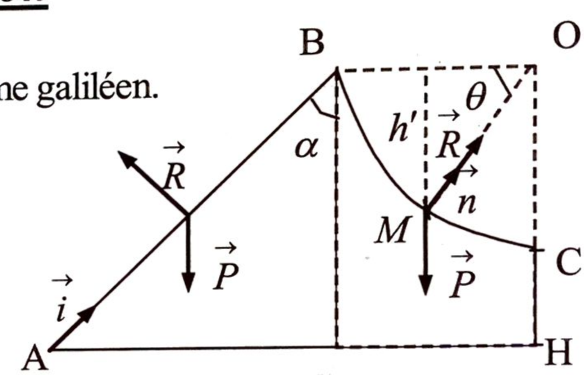
c) Donner les caractéristiques de la vitesse du corps au point C.

Données : $m = 250g$; $\alpha = 60°$; $g = 10\ ms^{-2}$; $BO = CO = r = 2,5\ m$; $CH = 0,7m$



Solution

1. Expression de a.
   - Repère utilisé: repère terrestre considéré comme galiléen.
   - Système : corps de masse m.
   - Bilan des forces : $\vec{P}$ et $\vec{R}$.



T.C.I. $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

Projection sur $\left(A, \vec{i}\right)$: $0 - mg\cos\alpha = ma \Rightarrow a = -g\cos\alpha$

$a = $ cte ; $V.a < 0$ le mouvement est rectiligne uniformément retardé.

2. Vitesse minimale pour qu'il arrive en B avec une vitesse nulle.

Appliquons le T.E.C. : $\frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R});\quad W(\vec{R}) = 0$

$$\frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R});\quad W(\vec{R}) = 0$$

$A.N$: $V_A = \sqrt{2.10(2,5+0,7)} = 8ms^{-1}$

3. a) Expression de V_M en fonction de g, r et θ.

T.E.C : $\frac{1}{2}mV_M^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R});\quad W(\vec{R}) = 0\quad V_B = 0$

$$\frac{1}{2}mV_M^2 = mgh' \qquad h' = r\sin\theta$$

$V_M^{\ 2} = 2gr\sin\theta \qquad VM = \sqrt{2gr\sin\theta}$

Calcul de V_M pour $\theta = 30°$. $V_M = \sqrt{2\times10\times2{,}5\sin30} = 5ms^{-1}$

b) Expression de R en fonction de g, m et θ.

T.C.I : $\vec{R}+\vec{P}=m\vec{a}$

Projetons sur $\vec{n}$

$R - P\sin\theta = m\,a_N \Rightarrow R = mg\sin\theta + m\frac{V_M^2}{r}$

$R = 3mg\sin\theta$

$A.N : R = 3\times250.10^{-3}\times10\sin30° = 3{,}75\ N$

c) Caractéristiques de $\vec{V}_C$.

Direction : tangente à la trajectoire en C.

Sens : celui du mouvement.

Intensité : en C : $\theta = \frac{\pi}{2}$; $V_C = \sqrt{2gr\sin\frac{\pi}{2}}$; $V_C = 7{,}07ms^{-1}$

Exercice N° 5

1. Une bille B, de masse $m = 50g$, est suspendue en un point O par un fil inextensible de longueur $l = 50\ cm$. On écarte le fil de sa position d'équilibre d'un angle α_0 (voir fig1) et on lance la bille avec une vitesse $\vec{V}_0$. Lorsque le fil fait un angle α avec la verticale, exprimer :
   a) La vitesse V de la bille en fonction de V_0, g, ℓ, α et α_0.
   b) La tension T du fil en fonction de V_0, g, ℓ, α, α_0 et m.
2. a) Calculer la vitesse de la bille et la tension du fil au passage par la position d'équilibre A.
   b) Calculer les accélérations normale et tangentielle de la bille en C et en A.
   Données : $V_0 = 10\ ms^{-1}$; $\alpha_0 = 60°$; $g = 10\ ms^{-2}$, $\alpha = 30°$.
3. Le système est mis en mouvement de rotation uniforme autour de l'axe vertical passant par O avec une vitesse angulaire $\omega = 5$ rads^{-1} (fig 2).
   a) Montrer qu'un tel mouvement n'est possible que si la vitesse angulaire est supérieure à une valeur ω_0 que l'on calculera.
   b) Calculer l'angle α_1 dont le fil s'écarte de l'axe vertical si $\omega = 5$ rads^{-1}.
   c) Calculer la tension T du fil pour cette valeur de l'angle α_1.
   On prendra $g = 10\ ms^{-2}$.

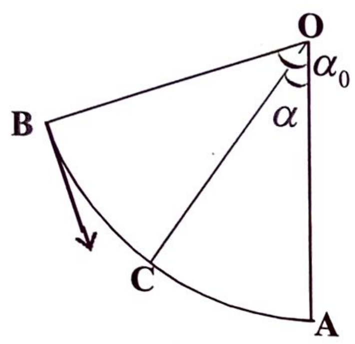


fig 1

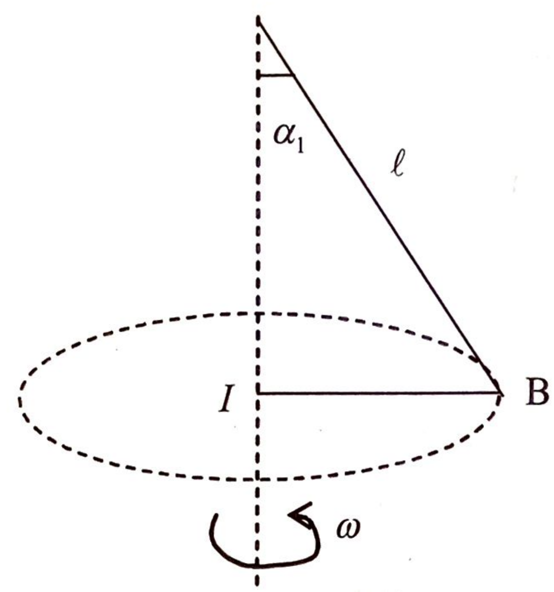


fig 2

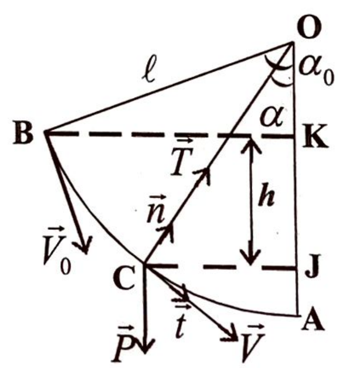
Solution

1. a) Expression de la vitesse de la bille en C.

- Repère utilisé : repère terrestre supposé galiléen.
- Système étudié : la bille B.
- Bilan des forces : la tension du fil $\vec{T}$ et le poids de la bille $\vec{P}$.

Appliquons le T.E.C entre B et C.

$$\Delta E_C = \Sigma W(\vec{F}_{ext})$$



$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{T})$$

$$W(\vec{T})=0 \quad (\vec{T} \perp \grave{a} \text{ la tajectoire})$$

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = mgh \quad \text{avec } h = JK = \ell(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

$$V^2 = V_0^2 + 2g\ell(\cos\alpha - \cos\alpha_0) \Rightarrow V = \sqrt{V_0^2 + 2g\ell(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}$$

b) Expression de la tension du fil en C

Appliquons le T.C.I : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

Projetons cette relation sur $\vec{n}$: $-P\cos\alpha + T = m a_n$ avec $a_n = \dfrac{V^2}{\ell}$

$$T = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0 + \frac{V_0^2}{g\ell})$$

2. a) Calcul de V_A et T_A.

Au passage en A, $\alpha = 0°$; $V_A = \sqrt{V_0^2 + 2g\ell(1-\cos\alpha_0)}$

$AN : V_A = \sqrt{10^2+2.10.50.10^{-2}(1-\cos60°)}$; $V_A = 10{,}25\ ms^{-1}$

$T_A = mg\,(3 - 2\cos\alpha_0 + \frac{V_0^2}{g\ell})$; $AN : T_A = 11\ N$

b) Valeur de l'accélération normale.

$$a_n = \frac{V^2}{\ell}$$

Au point C : $V_C = 10{,}18\ ms^{-1}$

$$a_n(C) = \frac{V_C^2}{\ell} = \frac{(10{,}18)^2}{50.10^{-2}} \Rightarrow a_n\ (C) = 207\ ms^{-2}$$

Au point A : $V_A = 10{,}25\ ms^{-1}$; $a_n\,(A) = 210\ ms^{-2}$

Valeur de l'accélération tangentielle.

TCI : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

Projetons cette relation sur $(C, \vec{t})$: $P\sin\alpha + 0 = m\,a_t \Rightarrow a_t = g\sin\alpha$.

Au point C : $\alpha = 30° \Rightarrow a_t = 10\sin30°$ $a_t = 5ms^{-2}$

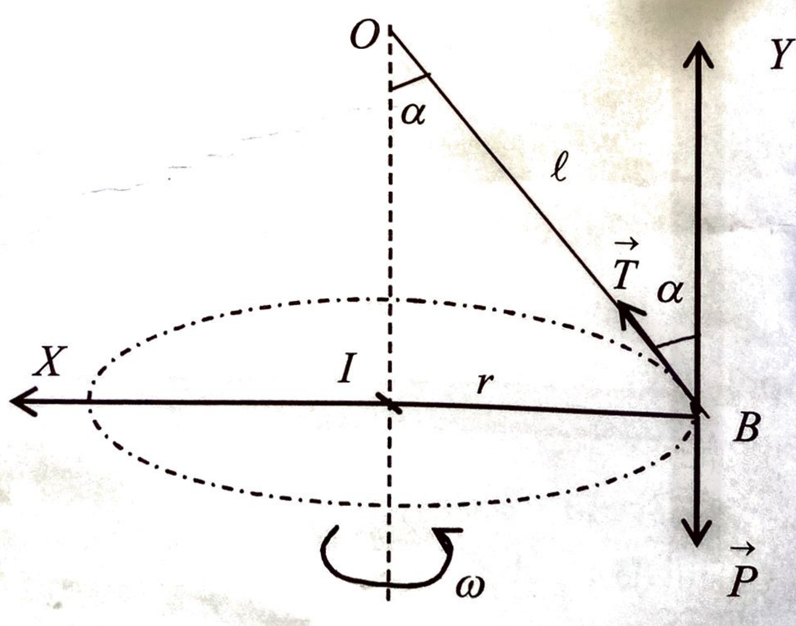
Au point A : $\alpha = 0° \Rightarrow a_t = 10\sin 0°$ $a_t = 0\ ms^{-2}$

3. a) Calcul de ω_0.

Appliquons le T.C.I

$\Sigma = \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

Projection sur Bx : $0 + T\sin\alpha = ma_n$ (1)



(1) $\Rightarrow$ $T\sin\alpha = m\,a_n$ (3)

(2) $\Rightarrow$ $T\cos\alpha = mg$ (4)

$$\frac{(3)}{(4)} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a_n}{g} = \frac{\omega^2 r}{g} \text{ avec } r = \ell \sin\alpha$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2\ell}{g}$$

$$\cos\alpha \le 1 \Rightarrow \frac{g}{\omega^2\ell} \le 1 \Rightarrow \omega \ge \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

D'où $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ $\quad AN$: $\omega_0 = \sqrt{\frac{10}{50.10^{-2}}} \approx 4{,}5$ rad/s

$\omega_0 = 4{,}5$ rads^{-1}

b) Calcul de l'angle α_1 si $\omega = 5$ rad s^{-1}.

$$\cos\alpha_1 = \frac{g}{\omega^2\ell}$$

AN : $\cos\alpha_1 = \frac{10}{5^2 \times 50.10^{-2}} = 0{,}8$; $\quad \alpha_1 = 36{,}9°$

c) Calcul de la tension du fil si $\alpha_1 = 36{,}9°$.

On a (4) $\Rightarrow T\cos\alpha_1 = mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\alpha_1}$

AN : $T = \frac{50.10^{-3} \times 10}{0{,}8} = 0{,}625 \Rightarrow T = 0{,}63\ N$

Exercice N° 6 : BAC 2003 Niger Série D 1er groupe

Dans tout le problème on prendra g = 10 ms^{-2}. Des miniers utilisent un monte charge dont la cabine soutenue par un câble, a une masse $m = 5000\ kg$.

Ils opèrent dans un puits de 900m de profondeur. La cabine étant initialement immobile au fond du puits, on se propose d'étudier son mouvement pendant la montée. Ce mouvement se décompose en trois phases :

-1ère phase : une force motrice de $6.10^4 N$ agit sur la cabine et l'entraîne avec un mouvement uniformément accéléré suivant la direction verticale.

-2ème phase : à 150m du fond du puits, la force motrice change de telle sorte que le mouvement de la cabine devienne uniforme sur les 600m suivants.

-3ème phase : à 750m du fond du puits, la force motrice change encore une fois de façon que la cabine s'arrête juste à la sortie du puits. Durant tout son déplacement, la cabine est soumise à une force de frottement de $5.10^3 N$.

1. Déterminer la vitesse maximale atteinte par la cabine.
2. Calculer la durée totale de la montée $t = t_1 + t_2 + t_3$ ou t_1, t_2 *et* t_3 sont les durées respectives des trois phases.
3. Calculer la tension du câble pendant la phase uniforme et pendant le mouvement uniformément retardé.
4. Une personne de masse 80 kg se trouve dans la cabine durant toute la montée. En utilisant un référentiel lié à la cabine, calculer la réaction $\vec{R}$ du sol de la cabine sur la personne pendant les trois phases.

En déduire le poids apparent de la personne dans chacune des trois phases du mouvement de la cabine.

Solution

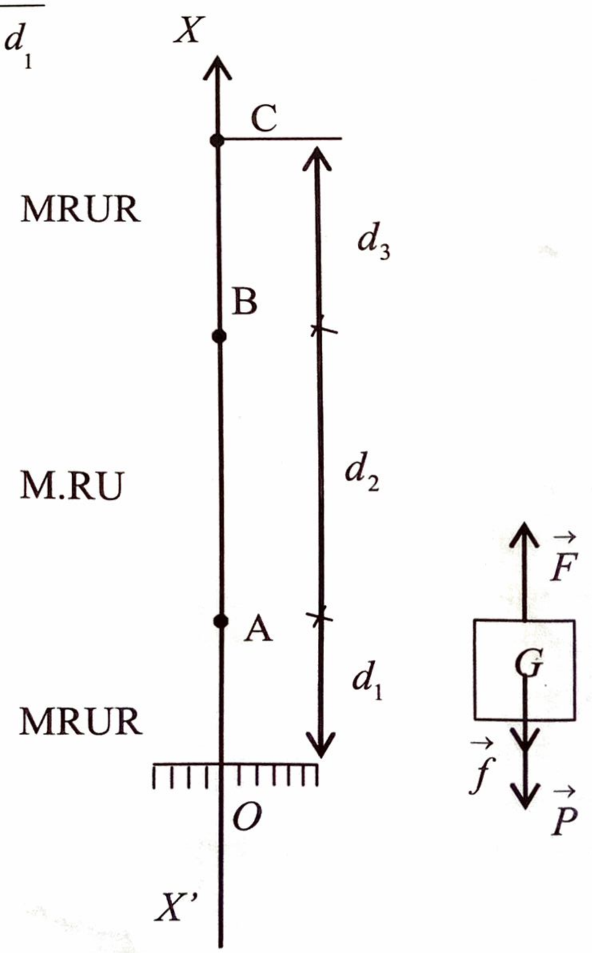
$H = 900m$; $d_1 = 150m$; $d_2 = 600m$; $d_3 = 150m$

- Repère utilisé : repère terrestre supposé galiléen.
- Système étudié : force motrice $\vec{F}$ (1ère phase), le poids $\vec{P}$ de la cabine, la force frottement $\vec{f}$ la tension du câble (2ème et 3ème phase).

1. Vitesse maximale atteinte par la cabine.

Vmax = V_A (Fin de la 1ère phase)

M.RUV : $V_A^2 - V_0^2 = 2a_1 d_1$ or $V_0 = 0 \Rightarrow V_{max} = \sqrt{2a_1 d_1}$



- Calcul de a_1.

TCI: $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_1$; $\vec{F} + \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}_1$

Projetons cette relation sur $x'x$

$F - P - f = m a_1 \qquad \Rightarrow a_1 = \dfrac{F-f}{m} - g$

$AN : a_1 = \frac{6.10^4 - 5.10^3}{5000} - 10 \Rightarrow \quad a_1 = 1ms^{-2}$

- Calcul de $V_{MAX} = \sqrt{2 \times 1 \times 150}$; $V_{MAX} = 17{,}3ms^{-1}$

2. Calcul de $t = t_1 + t_2 + t_3$

- Calcul de t_1

$V_{MAX} = a_1 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{V_{max}}{a_1} = 17{,}3s$

- Calcul de t_2

$2^{ème}$ phase M.RU : $d_2 = V_{MAX} \ t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{d_2}{V_{max}}$ $t_2 = \frac{600}{17{,}3} = 34{,}7s$

- Calcul de t_3.

- Calcul de a_3 : $V_C^2 - V_B^2 = 2a_3 BC \Rightarrow 0 - V_{max}^2 = 2a_3 d_3$.

$a_3 = \frac{-V_{max}^2}{2d_3}$ $a_3 = \frac{-300}{2 \times 150} = -1ms^{-2}$

Vc = $a_3 t_3 + V_{MAX} \Rightarrow t_3 \ \frac{V_c - V_{max}}{a_3} \Rightarrow t_3 = \frac{0 - 17{,}3}{-1} = 17{,}3s$

D'ou $t = t_1 + t_2 + t_3 = 17{,}3 + 34{,}7 + 17{,}3 \Rightarrow t = 69{,}3s$

3. Calcul de la tension du câble pendant la $2^{ème}$ et la $3^{ème}$ phase du mouvement.

T.C.I : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{T} + \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$

Projetons cette relation sur x'x

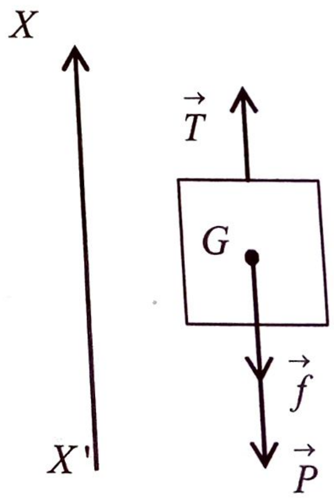
$T - P - f = ma \Rightarrow T \ m(g+a) + f$

$2^{ème}$ phase : $a_2 = 0$; $T_2 = 5000\ (10 + 0) + 5.10^3$

$T_2 = 55.10^3\ N$

$3^{ème}$ phase : $a_3 = -1\ ms^{-2}$; $T_3 = 5000\ (10-1) + 5.10^3$

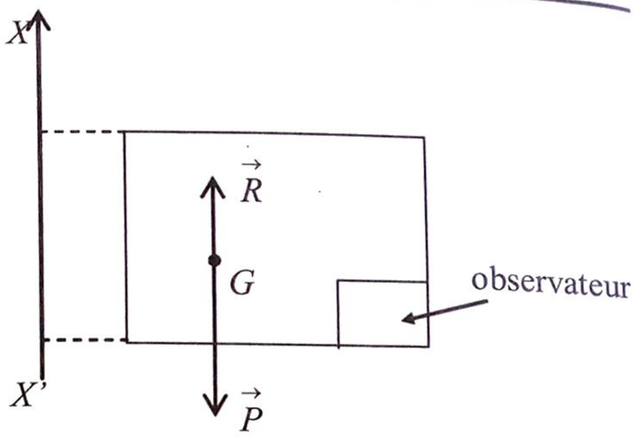
$T_3 = 50.10^3\ N$



4. Calcul de la réaction R.

- Système étudié : personne de masse M.
- Bilan des forces : le poids $\vec{P}$ de la personne et la réaction $\vec{R}$ de la cabine sur la personne.

TCI : $\Sigma \vec{F}_{ext} = M\vec{a}$; $\vec{R} + \vec{P} = M\vec{a}$



Projetons cette relation sur $x'x$.

$R - P = Ma \Rightarrow R = M(g + a)$

1ère phase : $R_1 = 80\,(10+1)$; $R_1 = 880N$

2ème phase : $R_2 = 80\,(10+0)$; $R_2 = 800N$

3ème phase : $R_3 = 80\,(10-1)$; $R_3 = 720N$

- Le poids apparent est égal à la réaction calculée dans chaque phase.

Exercice N° 7

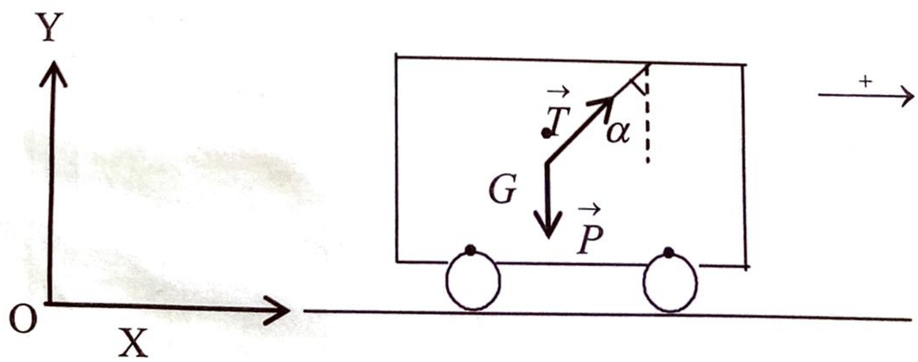
On prendra, $g = 9{,}8ms^{-2}$.

Un pendule, constitué par une petite sphère de plomb suspendue par un fil, étant suspendu, sans osciller, au plafond d'un bus qui roule sur une voie horizontale, déterminer l'angle qu'il forme avec la verticale dans les trois cas suivants :

1. Pendant le parcours en ligne droite, le mouvement étant uniformément accéléré et tel que la vitesse de 72 $km.h^{-1}$ est atteinte après un parcours de 2 km.
2. Pendant le parcours en ligne droite avec la vitesse constante de72 $km.h^{-1}$.
3. Pendant le freinage en ligne droite, le mouvement étant uniformément retardé, et tel que, le bus lancé à 72 $km.h^{-1}$ s'immobilise en 40s.

Solution

- Système étudié : la sphère de plomb.
- Repère utilisé : repère terrestre supposé galiléen.
- Bilan des forces : la tension du fil $\vec{T}$, le poids de la sphère $\vec{P}$.



Appliquons le TCI.

$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ $\quad \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

Projection sur ox : $T\sin\alpha = ma$.

Projection sur oy : $-P + T\cos\alpha = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} T\sin\alpha = ma \\ T\cos\alpha = mg \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{a}{g}$$

1.1$^{\text{ère}}$ phase : MUA $V^2 - V_0^2 = 2a_1 d_1$; $V_0 = 0$; $V = 20ms^{-1}$.

$$a_1 = \frac{V^2}{2d_1} \qquad A.N: \ a_1 = \frac{20^2}{2\times2000} = 0{,}1ms^{-2}$$

$$\tan\alpha_1 = \frac{a_1}{g} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{0{,}1}{9{,}8} = 1{,}0210^{-2} \Rightarrow \alpha_1 = 0{,}585°$$

2. 2ème phase MRU $\Rightarrow a_2 = 0$ $\tan\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$.

3. 3ème MRUR $V_f = a_3 t_3 + V$.

$$V_f = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{-V}{t_3} = \frac{-20}{40} = -0{,}5ms^{-2}$$

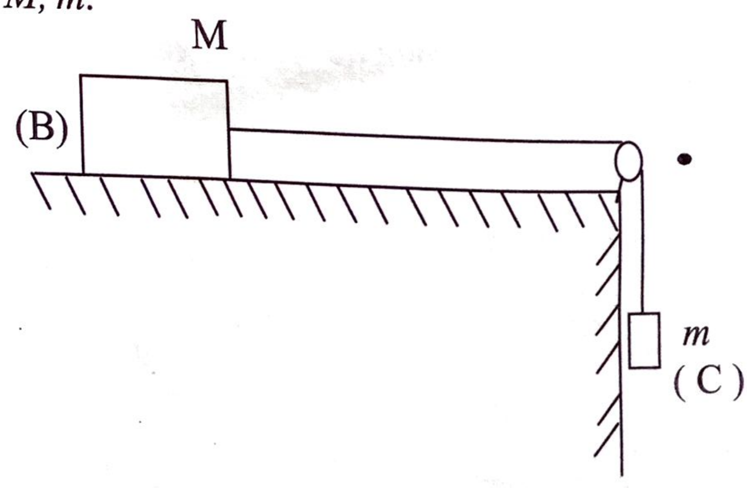
$$\tan\alpha = \frac{a_3}{g} \Rightarrow \frac{-0{,}5}{9{,}8} = -0{,}051 \qquad \alpha_3 = -2{,}9°$$

Le signe - signifie que le pendule s'incline vers l'avant du bus.

Exercice N° 8

Une brique B de masse $M = 5\ kg$ posée sur une table horizontale est entraînée par l'intermédiaire d'un fil inextensible de masse négligeable par une charge c de masse $m = 2\ kg$ abandonnée sans vitesse. On néglige les frottements.

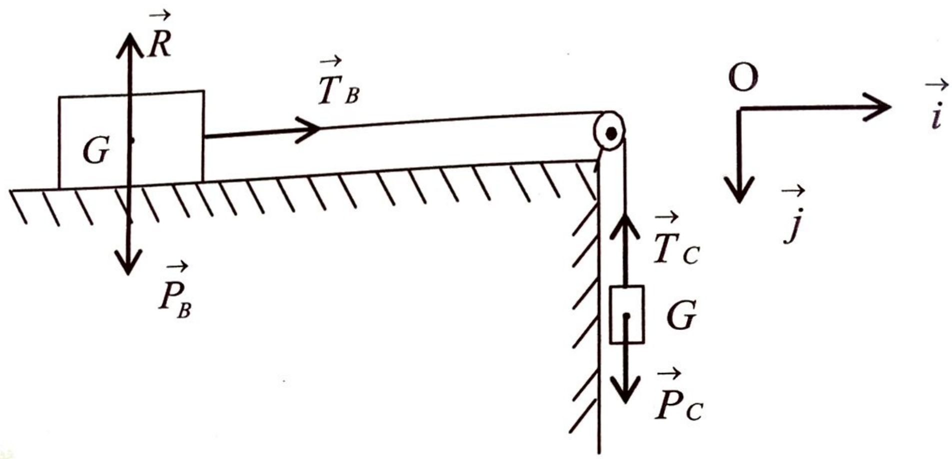
1. Exprimer l'accélération de la brique en fonction de M, m et g. Calculer numériquement a.
2. Exprimer la tension du fil en fonction de g, M, m.
   Calculer numériquement T.



Solution

1. L'expression de l'accélération en fonction de M, m et g.

- Système étudié : brique (B).
- Repère utilisé : repère terrestre supposé galiléen.



- Bilan des forces : poids ($\vec{P}_B$) réaction $\vec{R}$; tension ($\vec{T}_B$)

T.C.I : $\sum\vec{F}=M\vec{a} \Rightarrow \vec{P}_B+\vec{R}+\vec{T}_B=M\vec{a}$

Projetons sur (O, $\vec{j}$) : $T_B = Ma$ (1)

- Système : charge (C)

- Bilan des forces $\vec{P}_C;\vec{T}_C$

TCI : $\vec{P}_C+\vec{T}_C=m\vec{a}$

Projetons sur (O, $\vec{i}$) : $P_C - T_C = ma \Rightarrow T_C = mg - ma$ (2)

Fil de masse négligeable, on a alors : $T_C = T_B$

$mg - ma = Ma \Rightarrow a = \frac{m}{m+M}g$

– Calcul de a : $a = 9{,}8\text{x}\frac{2}{5+2} = 2{,}8 ms^{-2}$

2. Tension du fil en fonction de M, m et g.

Soit $T_B = T_C = T$

$T = Ma$ avec $a = \frac{m}{m+M}g$

D'où $T = \frac{mM}{m+M}g$

Calcul de T : $T = \frac{5\times2}{5+2}\times9{,}8 = 14\ N$

$T = 14\ N$

Exercice N° 9

Dans une stand de fête Foraine, un objet (S) de masse m = 5 kg assimilable à un point matériel est placé sur des rails horizontaux de longueur AB. Pour tenter sa force, une personne pousse cette masse avec une force $\vec{F}$ constante, horizontale pendant une durée t = 3 s de A à B.

1. a) Déterminer la nature du mvt de (S) en supposant que (s) glisse sans frottement sur les rails en partant de la position de repos.

b) Sachant qu'à la fin de la période de lancement (S) à un vitesse égale à 6 ms, calculer la valeur numérique de la force $\vec{F}$ appliquée.

c) Calculer la distance de lancement A B.

2. Arrivé en B, (S) doit s'élever sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale.

a) En supposant les frottements négligeables long, quelle longueur devrait parcourir l'objet (S) sur un plan incliné suffisamment long jusqu'à ce que sa vitesse s'annule ? On prendra $g = 10\ ms^{-2}$.

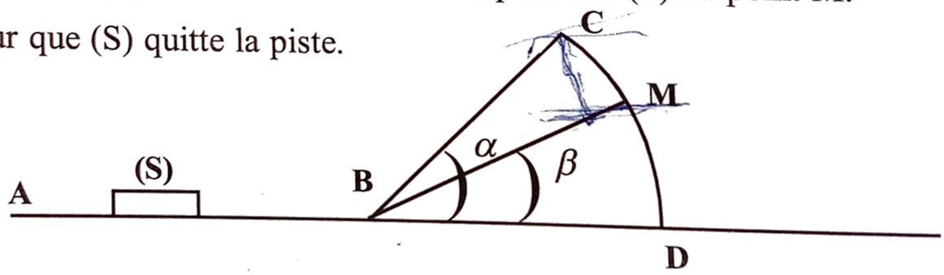
b) En réalité, on constate que (S) parcourt une distance BC = L_1 = 3m le long du plan incliné. En supposant que les frottements sont équivalents à une force unique $\vec{F}$ parallèle au plan incliné et dirigée en sens contraire du vecteur vitesse $\vec{V}$ calculer la norme de $\vec{F}$.

3. A l'extrémité C du plan incliné BC, le mobile (S) aborde sans vitesse une piste circulaire CD de centre B de rayon L_1 = BC = 3m. La position de l'objet (S) sur la piste circulaire CD est repérée par l'angle $\beta = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM})$. Les frottements sont négligés.

a) Exprimer en fonction de L_1, α, β et g la vitesse de (S) au point M.

b) Exprimer en fonction de m, g, β et α la réaction de la piste sur (S) au point M.

Trouver la valeur de β pour que (S) quitte la piste.



Solution

1. a) La nature du mouvement.

- Système : Solide (S) repère terrestre supposé galiléen.
- Bilan des forces $\vec{P}$, $\vec{R}$ $\vec{F}$.

$T.C.I.\ \sum \vec{F}\ ext = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P_t}, \vec{R_t}, \vec{F} = m\vec{a}$

Projection sur $\overrightarrow{AB} \Rightarrow F = m\,a$

$$\left.\begin{array}{l} a = \dfrac{F}{M} = cte > 0 \\ \text{AB horizontale} \end{array}\right\}\ \text{le mouvement de (S) est RUV}$$

b) La valeur numérique de F.

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{6-0}{3-0} \Rightarrow a = 2\, m\, s^{-2}$$

$F = m\,a \quad F = 5 \times 2 \Rightarrow F = 10\ N$

c) La distance du lancement AB.

$$V^2 - V_0^2 = 2a(x - x_0)$$

$$AB = x - x_0 = \frac{V^2 - V_0^2}{2a} = \frac{36}{2x2} = 9m$$

2. a) La distance que l'objet devrait parcourir.

- Bilan forces $\vec{P}, \vec{R}$

$T.E.C$ entre B et C : $\frac{1}{2}\, m\, V_C^2 - \frac{1}{2}\, mV_B^2 = W_{\vec{P}} + W_{\vec{R}}$

$W_{\vec{R}} = 0$; $W_{\vec{P}} = -Ph = mgl'\sin\alpha$

$$-\frac{1}{2} m V_B^2 = mgl'\sin\alpha \Rightarrow l' = \frac{V_B^2}{2g\sin\alpha}\ AN\ l' = 3,6m.$$

b) La norme de f :

$T.E.C$ entre C et B : $-\frac{1}{2}\, m\, V_B^2 = -mgL_1\sin\alpha - f\, L_1$

$$f = m\,(\frac{V_B^2}{2L_1} - g\sin\alpha)\quad AN\ f = 5(\frac{36}{2x3} - 10x0,5)\quad f = 5N$$

3. a. L'expression de V_N en fonction de L_1, α, β et g.

$T.E.C$ entre C et M : $\frac{1}{2}\, m\, V_M^2 - \frac{1}{2} mV_C^2 = W_{\vec{R}} + W_{\vec{P}}$

$$\frac{1}{2} mV_M^2 = mgh' = mgL_1(\sin\alpha - \sin\beta) \Rightarrow V_M = \sqrt{2gL_1(\sin\alpha - \sin\beta)}$$

b. Expression de la réaction de la piste

$T.C.I : \vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a}$

Projection sur la normale : $P_N - R_N = m\,a_N$

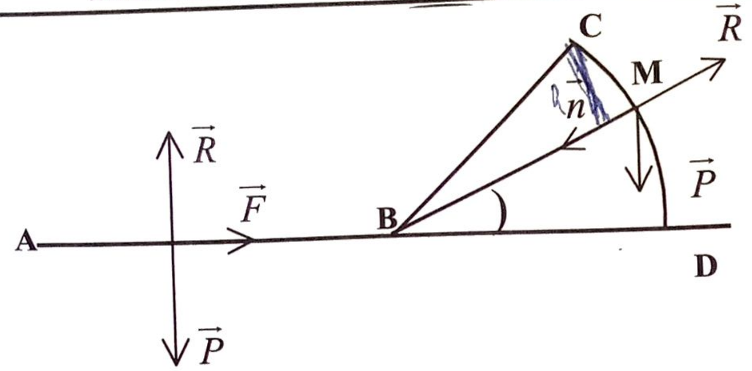
$$mg\sin\alpha - R = M\frac{V_M^2}{L_1} \Rightarrow R = RM(g\sin\beta - 2g(\sin\alpha - \sin\beta)$$

$$R = M[3g\sin\beta - 2g\sin\alpha] = mg(3\sin\beta - 2\sin\alpha)$$

La valeur de β pour que (S) quitte la piste.

$R = 0 \quad \Rightarrow\ 3\sin\beta - 2\sin\alpha = 0$

$$\sin\beta = \frac{2}{3}\sin\alpha \quad AN\ \sin\beta = \frac{2}{3}\sin 30 \ \Rightarrow\ \beta = 19,47°$$



Exercice N° 10

En un lieu ou $g = 9,8ms^{-1}$, un mobile = 50 g glisse sur un banc à un coussin d'air incliné d'un angle $\alpha = 10°$ par rapport à l'horizontale.
Un série de paires de cellules photoélectriques disposées le long du banc et reliés à un ordinateur permettant de déterminer la vitesse instantanée V du mobiles pour des abscisses choisies.

Tableau des mesures

Abscisse x (10^{-1} m)	X_0	0	20	40	60	80	100
V (ms^{-1})	0	V_0	0,92	1,20	1,43	1,63	1,80

1. On admet l'existence d'une force de frottement $\vec{f}$ de faible intensité constante et opposée au mouvement.

   a) En appliquants au solide le théorème du centre d'inertie ; établir l'expression de l'accélération en fonction des données littérales. En déduire la nature théorique du mouvement.

   b) Ecrire la relation liant la vitesse v et l'abscisse x.

2. a) Quelle courbe peut-on tracer pour vérifier à partir des données expérimentales les résultats théoriques précédents ? Construire cette courbe en prévoyant sur l'axe des x une gradation de - 0,2 à 1m. Préciser les échelles choisies pour que l'ensemble des valeurs du tableau soient représentées.

   b) La courbe confirme-t-elle la nature théorique du mouvement établie en 1) a.

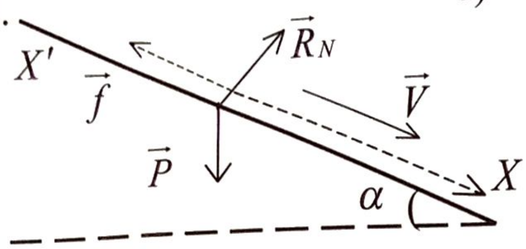
   En déduire : - La valeur de l'accélération du mobile.
   - La valeur x_0 de l'abscisse x lorsque V = 0.
   - La valeur de V_0.

3. Calculer la valeur f, de la force de frottement. Pouvait-on négliger cette force ? (Justifier la réponse).

Solution

a) Expression de l'accélération a.

1.



$$T.C.I : \sum \vec{F}\, ext = m\,\vec{a}$$

$$\vec{R}_N + \vec{f} + \vec{P} = m\,\vec{a}$$

Sur X^1X : $O - f + P\sin\alpha = m\,a \Rightarrow a = g\sin\alpha - \dfrac{f}{m}$

Nature théorique du mouvement.

$a = cte \Rightarrow$ M.R.U.V.

b) Relation liant V et x.

$$V^2 - V_0^2 = 2a(x - x_0)$$

2. a). Courbe à tracer.

$$V^2 = 2ax - (V_0^2 - 2ax_0) \Rightarrow V^2 = Ax + B$$

On doit représenter la courbe $V^2 = f(x)$

$x\ (10^{-2}m)$	x_0	0	20	40	60	80	100
$V^2\ (ms^{-2})$	0	V_0^2	0,85	1,44	2,05	2,66	3,24

Echelles : 1 cm $\rightarrow$ 10 10^{-2}m

1 cm $\rightarrow$ 0,5 $(ms^{-1})^2$

b) La courbe obtenue est une fonction affine de *x*.

Son équation est de la forme $V^2 = Ax + B$, donc elle est en accord avec la nature théorique du mouvement établi.

- Valeur de a.

$$A = \frac{\Delta V^2}{\Delta x} = \frac{2,66 - 0,85}{(80-20)10^{-2}} = 3 \Rightarrow 2a = 3\frac{f}{p}$$

$a = 1,5ms^{-2}$

- Valeur $= x_0$ $x_0 = 0,02m = 2 10^{-2}m$.
- Valeur de V_0

si $x = 0$ $V_0^2 = B$ or $B = 0,275\ m^2/s^2$

$V_0^2 = 0,52ms^{-1}$

3. Calcul de *f*.

$f = m(g\sin\alpha - a)$ $f = 50.10^{-3}(9,8\sin 10° - 1,5)$

$f = 0,01$ N

$\dfrac{p}{f} = 49$ $f << p$ (on peut la négliger f).

Exercice N°11 Bac 2004 Série D

On dispose d'un ressort R à spires non jointives, de masse négligéable, de raideur K et de longueur à vide $\ell_o = 18cm$.

1. A une extremité du ressort R, vertical dont l'autre extremité est fixée en un point, on accroche un solide S_1 de masse $m_1 = 320$ g. La longueur du resort à l'équilibre est $\ell_1 = 23cm$.
Calculer K.

2. Le solide S_1 reste suspendu à l'extrémité inférieure du ressort. On réalise un pendule conique en fixant l'autre extrémité à un axe vertical animé d'un mouvement de rotationn uniforme. L'axe du ressort décrit un cône dont le demi-angle au sommet est $\alpha = 60^\circ$ (Figure 1).
   a) Déterminer la longueur ℓ_2 du ressort.
   b) Calculer la fréquence de rotation du système.

3. Le solide S_1 (Figure 2) peut glisser sans frottement sur un plan incliné faisant un angle $\beta = 30^\circ$ avec le plan horizontal. Le solide S_2 de masse $m_2 = 400$ g est relié à S_1 par un fil inextensible. Le fil passe par la gorge d'une poulie tournant sans frottement autour d'un axe horizontal Δ passant par son centre. On néglige les masses du fil et de la poulie.
On abandonne le système sans vitesse initiale.
   a) En appliquant le thèorème de l'énergie cinétique, donner l'expression de l'accélération du mouvement des solides.
   b) Vérifier la réponse en utilisant le théorème du centre d'inertie.
   c) Calculer la vitesse acquise au bout du temps t = 0,1s.
   On prendra l'accélération de la pesanteur g = 10 m/s².

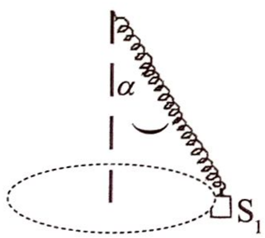


Figure 1

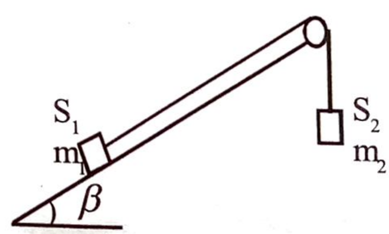
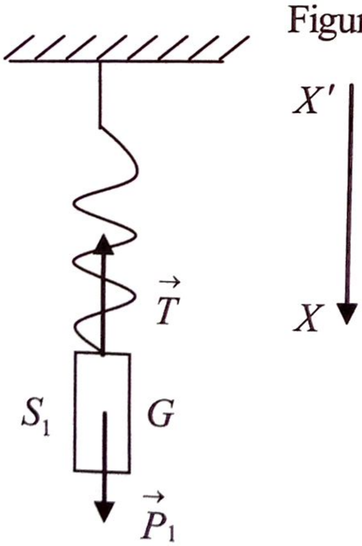


Figure 2



Solution

1. Calcul de K

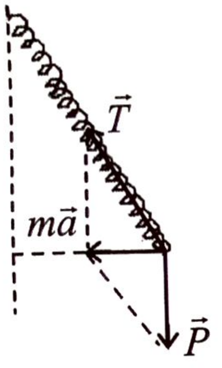
- Systeme : S_1
- Bilan des forces : $\vec{P}_1, \vec{T}$

$$équilibre : \vec{P}_1 + \vec{T} = \vec{0}$$

Sur $X'X$: $P_1 - T = 0 \Rightarrow P_1 = T = K(l_1 - l_0)$

$$m_1 g = K(l_1 - l_0) \Rightarrow K = \frac{m_1 g}{l_1 - l_0}$$

$$K = \frac{0,320.10}{5.10^{-2}} \Rightarrow K = 64Nm^{-1}$$



2. a) Détermination de ℓ_2

- Systeme : S_1.
- Bilan des forces : $\vec{P_1}, \vec{T}$.

$$T.C.I : \vec{P_1} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{P_1}{T}$$

$$T = \frac{P_1}{\cos\alpha} = K(\ell_2 - \ell_0)$$

$$\ell_2 = \frac{m_1 g}{K\cos\alpha} + \ell_0$$

$$AN : \ell_2 = \frac{0,32.10}{64.\cos 60} + 0,18 \Rightarrow \ell_2 = 0,28m$$

b) Fréquence de rotation

$$\tan\alpha = \frac{m_1 a}{m_1 g} = \frac{a}{g} \quad or\ a = \omega^2\ r\ et\ r = \ell_2 \sin\alpha$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 \ell_2 \sin\alpha}{g}$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 \ell_2}{g} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell_2 \cos\alpha}} = 2\pi N$$

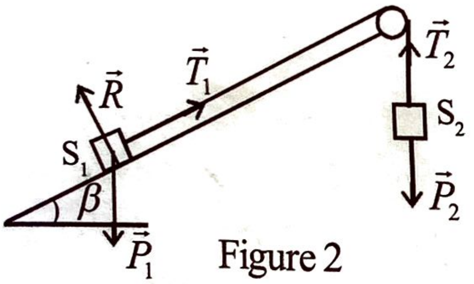


Figure 2

$$N = \frac{\sqrt{\frac{g}{\ell_2 \cos\alpha}}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{10}{0,28\cos 60}}}{2\pi} = 1,345Hz$$

$$S_1 : E_{C_1} = \frac{1}{2}mV_1^2 = W(\vec{P_1}) + W(\vec{R}) + W(\vec{T_1})$$

$$E_{C_1} = -m_1 g x \sin\beta + T_1 x$$

$$S_2 : E_{C_2} = \frac{1}{2}mV_2^2 = W(\vec{P_2}) + W(\vec{T_2})$$

$$E_{C_2} = m_2 g x - T_2 x$$

La poulie de masse négligeable : $T_1 = T_2$.

T.E.C : $$\frac{1}{2}m_1 V^2 + \frac{1}{2}m_2 V^2 = m_2 g x - m_1 g x \sin\beta$$

$$V^2(m_1 + m_2) = 2gx(m_2 - m_1 \sin\beta)$$

$$a = \frac{V^2}{2x} = g\frac{(m_2 - m_1\sin\beta)}{m_1 + m_2} \quad a = \frac{10(0,4 - 0,32\sin 30)}{0,72} \qquad a = 3,33ms^{-2}$$

b) Appliquons le T.C.I :

$S_1 : \vec{T}_1 + \vec{P}_1 + \vec{R} = m_1\vec{a}$

$sur\ OX : T_1 - m_1 g \sin\beta = m_1 a \Rightarrow T_1 = m_1 a + m_1 g \sin\beta$

$S_2 : \vec{T}_2 + \vec{P}_2 = m_2\vec{a}$

$sur\ OY : -T_2 + m_2 g = m_2 a \Rightarrow T_2 = -m_2 a + m_2 g$

$T_1 = T_2 \Rightarrow m_1 a + m_1 g \sin\beta = -m_2 a + m_2 g$

$$a = g\frac{m_2 - m_1 \sin\beta}{m_1 + m_2} : verifi\acute{e}$$

c). Calculons la vitesse :

$V = at \qquad AN{:}V = 3{,}33.0{,}1 = 0{,}333 ms^{-1}$

Exercice N° 12 : Bac Série D 2008

On dispose d'une poulie fixe, de masse négligeable au sommet d'un plan incline d'angle $= 30°$ par rapport à l'horizontale. A la gorge de cette poulie passe un fil inextensible supportant deux solides en équilibre (S_1) à gauche et (S_2) à droite, de masses respectives M_1 et M_2. Le système est mis en mouvement par une masse m posée sur le solide (S_2).
(Figure 2).

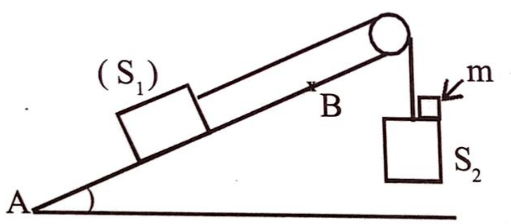


Figure 2

Solide se déplaçant sur un plan incline

1°) Faites un schéma soigné de dispositif avec les différentes forces appliquées (1pt)

2°) En appliquant le théorème du centre d'inertie, donner l'expression de l'accélération a du système. Les forces de frottement sont considérées nulles. Faire l'application numérique avec: $g = 10 m.s^{-2}$; $M_1 = 160$ kg : $M_2 = 80$ kg et $m = 60$ kg. (1pt).

3°) Le solide (S_1) part sans vitesse initiale du point A, considéré comme origine, à la base du plan incline, vers le sommet de ce plan. Quel temps mettra t-il pour parcourir la distance: AB = 9 sur ce plan ? Quelle est alors sa vitesse au polnt B ? (1pt)

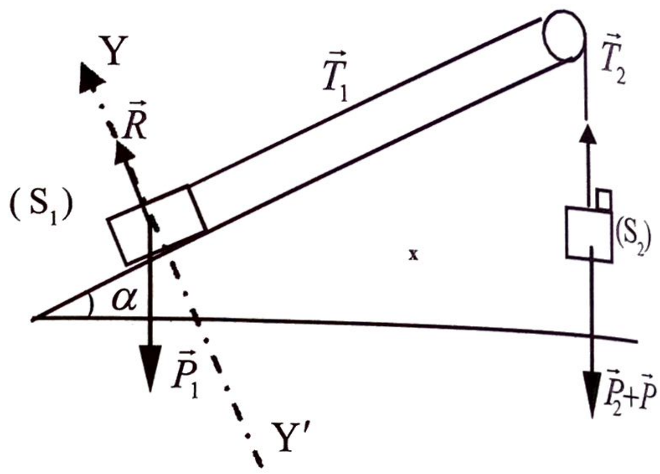
4°) Calculer la tension du fil et la réaction du plan incliné. (1pt)

5°) On suppose maintenant que les forces de frottement sur le plan incliné ne sont plus nulles, mais équivalentes à une force unique f = 300 N, de même direction que le déplacement mais de sens contraire.

Donner la nouvelle expression de l'accélération a du système en utilisant le théorème de l'énergie cinétique et faire l'application numérique. (1pt)

Solution

1°) Forces appliquées (voir schéma)



2°) Système (S_1) T.C.I.

$\vec{P}_1 + \vec{R} + \vec{T}_1 = M_1, \vec{a}$

Projetons sur $(\overrightarrow{AB})$

$-P_1 \sin\alpha + T_1 = M_1 \, a$

$T_1 = M_1 a + M_1 g \sin\alpha$ (1)

Système (S_2)

$\vec{P}_2 + \vec{P} + \vec{T}_2 = (M_2 + m)\,\vec{a}$

Proetons sur $(B, \vec{P}_2)$

$P_2 + P - T_2 = (M_2 + m)\, a$

$T_2 = (M_2 + m)\, g - (M_2 + m)\, a$ (2)

$T_1 = T_2 \Rightarrow M_1\, a + M_1\, g \sin\alpha = (M_2 + m)\, g - (M_2 + m)\, a$

$M_1\, a + (M_2 + m)\, a = (M_2 + m)\, g - M_1\, g \sin\alpha.$

$a = (M_1 + M_2 + m) = g\,(M_2 + m - M_1 \sin\alpha).$

$$a = \frac{M_2 + m - M_1 \sin\alpha}{M_1 + M_2 + m} \cdot g$$

AN $a = \dfrac{80 + 60 - 160 \times 0,5}{160 + 80 + 60} . 10$ $\qquad a = 2 \text{m. s}^{-2}$

3 °) Temps mis pour parcourir AB = 9m.

$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \qquad v_0 = 0 \quad x_0 = 0$

$x = t^2 \Rightarrow t = 3\,s$

Y'

Vitesse en B

$V = 2t \quad t = 3s \qquad V = 6 \text{m s}^{-1}$

4°) Calcul de T_1

$T_1 = M_1\, a + M_1\, g \sin\alpha$

$T_1 = 160 \times 2 + 160 \times 10 \times 0,5 \qquad T_1 = 1120$ N

Réaction du plan incliné

$\vec{P}_1 + \vec{R} + \vec{T}_1 = M_1, \vec{a}$

Projetons suivant Y Y'

$P_1 \cos\alpha + R = 0$

$R = M_1 g \cos \alpha$

$R = 160 \times 10 \times 0,866$ $\qquad$ $R = 1385,6N$

5°) Expression de a en utilisant le théorème de l'énergie cinétique

$\Delta E_C = \omega(\vec{P}_1) + \omega(\vec{R}) + \omega(\vec{T}_1) + \omega(\vec{P}_2 + \vec{P}) + \omega(\vec{T}_2)$

Soit x le déplacement de S_1 et S_2

$$\frac{1}{2}(M_1 + M_2 + m)v^2 = P_1 \sin\alpha.x - fx + T_1 x + (P_2 + P)x - T_2 x.$$

$$\frac{1}{2}(M_1 + M_2 + m)v^2 = (M_1 g \sin\alpha - f + M_2 g + mg)x.$$

Dérivons par rapport à t

$a\,v(M_1 + M_2 + m) = M_2 g + mg - M_1 g \sin\alpha - f)\,v$

$$a = \frac{M_2 + m - M_1 \sin\alpha}{M_1 + M_2 + m} g - \frac{f}{M_1 + M_2 + m}$$

$AN \quad a = 1 m.s^{-2}$

X'

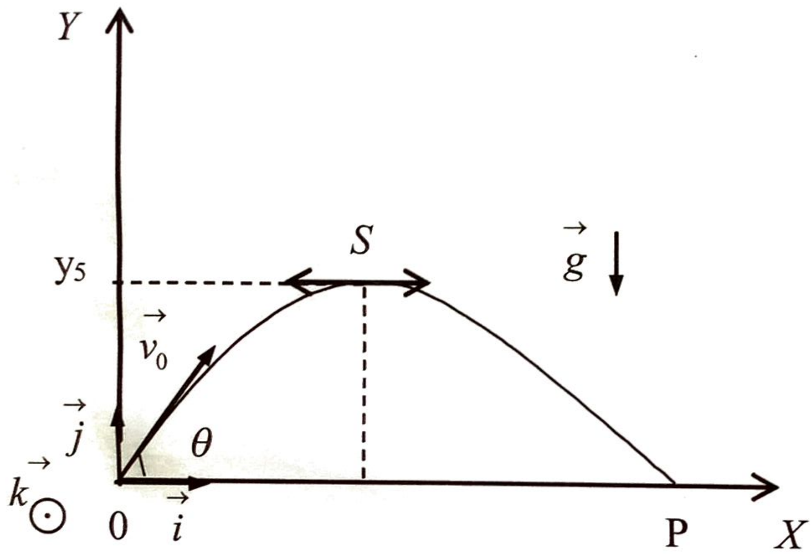
Chapitre 3

MOUVEMENT DANS UN CHAMP UNIFORME

RAPPEL DU COURS

I MOUVEMENT D'UN PROJECTILE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR

1. Equations horaires



Un projectile est lancé d'un point O avec une vitesse formant un angle θ avec l'horizontale
On néglige les frottements de l'air.

$$t = o \quad M_o \left| \begin{array}{l} x_o = o \\ y_o = o \\ z_o = o \end{array} \right. \qquad \vec{V}_o \left| \begin{array}{l} V_{ox} = V_o \cos\theta \\ V_{oy} = V_o \sin\theta \\ V_{oz} = o \end{array} \right.$$

o

T.C.I $\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$ projecti n sur $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\vec{a}\,(a_x = 0\,;\ a_y = -g\,;\ a_z = 0)$ $\vec{V}\,(V_x = V_0\cos\theta\,;\ V_y = -gt + V_0\sin\theta\,;\ V_z = 0)\,;$

$(\ x = (V_0\cos\theta)t\,;\quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0\sin\theta)t\,;\ z = 0\ )$

Remarque: $z = 0$, le mouvement a lieu dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2. Equation de la trajectoire : $y = \frac{-g}{2V_o^2 \cos^2\theta} x^2 + x\tan\theta$

la trajectoire est une parabole

3. Portée du tir : Au point P $y = 0 \Rightarrow X_P = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g}$

4. Hauteur maximale (flèche).

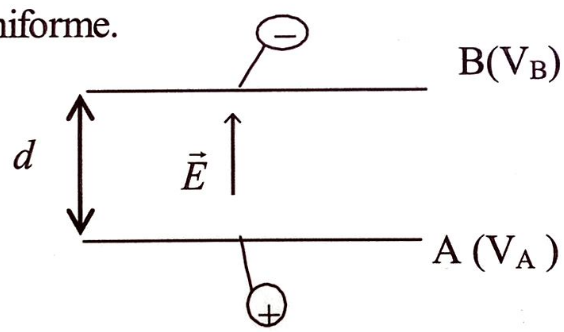
Au point S ; $V_y = 0 \Rightarrow y_s = \frac{V_0^2 \sin^2\theta}{2g}$

5. Vitesse du projectile en P.

On montre que $V_P = V_0$

II MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE UNIFORME

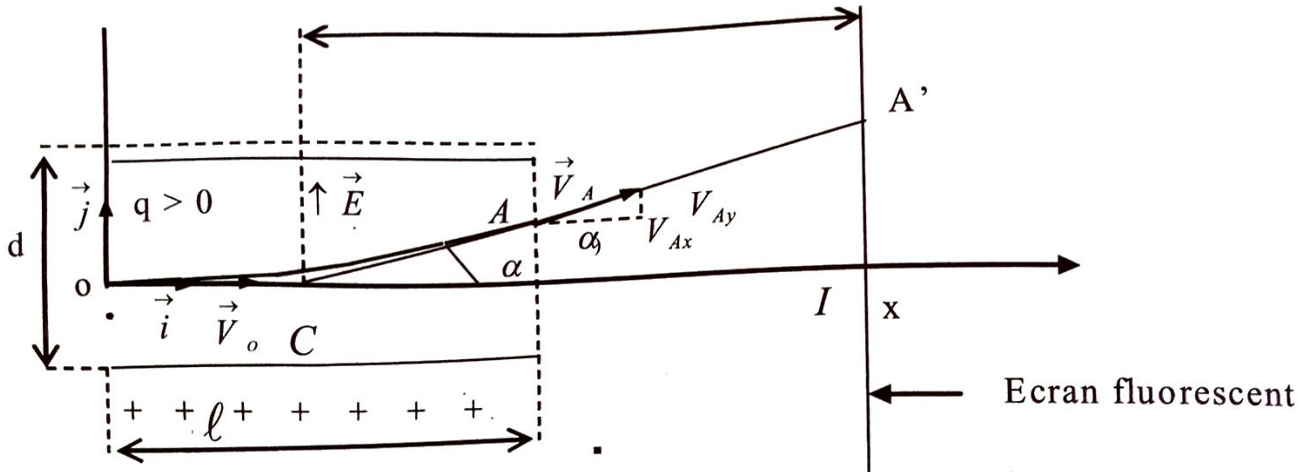
1. Champ électrique uniforme.



Entre les plaques A et B règne un champ électrique uniforme ayant les caractéristiques suivantes :

- Direction : perpendiculaire aux plaques.
- Sens : de la plaque positive vers la plaque négative
- Norme : $E = \frac{U_{AB}}{d} = \frac{V_A - V_B}{d}$

2. Etude du mouvement d'une particule chargée dans une région où règne $\vec{E}$ uniforme.



Une particule de charge q>0 de masse m pénètre en O avec une vitesse $\vec{V}_0$ dans un champ électrique uniforme. Elle sort en A.

$$\left(OC = \frac{\ell}{2}\right)$$

• <u>Equations horaires :</u>

T.C.I : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ $\quad q\vec{E} = m\vec{a}$

$$t = o \begin{vmatrix} x_o = o \\ y_o = o \\ z_o = o \end{vmatrix} \quad \vec{V}_o \begin{vmatrix} V_{ox} = V_o \\ V_{oy} = o \\ V_{oz} = o \end{vmatrix}$$

Projection sur $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{a} \begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = \frac{q}{m}E \\ a_z = 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad \vec{V} \begin{vmatrix} V_x = V_0 \\ V_y = \frac{q}{m}Et \\ V_z = 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} x = V_o t \\ y = \frac{qE}{2m}t^2 \\ z = 0 \end{vmatrix}$$

$z = 0 \Rightarrow$ le mouvement a lieu dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$

• <u>Equation de la trajectoire :</u>

$$y = \frac{qE}{2mV_0^2}x^2$$

• <u>Vitesse au point A</u>

Au point A x = l on établit : $\quad VA = \sqrt{V_0^2 + (\frac{qEl}{mV_0})^2} > Vo$

- Déviation électrique (α)

$$\tan\alpha = \frac{qEl}{mV_0^2}$$

- Déflexion électrique

$$y_{A'} = IA' = D\tan\alpha$$

$$y_{A'} = D\frac{qEl}{mV_0^2}$$

Exercices

Exercice 1.

Une bille métallique de masse m = 500g est lâche à 6m du sol, sans vitesse initiale, d'un point pris comme origine des espaces et l'axe vertical $(o\ \vec{i})$ on prendra $g = 9{,}80\ m\ s^{-1}$ et on négligera la résistance de l'air.

1) Faire un schéma représentant l'axe, l'origine et le sens de chute, ainsi que l'inventaire des forces appliquées à la bille.

2) S'agit-il d'une chute libre ? Justifier votre réponse.

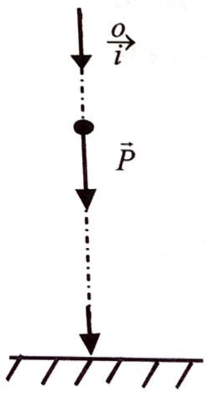
3) Déterminer les équations horaires du mouvement la vitesse v(t) et la position y(t).

4) A quel instant la bille touche-t-elle le sol?

5) Déterminer la vitesse v_s de la bille au moment où elle touche le sol.

Solution

1) L'inventaire des forces et le schéma



Repère $(0, \vec{i})$ supposé galiléen

Système étudiée : la bille

Inventaire des forces : $\vec{P}$.

2) La nature du mouvement et justification.

T.C.I. $\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$\vec{a} = a\vec{i}$

$(o\ \vec{i})$ portée par la verticale.

$\{ v_0 = o$

Le mouvement est un mouvement de chute libre.

3) Déterminons les équations du mouvement : la vitesse v(t) et y(t).

$\vec{a}$ est une constante, donc, on a un MRUV

$$v(t) = \frac{1}{2}at + v_o \Rightarrow v(t) = gt$$

$$y(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_o t + y_o \qquad y_o = o$$

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

4) Déterminons l'instant où la bille touche le sol.

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$A.N.\ t = \sqrt{\frac{2x6}{9.8}} \Rightarrow t = 1.2\ s$$

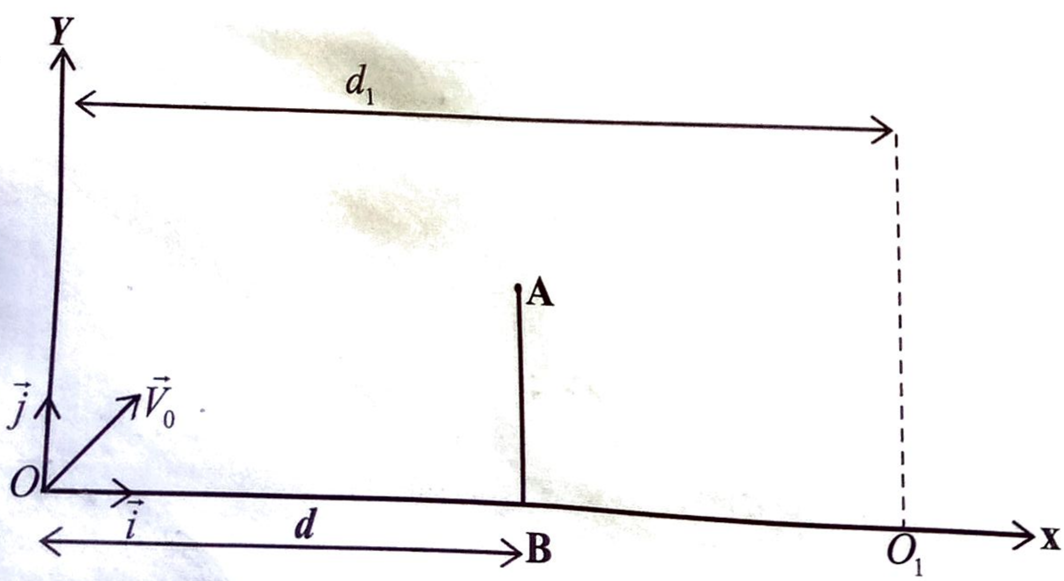
5) La vitesse au moment où la bille touche la piste.

v = gt v = 11,76m 5-1

Exercice N° 2

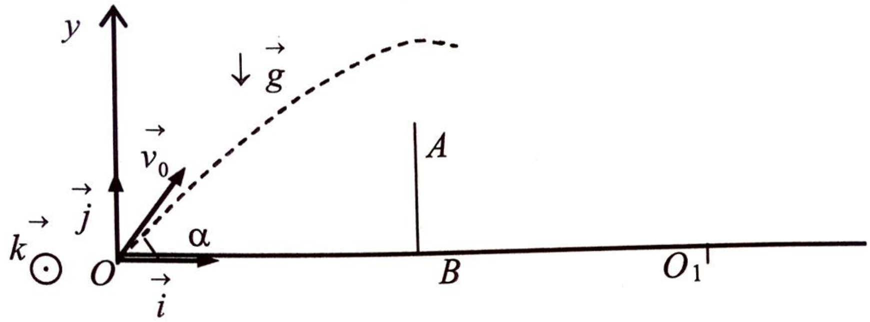
On étudie de façon approchée la trajectoire d'une balle de golf. Un joueur communique à cette balle, une vitesse $\vec{V}_0$ à l'aide d'une canne de golf (figure). On donne $g = 10ms^{-2}$ et on néglige la résistance de l'air.

1. Montrer que la trajectoire de la balle est dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3. Dans ce lancer, $V_0 = 20ms^{-1}$ et $\alpha = 45°$. A la distance d = 5m de 0 se trouve un petit arbre AB de hauteur AB = h = 4m. Montrer que la balle peut passer au dessus de l'arbre.
4. Le trou que doit atteindre la balle est en O. La verticale de O_1 est à $d_1 = 42$ m de O.
   a) Avec les données précédentes calculer l'abscisse du point d'impact de la balle sur le sol.
   b) La balle atteindra-t-elle le trou O_1 ?



Solution

1. Montrons que la trajectoire est dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



- Système étudié : la balle.
- Repère utilisé : repère terrestre supposé galiléen.
- Bilan des forces : $\vec{P}$
- TCI $\sum \vec{F}_{EXT} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$$t = o \quad \begin{vmatrix} x_o = o \\ y_o = o \\ z_o = o \end{vmatrix} \quad ; \qquad \vec{V}_o \begin{vmatrix} V_{ox} = V_o \cos\alpha \\ V_{oy} = V_o \sin\alpha \\ V_{oz} = o \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \begin{vmatrix} \ddot{x} = 0 \\ \dot{y} = -g \\ z = 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{V} \begin{vmatrix} \dot{x} = V_o \cos\alpha \\ \dot{y} = -gt + V_o \sin\alpha \\ \dot{z} = 0 \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} x = tV_o \cos\alpha \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_o \sin\alpha)t \\ z = 0 \end{vmatrix}$$

$z = 0 \Rightarrow$ la balle se déplace dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2. Equation de la trajectoire.

$$x = V_0 t\cos\alpha \Rightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha}$$

$$y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x\tan\alpha$$

3. Pour $V_0 = 20ms^{-1}$ et $\alpha = 45°$, calculons y si $x = d = 5m$.

$$y = -\frac{10}{2.20^2 \cos^2 45} 5^2 + 5.1 = 4,375m \qquad y = 4,38m$$

On constate que $y > AB = h$. Donc la balle passe au dessus de l'arbre.

4. a) Détermination de l'abscisse du point d'impact.
Au point d'impact y = 0

$$\frac{-g}{2V_o^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha = 0; \qquad x\left(\frac{-gx}{2V_o^2\cos^2\alpha}+\tan\alpha\right)=0;$$

$x = 0$ position initiale

$$\frac{-gx}{2V_o^2\cos^2\alpha}+\tan\alpha = 0; \qquad \frac{-g}{2V_o^2\cos^2\alpha}x = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow x = \frac{V_o^2\sin 2\alpha}{g}$$

Application numérique : $x = \dfrac{20^2\sin 2.45}{10} = 40m$

b) x< d_1 = 42m, alors la balle n'atteindra pas le trou O_1.

Exercice N° 3 : (Bac Niger 1997)

On se propose d'étudier un tir du ballon dans un match de football.On admet les hypothèses suivantes :

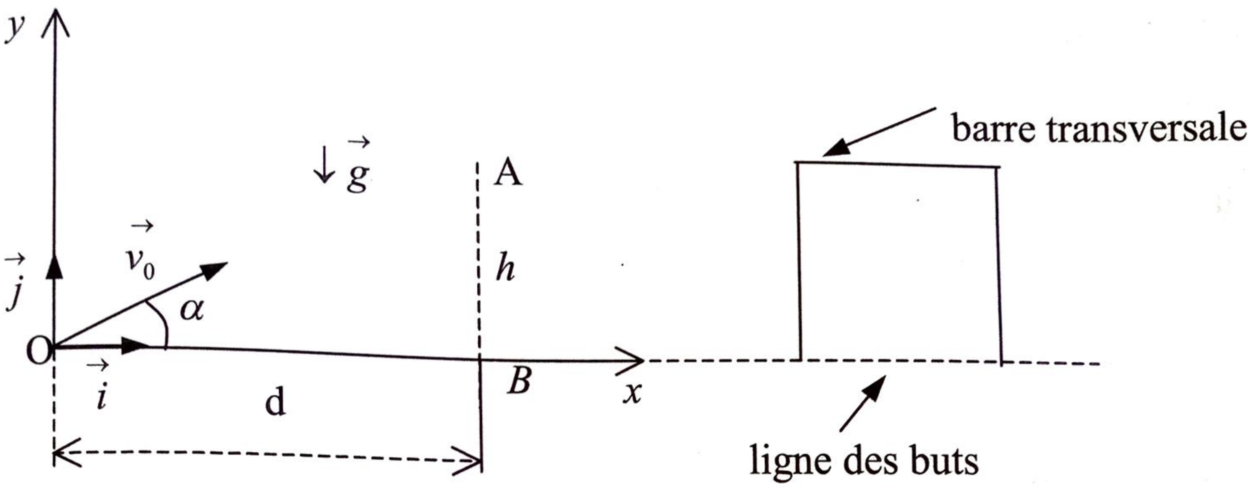
- le ballon est assimilé à un point matériel ;
- l'influence de l'air est négligeable ;
- le champde pesanteur est considéré comme uniforme et son intensité g = 10 ms^{-2}. Le ballon et le gardien impliqué dans la suite sont situés sur la médiatrice de la ligne des buts.

Le joueur en possession du ballon constatant que le gardien s'est avancé de cinq mètres devant le but AB, tente un lob. Le ballon considéré immobile sur le sol horizontal, part du point O avec une vitesse initiale $\vec{V}_o$ contenu dans le plan (O, $\vec{i},\vec{j}$) et inclinée par rapport à l'horizontale d'un angle α= 30° . OA = d = 30 m

1. Montrer que le ballon se déplacera dans le plan (O, $\vec{i},\vec{j}$).
2. Etablir l'équation de la trajectoire suivie par le ballon dans le repère (O, $\vec{i},\vec{j}$) en fonction de α, g et V_0.
3. La barre transversale du but est située à une hauteur h = 2,44m du sol. Calculer la vitesse V_0 qui communiquée au ballon, lui permettra de pénétrer dans les buts juste au ras de la barre transversale, le gardien n'ayant rien fait pour l'arrêter.
4. Gardant sa position indiquée au début de l'énoncé, le gardien saute verticalement en levant les bras. Ses mains atteignent la hauteur de 2,80m au dessus du sol.

   a) Le gardien arrêtera-t-il le ballon si V_0 = 20 ms^{-1}, sachant que pour arrêter le ballon, il lui suffit de la toucher ?

   b) Le but est-il marqué ?



Solution

1. Montrons que le ballon est dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   - Repère utilisé : repère terrestre supposé galiléen.
   - Système : ballon.

   Forces appliquées au ballon : poids $\vec{p}$.

T.C.I $\vec{p} = m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

Projection suivant $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ t = 0.

$$\vec{V}_0 \left| \begin{array}{l} V_{0x} = V_0 \cos\alpha \\ V_{0y} = V_0 \sin\alpha \\ V_{0z} = 0 \end{array} \right. \qquad O \left| \begin{array}{l} x_o = o \\ Y_o = o \\ y_o = o \end{array} \right.$$

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{array} \right. \quad ; \quad \vec{V} \left| \begin{array}{l} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y = -gt + V_0 \sin\alpha \\ V_z = 0 \end{array} \right. \quad ; \quad \vec{OM} \left| \begin{array}{l} x = tV_0 \cos\alpha \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t \\ z = 0 \end{array} \right.$$

z = 0 ⇒ Le mouvement a lieu dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2. Equation la trajectoire $y = \dfrac{-g}{2V_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x\tan\alpha$.
3. Calculons V_0, pour que la balle pénètre les buts en rasant la barre transversale.

   Dans l'équation $y = \dfrac{-g}{2V_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x\tan\alpha$; x = d = 30m.

$$V_0^2 = \frac{gx^2}{2\cos^2\alpha(x\tan\alpha - y)} \qquad V_0 = \frac{x}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(x\tan\alpha - y)}}$$

$$AN : V_0 = \frac{30}{\cos 30°}\sqrt{\frac{10}{2(30\tan 30° - 2{,}44)}} = 20{,}1ms^{-1} \quad ; \quad V_0 = 20{,}1ms^{-1}$$

4. a) Le gardien arrêtera le ballon si l'ordonnée du ballon pour $x = 25$ est inférieure ou égale à 2,80 m.

$$\text{Calculons } Y_{25} = \frac{-10x25^2}{2x20^2\cos^2 30} + 25\tan 30 \quad Y_{25} = 4{,}02 \text{ m}$$

$Y_{25} > 2{,}80$m, le gardien n'arrêtera pas le ballon

a) Le but est marqué si pour $x = 30$m.

$$Y_{30} \leq h$$

$$\text{Calcul de } Y_{30} : \quad Y_{30} = \frac{-10x30^2}{2x20^2\cos^2 30} + 30\tan 30 = 2{,}32 \text{ m}$$

$Y_{30} < 2{,}44$ le but est alors marqué.

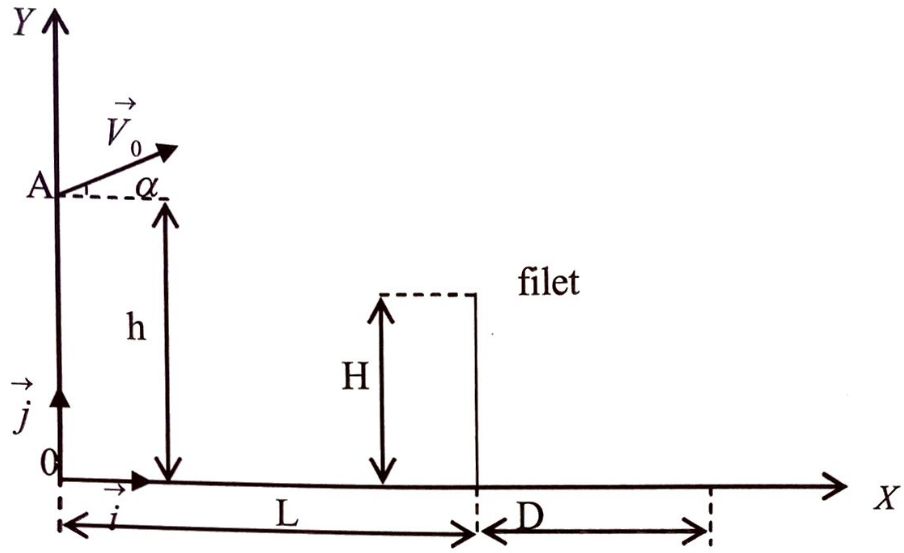
Exercice N° 4

Dans tout l'exercice, on assimilera la balle à un point matériel. On néglige la résistance de l'air et on prendra $g = 10ms^{-2}$.

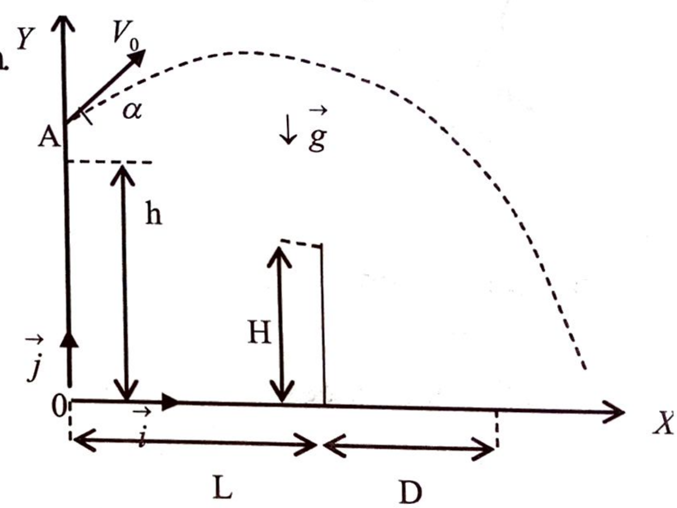
Au volley-ball, le joueur qui effectue le service frappe la balle à la hauteur h du sol et à la distance L du filet. La hauteur du filet est $H = 2{,}43$m. La ligne de fond du camp adverse est à $D = 9$m du filet. Pour que le service soit bon, il faut que la balle passe au-dessus du filet et touche le sol dans le camp adverse entre le filet et la ligne de fond.

Pour faire le service, le joueur saute verticalement et frappe la balle en un point A pour lequel $h = 3{,}50$ m La vitesse initiale de la balle $\vec{V}_0$ fait un angle $\alpha = 7°$ avec l'horizontale (voir figure). On donne $V_0 = 18ms^{-1}$ et $L = 12$m.

1. a) Etablir les équations horaires du mouvement de la balle dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   b) Déterminer l'équation cartésienne de trajectoire.
2. a) A quel instant la balle passe-t-elle au dessus du filet ?
   b) A quelle hauteur se trouve-t-elle alors ? La balle passera-t-elle au-dessus du filet ?
3. a) A quelle distance de 0, la balle touche-t-elle le sol si elle n'est pas interceptée ?
   b) Le service est –t il bon ? Justifier la réponse.
4. Un joueur adverse souhaite intercepter la balle. A quelle distance du filet doit-il se placer pour intercepter la balle, s'il soulevait ses mains à une hauteur de 1 m au dessus du sol ?



Solution



- Repère utilisé : repère terrestre supposé galiléen.
- Système étudié : la balle
- Bilan des forces : le poids $\vec{P}$ de la balle.

1. a) Equations horaires du mouvement.

Appliquons le TCI : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$$\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}; \quad t=0 \left| \begin{array}{l} x_o = 0 \\ y_o = h \end{array} \right. \qquad \vec{V}_0 \left| \begin{array}{l} V_{ox} = V_o \cos\alpha \\ V_{oy} = V_o \sin\alpha \end{array} \right.$$

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array} \right. \qquad \vec{V} \left| \begin{array}{l} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y = -gt + V_0 \sin\alpha \end{array} \right. \qquad \vec{OM} \left| \begin{array}{l} x = V_0 x \cos\alpha)t \\ y = \dfrac{1}{2} gt^2 + V_0 (\sin\alpha)t + h \end{array} \right.$$

b) Equation cartésienne de la trajectoire.

$$y = \frac{-g}{2V_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x\tan\alpha + h$$

2) a) Instant de passage au-dessus du filet.

Au dessus du filet (x = L = 12m)

$$t=\frac{L}{V_0\cos\alpha}\Rightarrow t=\frac{12}{18\cos 7°}\quad\Rightarrow t=0{,}67s$$

b) Hauteur de la balle au dessus du fil x = L.

$$h_1=y=\frac{-10}{2.18^2\cos^2 7°}12^2+12\times tg7°+3{,}5\ ;\qquad h_1=2{,}72m$$

$h_1>H=2{,}43m$, la balle passera au-dessus du filet.

3. a) La distance de O où la balle touchera le sol.

Au sol $y=0\Rightarrow\frac{-10x^2}{2.18^2\cos^2 7°}+x\tan 7°+3{,}5=0$.

$-0{,}0157x^2+0{,}123x+3{,}5=0$ $\Delta=0{,}2343\Rightarrow\sqrt{\Delta}=0{,}484$

$X_1=19{,}38m$, $X_2<0$ ne convient pas. La balle tombera à 19,38m du point 0.

b) $\left.\begin{array}{l}19{,}38m<L+D=21m\\ et\quad 19{,}38>L\end{array}\right\}$, *le* service est bon.

4. Distance entre le joueur et le filet.

$y=1m\Rightarrow -0{,}0157x^2+0{,}123x+2{,}5=0$

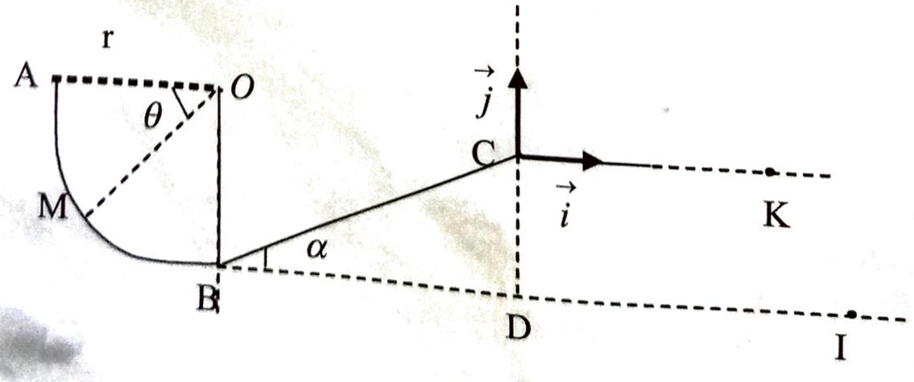
$\Delta=0{,}175\Rightarrow x_1'=16{,}90m$ $x_2'<0$ ne convient pas. Le joueur doit se placer à 16,90-12 = 4,9m du filet.

Exercice N° 5

Dans tout l'exercice on néglige les frottements. Un solide assimilable à un point matériel S de masse m se déplace sur une piste ABC.

1. Le solide est lâché du point A sans vitesse. Sa position est repérée par l'angle.

$\theta=(\vec{OM},\vec{OA})$



a) Etablir les expressions de :
- la vitesse du solide S en M en fonction de g, r et θ.
- la réaction exercée par la piste sur le solide en M en fonction de m, g et θ.

b) Calculer les valeurs de V_B et R.

2. Calculer la distance BC pour que le solide arrive en C avec une vitesse de 3,5ms^{-1}.

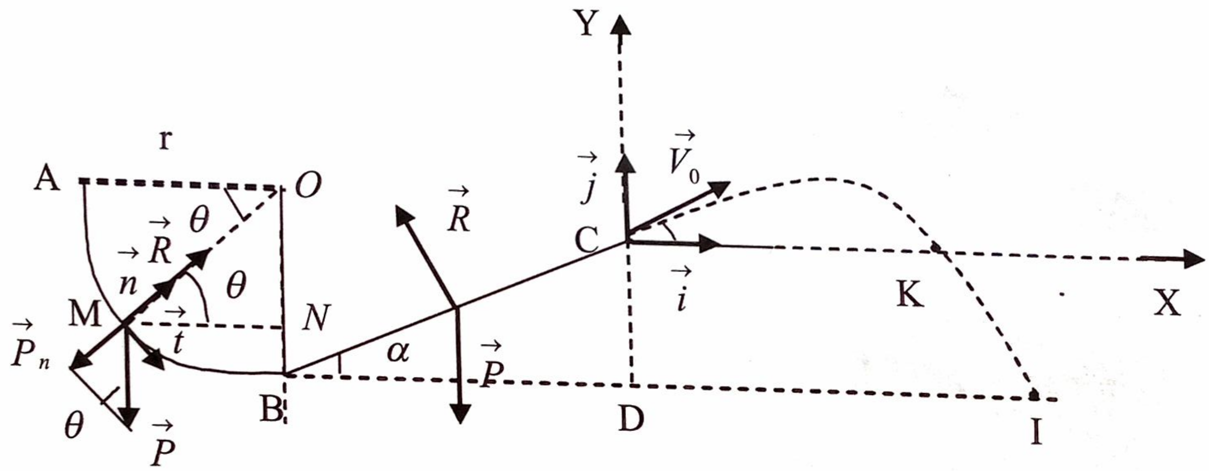
3. Le solide quitte la piste en C avec la vitesse $\vec{V}_C$ de valeur 3,5ms^{-1}. Etablir l'équation de la trajectoire du centre d'inertie de S dans le repère $(C, \vec{i}, \vec{j})$.

4. A quelle distance de C et à quelle date le solide passe sur le même plan horizontal que C ? soit CK cette distance. Quelle est alors sa vitesse ?

5. Déterminer le point d'impact I du solide sur le plan horizontal BD.

Données : $\alpha = 20°$; m = 2kg ; r = OA = OB = 2m ; g = 9,8 ms^{-2}.

Solution



- Système étudié : le solide S.

- Repère utilisé : repère terrestre supposé galiléen.

- Bilan des forces : le poids $\vec{P}$ de S et la réaction $\vec{R}$ de la piste sur le trajet ABC ; le poids $\vec{P}$ au delà du point C.

1. a) La vitesse du solide en M en fonction de g, r et θ.

Appliquons le TEC : $\Delta Ec = \sum W(\vec{F}_{ext}) \Rightarrow \frac{1}{2} m V_M^2 - \frac{1}{2} m V_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$.

$V_A = 0$; $W(\vec{R}) = 0$ ($\vec{R} \perp$ au déplacement).

$\frac{1}{2} m V_M^2 =$ mgh avec h = ON = rsinθ. D'où $V_M = \sqrt{2gr\sin\theta}$.

- La réaction de la piste au point M, R_M = f(m, g et θ)

Appliquons le TCI : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{R} + \vec{P} = m\vec{a}$.

Projetons cette relation sur $(M, \vec{n})$: R_M - $P\sin\theta = ma_n$ avec $a_n = \frac{V_M^2}{r}$

$R_M = 3mg\sin\theta$

b) Calcul de V_B et R_B.

En B, $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow V_B = 6{,}26 ms^{-1}$ $\quad R_B = 58{,}8N$

2. Calcul de la distance BC.

Appliquons le TEC entre B et C : $\frac{1}{2}m V_C^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

$W(\vec{R}) = 0$ ($\vec{R} \perp$ au déplacement)

$$\frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = -mgBC\sin\alpha \Rightarrow BC = \frac{V_B^2 - V_C^2}{2g\sin\alpha}$$

AN: BC = 4,02m

3. Equation de la trajectoire dans le repère $(C, \vec{j})$.

TCI : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$; $\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$$t = 0 \left| \begin{array}{l} x_C = 0 \\ y_C = 0 \end{array} \right. \qquad \vec{V}_C \left| \begin{array}{l} V_{Cx} = V_C\cos\alpha \\ V_{Cy} = V_C\sin\alpha \end{array} \right. \qquad \vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array} \right.$$

$$\vec{V} \left| \begin{array}{l} V_x = V_C\cos\alpha \\ V_y = -gt + V_C\sin\alpha \end{array} \right. \qquad \vec{CM} \left| \begin{array}{l} x = V_C(\cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_C(\sin\alpha)t \end{array} \right.$$

$$y = \frac{-gx^2}{2V_C^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha$$

4. Distance CK.

Au point K : x = CK et y = 0.

$$0 = \frac{-g(CK)^2}{2V_C^2\cos^2\alpha} + CK.\tan\alpha \Rightarrow CK = \frac{V_C^2\sin 2\alpha}{g} \qquad AN: CK = 0{,}80m$$

- Date d'arrivée en K.

$$t_K = \frac{x_K}{V_C \cos\alpha} = \frac{CK}{V_C \cos\alpha} \quad \text{AN : } t_k = 0{,}24\text{s}$$

- Vitesse du solide en K.

Appliquons le TEC entre C et K.

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ext}) : \frac{1}{2} mV_K^2 - \frac{1}{2} mV_C^2 = W(\vec{P}) \text{ or } W(\vec{P}) = 0 \text{ de C à K}$$

$$V_K = V_C \quad \Rightarrow V_K = 3{,}5\text{ms}^{-1}$$

5. Coordonnées du point I.

$$y_I = -CD = -BC\sin\alpha \quad \Rightarrow y_I = -1{,}37\text{m}$$

$$y_I = \frac{-gx^2}{2V_C^2\cos^2\alpha} + x.\tan\alpha$$

$$-0{,}453x^2 + 0{,}364x + 1{,}37 = 0$$

$$\Delta = 2{,}61 \quad \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1{,}62; \quad X_I = 2{,}19\text{m}; \quad I(2{,}19\text{m} ;-1{,}37\text{m})$$

Exercice 6

Au cours d'une compétition, un athlète lance un poids P à partir d'une hauteur h = 2m au dessus du sol, avec une vitesse initiale $\vec{v}_o$ faisant un angle avec l'horizontale. Le mouvement est étudié dans un repère orthonormé $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'origine o étant le point au sol situé à la verticale du centre d'inertie du poids à la date t = o.

1) Etablir les équations horaires du centre d'inertie et du mouvement de ce poids dans le repère $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et déduire que le mouvement est plan.

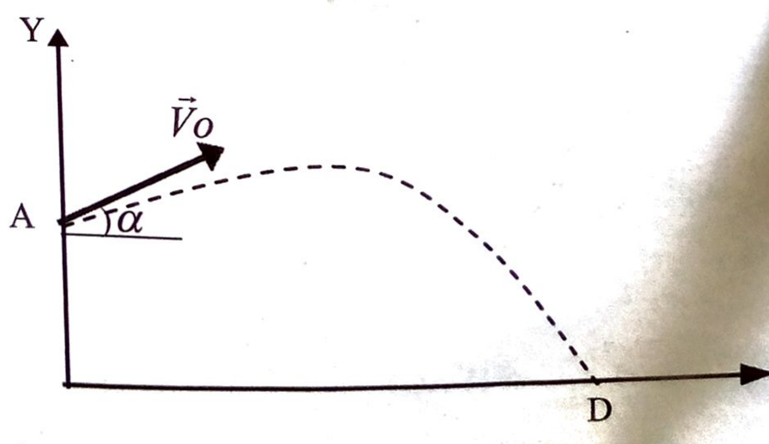
2) Rechercher l'équation de la trajectoire et donner sa nature.

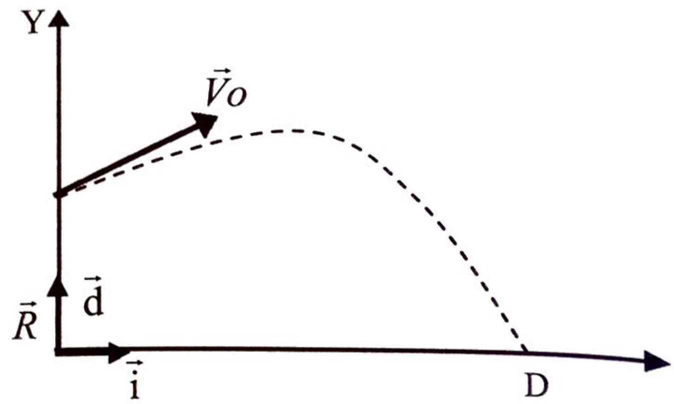
3) Pour = 45°, montrer que la carré de v_o peut se mettre sous la forme littérale :

$$v_o^2 = \frac{gD^2}{(D+h)}$$

D étant la distance mesurée du point O au point de chute du projetile au sol pour ce lancer.

d) Calculer l'énergie cinétique initiale de ce poids de masse 5kg pour un lancer de distance D = 18m





.1) Les équations horaires du mouvement.

Système : " poids " de masse m.

Repère terrestre considéré comme galiléen.

Bilan $\vec{p}$

T.C.I. $\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

Conditions initiales

$$\vec{v}_o \begin{bmatrix} V_{on} = V_o \cos\ \alpha \\ V_{og} = V_o \sin\ \alpha \\ V_{oz} = o \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{OA} \begin{bmatrix} x_o = o \\ y_o = h \\ z_o = o \end{bmatrix}$$

$à$ un instant t

$$\vec{a} \begin{bmatrix} a_x = o \\ a_y = o \\ a_z = o \end{bmatrix} \qquad \vec{V} \begin{bmatrix} v_x = v_o \cos\ \alpha \\ v_y = -\ gt + \sin\ \alpha \\ v_z = o \end{bmatrix} \overrightarrow{OM} \begin{bmatrix} x = tv_o \cos\ \alpha \\ y = \frac{1}{2}\ gt + tv_o \sin\alpha + h \\ z_o = o \end{bmatrix}$$

$z = 0$ le mouvement est plan.

2) Donnons l'équation de la trajectoire et la nature du mouvement.

$$\chi = tv_o\ \cos\alpha \Rightarrow t = \frac{x}{v_o\ \cos\alpha}$$

$$y = \frac{-g}{2v_o^2\ \cos\alpha}\ x^2 + \tan\alpha + h$$

3) Montrons que $v_o^2 = \dfrac{gD^2}{(D + h)}$

$x = D \qquad y = 0$

$$\frac{-g}{2v_o^2\ co^2s\ \alpha}\ D^2 + D\tan\alpha + h = 0$$

$\alpha = 45°\ \ \tan\alpha = 1\ \ \ 2\cos^2\ \alpha = 1$

$$\frac{-g}{v_o^2}\ D^2 + D + h = 0 \Rightarrow v_o^2\ \ \frac{gD^2}{(D + h)}$$

4) Calculons l'énergie cinétique initiale

$$E_c(0) = \frac{1}{2}\ mv_0^2$$

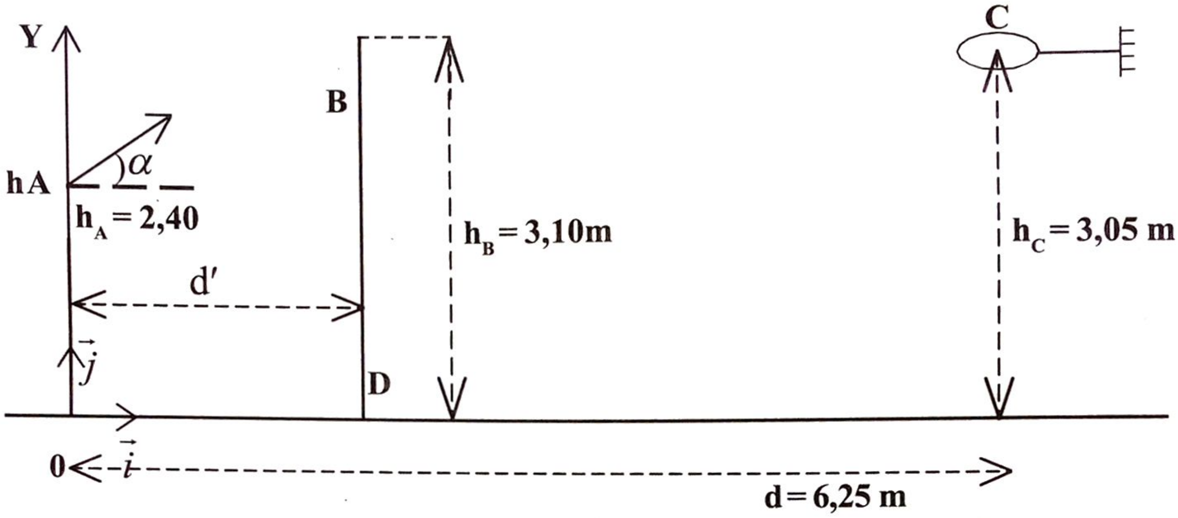
$$E_c(0) = \frac{1}{2}\ m\ \frac{gD^2}{(D+h)} \qquad AN\ E_c(0) = \frac{1}{2}\ x\ \frac{5x18^2}{18+2} \qquad E_c(0) = 40{,}5j$$

Exercice N° 7

On étudie la trajectoire du centre d'inertie d'un ballon de basket-ball lancé dans le cercle du panier de l'équipe adverse par un jouer attaquant.

On ne tiendra pas compte ni de la résistance de l'air, ni de la rotation éventuelle du ballon.

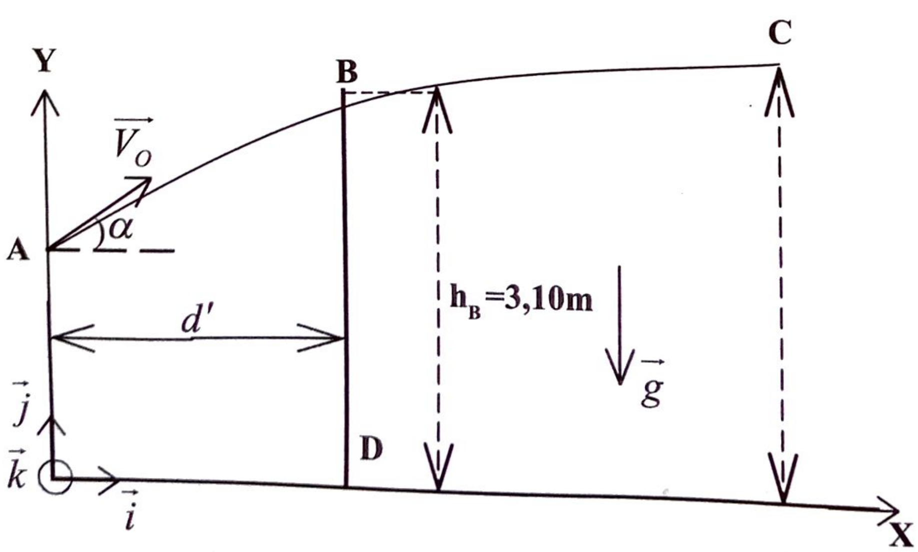
Le lancer est effectuée vers le haut.



Sa vitesse initiale est représentée par un vecteur $\vec{V}$ situé dans un plan vertical $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et faisant un angle α avec l'axe horizontal. Données : $g = 10\ ms^{-2}$; $\alpha = 40°$.

1. Montrer que la trajectoire du ballon est dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Déterminer l'équation de cette trajectoire.
3. Calculer la vitesse initiale V_O du ballon pour que celui-ci passe exactement au centre du cercle, «Panier» de centre C.
4. Un défenseur BD, placé entre l'attaquant et le panneau de basket, saute vérticalement pour intercepter la ballon: l'extrémité de sa main se trouve en B à l'altitude $h_B = 3,10$ m. A quelle distance horizontale maximale d' de l'attaquant doit-il sa trouver pour toucher le ballon du bout des doigts ?

Solution



Système : ballon repère terrestre galiléen.

Bilan des forces $\vec{P}$.

T.C.I $m\vec{g} = m\vec{a}$

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

Montrons que la trajectoire est plane.

$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = g \\ a_z = 0 \end{vmatrix} \quad \vec{V}\begin{vmatrix} Vx = V_o \sin\alpha \\ V_Y = -gt + V_o \sin\alpha \\ V_Z = 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = (V_o \cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_O \sin\alpha)t + h_A \\ z = 0 \end{vmatrix}$$

$z = 0$ la trajectoire est dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Déterminer l'équation de la trajectoire.

$$Y = -\frac{-g}{2V_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x\tan\alpha + h_A$$

3. Calculons la vitesse initiale V_O

$$\frac{-g}{2V_0^2 \cos^2\alpha} \; x_C^2 = x_C \tan\alpha + h_A - h_C$$

$$V_O = \sqrt{\frac{gx_C^2}{2\cos^2\alpha(x_C \tan\alpha + h_A - h_B)}} \qquad AN: V_O = 8{,}56 \; ms^{-1}$$

4. La distance d'.

$$h_B = \frac{-g}{2V_O^2 \cos^2\alpha} d'^2 + d'\tan\alpha + h_A \Rightarrow \frac{-10}{2x(8{,}56)^2 x\cos^2 40} d'^2 + d'\tan 40 - 07 = 0$$

$$-0{,}116\,d'^2 + 0{,}839\,d' - 0{,}7 = 0$$

$$d' \simeq 1{,}97 \text{ m}$$

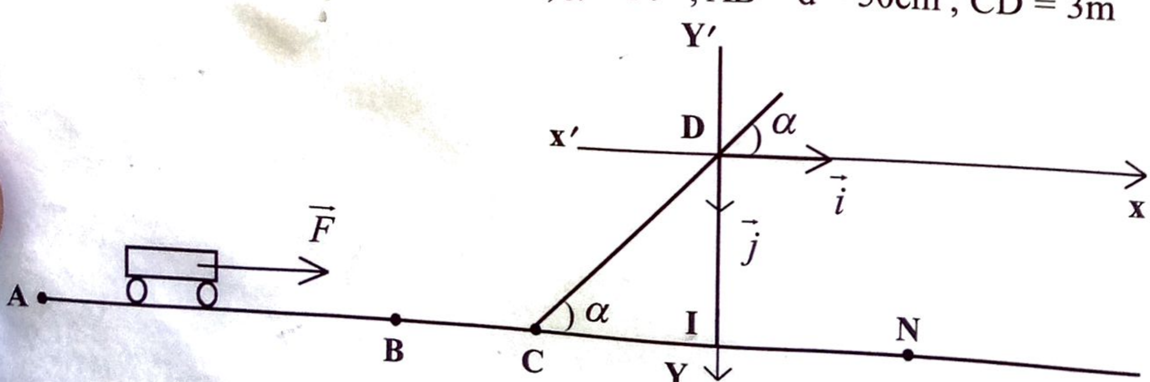
Exercice N° 8

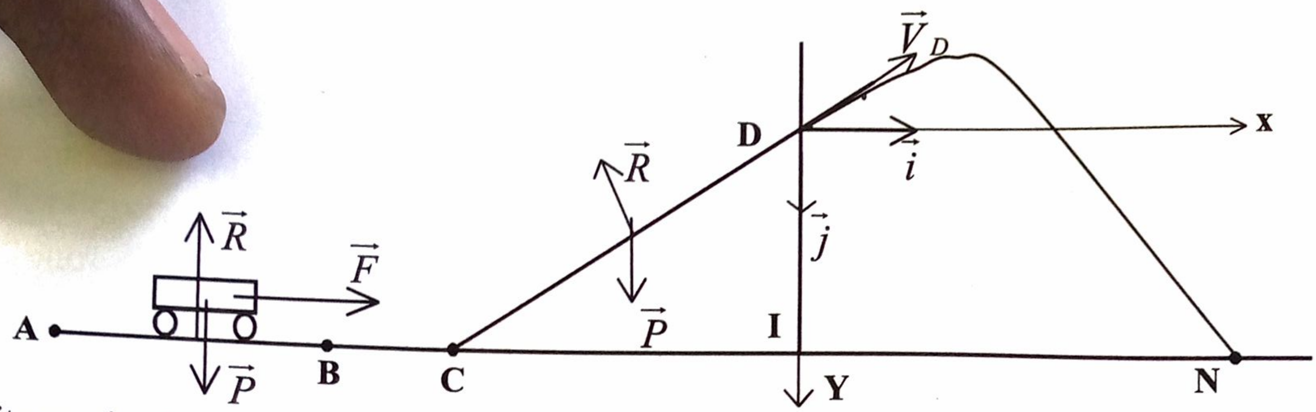
Un chariot de masse m, considéré comme ponctuel, peut glisser sans frottement sur deux rails. Ces rails sont horizontaux entre A et C, puis inclinés d'un angle α par rapport à l'horizontale entre C et D.

Le force $\vec{F}$ s'exerce uniquement sur la longueur d = AB.

1. Déterminer la vitesse du chariot en B.
2. Montrer que la vitesse du chariot en C est égale à celle en B.
3. a. Déterminer la nature du mouvement du chariot entre C et D.
   b. Avec quelle vitesse le chariot arrive-t-il en D.
4. Arrivé en D, le chariot continue sa course dans le vide et tombe au sol au point N.
   a. Etabli l'équation de la trajectoire du mouvement du chariot dans le repère $(D, \vec{i}, \vec{j})$.
   b. Déterminer la hauteur maximale, par rapport au sol, atteinte par le chariot.
   c. A quelle distance de I est tombé le chariot.

Données : m = 10 kg ; g = 10m.s^{-2} ; F = 800N ; α = 30° ; AB = d = 50cm ; CD = 3m





1. Vitesse du chariot en B.

- Système chariot repère terrestre galiléen.
- Bilan des forces $\vec{R}$, $\vec{P}$, $\vec{F}$.

$$\text{T.E.C entre A et B : } \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = F.AB \Rightarrow V_B\sqrt{\frac{2F.AB}{m}}$$

AN : $V_B = 8{,}94\ ms^{-1}$

2. Montrons que $V_C = V_B$

- Bilan forces $\vec{P}$, $\vec{R}$

$$\text{T.E.C : } \frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) = 0 \Rightarrow V_C = V_B$$

3. a) Nature du mouvement entre C et D

T.C.I $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

Projections sur $\overrightarrow{CD}$: - mg sinα = m a $\Rightarrow$ a = g sinα

a = cte < 0 MR. U D.

b) Vitesse en D

$$T.E.C : \frac{1}{2}mV_D^2 - \frac{1}{2}mV_C^2 = -mg\ C\,D\ \sin\alpha$$

$$V_D^2 = -2gCD\sin\alpha + V_C^2 \Rightarrow V_D = \sqrt{V_C^2 - 2gCD\sin\alpha} \qquad V_D = 7{,}07ms^{-1}$$

4. a) Equation de la trajectoire dans $(D, \vec{i}, \vec{j})$.

T.C.I $m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$$t=0 \quad \vec{V}_D \left| \begin{array}{l} V_D\cos\alpha \\ -V_D\sin\alpha \end{array} \right. \qquad D \left| \begin{array}{l} x_D = 0 \\ y_D = 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = +g \end{array} \right. \qquad \vec{V} \left| \begin{array}{l} V_x = V_D\cos\alpha \\ V_y = gt - V_D\sin\alpha \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x = (V_D\cos\alpha)t \\ y = \frac{+1}{2}gt^2 - (V_D\sin\alpha)t \end{array} \right.$$

$$y = \frac{g}{2V_D^2\cos^2\alpha}x^2 - x\tan\alpha \qquad y = 0,133x^2 - 0,58x$$

b) La hauteur maximale atteinte.

$$V_y = 0 \Rightarrow t = \frac{V_D\sin\alpha}{g} \Rightarrow y_{max} = \frac{1}{2}g\left(\frac{V_D\sin\alpha}{g}\right)^2 - V_D\sin\alpha\left(V_D\frac{\sin\alpha}{g}\right)$$

$$h_{max} = ID + |y_{max}| \qquad h_{max} = -V_D^2\frac{\sin^2\alpha}{2g}$$

$$h_{max} = ID + \left|-V_D^2\frac{\sin^2\alpha}{2g}\right| = ID + \frac{V_D^2\sin^2\alpha}{2g} \qquad ID = CD\sin\alpha = 1,5$$

$$h_{max} = 2,125 \text{ m}$$

c) La distance IN.

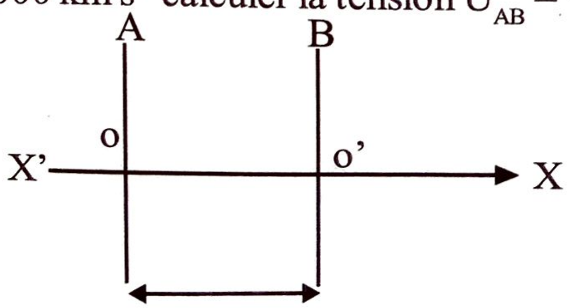
$y = ID \Rightarrow y = 1,5 \Leftrightarrow 0,133x^2 - 0,58x = 1,5$

$\Rightarrow 0,133x^2 - 0,58x - 1,5 = 0 \qquad \Rightarrow IN = 6,18$ m

Exercice 9

Un proton H+ est animé d'une vitesse vo = 1500 km s^{-1} il pénètre entre deux électrodes A et B sous tension et distants de 10cm, parallèlement aux lignes de champs électrostatique. Il décrit un mouvement rectiligne uniforme suivant O o'. On admettra que le champ est uniforme entre les deux plaques et que le poids du proton est négligeable.

1) Le proton arrive en o avec la vitesse de 2000 km s^{-1} calculer la tension $U_{AB} = V_A - V_B$



2) Quelle est la durée du trajet O o'.

Données $m_p = 1,67\ 10^{-27}$ kg.

Solution

1) Calculons la tension $U_{AB} = V_A - V_B$

Système : proton H^+

Repère terrestre supposé galiléen

Bilan des Forces ; $\vec{F}_e$

T.E.C. entre O et o'

$$\frac{1}{2} mv_{0'}^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \omega(\vec{F}_e) = q\vec{E}\ \overrightarrow{AB} = qU_{AB} = eU_{AB}$$

$$U_{AB} = \frac{(v_o^2 - v_o^2)}{2\,e}\, m \quad \text{AN} \quad U_{AB}\ 1{,}67\ 10^{-27}\ \frac{(2.10^6)^2 - (1{,}5\ 10^6)^2}{2 \times 1{,}6\ 10^{-19}}$$

U_{AB} 913 V

2) la durée du trajet O o'

T.C.I. $q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} \Rightarrow \frac{q}{m}\vec{E}$

$$\vec{a} = \frac{qU_{AB}}{m\,d}\ \vec{i}$$

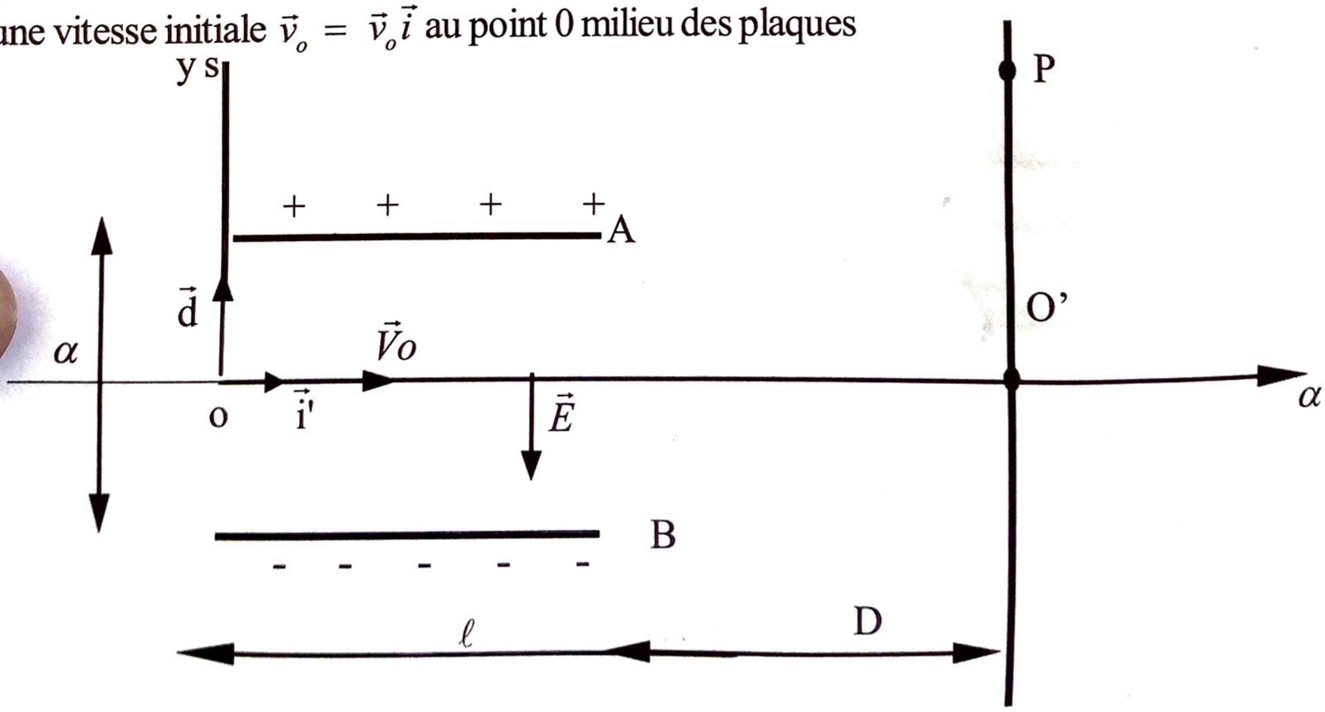
$$v = at + v_o \Rightarrow t = \frac{v - v_o}{a} \quad t = \frac{v - v_o}{qU_{AB}}\ md$$

$$\text{An : } t = \frac{2 10^6 - 1{,}5 10^6}{1{,}6 10^{-19} \times 913}\ 1{,}67 10^{-27} \times 10^{-1}$$

$t = 5{,}7\ 10^{-8}$ s

Exercice 10

On maintient entre les plaques A et B une différence de potentiel U. La longueur de ces plaques est l et leur distance est d. un électron est injecté dans une direction perpendiculaire au champ avec une vitesse initiale $\vec{v}_o = \vec{v}_o\vec{i}$ au point 0 milieu des plaques



On néglige le poids de l'électron.

1) Calculer le champ électrostatique (supposé uniforme) entre les deux plaques.

2) L'électron sort de la région où règne le champ électrostatique en un point S. Calculer les cordonnées de S et celle du vecteur vitesse $\vec{v}_s$ en ce point. En déduire v_S. .

3) Déterminer la déviation électrique

4) On place un écran à la distance D de l'etremité des plaques. Quelle est la position du point d'impact de l'électron sur l'écran?

Données $l = 2cm$ $d = 1cm$ $D = 50cm$ $U = 100v$

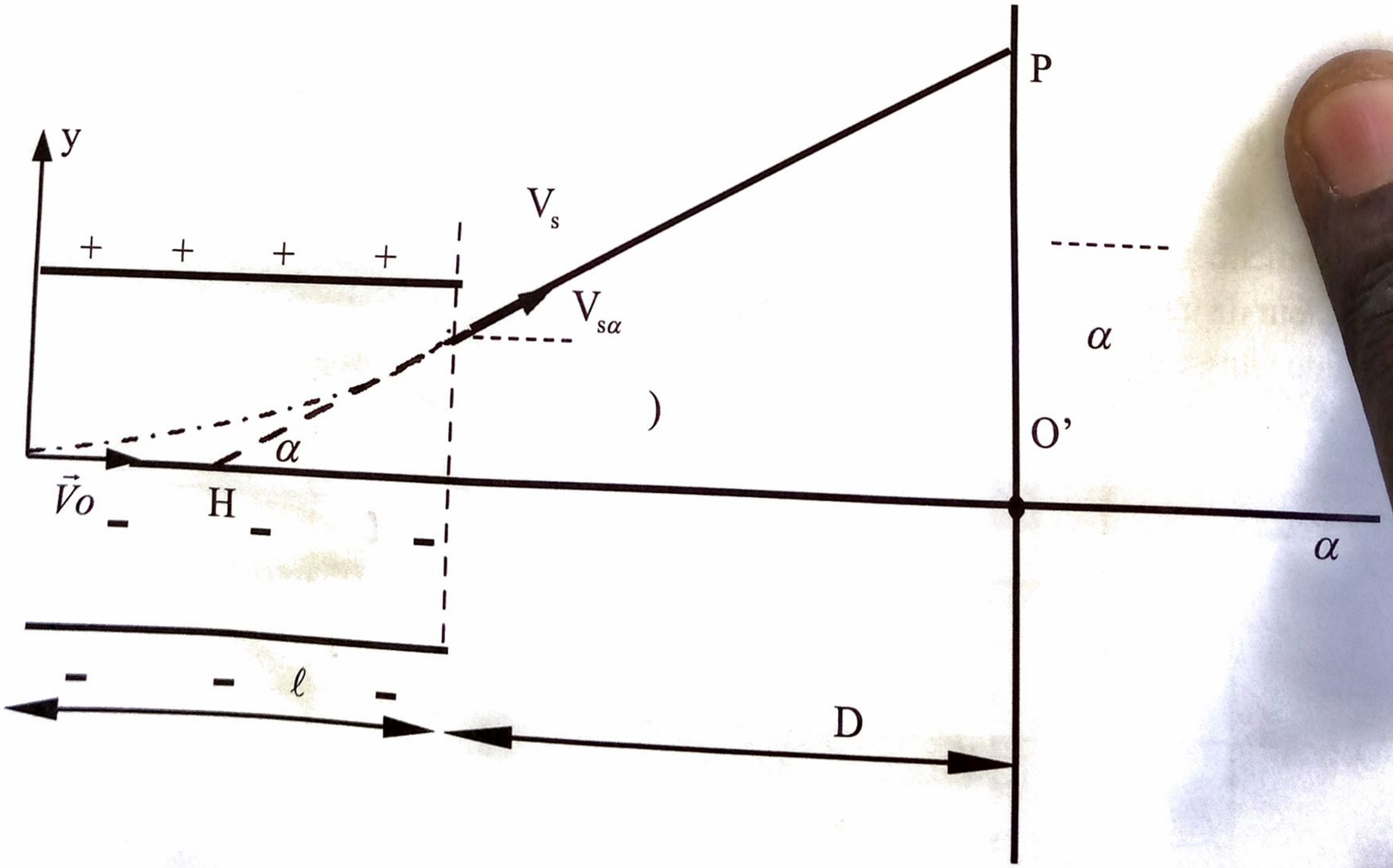
$v_o = 10^7$ m/s $m = 9{,}1 10^{-31}$ kg $e = - 1{,}6\ 10^{-19}$ c

Solution

1) Calculons le champ électrostatique.

$$E = \frac{u}{d} \quad AN \quad E = \frac{100}{10^2} \Rightarrow E = 10^4 v/m$$

2) Calculons les coordonnées de S et du vecteur $\vec{v}_s$



Repère utilisé : repère terrestre supposé galiléen.

Système étudié : l'électron

Bilan des forces : forces électrostatique que $\vec{F}_e$

$$\text{T.C.I. } \vec{F}_e = m\vec{a} \Rightarrow e\vec{E} \Rightarrow m\vec{a} \Rightarrow \vec{a}\ \frac{-e}{m}\vec{E}$$

$$\vec{a}\begin{bmatrix} a_x = o \\ a_y = \dfrac{e}{m}E \end{bmatrix} \qquad \vec{v}\begin{bmatrix} v_x = v_o \\ v_y = \dfrac{e}{m}Et \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{OM}\begin{bmatrix} x = tv_o\cos\ \alpha \\ y = \dfrac{eE}{2m}t^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{à la sortie en S } x_s = 1 \Rightarrow ts = \frac{l}{v_o}$$

$$\overrightarrow{OS}\begin{bmatrix} x_s = 1 \\ y_s = \dfrac{eEt^2}{2mv_o^2} \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{OS}\begin{bmatrix} x_s = 2 10^{-2} \\ y_s = \dfrac{1{,}6 10^{-10} \text{ x } 10^4\ (2{,}10^{-2})^2}{2x\ 9 10^{-31} \text{ x } (10^7)^2} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{Vs}\begin{bmatrix} v_{sx} = v_o \\ v_{sy} = \dfrac{eEl}{mv_o} \end{bmatrix} \overrightarrow{OS}\ \overrightarrow{vs}\begin{bmatrix} v_{sx} = 10^{-7} \\ v_{sy} = \dfrac{1{,}6 10^{-19} \text{ x } 10^4\ 2{,}10^{-2}}{9{,}1 10^{-31} \text{ x } 10^7} \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}\begin{bmatrix} v_{sx} = 10^7 \text{ ms}^{-1} \\ v_{sy} = 3{,}5\ 10^6 \text{ ms}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}\begin{bmatrix} v_{sx} = 10^7 \\ v_{sy} = 3{,}5\ 10^6 \end{bmatrix} \qquad v_s\ \sqrt{v_{s_x}^2 + v_{s_y}^2} \qquad v_s = 1{,}06\ 10^7 \text{ ms}^{-1}$$

3) La déviation électrique α

$$\tan\ \alpha = \frac{v_{sy}}{v_{sx}} = \frac{eEl}{mv_o^2} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{eEl}{mv_o^2}\right)$$

$$AN\ \alpha = \tan^{-1} = \left(\frac{1{,}6 10^{-19} \text{ x } (10^4 \text{ x } 2{,}10^{-2})}{9{,}1 10^{-31} \text{ x } 10^7}\right) \qquad \alpha = 19{,}4°$$

La position du point d'impact

$$AN\ \alpha = \frac{O'P}{H\ O'} = \frac{O'P}{\dfrac{l}{2} + D} \Rightarrow O'P = \left(\frac{l}{2} + D\right)\tan\ \alpha$$

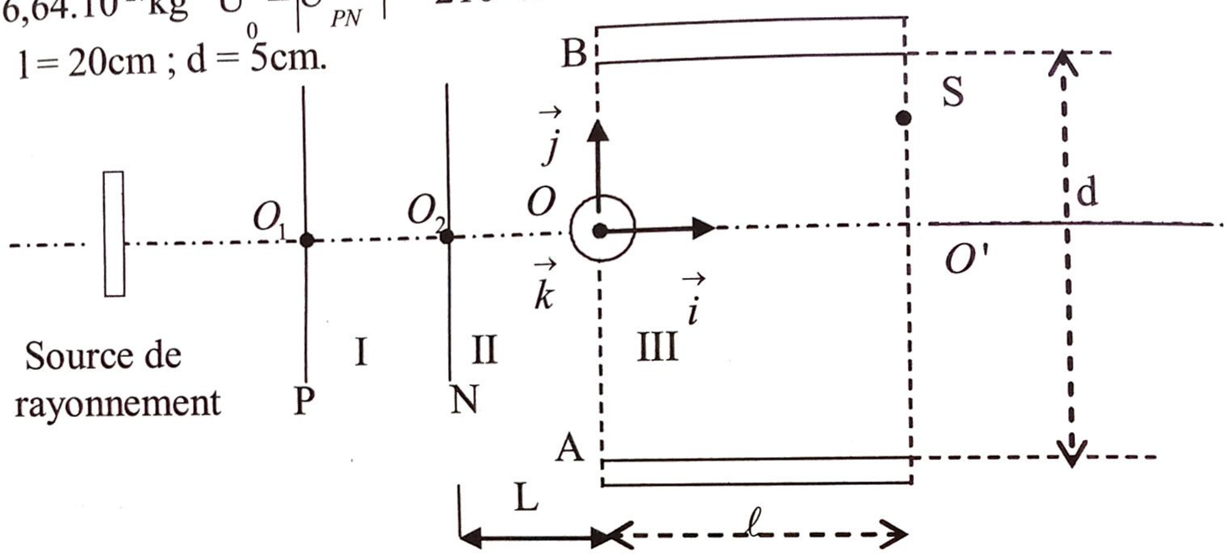
$$O'P = \left(2\frac{10^{-2}}{2} + 0{,}5\right)\tan\ \alpha \qquad O'P = 0{,}179 \text{ m}$$

Exercice N° 11

Des particules α (H_e^{2+}) de masse m sont émises avec une vitesse négligeable à travers l'ouverture O_1 d'une plaque métallique P. Elles traversent successivement trois régions I, II, III d'une enceinte où l'on a fait du vide. On négligera l'action du poids sur leur mouvement.

Données $m = 6{,}64.10^{-27}$kg $U_0 = |U_{PN}| = 210^3$V.

$e = 1{,}610^{-19}$C ; 1 = 20cm ; d = 5cm.



1. La région I est limitée par deux plaques P et N planes et parallèles entre lesquelles existe une tension $U_{PN} = V_P - V_N$.

On veut qu'au point O_2 les particules aient une vitesse $\vec{V}_0$ dirigée selon $(O_2O_1{}_2)$.

  a) Précir et justifier le signe de U_{PN}.

  b) Etablir l'expression littérale de V_0 en fonction de e, m, U_0. Calculer sa valeur numérique.

2. Dans la région II, le champ électrique est nul. Quelle est la nature du mouvement des particules ?

3. Après avoir franchi, la région II de longueur $O_2O_1 = L = 50$ cm.Ces particules pénètrent dans la région III. Entre les armatures planes A et B parallèles distantes de d et de longueur l existe une tension U, tel que $U = |U_{AB}|$. Les particules sortent de cette région au point S tel que O'S = 5mm.

  a) Déterminer le sens du vecteur champ électrique uniforme $\vec{E}$ dans la région III. En déduire le signe de U_{AB}.

  b) Etablir dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k},)$ l'équation de la trajectoire des particules (faire apparaître dans l'équation U et U_0).

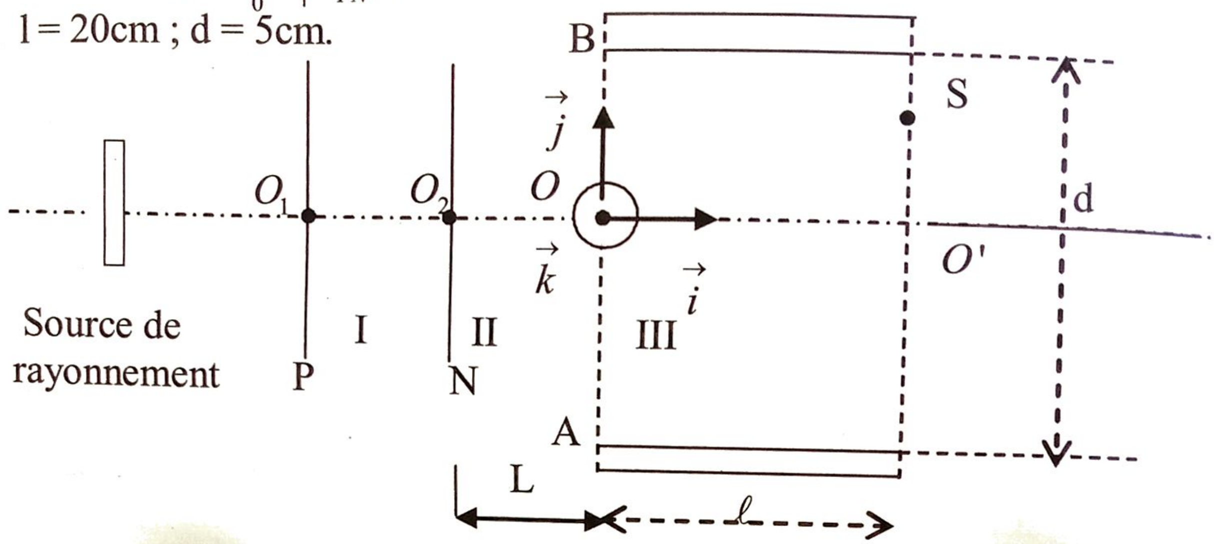
  c) Quelle doit être la valeur de U_{AB} ?

Exercice N° 11

Des particules α (H_e^{2+}) de masse m sont émises avec une vitesse négligeable à travers l'ouverture O_1 d'une plaque métallique P. Elles traversent successivement trois régions I, II, III d'une enceinte où l'on a fait du vide. On négligera l'action du poids sur leur mouvement.

Données $m = 6{,}64.10^{-27}$kg $U_0 = |U_{PN}| = 210^3$V.

$e = 1{,}610^{-19}$C ; $l = 20$cm ; $d = 5$cm.



1. La région I est limitée par deux plaques P et N planes et parallèles entre lesquelles existe une tension $U_{PN} = V_P - V_N$.

On veut qu'au point O_2 les particules aient une vitesse $\vec{V}_0$ dirigée selon ($O_2O_{1_2}$).

   a) Précir et justifier le signe de U_{PN}.

   b) Etablir l'expression littérale de V_0 en fonction de e, m, U_0. Calculer sa valeur numérique.

2. Dans la région II, le champ électrique est nul. Quelle est la nature du mouvement des particules ?

3. Après avoir franchi, la région II de longueur $O_2O_1 = L = 50$ cm.Ces particules pénètrent dans la région III. Entre les armatures planes A et B parallèles distantes de d et de longueur l existe une tension U, tel que $U = |U_{AB}|$. Les particules sortent de cette région au point S tel que O'S = 5mm.

   a) Déterminer le sens du vecteur champ électrique uniforme $\vec{E}$ dans la région III. En déduire le signe de U_{AB}.

   b) Etablir dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k},)$ l'équation de la trajectoire des particules (faire apparaître dans l'équation U et U_0).

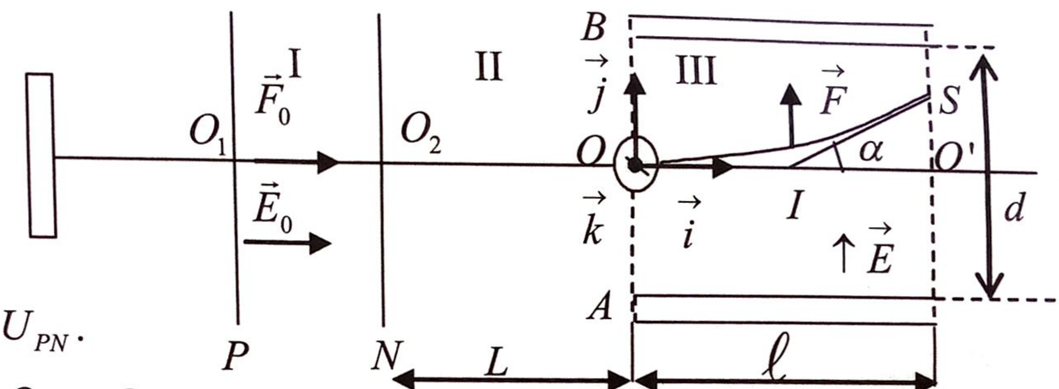
   c) Quelle doit être la valeur de U_{AB} ?

d) Quelle est la durée du trajet des particules entre O_2 et S ?

e) Déterminer la déviation électrostatique.

Solution

- Repère utilisé : repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k},)$ supposé galiléen.
- Système : particule α.
- Bilan des forces : $\vec{F_0} = q\vec{E_0}$ *entre P et N* ; $\vec{F} = q\vec{E}$ *entre A et B*



1. a) Précisons le signe de U_{PN}.

Appliquons le T.E.C entre O_2 *et* O_1

$$\frac{1}{2}mV_{02}^{\ 2} - \frac{1}{2}mV_{01}^{\ 2} = W(\vec{F_0}) = q\vec{E_0}\overrightarrow{O_1O_2} = q(V_P - V_N)$$

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = 2eU_{PN} > 0 \Rightarrow U_{PN} > 0$$

b) Expression de V_0 en fonction de e, m, U_0 et sa valeur.

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = 2eU_{PN} > 0 \quad \Rightarrow \quad V_0 = \sqrt{\frac{4eU_0}{m}} \qquad V_0 = 4,4 10^5 ms^{-1}$$

2. $\sum\vec{F} = \vec{O}$: principe de l'inertie : les particules ont un mouvement rectiligneet uniforme.

3. a) Déterminons le sens du vecteur champ électrique et le signe de U_{AB}.

$\vec{F} = q\vec{E}$, trajectoire dirigée vers B, $\vec{E}$ perpendiculaire aux plaques, $q > 0$ donc

$\vec{F}$ *et* $\vec{E}$ ont même sens. Sens de $\vec{E}$: dirigée de A vers B.

$\vec{E}$ dans le sens des potentiels décroissants $\Rightarrow U_{AB} > 0$

b) Equation de la trajectoire.

c) T.C.I $\vec{F}=q\vec{E}=m\vec{a} \Rightarrow \vec{a}=\frac{q}{m}\vec{E}$ $t=0$ $O\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=0 \\ z_0=0 \end{cases}$

$$\vec{V}_0\begin{cases} V_{0x}=V_0 \\ V_{0y}=0 \\ V_{0z}=0 \end{cases} \quad \vec{a}\begin{cases} a_x=0 \\ a_y=\frac{q}{m}E \\ a_z=0 \end{cases} \quad \vec{V}\begin{cases} V_x=V_0 \\ V_y=\frac{q}{m}Et \\ V_z=0 \end{cases} \quad \vec{OM}\begin{cases} x=V_0 t \\ y=\frac{qE}{2m}t^2 \\ z=0 \end{cases}$$

$$y=\frac{qE}{2mV_0^2}x^2 \qquad y=\frac{U}{4dU_0}x^2$$

d) Valeur de U.

$$U=\frac{4y_s d}{l^2}U_0 \quad ; \quad U=50V$$

e) La durée du trajet O_2S $\quad t=\frac{L+l}{V_0}$ $\quad t=1{,}6.10^{-6}s$

f) La déviation électrique.

$$\tan\alpha=\frac{O'S}{l/2}=\frac{2O'S}{l} \quad \alpha=2{,}86°$$

Exercice N° 12

Entre deux plaques P et P' d'un condensateur plan, des électrons de charges $q=-e$ et de masse m pénètrent en O avec la vitesse initiale $\vec{V}_0$. Le vecteur $\vec{V}_0$ est dans le plan (XOY) et fait un angle α avec l'axe (Ox). Le champ électrique $\vec{E}$ est créé par une tension constante $U_{PP}=U>0$.

1. a) Quelles sont les caractéristiques du vecteur champ électrique $\vec{E}$?
   b) Ecrire la relation entre le vecteur accélération et le vecteur champ électrique $\vec{E}$.

2. Exprimer en fonction de U, V_0, α, e,d et du temps t les coordonnées des différents vecteurs suivants :
   a) accélération ,
   b) vitesse $\vec{V}$,
   c) position $\vec{OM}$.

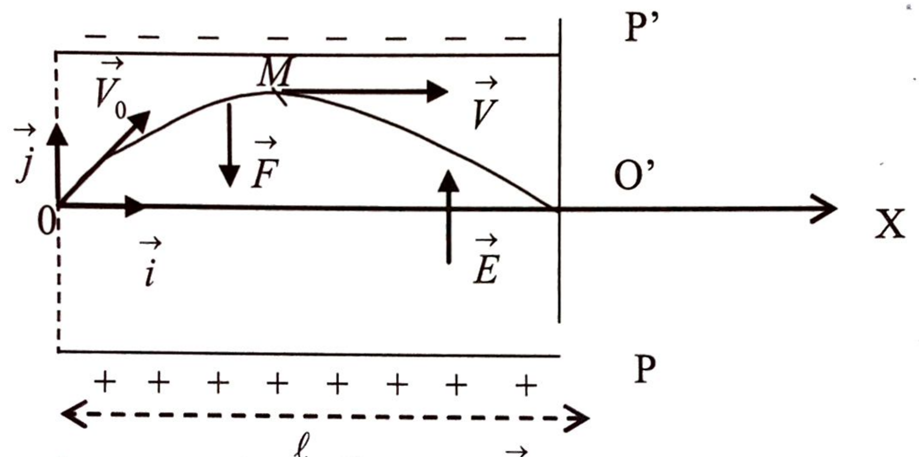
3. Déterminer l'équation de la trajectoire d'un électron.

4. Calculer les coordonnées du point M où le vecteur vitesse devient parallèle à l'axe(OX). En déduire la relation liant V_0, α,U, e et m pour que l'électron ne soit pas capté par la plaque supérieure.

5. On veut que l'électron ressorte en O'.
   a) Déterminer la tension U à appliquer entre les plaques en fonction de α, l, d, V_0, m et e.
   b) Montrer que le vecteur vitesse en O'a la même valeur qu'en O.
   c) Calculer la valeur de U.

Données $V_0 = 8\,10^6 ms^{-1}$; $\alpha = 30°$, d = 7cm ; l= 20cm e =1,6$10^{-19}$C ; m= 9,1$10^{-31}kg$

Solution



1. a) Caractéristiques du vecteur champ électrique. $\vec{E}$

$U_{PP'} > 0 \Rightarrow V_P > V_{P'}$ (P chargée positivement, P' négativement)

$\vec{E}$
- Direction : verticale
- Sens : de la plaque P vers la plaque P'
- Intensité : $E = \dfrac{U_{PP'}}{d} = \dfrac{U}{d}$

b) Relation entre $\vec{a}$ et $\vec{E}$.

T.C.I $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$

$q\vec{E} = m\vec{a}$ $\qquad\qquad$ $-e\vec{E} = m\vec{a}$

$\vec{a} = \dfrac{-e}{m}\vec{E}$ ($\vec{a}$ et $\vec{E}$ même direction, sens contraires)

2. Les coordonnées des vecteurs.

A l'instant t = 0 l'électron se trouve en 0(x_0=0, y_0=0)

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l}\ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = \dfrac{-eE}{m} = \dfrac{-eU}{d}\end{array}\right. \qquad \vec{V}\left|\begin{array}{l}\dot{x} = V_o \cos\alpha \\ \dot{y} = \dfrac{-eU}{dm}t + V_o \sin\alpha\end{array}\right. \qquad \overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l}x = v_o(\cos\alpha)t \\ y = \dfrac{-eU}{2dm}t^2 + V_o(\sin\alpha)t\end{array}\right.$$

3. Equation de la trajectoire.

$$x = V_0(\cos\alpha)t \Rightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha}$$

$$y = -\frac{eU}{2md\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$$

4. La trajectoire étant une parabole, la vitesse est parallèle à l'axe Ox à son sommet.

En tout point $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$

Au point M V = 0

$$y = 0 \Leftrightarrow \frac{-eE}{m}t_M + V_0\sin\alpha = 0 \Rightarrow t_M = \frac{mV_o\sin\alpha}{eE} = \frac{mdV_o\sin\alpha}{eU}$$

$$X_M = \frac{mV_0^2\sin 2\alpha}{2eE} \qquad y_M = \frac{mV_0^2\sin^2\alpha}{2eE}$$

$$M\left(\frac{dmV_0^2\sin 2\alpha}{2eU} ; \frac{dmV_0^2\sin^2\alpha}{2eU}\right)$$

- L'électron ne sera pas capté par la plaque P'si $y_M < \frac{d}{2}$

$$\frac{mV_0^2\sin^2\alpha}{2eE} < \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{mV_0^2\sin^2\alpha}{2e\frac{U}{d}} < \frac{d}{2} \Rightarrow mV_0^2\sin^2\alpha < eU$$

5. a) Déterminons la tension U pour que l'électron ressorte en O'.

Au point O'x = l ; y = 0

$$\frac{-eU}{2md\cos^2\alpha}l^2 + l\tan\alpha = 0 \qquad U = \frac{mdV_0^2\sin 2\alpha}{el}$$

b) Vitesse en O'.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre O et O'.

$$\Delta E_c = \Sigma W(\vec{F}_{ext})$$

$$\frac{1}{2}mV_{0'}^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = W(\vec{F}) = 0$$

($\vec{F}$ constamment perpendiculaire au déplacement) $\Rightarrow V_{0'} = V_0$

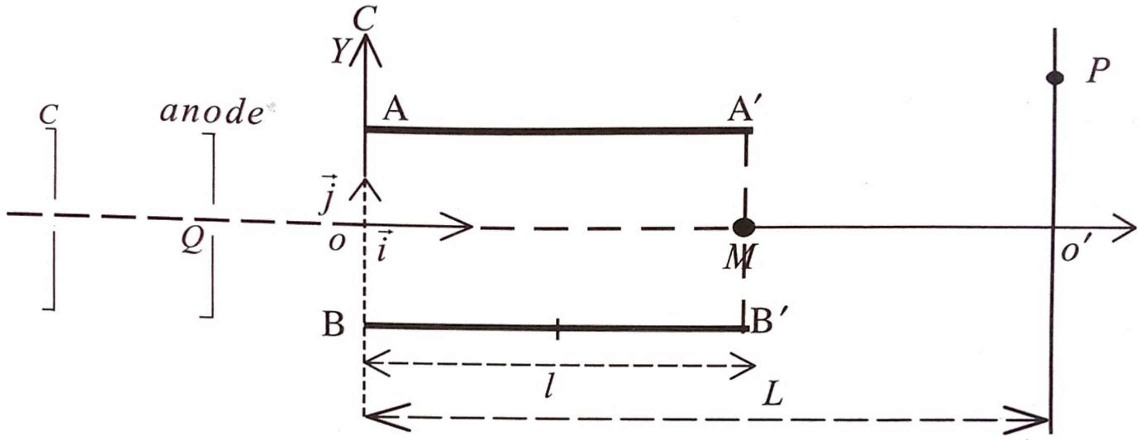
c) Calcul de U.

$$U \approx 110V$$

Exercice N° 13

Des électrons sont émis par une cathode C avec une vitesse initiale négligeable. Ils sont alors accélérés par une différence de potentiel $U_o = V_A - V_C$ et arrivent en Q avec une vitesse $\vec{V_b}$ parallèle à (OX). Le poids des électrons a un effet négligeable.

Données: $e = 1,6.10^{-19}$ C et $m = 0,91.10^{-30}\,kg$



1. Déterminer l'expression de la valeur de la vitesse $\vec{V_0}$ des électrons en Q, en fonction de u_o, m et e.

2. Les électrons venant de Q pénètrent en O avec la vitesse $\vec{V_o}$, à l'intérieur d'un condensateur plan, ce dernier est constitué par deux armatures planes AA' et BB', parallèles à (OX) et perpendiculaires à (OY), de longueur ℓ et séparées par une distance d. On applique, entre les plaques AA' et BB' une différence de potentiel u positive et l'on suppose que les effets de bord sont négligeables.

a) Soit $\vec{F}$ la force électrique qui s'exerce sur un électron à l'intérieur du condensateur. Dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, exprimer ce vecteur un fonction de u, d et e.

b) x et y étant les coordonnées d'un électron dans le repère $(O,\vec{i}, \vec{j})$, déterminer l'expression de y en fonction de U, e, d, x, m et V_0 pour $o < x < \ell$

c) Etablir l'expression de y en fonction de U, U_o d et x

d) Etablir la relation d'inegalité entre U, U_o d et l pour que le faisceau d'électrons sorte du système de déviation sans toucher la plaques AA'.

e) Calculer la déviation angulaire des électrons à la sortie du condensateur $(x = \ell)$

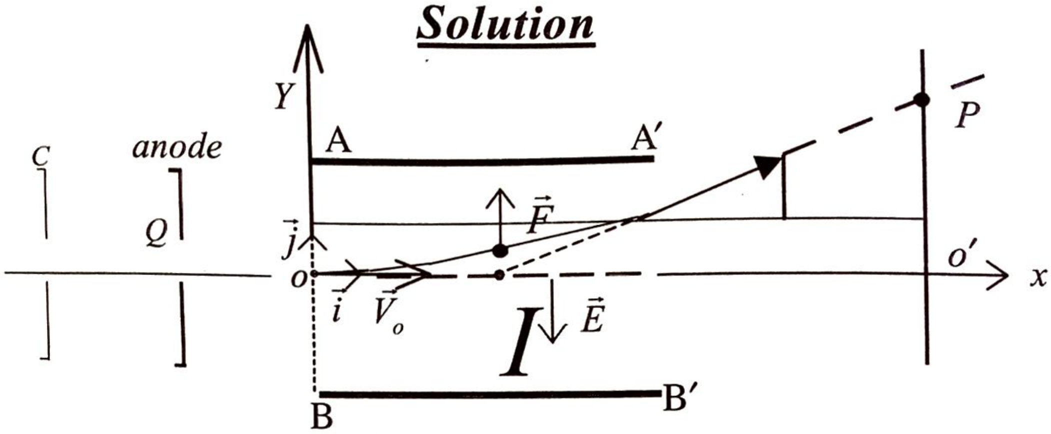
Données: $U_o = 500V$, $U = 100V$, $l = 15$ cm et $d = 10$ cm.

3. Le faisceau d'électrons donne un spot P sur un écran fluorescient $\underline{F}$ placé perpendiculairement à (ox), à la distance L de O.

a) Déterminer la déviation D = O'P du faisceau en fonction de U, U_o, d, l et L.

b) Calculer D avec L = 40 cm.

Solution



1. Expression de la valeur de $\vec{V_o}$ au point Q en fonction de U_o, m et e
   - Système: électron
   - Repère terrestre supposé galiléen
   - Force s'exerçant sur l'électron $\vec{F} = -e\vec{E}$

   Appliquons le T.E.C entre C et Q.

$$\Delta E_C = W(\vec{F}) = \frac{1}{2}mV_o^2 = +eU_o \Rightarrow V_o^2 = +\frac{2eU_o}{m} \Rightarrow V_o = \sqrt{\frac{+2eU_o}{m}}$$

2. a) Exprimons $\vec{F}$ en fonction de U, d et e.

$$\vec{F} = -e\vec{E} \text{ projection sur } (O,\vec{i},\vec{j}) \quad \vec{F}\left|\begin{array}{l} F_x = o \\ F_y = eE = \dfrac{eU}{d} \end{array}\right.$$

$$\vec{F} = \frac{eU}{d}\vec{j}$$

b) Equation de la trajectoire.

T. C.I $\quad \vec{F} = m\vec{a} = ma\vec{j} = \frac{eU}{d}\vec{j} \Rightarrow a = \frac{eU}{md}$

$$\vec{V}\left|\begin{array}{l} V_x = V_o \\ V_y = \dfrac{eU}{md}t \end{array}\right. \qquad \overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} x = Vot \\ y = \dfrac{eU}{2md}t^2 \end{array}\right. \qquad x = vot \Rightarrow t = \frac{x}{y_o}$$

$$y = \frac{eU}{2mdV_o^2}x^2 \quad (2)$$

c) y en fonction de U, U_o d, et x.

Remplaçons V_o^2 par $\frac{2eU_o}{m}$ dans (2)

$$y = \frac{U}{4dU_o}x^2$$

d) Relation d'inégalité entre U, U_o, d et ℓ pour que le faisceau d'électrons sorte sans toucher AA'.

Pour x = ℓ $y_c < \frac{d}{2}$

$$y_\ell = \frac{U}{4dU_o}\ell^2 < \frac{d}{2} \Rightarrow 2U\ell^2 < 4U_o d^2$$

$$\Rightarrow U\ell^2 < 2U_o d^2$$

e) Calcul de la déviation angulaire soit S le point où les électrons sortent du condensateur

$$X = \ell = V_o t_s \Rightarrow t_s = \frac{\ell}{V_o}$$

$$\vec{V_s} \left| \begin{array}{l} V_{sx} = V_o \\ V_{sy} = \dfrac{eU\ell}{mdv_o} \end{array} \right. \qquad Tan\alpha = \frac{V_{sy}}{V_{sx}} = \frac{eU\ell}{mdv_o^2}$$

$$Tan\alpha = \frac{\ell U}{2dU_o} \qquad \text{AN.} \qquad Tan\alpha = \frac{15\times100}{2\times10\times500} = 0,15$$

$$\Rightarrow \alpha = 8,53^\circ$$

3. a) Détermination de $D = O'P$

$$Tan\alpha = \frac{O'P}{IO'} \qquad IO' = L - \frac{\ell}{2}$$

$$O'P = (L - \frac{\ell}{2})Tan\alpha$$

$$O'P = (\frac{2L-\ell}{2})\frac{\ell U}{2dU_o} = \frac{(2L-\ell)\ell U}{4dU_o}$$

b) Calcul de D avec L = 40 cm.

$$D = \frac{(80-15)\times15\times100}{4\times10\times500} = 4,875cm$$

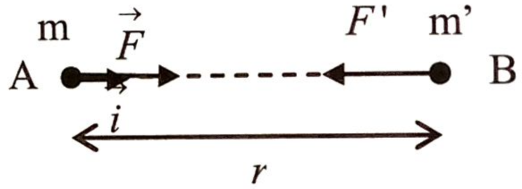
Chapitre 4

INTERACTION GRAVITATION

RAPPEL DU COURS

I LOI D'ATTRACTION UNIVERSELLE OU LOI DE NEWTON :

$$\vec{F} = -\vec{F'} = -\mathcal{G}\frac{mm'}{r^2}\vec{i} \Rightarrow F = F' = \mathcal{G}\frac{mm'}{r^2}$$



$\mathcal{G}$: constante de gravitation universelle

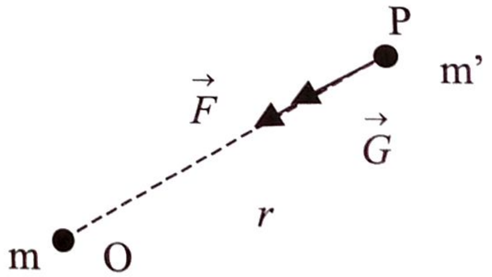
$\mathcal{G} = 6{,}67 10^{-11}$ U.S.I

II CHAMP GRAVITATIONNELLE CRÉÉ PAR UNE MASSE PONCTUELLE M :

Au point P $\vec{F} = m\vec{G}$

$\vec{F}$: force de gravitation

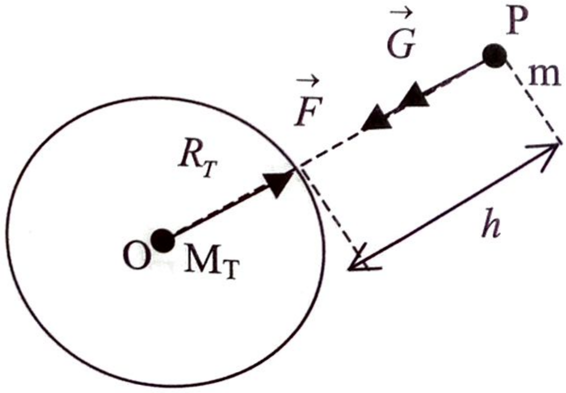
$\vec{G}$: vecteur champ de gravitation



$$F = m'G = \mathcal{G}\frac{m'm}{r^2} \Rightarrow G = \mathcal{G}\frac{m}{r^2}$$

III CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

- A l'altitude h $\quad G = \mathcal{G}\dfrac{M_T}{(R_T+h)^2}$



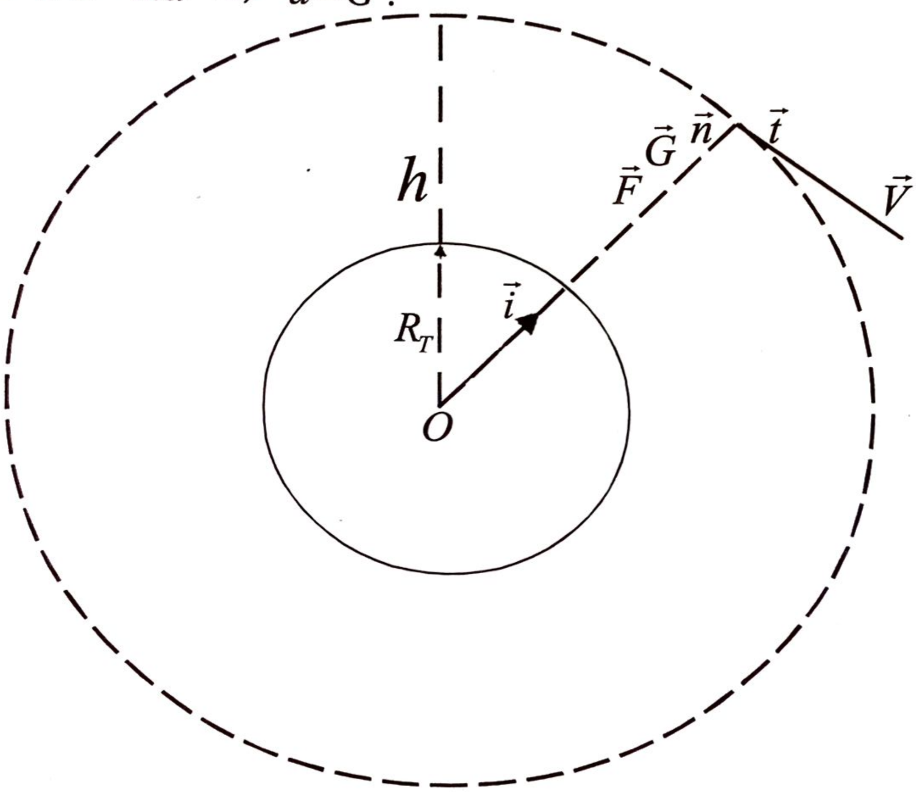
- A la surface (altitude 0) $\quad G_0 = \mathcal{G}\dfrac{M_T}{R_T^2}$

D'où $G = G_0\dfrac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$

IV MOUVEMENT DES SATELLITES

1. Accélération du satellite.
   - Repère considéré : repère géocentrique supposé galiléen.
   - Système étudié : satellite.
   - Bilan des forces : force de gravitation $\vec{F}$.

T.C.I $\quad \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{G} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{G}$.



b) Mouvement circulaire uniforme.

Projection de $\vec{a} = \vec{G}$ dans la base de frenet.

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_n = G \\ a_t = 0 \end{array} \right. \quad a_t = \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow V = cte$$ le mouvement du satellite est circulaire uniforme.

c) Vitesse du satellite.

$$a_n = G \qquad \frac{V^2}{R_T + h} = G_0 \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} \Rightarrow \mathrm{V} = \mathrm{R}_T \sqrt{\frac{\mathrm{G}_0}{\mathrm{R}_\mathrm{T} + h}}$$

d) Période de révolution : T.

T =

$$V.T = 2\pi(R_T + h)$$

$$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{V} = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R_T +_0 h)^3}{G}}$$

e) Troisième loi de Kepler.

En posant $r = R_T + h. \Rightarrow \dfrac{T^2}{r^3} = cte$ (3^{éme} loi de Kepler)

Exercices

Exercice N° 1

La terre est assimilée à une sphère de rayon R dont la répartition de masse est supposée à symétrie sphérique.
On désigne par g_0 l'intensité du champ de gravitation au niveau du sol, par M la masse de la terre et $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle.
1. Etablir l'expression de l'intensité du champ créé par la terre à l'altitude z au – dessus du sol terrestre en faisant apparaître g_0.
2. Dans le repère géocentrique, supposé galiléen, un satellite de la terre de masse m décrit une orbite circulaire à une altitude z.
   a) Etablir l'expression de la de la vitesse V de ce satellite en fonction de g, R et z.
   b) Etablir l'expression de sa période révolution T en fonction de g_0, R et Z.
   c) Calculer cette période à l'altitude z = 150km et à l'altitude z = 400km. Conclure.
3. Déterminer la force gravitationnelle entre la lune et la Terre ; sachant que la masse de la lune est $m_L = \dfrac{M}{8}$.

Données : R = 6400km ; $g_0 = 9{,}8 ms^{-2}$; $M = 6.10^{24} kg$;
$\mathcal{G} = 6{,}67.10^{-11}$USI
Distance entre le centre de la terre et le centre de la lune est égale à $3{,}8.10^5$km

Solution

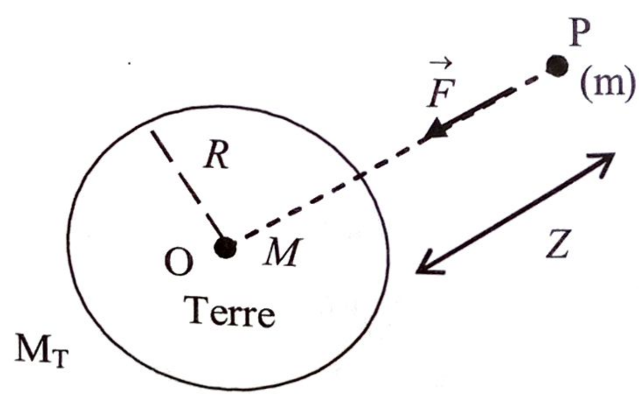
1. Expression de l'intensité du champ de gravitation à l'altitude Z ;

- Système étudié : le point matériel (P).
- Selon la loi de Newton : $F = \mathcal{G}\dfrac{mM}{(R+z)^2}$
- Au point P : F = mg

$$mg = \mathcal{G}\frac{mM}{(R+z)^2} \quad \Rightarrow g = \mathcal{G}\frac{M}{(R+z)^2}$$

A la surface terrestre z = 0 $\Rightarrow g_0 = \mathcal{G}\dfrac{M}{R^2}$

D'où $g = g_0 \dfrac{R^2}{(R+z)^2}$



2. a) Expression de la vitesse $V = f(g, R, z)$

- Système étudié : le satellite.
- Repère utilisé : repère géocentrique supposé galiléen.
- Bilan des forces : la force de gravitation $\vec{F}$.

Appliquons le T.C.I : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$.

$\vec{F} = m.\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{g} = \vec{a}$

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_n = g \\ a_t = 0 \end{array} \right.$$

$a_t = \dfrac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cte \Rightarrow$ le mouvement est circulaire uniforme.

$$a_n = \frac{v^2}{R+z} \Rightarrow g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2} = \frac{v^2}{R+z} \Rightarrow V = R\sqrt{\frac{g_o}{R+z}}$$

b) Expression de la période $T = f(g_0, R, z)$.

En un tour $d = VT = 2\pi(R+Z) \Rightarrow T = \dfrac{2\pi(R+Z)}{V}$; d'où $T = \dfrac{2\pi}{R}\sqrt{\dfrac{(R+z)^3}{g_o}}$

c) Calcul de T à z = 150km.

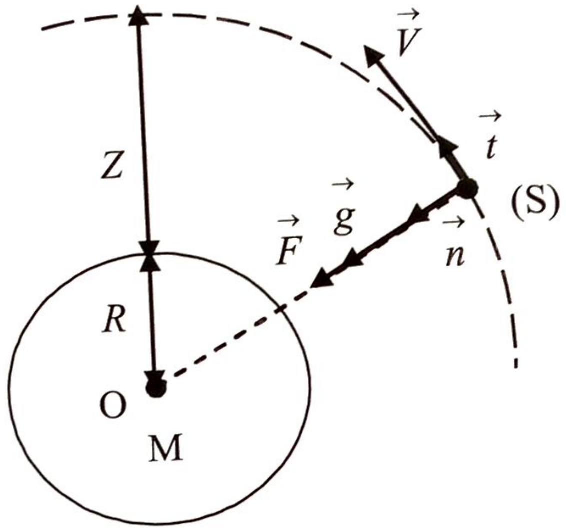
$$T = \frac{2\pi}{64.10^5}\sqrt{\frac{(64.10^5+15.10^4)^3}{9,8}} \qquad T = 5254s$$

T = 1h27min34s.

Calcul de T si z = 400km.

T = 5558s T = 1h32min38s.

Conclusion : La période augmente avec l'altitude.



3. La force de gravitation entre la lune et la Terre.

$$F = \mathcal{G}\,\frac{m_L.M}{r^2} \quad \text{avec } m_L = \frac{M}{8} \quad \text{et } r = 3{,}8.10^5\text{km.}$$

$$F = \mathcal{G}\,\frac{M.M}{8r^2} = \mathcal{G}\,\frac{M^2}{8r^2}$$

$$\text{AN:} \quad F = 6{,}67.10^{-11}\,\frac{(6.10^{24})^2}{8\times(3{,}8.10^8)^2}$$

$$F = 2{,}1.10^{21}\text{N}$$

Exercice N°2

Un satellite artificiel décrit, dans le référentiel géocentrique, une orbite circulaire, de centre O, centre de la terre et de rayon r égale à 20.000km. Sa période de révolution est : T = 7h49mn.

1. a) Montrer que le mouvement est uniforme.

b) Etablir l'expression de T en fonction de r, $\mathcal{G}$ constante de gravitation universelle de M_T masse de la Terre.

c) Quelle serait sa période de révolution, T', s'il gravitait à la distance r' = 10^4 km du centre de la terre ?

2. Dans le repère de Copernic, la planète Nepturne décrit une orbite assimilable à un cercle de rayon r_N dont le centre est celui du soleil. Sa période de révolution, autour du soleil, a pour valeur.

$T_N = 60.200$jours terrestres.

a) Donner la relation entre T_N et r_N : la masse du soleil sera notée M_S.

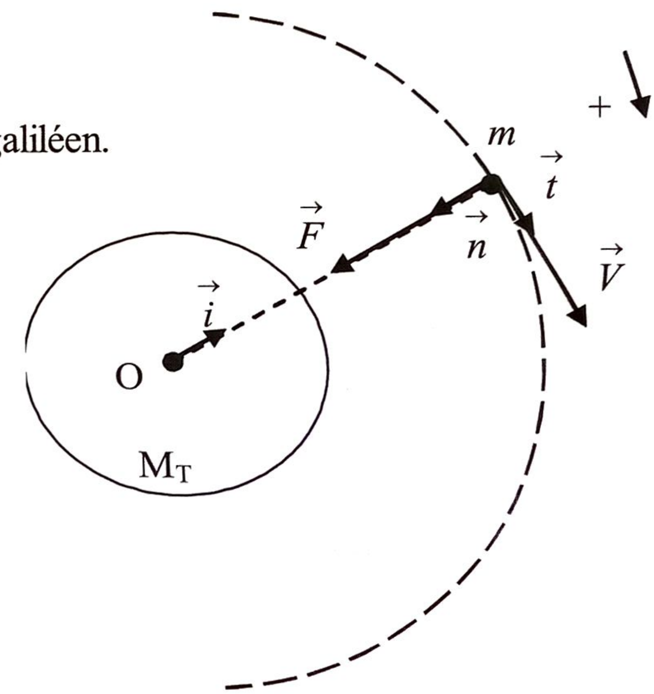
b) Calculer la valeur de r_N.

Données numériques - masse de la terre : $M_T = 6.10^{24}$kg

- masse du soleil : $M_S = 2.10^{30}$kg

- Durée du jour terrestre : 24h

Solution



1. a) Montrons que le mouvement est uniforme :

- Système étudié : le satellite.
- Repère utilisé : repère géocentrique supposé galiléen.

Force appliquée : force de gravitation $\vec{F}$.

T.C.I : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$m\vec{G} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{G}$

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_t = 0 \\ a_n = G \end{array}\right. \quad \text{or } a_t = \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow \text{V= constante,}$$

Le mouvement est donc uniforme.

b) Expression de T= f (r, g, M_T)

$$a_n = G \text{ or } a_n = \frac{V^2}{r} = g\frac{M_T}{r^2} \Rightarrow V = \sqrt{g\frac{M_T}{r}}$$

$$VT = 2\pi r \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{V} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{gM_T}}$$

c) Calcul de la période T' :

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{r'^3}{gM_T}}$$ Faisons le rapport T/T' ; $$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{r^3}{r'^3}} \Rightarrow T' = T\sqrt{\left(\frac{r'}{r}\right)^3}$$

AN : $T' = 28140\sqrt{\left(\frac{10000}{20000}\right)^3}$ T' = 2h 45mn 49s

2. a) Relation entre T_N et r_N :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{gM_T}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2\frac{r^3}{gM_T} \quad , \quad \frac{r^3}{T^2} = \frac{gM_T}{4\pi^2} = CM_T \quad \text{avec } C = \frac{g}{4\pi^2} \ *$$

Appliquons la 3e Loi de Kepler à l'ensemble Nepture-Soleil.

$$\frac{r_N^3}{T_N^2} = CM_S \ (1)$$

b) Calcul de r_N.

$$\frac{r^3}{T_N^2} = CM_T \ (2) \quad \frac{(1)}{(2)} = \frac{M_S}{M_T} = \frac{r_N^3}{T_T^2} \times \frac{T^2}{r^3} \quad \Rightarrow \quad r_N^3 = r^3\left(\frac{T_N}{T}\right)^2 \cdot \frac{M_S}{M_T}$$

$$r_N = r\sqrt{\left(\frac{T_N}{T}\right)^2 \cdot \frac{M_S}{M_T}} \quad , \ T_N = 5{,}210^9 s \quad ; \quad r_N = 210^4\sqrt{\left(\frac{5{,}210^9}{28140}\right)^2 \cdot \frac{210^{30}}{610^{24}}}$$

$$r_N = 4{,}5.10^9\,Km$$

Exercice N° 3

1. On considère que la terre a une distribution de masse à symétrie sphérique de centre O.

a) Donner l'expression de l'intensité du champ de gravitation g créé par la terre à une altitude h en fonction de g, R_T, h et M_T.

b) En déduire l'expression littérale de M_T en fonction de g_0, g et R_T.

c) Calculer numériquement M_T.

2. On admet qu'un satellite de la terre assimilé à un point matériel de masse m, est soumis uniquement à la force gravitationnelle $\vec{F}$ exercée par la terre et décrit dans la référentiel géocentrique une trajectoire circulaire de centre O.

a) Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.

b) Exprimer la vitesse V et la période T du satellite en fonction de M_T, R_T g, et h.

c) On pose $r = R_T + h$. Montrer que le rapport $\frac{r3}{T^2}$ est égal à une constante que l'on exprimera en fonction de M_T et g.

3. Le tableau ci-dessous rassemble les valeurs numériques des périodes de révolution T et des altitudes h des orbites de deux satellites artificiels de la terre.

Satellite	IntelsatV	Cosmos 70
T	23h 56mn	11h 14mn
h(km)	$3{,}5810^4$	$1{,}9110^4$

a) Vérifier, à partir des valeurs numériques du tableau, que le rapport $\dfrac{r3}{T^2}$ est constant.

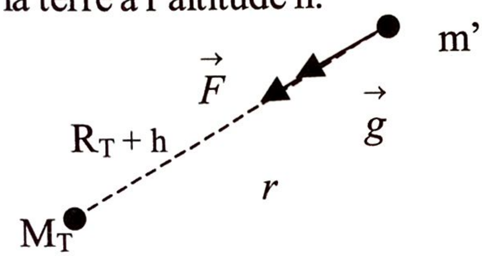
b) En déduire une valeur numérique de la masse M_T de la terre.

Données numériques : $\mathcal{G} = 6{,}67 10^{-11}$USI $\quad R_T = 6400$km ; $\quad g_0 = 9{,}8 ms^{-2}$

Solution

1. a) Expression de g créé par la terre à l'altitude h.

$$g = \mathcal{G}\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

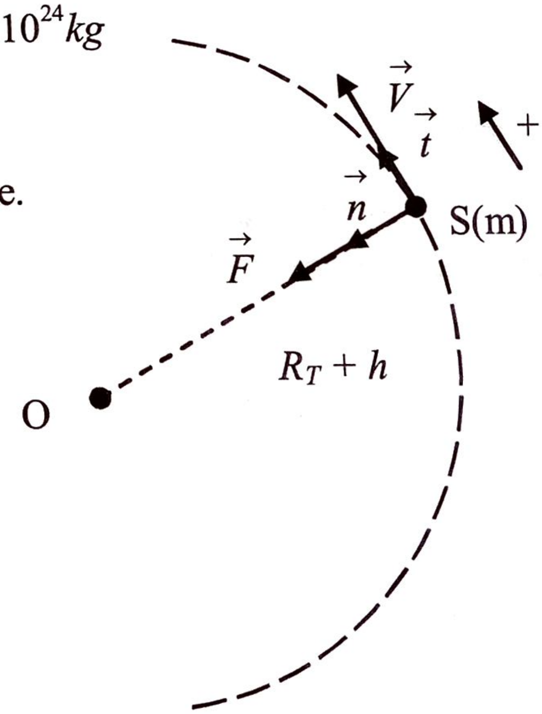


b) Pour h=0 $\quad g_0 = \mathcal{G}\dfrac{M_T}{R_T^2}$, d'où $\; M_T = g_0\dfrac{R_T^2}{\mathcal{G}}$

c) Calculons M_T . $\qquad M_T = \dfrac{9{,}8\times(64 10^5)^2}{6{,}67 10^{-11}} = 6{,}02 10^{24} kg$

$M_T = 6{,}02 10^{24}$kg

2. a) Montrons que le mouvement du satellite est uniforme.



T.C.I : $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$ Projetons sur $(\vec{t}, \vec{n})$

Base de Frenet : $\vec{a} = \vec{g}$

$$\vec{a}\begin{cases} a_n = \dfrac{V^2}{R_T + h} \\ a_t = 0 \end{cases} \quad \text{or} \quad a_t = \frac{dV}{dt} \Rightarrow V = \text{cte.}$$

b) Exprimons :

- La vitesse du satellite.

$$F = m\,a_N \qquad F = \mathcal{G}\,\frac{mM_T}{(R_T+h)^2}\ , \qquad \mathcal{G}\,\frac{mM_T}{(R_T+h)^2} = \frac{mV^2}{R_T+h} \quad\Rightarrow\quad V = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T+h}}$$

$$V = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T+h}}$$

La période T du satellite :

Pour une révolution $2\pi(R_T+h)=VT \qquad T = \dfrac{2\pi\,(R_T+h)}{V}$

$$T = \frac{2\pi\ (R_T+h)}{\sqrt{\mathcal{G}M_T}}\sqrt{R_T+h}$$

$$T = 2\pi\frac{(R_T+h)^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G}M_T}} \quad = \quad 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{\mathcal{G}M_T}} \qquad\Rightarrow\quad T = \frac{2\pi\ (R_T+h)^{3/2}}{(\mathcal{G}M_T)^{1/2}}$$

c) En posant $R_T+h=r$

$$T = \frac{2\pi\ r^{3/2}}{(\mathcal{G}M_T)^{1/2}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2\,\frac{r^3}{\mathcal{G}M_T} \qquad\Rightarrow\qquad \frac{r^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M_T}{4\pi^2} = cte. \quad \text{(3° loi de Kepler)}$$

3) a) A partir des valeurs numériques, vérifions que $\dfrac{r^3}{T^2}$ est constant.

Satellite	Intelsat V	Cosmos 70
$T^2 \times 10^9\, s^2$	7,42	1,63
$r^3 \times 10^{22}\, m^3$	7,51	1,66
$\dfrac{r^3}{T^2}\, m^3/s^2$	10^{13}	10^{13}

b) Valeur de M_T.

$$g\frac{M_T}{4\pi^2}=\frac{r^3}{T^2}=10^{13} \Rightarrow M_T=\frac{4\pi^2}{g}\cdot\frac{r^3}{T^2}$$

$M_T\ 5{,}92 10^{24} kg \approx 6 10^{24}$ kg

Exercice N° 4 : (Bac Niger 2002 Série D second groupe)

Dans cet exercice, le mouvement est rapporté à un référentiel géocentrique, considéré comme galiléen. La terre est supposée sphérique, de rayon R, de masse M. L'intensité du champ gravitationnel terrestre à l'altitude h a pour expression : $g(h)=G\dfrac{M}{(R+h)^2}$ où G est la constante de gravitation universelle.

1. Soit g_0 l'intensité du champ gravitationnel à la surface terrestre. Etablir l'expression de l'intensité du champ gravitationnel à l'altitude h en fonction de h, R et g_0.

2. On définit la variation relative de g par :

$$\frac{\Delta g}{g_0}=\frac{g_0-g(h)}{g_0}$$

Déterminer l'altitude h pour la quelle cette variation relative est égale à 0,01.On donne R = 6400 km.

3. Un satellite assimilé à un point matériel décrit une orbitre circulaire à l'altitude h = 400 km dans le plan équatorial.

Déterminer la vitesse Vs, la période Ts et la vitesse angulaire ω_S du mouvement du satellite dans le repère géocentrique. On donne $g_0 = 9{,}8$ ms-2.

4. Le satellite change d'orbite et devient géostationnaire .

   a) Que signifie le terme "géostationnaire" ?

   b) Exprimer l'altitude h du satellite en fonction de la période du mouvement et calculer h.

On donne la période de rotation de la terre autour de son axe : T = 86164s.

Solution

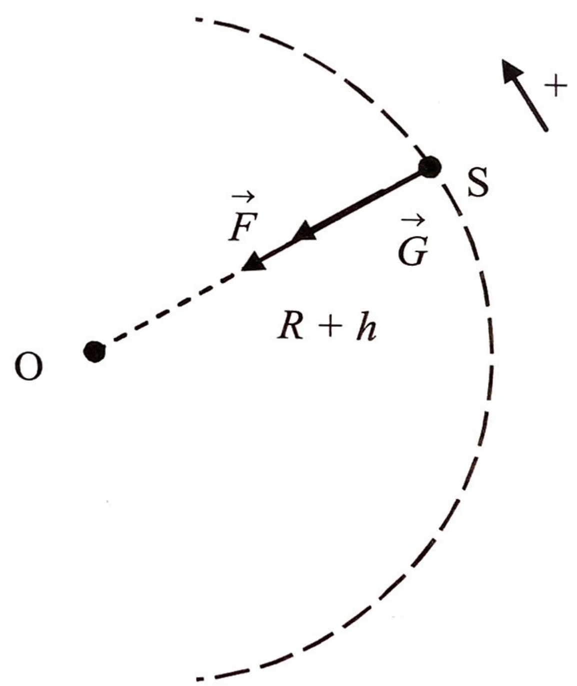
1. Expression de l'intensité du champ à l'altitude h :

$$g_0 = \frac{\mathcal{G}M}{R^2}; \quad g(h) = \frac{\mathcal{G}M}{(R+h)^2}; \quad \mathcal{G}M = g_0 R^2 \qquad \text{d'où} \quad g(h) = g_o \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

2. Altitude h où la variation relative de g est de 0,01.

$$\frac{g_o - g(h)}{g_o} = \frac{g_o - g_o \dfrac{R^2}{(R+h)^2}}{g_o} = 1 - \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = 0{,}01$$

h = 0,005R ; h= 32 km.



3. A h = 400 km d'altitude déterminons :

T.C.I : $\vec{F} = m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$a_N = g$

$$\frac{V_S^2}{R+h} = \frac{\mathcal{G}M}{(R+h)^2} \Rightarrow V_S^2 = \frac{\mathcal{G}M}{R+h} = g_o \frac{R^2}{R+h}$$

$$V_s = R\sqrt{\frac{g_o}{R+h}}$$

$$AN \quad V_s = 64.10^5 \sqrt{\frac{9{,}8}{64.10^5 + 4.10^5}} = 7683{,}14 ms^{-1}; \qquad V_S = 7683{,}14 \text{ ms}^{-1}$$

$$T_S = \frac{2\pi(R+h)}{V_S} \Rightarrow T_s = \frac{2\pi(R+h)^{3/2}}{R\sqrt{g_o}}$$

La vitesse angulaire ω_S .

$$\omega_S = \frac{V_S}{R+h} = \frac{R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}}{R+h} = R\sqrt{\frac{g_0}{(R+h)^3}}$$

$$\omega_S = R\sqrt{\frac{g_0}{(R+h)^3}}$$

AN :

$$\omega_S = 64.10^5\sqrt{\frac{9,8}{(64.10^5+410^5)^3}} = 0,0011 rads^{-1}$$

ω_S = 1,1 10^{-3} $rads^{-1}$

4. a) Le terme géostationnaire signifie : immobile par rapport à la terre. Un satellite géostationnaire tourne dans le même sens et à la même vitesse angulaire que la terre autour de l'axe des pôles.

Sa trajectoire est circulaire et contenue dans le plan équatorial.

b) Exprimons et calculons h.

$$T_S = \frac{2\pi(R+h)^{3/2}}{R\sqrt{g_o}} \quad T_S^2 = \frac{4\pi^2(R+h)^3}{R^2 g_o} \;;\; (R+h)^3 = \frac{g_o R^2 T_S^2}{4\pi^2} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{g_o R^2 T_S^2}{4\pi^2}} - R$$

$$AN:\; h = \sqrt[3]{\frac{9,8\times(64.10^5)^2\times(86164)^2}{4\pi^2}} - 64.10^5 = 35862,96 km \;;\quad h = 35862,96\ km$$

Exercice N° 5

1) Calculer la période de révolution d'un satellite autour de sa planète en fonction :

- de la masse M de la planète ;
- du rayon R de l'orbite supposée circulaire;
- de la constante d'interaction gravitationnelle ;

g = 6,67 10^{-11} N m². Kg^{-2}

2) On donne la période de révolution et le rayon r de l'orbite de cinq (5) satellites d'Uranus découverts depuis la terre.

	Miranda	Ariel	Umbiel	Titania	Obéron
Période en jours (864005)	1,4135	2,520	4,144	8,706	13,46
R : en km	130000	192000	267000	438000	586000

a) Etablir le 3è loi de Keepler $\frac{T^2}{R^3} = Cte$

b) Pour chaque satellite calculer T^2 et R^3

c) Calculer la masse d'Uranus

Solution

1) Déterminons la période de révolution.

$T.C.I \quad \vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{F} = m\vec{G}$

$M\vec{G} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{G}$

$$G = g\frac{M}{R^2} = \frac{V^2}{R} \Rightarrow V = \sqrt{g\frac{M}{R}}$$

$$V = R\omega = R\frac{2\pi}{T} = \sqrt{g\frac{M}{R}}$$

$$T = \frac{2\pi R}{\sqrt{g\frac{M}{R}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{gM}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{gM}}$$

2) a) Etablissons la 3è loi de Keepler

$$(1)^2 \quad T^2 = 4\pi^2\frac{R^3}{gM} \Rightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{gM} = cte.$$

b) Calcul de T^2 et R^3 (Voir table)

	Miranda	Ariel	Umbiel	Titania	Obéron
T^2 x 1010	1,5	4,7	12,9	56,6	135,2
R^3 (10^{24})	2 ,2	7,1	19,03	84,03	201,2
$\frac{T^2}{R^3}$	$0,6810^{-14}$	$0,6610^{-14}$	$0,6810^{-14}$	$0,6710^{-14}$	$0,6710^{-14}$

d) Calcul de la masse d'Uranus

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{gM} = 0,6710^{-14} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2}{0,67,10^{-14}\ g}$$

$$M = 8,834\ 10^{25}\ kg$$

Chapitre 4

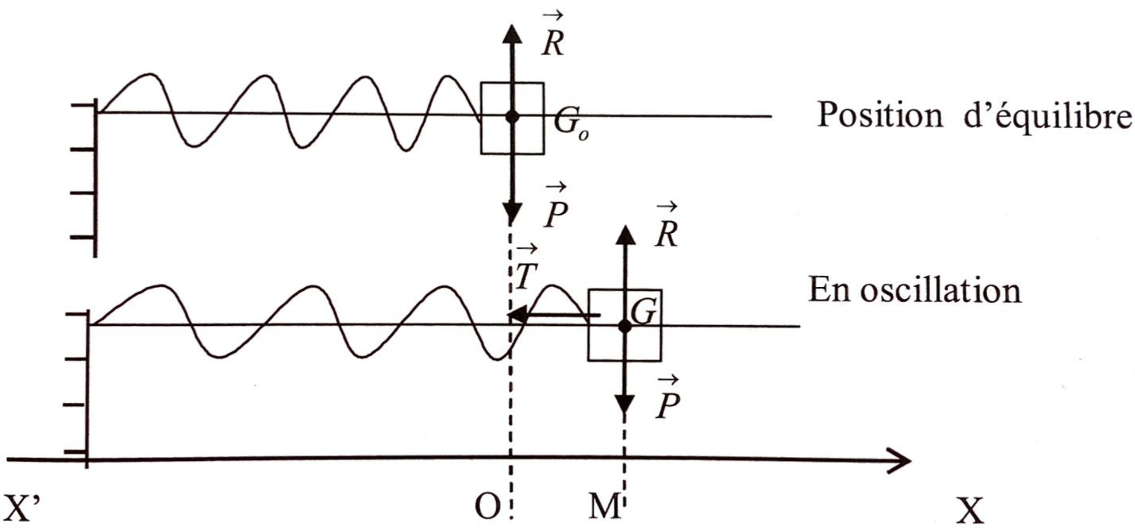
OSCILLATEURS MECANIQUES

RAPPEL DU COURS

I DÉFINITION

Un oscillateur mécanique est un système animé d'un mouvement périodique autour de sa position d'équilibre. L'oscillateur est dit harmonique si son mouvement par rapport a sa position d'équilibre est une fonction sinusoïdale du temps.

II PENDULE ÉLASTIQUE HORIZONTALE



1. Equation différentielle du mouvement.

A un instant t quelconque.

T.C.I $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$; $\vec{R}+\vec{P}+\vec{T} = m\vec{a}$

Projetons suivant x'x :

$$-T = ma \;\Rightarrow\; -kx = m\ddot{x} \;\Rightarrow\; \ddot{x}+\frac{k}{m}x = 0$$

ω_o pulsation propre : $\omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

2. Solution de l'équation différentielle.

$x = X_m \cos_{(\omega t + \varphi)}$ est solution de l'équation différentielle

3. Etude énergétique

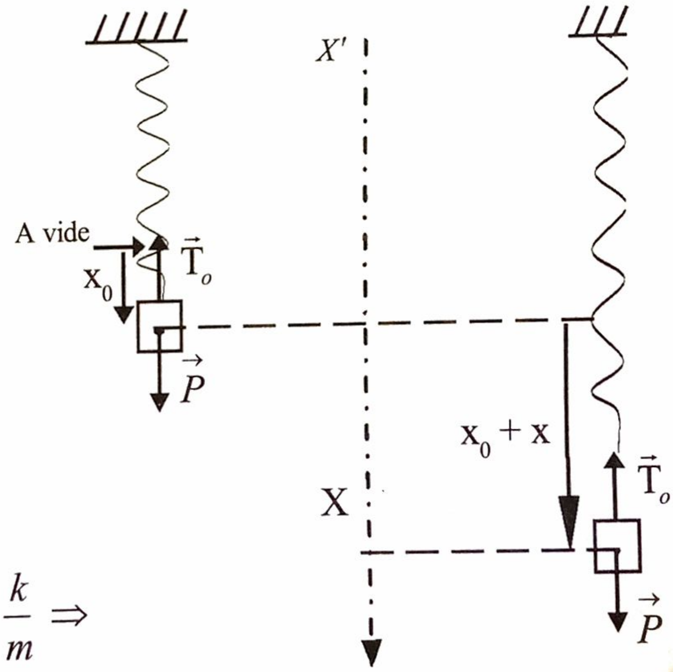
$* E = E_C + E_{Pe}$ E_{Pe} énergie potentielle élastique

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

- Conservation de l'énergie mécanique.
- En l'absence de tout frottement.

$$E = C^{te} \Rightarrow E = Ec_{MAX} = \frac{1}{2}mV^2_{MAX} \Rightarrow E = E_{Pe_{MAX}} = \frac{1}{2}KX^2_{MAX}$$

III PENDULE VERTICAL



1 Equation différentielle

à l'équilibre

$\vec{P}_t \vec{T}_o = \vec{o}$ Projetons sur (X'X)

$P = T_o = K x_o$

En Mouvement

$P - T^2 = m\vec{a}$ $P - K(x + x_o) = m\ddot{x}$

$- Kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = o$ $\omega o^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow$

$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ωo : pulsation propre To :période propre

Exercices

Exercice N° 1

Un solide (S) de masse m et de centre d'inertie G est enfilé sur une tige horizontale AC ; le long de laquelle il peut coulisser sans frottement. Le solide S est accroché à l'une des extrémités du ressort élastique (R), à spires non jointives, de constante de raideur k, l'autre extrémité du ressort est fixé à un support en un point A. Le système dans sa position d'équilibre est tel que G se projette en O sur l'axe horizontal x'x.On écarte le solide (S) le long de la tige, de telle sorte que C vienne en G_0 d'abscisse x_0 et on le lâche sans vitesse initiale a une date t = 0. A une date t quelconque, on repère la position de G par son abscisse x sur l'axe x'x.

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement.

2. a) Vérifier que l'équation horaire du mouvement de G indiquée ci-dessous est une solution de l'équation différentielle précédemment établie.

$$x = x_o \ \text{cost} \ \omega t \qquad \text{avec}\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

b) En déduire la vitesse V du point G en fonction de k, m, x et t.

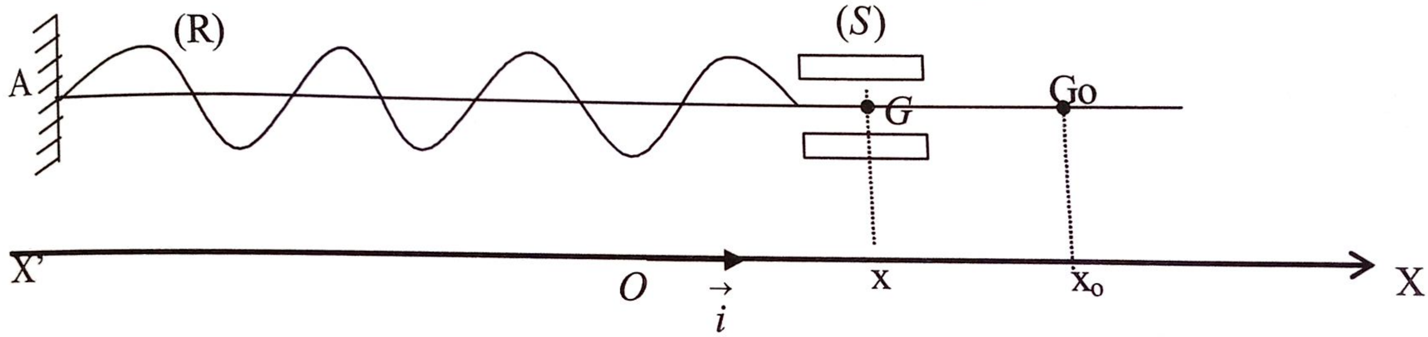
3. a) Donner les expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle Ep du système (solide + ressort) à une date t en fonction de k, m, x et v.

b) On considère deux cas particuliers :

1^er^ cas : le ressort est étiré au maximum (G en G_0)

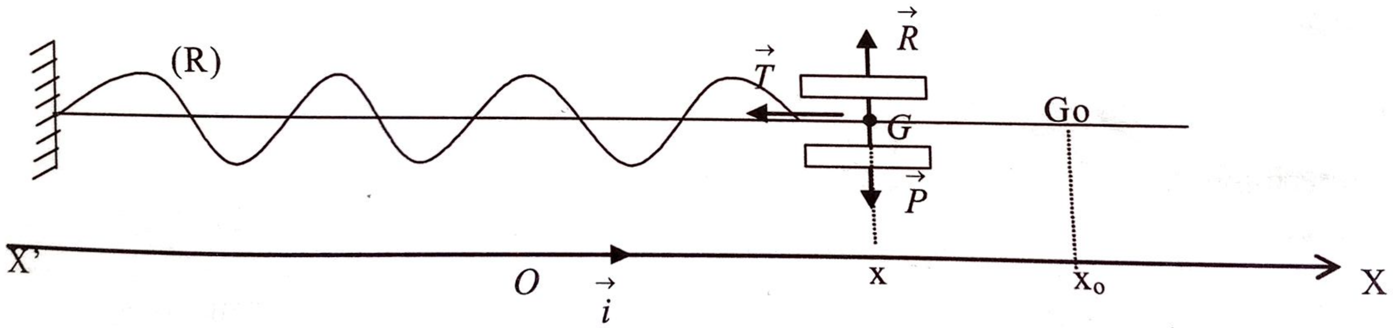
2^e^ cas : G passe par sa position d'équilibre (G en O)

Donner, dans les deux cas envisagés, en fonction de k et x_0 les expressions de E_c et E_P. Cette information suffit-elle pour déterminer l'énergie mécanique ? Pourquoi ?



Solution

1)



1. Equation différentielle du mouvement.

$$\text{T.C.I} \quad \sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a} \qquad \vec{R} + \vec{P} + \vec{T} = m\,\vec{a} \qquad \text{projetons sur x'x}$$

$$-T = ma \qquad -kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

2. a) Vérifions que $x = x_0 \cos \omega t$ est une solution de l'équation différentielle.

$$\dot{x} = -\omega\, x_0 \sin \omega t \qquad \ddot{x} = -\omega^2 x_0 \,\text{cost}\ \omega t = -\omega^2 x$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

b) Déduction de V en fonction de k, m, x_0 et t.

$V = \quad = -\omega\, x_0 \sin \omega t \quad V = x_o\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t$

3. a) Expression de l'énergie cinétique Ec.

$$Ec = \frac{1}{2}mV^2 \quad Ec = \frac{1}{2}m\left[-x_0\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}t\right]^2$$

$$Ec = \frac{1}{2}kx_0^{\ 2}\sin^2\frac{k}{m}t$$

Expression de Ep $\qquad Ep = \frac{1}{2}kx^2$

b) 1er cas $\qquad$ G en G_0 $\qquad$ $x = X_o$ et $V = 0$

$\qquad Ec = 0 \qquad Ep = \frac{1}{2}kx_o^2$

2^{e} cas $\qquad$ G en O $\quad x = 0$ et $V = V_{max} = x_0\sqrt{\frac{k}{m}}$

$$Ec = \frac{1}{2}mV_{max}^{\ \ 2} = \frac{1}{2}m\left(x_o\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 = \frac{1}{2}kx_o^{\ 2}$$

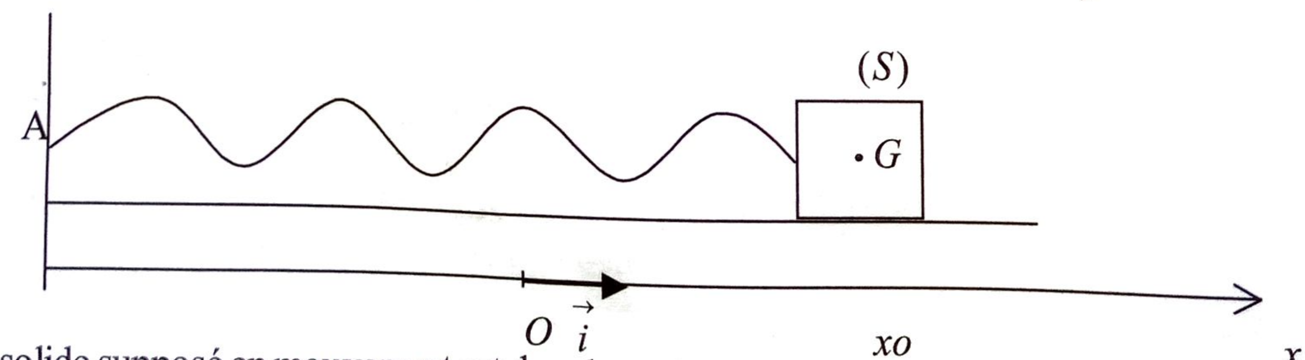
$Ep = 0$

$E = Ec + Ep$ cette information suffit pour calculer l'énergie mécanique.

$E = c^{te} \qquad E = \frac{1}{2}kx_o^{\ 2}$

Exercice N° 2

1. Pour déterminer la raideur K d'un ressort, on accroche une des extrémités à un support fixe. Lorsqu'on accroche une masse marquée m=200g à son extrémité, son allongement vaut 10,0 cm.
   a) Vérifier que la raideur du ressort vaut 20,0 Nm^{-1}.
   b) En utilisant le théorème du centre d'inertie, justifier que la raideur peut s'exprimer en kg s^{-2}.
2. On fixe maintenant le ressort étudié comme l'indique la figure. Le ressort est horizontal et fixe à son extrémité A. On accroche à son extrémité un solide (S) de masse m = 200g. Le solide peut se déplacer sans frottement le long d'un axe horizontale OX. A l'équilibre le centre d'inertie G du solide coïncide avec l'origine 0 du repère.



a) le solide supposé en mouvement est dans la position représentée sur la figure. Faire l'inventaire des forces qui agissent sur le solide S, représenter ces forces.

b) Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement de G. en déduire l'expression de la pulsation ω_o, de la période propre To de cet oscillateur. Calculer ω_o et To.

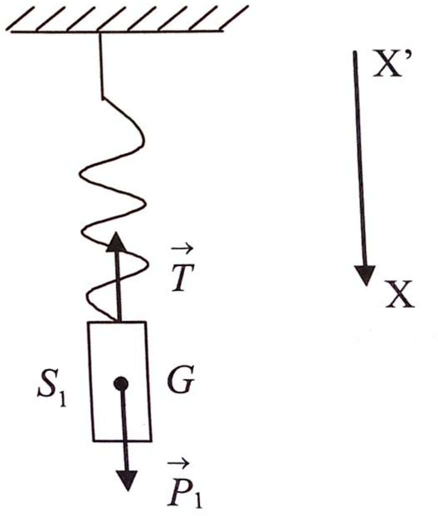
c) Vérifier que x (t) = $X_m \cos(w_0 t + \varphi)$ est solution de l'équation différentielle précédente.

3. On comprime le ressort en poussant le solide vers la gauche, le point G occupe alors la position Go telle que OGo = - 0,15 m. A l'instant t = 0 on lâche le solide sans vitesse initiale.

a) déterminer l'amplitude *Xm* (par convention positive) et la phase du mouvement, ainsi que l'expression de la vitesse V(t) du solide. En déduire la valeur maximale de la vitesse.

b) Définir et exprimer l'énergie mécanique de cet oscillateur. Donner sa valeur numérique à t = 0.

Solution



1. a) Vérifions que K = 20 N.m^{-1}.

A l'équilibre $\vec{P}+\vec{T}=\vec{O}$

Projection sur (X'X) $P - T_o = 0$ mg = $K\Delta\ell o$

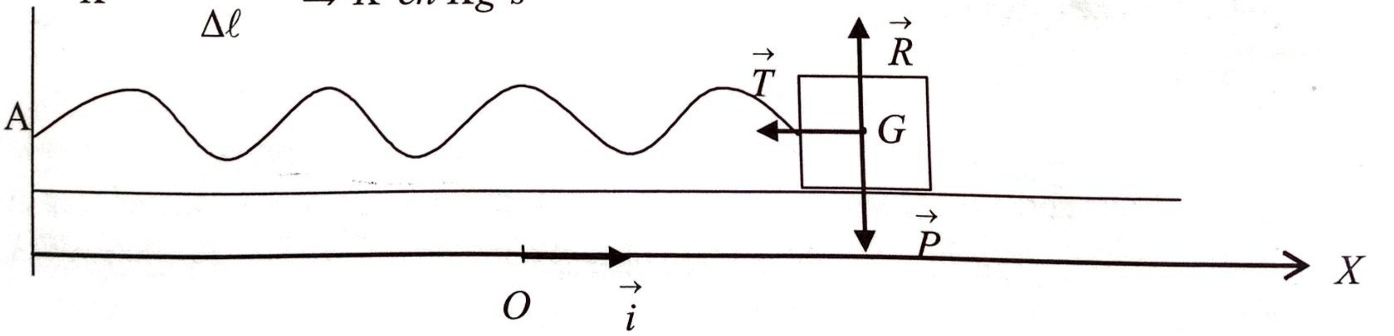
$$\Rightarrow K = \frac{mg}{\Delta\ell o} \; ; \qquad K = \frac{0,2\times 10}{0,1} = 20Nm^{-1}$$

b) Montrons que K peut s'exprimer en Kg s^{-2}. G en mouvement

T.C.I : $\vec{P}+\vec{T} = m\vec{a}$ projection sur X'X: – T + P = m a ; - K$\Delta\ell$ + mg = m a

$$K = \frac{m(g-a)}{\Delta\ell} \Rightarrow K \text{ en } Kg\ s^{-2}$$

2)



a) Bilan des forces (voir schéma).

b) Equation différentielle. T.C.I $\vec{R}+\vec{P}+\vec{T} = m\vec{a}$

Projection sur $(O,\vec{i})$ - T = ma $-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Expression de ω_o : $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ AN $\omega_o = \sqrt{\frac{20}{0,2}} = 10 rads^{-1}$

Expression de To $To = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ AN: $To = 2\pi\sqrt{\frac{0,2}{20}} = 0,628s$

c) Vérifions que $x = Xm\cos(\omega_o t + \varphi)$ est solution de l'équation différentielle.

$\dot{x} = -\omega_o Xm\sin(\omega_o t + \varphi)$ $\quad \ddot{x} = -\omega_o^2 Xm \cos t\ (\omega_o t + \varphi) = -\omega_o^2 x$

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_o^2 = \frac{k}{m}$$

3. a) Déterminons Xm.

$$\text{à} \quad t = 0 \begin{cases} x_o = X_m \cos\varphi = -0{,}15 \\ -\omega_o X_m \sin\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \pi$$

$$X_m = \frac{x_o}{\cos\varphi} > 0 \ \Rightarrow \ \cos\varphi < 0 \quad \text{d'où } \varphi = \pi$$

$$X_m = -x_o = 0{,}15m$$

Expression de v(t). $V(t) = -\omega_o Xm\ \sin(\omega_o t + \pi)$

$$V_{MAX} = \omega_o Xm \qquad V_{MAX} = 10 \times 0{,}15 = 1{,}5ms^{-1}$$

b) Expressions de l'énergie mécanique.

$$Em = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$\text{A} \quad t = 0 \qquad Em = \frac{1}{2} kx_0^{\ 2}$$

$$\text{A.N} \qquad Em = \frac{1}{2} \times 20 \times (0{,}15)^2 = 0{,}225 \text{ J}$$

Exercices N° 3

On se propose de déterminer expérimentalement la raideur K d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable. Pour cela on considère l'ensemble suivant : une tige verticale pouvant être animée d'un mouvement de rotation ; soudée à cette tige, et perpendiculaire, une tige horizontale, munie du ressort, dont une extrémité est fixée à la tige verticale, l'autre extrémité étant accrochée à un objet de masse m pouvant coulisser sans frottement le long de la tige horizontale. Au repos, le ressort a la longueur l_0 (figure1). On impose à l'ensemble un ouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω. Pour différentes valeurs de ω. On a mesuré les allongements x du ressort. Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau suivant :

ω en rad s^{-1}	3,186	4,500	5,486	7,099	7,759	8,366
x (cm)	10	20	30	40	60	70

1. a) Faire la représentation graphique de $x = f(\omega^2)$.

Echelle 1 cm $\rightarrow$ 7 rad²s⁻² 1 cm $\rightarrow$ 10 cm

b) Pour une valeur constante de ω donner l'expression de l'allongement x du ressort en fonction de ω.

Le graphe obtenu est-il en accord avec cette expression ?

c) Déterminer graphiquement la raideur k du ressort pour une longueur du ressort $l = 1\text{m}$ et $m = 200\text{g}$.

2. Deux ressorts identiques, de longueur l_0, de raideur k, sont tendus entre deux points A et B distants de L. un disque D, de masse m_1 et d'épaisseur négligeable, est fixé entre ces ressorts (voir figure 2):

a) Calculer les allongements des deux, ressorts à l'équilibre du disqueD.

b) Lorsque D est écarté de sa position d'équilibre, verticalement, vers le bas, de $d = 3$ cm et on l'abandonne sans vitesse. On néglige les frottements.

Etablir l'équation différentielle du mouvement. En déduire son équation horaire.

Calculer le période des oscillations.

On donne $L = 45$ cm ; $lo = 15$ cm ; $k = 20\ \text{Nm}^{-1}$; $m_1 = 0{,}1$ kg ; $g = 10\ \text{ms}^{-2}$.

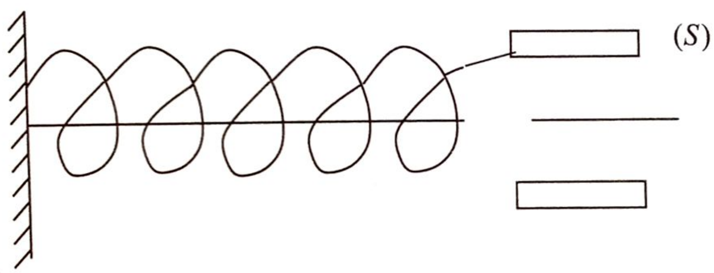


Figure 1

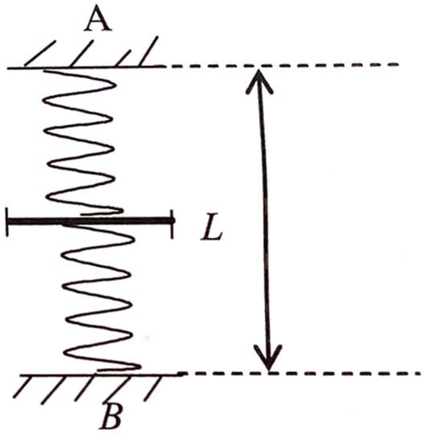
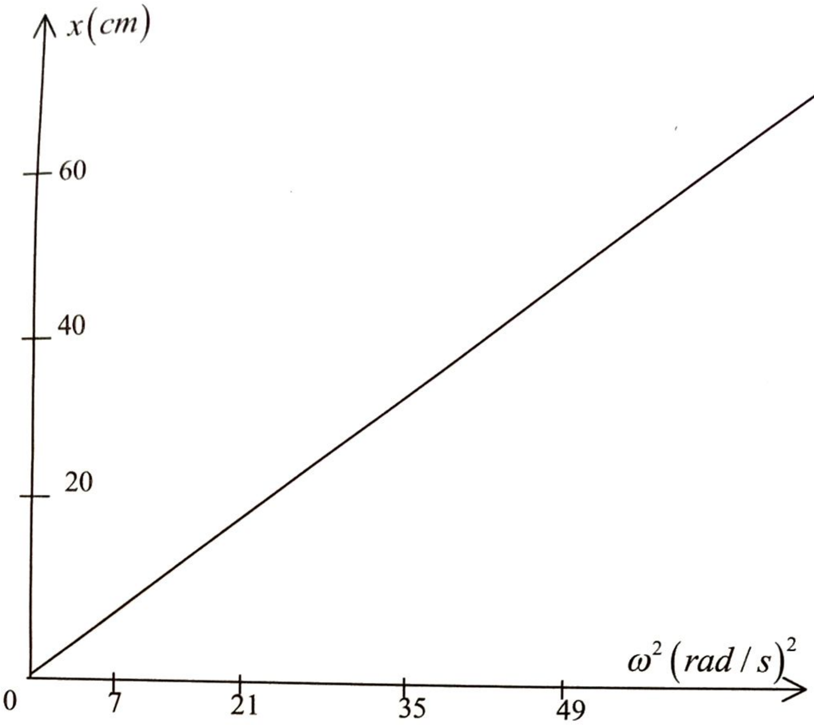


Figure 2

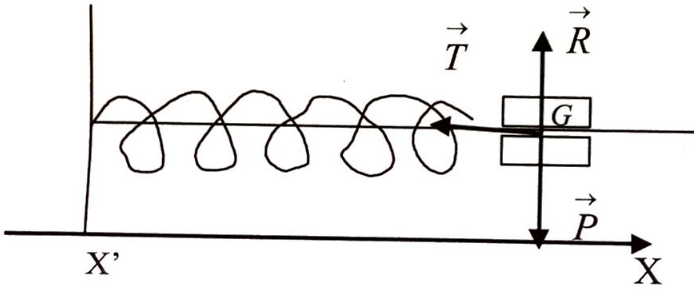
Solution

1. a) Tracé du graphique $x = f(\omega^2)$.

ω^2 (rad/s)²	10,15	20,25	30,10	40,25	50,40	60,20	70
x (cm)	10	20	30	40	50	60	70



b) Relation entre x et ω.



T.C.I : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ $\quad\quad \vec{R} + \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

Projetons cette relation suivant xx' $\quad x'$

$$kx = ma_n = m\omega^2 \ell \Rightarrow x = \frac{m\ell}{k}\omega^2 \Rightarrow \quad x = C\omega^2:$$

C'est l'équation d'une droite de la forme y = ax donc le graphe est en accord avec l'expression trouvée.

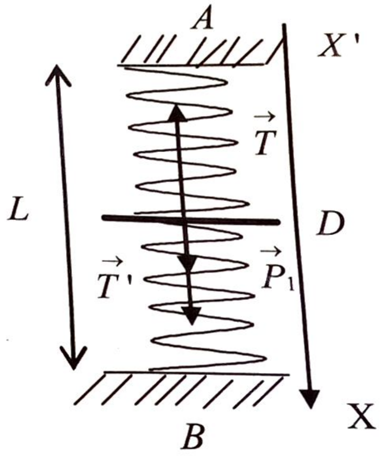
c) Détermination graphique de k.

$$C = \tan\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta \omega^2} = \frac{(70-0)10^{-2}}{70-0} = 10^{-2}\,ms^{-2}rad^{-2}$$

$$C = \frac{m\ell}{k} \Rightarrow k = \frac{m\ell}{C} = \frac{0,2.1}{10^{-2}} = 20\,Nm^{-1}$$

2. a) Allongement des deux ressorts l'équilibre.

- Système étudié : D
- Repère utilisé : repère terrestre supposé galiléen.



Bilan des forces $\left(\vec{T};\vec{T}'\vec{P}_1\right)$

A l'équilibre $\vec{T}+\vec{T}'+\vec{P}_1=\vec{0}$

Projetons cette relation sur x'x.

$$-T + T' + P_1 = 0$$

$$-kx_A + kx_B + m_1 g = 0 \quad \Rightarrow \quad k\left(x_B - x_A\right) = \frac{-m_1 g}{k}$$

$$\Rightarrow x_B - x_A = 0,05(1)$$

$$L_A + L_B = L \Rightarrow lo + x_A + lo + x_B = L$$

$$x_B + x_A = L - 2lo = 45 - 30 = 15cm$$

$$\begin{cases} x_B - x_A = -0,05 \\ x_B + x_A = 0,15 \end{cases} \qquad \Rightarrow 2x_B = 0,1$$

$$x_B = 0,05m = 5cm \qquad x_A = 0,1m = 10cm$$

b) Equation différentielle du mouvement

T.C.I $\quad \sum \vec{F}_{ext} = m_1 \vec{a} \qquad \Rightarrow \vec{T}_A + \vec{T}_B \vec{P} = m_1 \vec{a}$

Projetons sur xx'

$$-T_A + T_B + P_1 = m_1 \ddot{x}$$

$$-k\left(x_A + x\right) + k\left(x_B - x\right) + m_1 g = m_1 \ddot{x}$$

$$\underbrace{-kx_A + kx_B + m_1 g}_{0} - 2kx = m_1 \ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2k}{m} x = 0$$

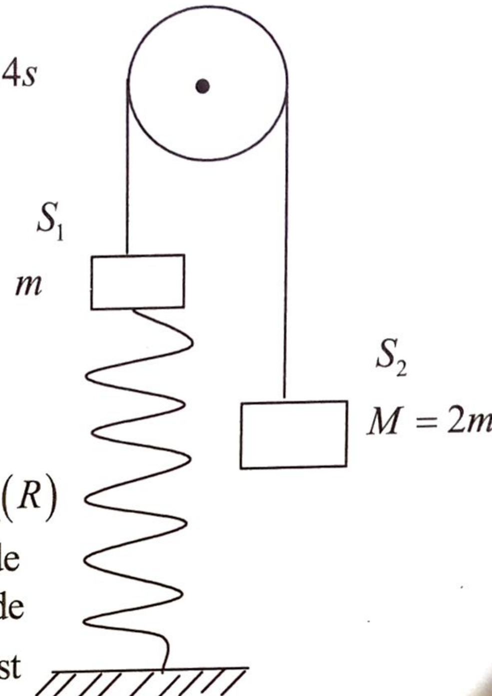
. Equation horaire: $x = X_m \cos\left(wt + \varphi\right)$

$$t=0 \left| \begin{array}{l} x = d \\ \dot{x} = 0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} -Xm\omega \ \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \ \text{ ou } \ \pi \\ d = Xm\cos\varphi > 0 \Rightarrow \varphi = 0 \ \text{ et } \ Xm = d \end{array}$$

$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m_1}}$ $\omega = 20$ rad s-1. $x = 3.10^{-2}\cos 20t$

- Période des oscillations

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{2k}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{0,1}{2 \times 20}}$ $T = 0,314s$



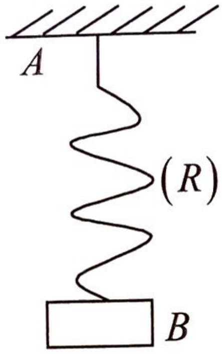
Exercice N° 4

On considère le dispositif donné par la figure ci contre.
Les solides S_1 *et* S_2 de masses respectives m et $M = 2m$ sont reliés par un fil inextensible de masse négligeable.
On néglige également la masse de la poulie et les frottements.
Un ressort (R) à spires non jointives, parfaitement élastique de constante de raideur k, de masse négligeable est relié au solide S_1 par l'une de ses extrémités. L'autre extrémité du ressort est fixée a un support immobile.

1. Lorsque le système est à l'équilibre, le ressort (R) a un allongement $\Delta\ell = 5$ cm.
Calculer la constante de raideur k du ressort (R). On donne : m = 100 g ; g = 10m s^{-2}.

2. A partir de la position d'équilibre, on déplace le solide S_2 de 2 cm vers le bas et on l'abandonne sans vitesse initiale à un instant qui sera considéré comme origine des temps.
   a) Sur un même schéma, représenter toutes les forces qui interviennent dans le système en équilibre.
   b) Etablir l'équation différentielle du mouvement des deux solides S_1 *et* S_2. Préciser la période des oscillations.
   c) Déduire l'équation horaire du mouvement des deux solides.

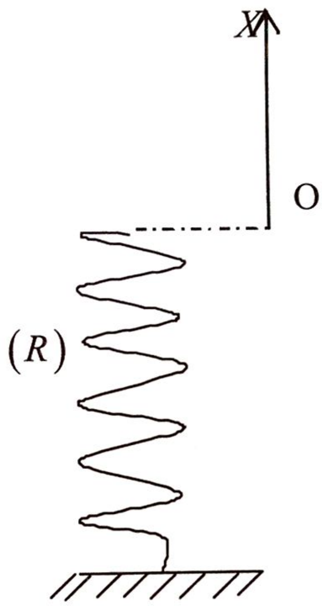
3. Le ressort R est vertical, son extrémité supérieur est fixé en un point A ; à l'extrémité inférieur B, on suspend un corps de masse m. Le système étant en équilibre on abaisse verticalement B de la longueur a puis on l'abandonne sans vitesse.
   a) Déterminer la nature du mouvement de B.
   b) Ecrire l'équation horaire de ce mouvement en prenant pour origine des espaces la position d'équilibre de B et origine des temps, l'instant où B est libéré. On précisera l'origine choisie pour l'axe vertical.
Préciser la valeur de la période.
   c) Exprimer en fonction du temps l'énergie cinétique de m. Calculer sa valeur maximale.

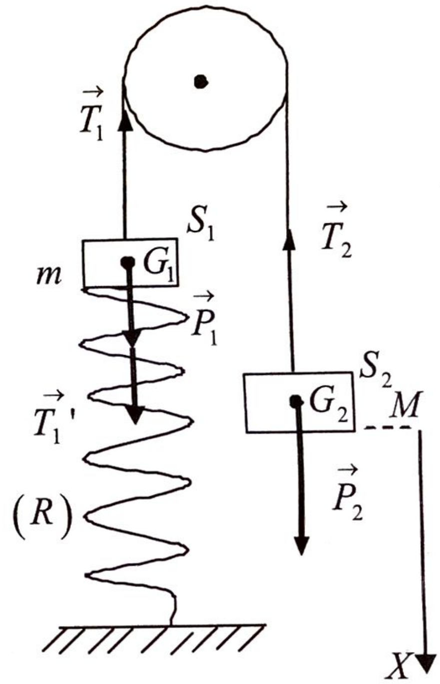


Solution

1. Calcul de la constante de raideur k.

- Système S_1 de masse m.
- Bilan des forces:





$\vec{T}'_1$: Tension du ressort

$\vec{T}_1$: Tension du fil

$\vec{P}_1$: Poids de m

A l'équilibre.

$$\vec{T}_1 + \vec{T}'_1 + \vec{P}_1 + = \vec{O}$$

Projetons sur Ox

$$T_1 - T'_1 - P_1 = 0 \Rightarrow T_1 = P_1 + T_1'$$

- Système S_2 de masse M
- Bilan des forces

$\vec{T}_2$: Tension du fil

$\vec{P}_2$: Poids de S_2

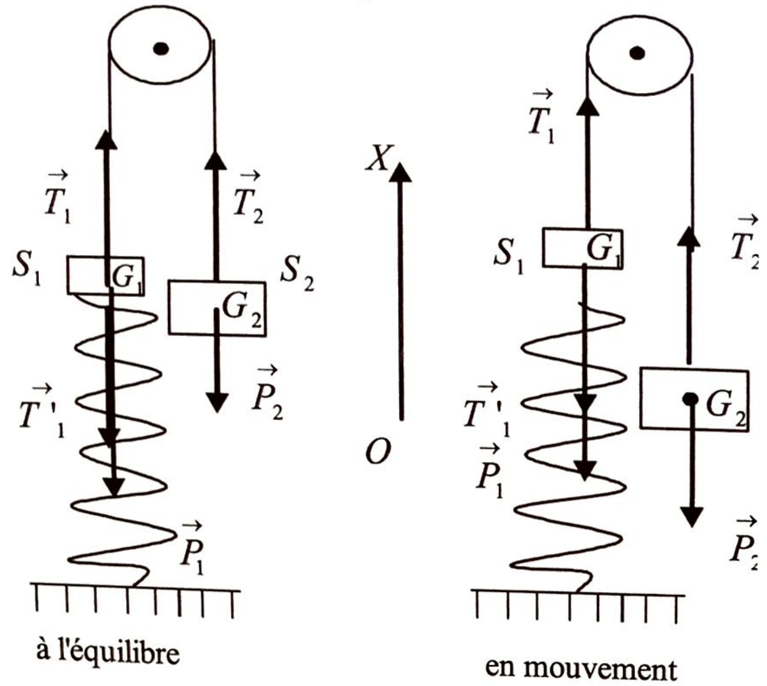
Equilibre $\vec{T}_2 + \vec{P}_2 = \vec{O} \Rightarrow T_2 = P_2 = 2\,\text{mg}$.

Or $T_1 = T_2 \Rightarrow P_1 + T_1' = P_2$ et $T_1' = k\Delta l$

$$k\Delta\ell = P_2 - P_1 = P_1 = \text{mg}$$

$$k = \frac{mg}{\Delta\ell} = \frac{0,1\times 10}{5.10^{-2}} \Rightarrow k = 20 Nm^{-1}$$

2. Sur un schéma représentons les forces à l'équilibre.



b) L'équation différentielle du mouvement.

Système S_1 : $\vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{T'}_1 = m\vec{a}$

Projetons sur OX.

$$-P_1 - T_1' + T_1 = m\ddot{x}$$

$$-mg - k(\Delta\ell + x) + T_1 = m\ddot{x} \Rightarrow -mg - k\Delta\ell - kx + T_1 = m\ddot{x} \quad \text{or} \quad k\Delta\ell = mg$$

$$-2\,\mathrm{mg} - kx + T_1 = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad T_1 = m\left(2g + \ddot{x}\right) + kx$$

Système S_2 : $\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = 2m\vec{a}$

Projetons sur OX'

$$2mg - T_2 = 2m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 2m\left(g - \ddot{x}\right)$$

$$T_1 = T_2 \quad \Rightarrow \quad m\left(2g + \ddot{x}\right) + kx = 2m\left(g - \ddot{x}\right)$$

$$3m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \ddot{x} + \frac{k}{3m}x = 0$$

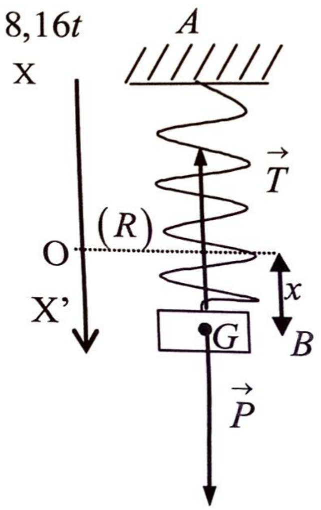
Période $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{3m}}$ et $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{3m}{k}}$ $\quad T = 0,77s$

c) Equation horaire du mouvement.

$x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ *où* $X_m = 2.10^{-2} m$

$At = 0$ *on a* $X_m \cos\varphi = X_m \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow 0$; $x = 2.10 - 2\cos 8,16t$

3. a) Déterminons la nature du mouvement de B.



A l'équilibre : $\vec{T_o} + \vec{P_o} = \vec{0}$

sur xx' : $-T_o + P = 0$ $\quad - k x_0 + mg = 0$

Etude en mouvement.

$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$

Projection sur xx' : $- T + P = ma - k(x_0 + x) + mg = ma$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Cette équation différentielle admet une solution de la forme $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

Le mouvement est rectiligne sinusoïdale.

b) Equation horaire du mouvement.

$$t = 0 \begin{matrix} x=0 \\ V=0 \end{matrix} \quad a = X_m \cos\varphi \quad \Rightarrow \cos\varphi = \frac{a}{X_m} > 0$$

$$V = -X_m\ \omega\ \sin(\omega t + \varphi)$$

$$-X_m \omega \sin\varphi = 0 \Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \pi$$

comme $\cos\varphi > 0$, $\cos\varphi = 1 \Rightarrow a = X_m$ $\qquad x = a\cos\omega t$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0,2}} = 10 rads^{-1}$$

Période T

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = 0,628s$$

c) Energie cinétique en fonction de t.

$$Ec = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mX_m^2\omega^2\sin^2\omega t$$

$Ec = 10a^2\sin^2\omega t$

$Ec_{max} = 10a^2 J$

Exercice N° 5 :

Un mobile autoporteur de masse m, placé sur un banc à coussin d'air horizontal, est lié à un ressort à spires non jointives, de raideur k, de masse négligeable. Le mobile oscille sans frottement, parallèlement à une direction x'x. A l'équilibre le centre d'inertie du mobile coïncide avec l'origine 0 du repère. Une interface appropriée permet de visualiser, sur l'écran d'un ordinateur, la position G. A cette fin, l'interface traduit cette position en une tension, proportionnelle à l'abscisse x de G, fonction du temps. Lors que le mobile oscille, l'examen de la courbe visualisée sur l'écran permet de relever le tableau de mesures ci-dessous ; les valeurs extrêmes correspondant à des extrêmas de la courbe.

Un étalonnage préliminaire a montré que U = + 5V correspond à l'abscisse x = 10 cm

1. Compléter la dernière ligne du tableau, donnant l'abscisse x de G..
2. Tracer la courbe x = f (t) en prenant pour échelle :

   1 cm ⟶ 50 ms ; 1 cm ⟶ 2 cm
3. Déterminer la période T du mouvement de G et en déduire la pulsation ω .
4. Déterminer l'amplitude X_m du mouvement de G.
5. Calculer la raideur k du ressort, sachant que m = 240 g.
6. Quelle est la valeur de la vitesse à la date 262 ms ?

t (ms)	0	87	175	262	350	437	525	612	700	787	875
U (V)	-4	-2,8	0	+ 2,8	+ 4	+2,8	0	-2,8	-4	-2,8	0

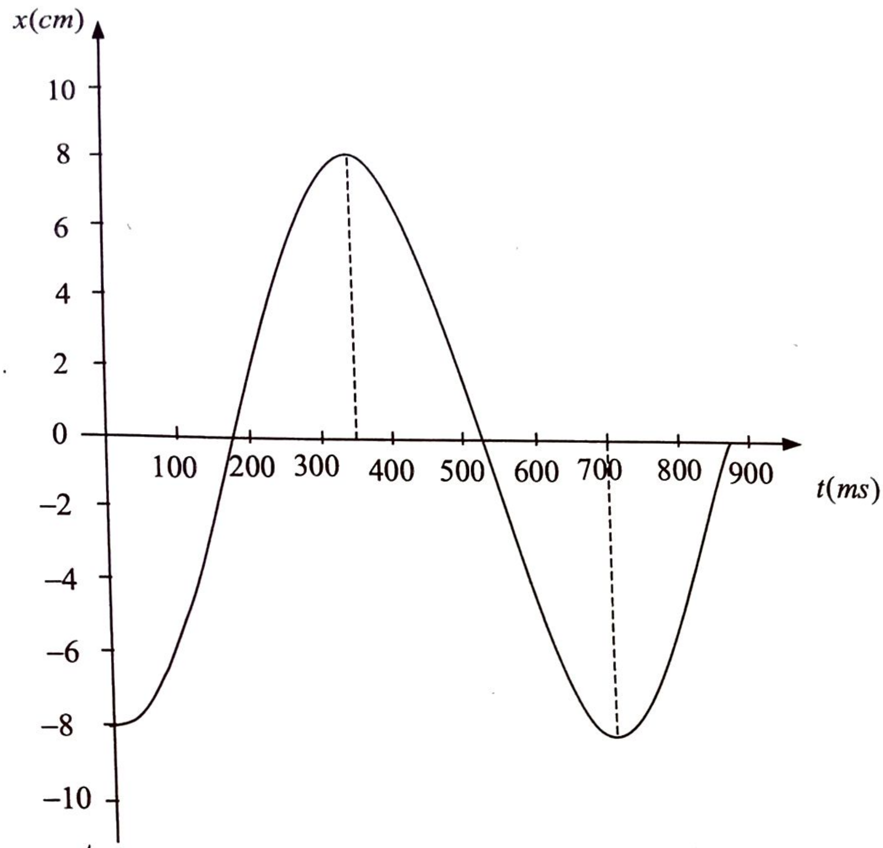
Solution

1. Complétons la dernière ligne du tableau.

t (ms)	0	87	175	262	350	437	525	612	700	787	875
U (V)	-4	-2,8	0	+2,8	+4	+2,8	0	-2,8	-4	-2,8	0
x (cm)	-8	-5,6	0	+5,6	+8	+5,6	0	-5,6	-8	-5,6	0

U = + 5 V on a x = +10cm

2. Tracé de x = f(t).



3. Période T du mouvement.
Sur le graphique T correspond à 14 cm

T = 14 × 50 = 700 ms ⇒ T = 0,7 s

Pulsation ω

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0,7} \qquad \omega = 8,97 rads^{-1}$$

4. L'amplitude X_m du mouvement.

$X_m = 8$ cm $\quad X_m = 8\ 10^{-2}$m

5. Calcul de la raideur k du ressort.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2\frac{m}{k} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

$$k = \frac{4.\pi^2 \times 240.10^{-3}}{(0,7)2} \qquad k = 19,3\ N.m^{-1}$$

6. Calcul de la vitesse du mobile à la date t = 262 ms.

$x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

A t = 0 $x = -X_m = -8\ 10^{-2}$ m $\Rightarrow \cos\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \pi$

$$x = 8.10^{-2} \cos(8,97t + \pi)$$

$$\dot{x} = -8.10^{-2} \times 8,97 \sin(8,97t + \pi)$$

Pour $t = 262$ ms on a $\dot{x} = 0,5 ms^{-1}$

Exercice N° 6 : (Bac NIGER 98)

A. Un solide S qui repose sur une table plane et horizontale est maintenu entre deux ressorts identiques (R_1) et (R_2) de masses négligeables. Les deux ressorts sont fixés en A et B (figure N°1).

On donne : - Masse du solide S M= 600 g

- Longueur à vide des ressorts ; lo = 0,15 m
- Longueur des ressorts lorsqu'ils sont accrochés à S : 1= 0,18m
- Raideur d'un ressort : k = 13 N.m^{-1}

1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le solide à l'équilibre.
2. Le centre d'inertie I du solide S est écarté de sa position d'équilibre O suivant la direction X'X on amène I en un point tel C que $\overline{OC} = 2$ cm puis on abandonne le solide S sans vitesse initiale. La position de I est donc repérée par son abscisse $x = \overline{OC}$. En choisissant, comme origine des temps l'instant où le solide S est abandonné sans vitesse initiale, établir l'équation différentielle du mouvement, puis la loi horaire de I.
En déduire la pulsation ω_0 ainsi que la période T_0.
3. Calculer l'énergie cinétique maximale du solide S. Pour quelle abscisse x de I cette valeur maximale de l'énergie cinétique est-elle atteinte ?

B. On considère maintenant que les deux ressorts ne sont pas identiques, mais toujours de masses négligeables (figure N° 2).

Le solide S est une sphère de rayon r = 5 cm. La distance AB est égale à 70 cm. Les raideurs respectives sont $k_1 = 15$ N.m^{-1} et $k_2 = 10$ N.m^{-1} et les longueurs à vide: $l_{0_1} = l_{0_2} = 25$ cm.

1. Lorsque le solide S est à l'équilibre le ressort (R_1) est allongé de $x_{0_1} = 4$ cm. Quel est l'allongement x_{0_2} du ressort (R_2) ?
2. Le solide S est écarté de sa position d'équilibre de $x_0 = 5$ cm vers A suivant le direction AB, et on l'abandonne sans vitesse initiale. Montrer que l'ensemble constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation ω et la periode T.
3. Donner l'expression de l'énergie cinétique du solide S en translation à une date t.

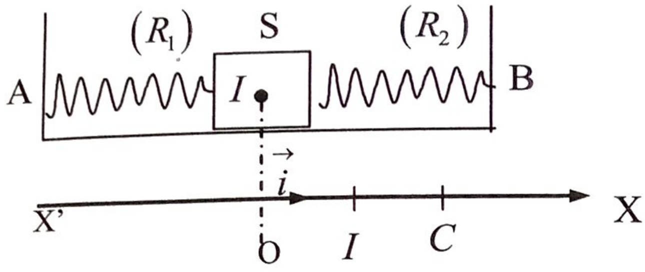
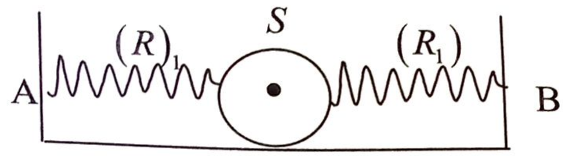
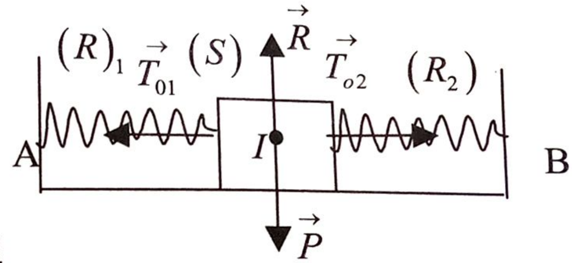


Figure 1





Solution

A 1. Bilan des forces l'équilibre.

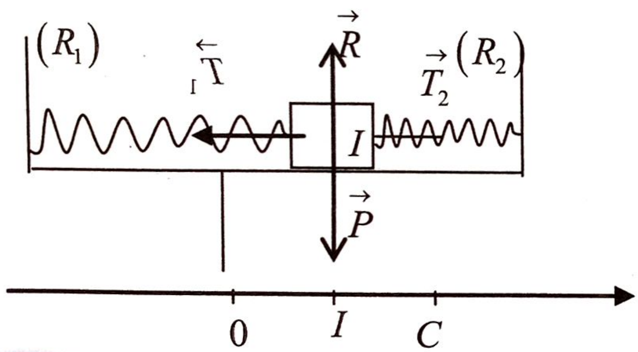
Le poids $\vec{P}$ du solide.

La réaction $\vec{R}$ du support.

La tension $\vec{T}_{O1}$ du ressort (R_1).

La tension $\vec{T}_{O2}$ du ressort (R_2).

2. Equation différentielle



Système étudié: Solide S

Repère utilisé : repère terrestre supposé galiléen.

Forces appliquées ; Le poids $\vec{P}$ du solide, La réaction $\vec{R}$ du support, Les tensions $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ des ressorts (R_1) et (R_2).

A l'équilibre $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T}_{O1} + \vec{T}_{O2} + \vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$

Projectons cette relation sur X'X : $-T_{O1} + T_{O2} + 0 + 0 = 0$

$-kx_{O1} + kx_{O2} = 0 \Rightarrow x_{O1} = x_{O2} = x_0$

En mouvement $\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}$

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{R} + \vec{P} = M\vec{a}$$

Projection de cette relation sur X'X.

$$-T_1 + T_2 = Ma \Rightarrow -k(x_0 + x) + k(x_0 - x) = M\ddot{x}$$

$$-kx_0 - kx + kx_0 - kx = M\ddot{x} \Rightarrow -2kx = M\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{M}x = 0$$

- Loi horaire du mouvement.
- L'équation différentielle admet une solution de la forme ;

$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

A $t = 0$ $\left| \begin{array}{l} x = \overline{OC} = 2cm \\ \dot{x} = 0 \end{array} \right.$ $\quad \dot{x} = -X_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$\left| \begin{array}{l} \overline{OC} = X_m \cos\varphi \\ 0 = -X_m\omega \sin\varphi \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \cos\varphi = \dfrac{\overline{OC}}{X_m} \\ \sin\varphi = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \cos\varphi > 0 \\ \sin\varphi = 0 \end{array} \right. \text{ donc } \varphi = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M}} = \sqrt{\frac{2\times 13}{0,6}} = 6,6 \text{ rads}^{-1}; \quad \cos\varphi = 1 \Rightarrow X_m = \overline{OC} = 2cm$$

$$x = 2.10^{-2}\cos 6,6t \text{ ou } x = 2.10^{-2}\sin(6,6t + \frac{\pi}{2})$$

Pulsation $\omega_0 = 6,6$ rad s^{-1}

Période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{2k}}$, $T_0 = 0,95$s

3. Energie cinétique maximale.

$E = E_C + E_{pe}$, comme $E =$ constante $\Rightarrow E_{c\,max} = E_{p\,max}$

$$E_{C\max} = 2(\frac{1}{2}kX_m^{\ 2}) \Rightarrow E_{C\max} = kX_m^{\ 2}$$

$A.N: \; E_c = 13\times(2.10^{-2})^2 \Rightarrow E_c = 5,2\,.10^{-3}$ J

Abscisse de x pour laquelle l'énergie cinétique maximale est atteinte.

$(R)_1$

$E_c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} M X_m^2 \omega^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

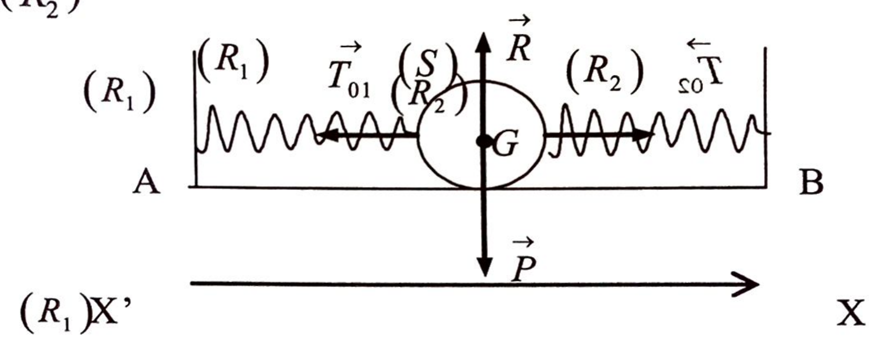
Ec est maximale si $\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = 1 \Rightarrow \sin(\omega_0 t + \varphi) = 1$; d'où $\cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$.

car $\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = 1$

$\cos(\omega_0 t + \varphi) = 0 \Rightarrow x = 0$ $\quad (R_1)$

L'énergie cinétique est maximale si x = 0 (passage à la position d'équilibre).

B 1) Allongement x_{02} du ressort (R_2)



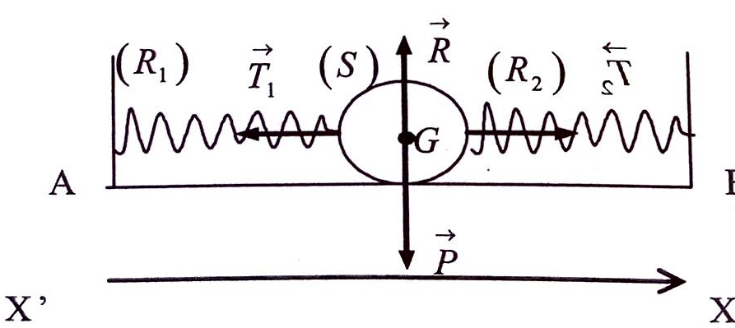
A l'équilibre $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T}_{O1} + \vec{T}_{O2} + \vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$

Projetons cette relation sur X'X : $-T_{O1} + T_{O2} + 0 + 0 = 0$

$-k_1 x_{O1} + k_2 x_{O2} = 0 \Rightarrow x_{O2} = k_1 \frac{x_{01}}{k_2}$

$AN: x_{02} = \frac{15 \times 4.10^{-2}}{10} = 6.10^{-2}$; $\quad X_{02} = 6\ cm$

2. Montrons que l'oscillateur est harmonique.



T.C.I $\sum \vec{F}_{ext} = M \vec{a}$

$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{R} + \vec{P} = M \vec{a}$

Projection de cette relation sur X'X

$-T_1 + T_2 = Ma$

$-k_1(x_{O1} + x) + k_2(x_{O2} - x) = M\ddot{x} \Rightarrow -k_1 x_{O1} + k_2 x_{O2} - k_1 x - k_2 x = M\ddot{x}$

$-(k_1 + k_2)x = M\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{M}x = 0$

Cette équation différentielle admet une solution de la forme $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$. Le mouvement de l'oscillateur étant rectiligne sinusoïdal, l'oscillateur est harmonique.

Pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M}}$

AN: $\omega = \sqrt{\frac{15+10}{0,6}} \approx 6,5 \Rightarrow \omega = 6,5\ \text{rads}^{-1}$;

Période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_1 + k_2}}$

AN: $T = 2\pi\sqrt{\frac{0,6}{15+10}} \Rightarrow T = 0,97\text{s}$

3. Expression de l'énergie cinétique du solide en fonction de t.

$E_C = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$ or $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

$\dot{x} = -Xm\omega\sin(\omega t + \varphi)$

$$t = 0 \left| \begin{array}{l} x = x_o = 5cm \\ \dot{x} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_o = X_m \cos\varphi \\ 0 = -X_m \omega \sin\varphi \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \cos\varphi > 0 \\ \sin\varphi = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \varphi = 0$$

$\cos\varphi = 1 \Rightarrow X_m = x_0 = 5\ cm$

$$Ec = \frac{1}{2}MX_m^2 \sin^2 \omega t \Rightarrow Ec = \frac{1}{2}.0,6 \times \left(5.10^{-2}\right)^2 \times \frac{25}{0,6}\sin^2 6,5t$$

$Ec = 3,13.10^{-2}\sin^2 6,5t.$

Exercice N° 7

1. Un ressort hélicoïdal à spires non jointives, de constante de raideur K, suspendu par une de ses extrémités à un point fixe, a pour longueur à vide $\ell_o = 15cm$. On suspend à l'autre extrémité un solide S de masse $M = 300g$. La longueur du ressort devient alors $\ell_1 = 21cm$
Déterminer la constante de raideur du ressort.

2. Le ressort est à présent fixé par l'une de ses extrémités à un point E du sommet d'un plan incliné d'angle α et a pour longueur à vide $\ell_o = 15cm$. Le solide S accroché à l'autre extrémité du ressort peut glisser sans frottement sur le plan incliné.

   a) Faire le schéma et représenter les forces appliquées au solide S à l'équilbre.

   b) Déterminer l'allongement $\Delta\ell$ du ressort en fonction de k, M,g et α.

   c) Calculer $\Delta\ell$ pour $\alpha = 30°$.

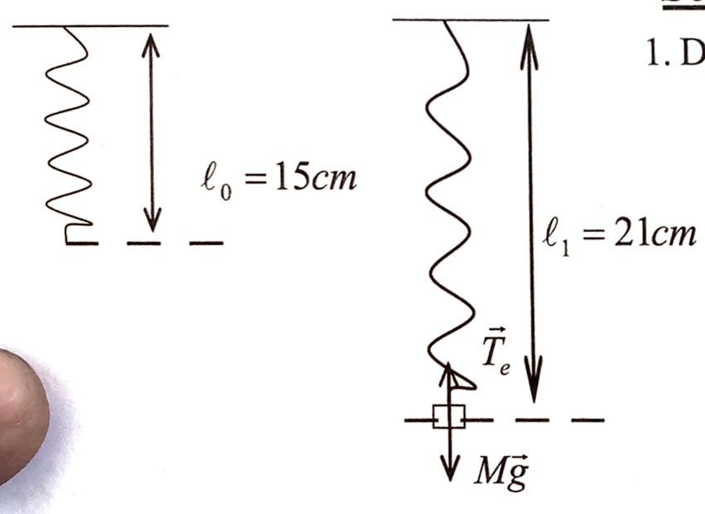
3. On écarte le solide S de sa position d'équilibre de $x_o = 6cm$ en le tirant vers le bas et on l'abandonne sans vitesse initiale à un instant $t = 0$ que l'on prendra comme origine des dates.

   a) Déterminer l'équation différentielle du mouvement de S. En déduire la pulsation ω_o et la période des oscillations harmoniques.

   b) En prenant comme origine des abscisses la position de S à l'équilibre, donner l'équation horaire du mouvement en précisant les valeurs de l'amplitude et de la phase.

   c) Calculer le temps au bout duquel le solide S passe pour la première fois par sa position la plus haute.

Solution



1. Détermination de k.

$$\Delta\ell = \ell_1 - \ell_0$$

Al'équilibre $T_e = Mg$

$$k\Delta\ell = Mg$$

$$k = \frac{Mg}{\Delta\ell} = \frac{Mg}{\ell_1 - \ell_0}$$

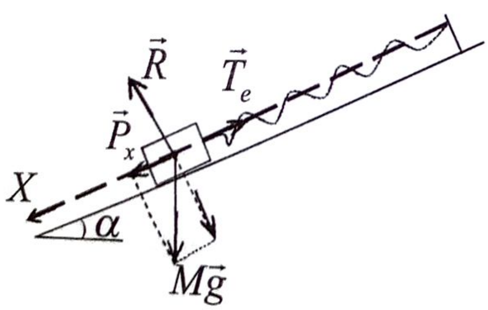
$$\text{AN: } k = \frac{0{,}3\times10}{6.10^{-2}} = \frac{300}{6} = 50N.m^{-1}$$

$$k = 50N.m^{-1}$$

2. a) Représentation des forces (voir figure)

b) Déterminons de $\Delta\ell$ *en fonction de* k, M, g *et* α

$T.C.I\ \vec{P} + \vec{T}e + \vec{R} = \vec{0}$



Projectons sur (G,E) : $-Te + P = 0$ soit

$$k\Delta\ell = Mg\sin\alpha \Rightarrow \Delta\ell = \frac{Mg\sin\alpha}{k}$$

c) $AN: \Delta\ell = \frac{0{,}3.10.0{,}5}{50} = 0{,}03\,m = 3\,cm$

3. A un instant quelconque on a :

a) Equation différentielle du mouvement de S

T.C.I $\vec{R}+\vec{T}+\vec{P}=M\vec{a}$.

En projection sur X'X on a :

$-T+Px=Ma \quad ; T=k\Delta\ell' \quad ; \quad \Delta\ell'=\Delta\ell+x$

$$-k(\Delta\ell+x)+P_x=Ma \Rightarrow -kx=M\frac{d^2x}{dt^2}$$

soit $M\ddot{x}+kx=0$

$$\ddot{x}+\omega_o^2x=0 \text{ avec } \omega_o^2=\frac{k}{M}$$

$$\omega_o=\sqrt{\frac{k}{M}} \quad , \quad T_o=\frac{2\pi}{\omega_o}=2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

AN: $\omega_o=12,9rd/s$, $T_o=0,49s$

b) Equation horaire du mouvement de S

$x=x_m\cos(\omega_0t+\varphi)x_0=x_m=6.10^{-2}m\omega_0=12,9rads^{-1}$

Déterminons φ

$t=0 \qquad x=x_0=x_m\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi=1 \Rightarrow \varphi=0$

$x=6.10^{-2}\cos 12,9t$

c) Temps au bout duquel S passe pour la première fois par sa position la plus haute.

$$t=\frac{T_0}{2} \Rightarrow t=\frac{0,49}{2}=0,245S$$

Exercice N° 8

1) On réalise le montage de la figure (1) avec un solide S de masse M = 120 g et un ressort $\mathfrak{R}$ de raideur K = 13,2 N m^{-1}

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement des oscillations verticales de cet oscillateur.

b) Déterminer la période propre T_0 de cet oscillateur.

2) On réalise maintenant le montage de la figure 2 avec le même solide S et deux ressorts identiques

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement des oscillations verticales du nouvel oscillateur.

b) Déterminer sa période propre T'_0.

c) Rechercher une relation entre T_0 et T'

Fig. 1

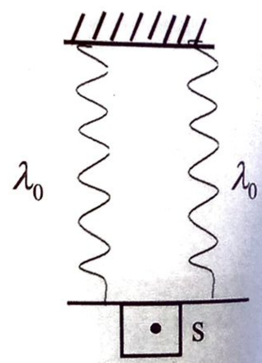
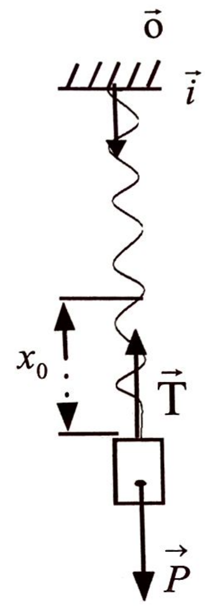


Fig. 2

Solution

a) Etablissons l'équation différentielle

Figure



– A l'équation $\vec{P} + \vec{T} = \vec{o}$

Projetons sur $(o, \vec{i})$ $P - T_o = o \Rightarrow P = T_o = K\,xo$

- En mouvement $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

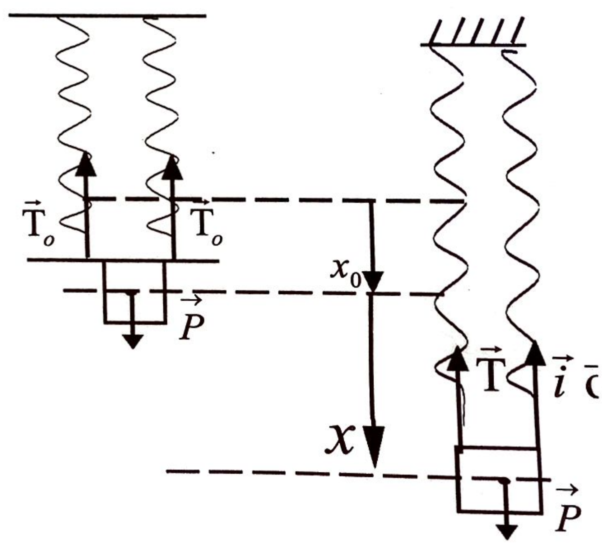
Projection sur $(o, \vec{i})$ $P - T = M\vec{a}$

$P - K\,(x + x_o = M\vec{a}$

$-k\,x = M\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}\,x = o$

b) Déterminons T_o $\quad \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T_o = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$

2) a.) Equation différentielle du nouvel oscillateur



C.E. $\vec{P} + 2\,\vec{T}_o = \vec{o}$

Projetons sur $10, \vec{i}$

$P - 2T_o = o \Rightarrow P = 2T_o = 2K\,X_o$ (1)

T.C.I

$\vec{P}_t - 2\vec{T} = M\vec{a}$

Projetons sur $(o, \vec{i})$

$P - 2T = M\vec{a}$

$P - 2K\,(x_o + x) = M\vec{a}$

$2K\,xo - 2K\,x = M\vec{a}$

$2K\,x = M\vec{a}$

$M\ddot{x} + 2k = o$

$\ddot{x} + \frac{2k}{M}x = o$

$\omega'^2_o = \frac{2k}{M} \quad \omega'_o = \sqrt{\frac{2K}{M}}$

b) Période de prope $T'_o = 2\pi\sqrt{\frac{M}{2K}}$

c) Relation entre To et T'_o $\quad \frac{To'}{To} = \frac{1}{2} \Rightarrow T'_o = \frac{To}{2}$

VIBRATION ET PROPAGATION

Chapitre 1

GÉNÉRALITÉS

RAPPEL DU COURS

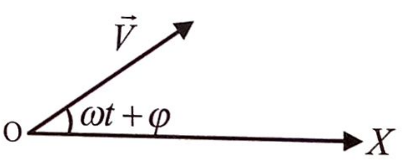
I <u>PHÉNOMÈNES PÉRIODIQUES</u> : Phénomène se répétant identique à lui même pendant des intervalles de temps égaux appelés période (T).

II <u>MOUVEMENT VIBRATOIRE</u> : Mouvement rapide, de part et d'autre d'une position d'équilibre.

A toute vibration peut-être attribuée un caractère sinusoïdal : $x = a\cos(\omega t + \varphi)$.

A toute fonction sinusoïdale on peut faire correspondre un vecteur tournant $\vec{V}$ dit de Fresnel ;

- Module du vecteur : a
- Vitesse angulaire : ω (pulsation).
- A un instant t on a : $\left(\overrightarrow{OX}, \vec{V}\right) = \omega t + \varphi$



III <u>Etude stroboscopique d'un mouvement périodique :</u>

<u>Stroboscope</u> : Source lumineuse émettant de brefs éclairs à intervalles de temps réguliers (Te)
Le stroboscope permet d'étudier des mouvements périodiques rapides.
<u>Observations</u> : En considérant un rayon peint sur un disque animé d'un mouvement circulaire uniforme de fréquence N, on observe :

- L'immobilité apparente avec un seul rayon.

Pour $Ne = \frac{N}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$.
L'immobilité apparente avec k rayons.
Pour $Ne = kN$, $k \in \mathbb{N}^*$.
Le mouvement ralenti :
Dans le sens réel : $N > Ne$.
Dans le sens inverse $N < Ne$.

Exercices

Exercice N° 1

Un disque blanc portant un secteur noir est fixé sur l'arbre d'un moteur dont on veut déterminer la vitesse angulaire de rotation.

Le moteur étant en rotation uniforme, on éclaire le disque avec une lumière stroboscopique. Le secteur semble immobile lorsque la fréquence des éclairs est Ne = 60 Hz.

1. Déterminer les valeurs possibles de la fréquence et de la vitesse angulaire de rotation du disque.
2. Lorsqu'on augmente progressivement la valeur de la fréquence des éclairs, on observe à nouveau l'immobilité pour Ne = 120 Hz, puis on ne l'observe plus. En déduire la valeur de la vitesse angulaire de rotation du disque.
3. Qu'observe-t-on sur le disque pour Ne = 240 Hz ; Ne = 360 Hz ; Ne = 118 Hz ; 122Hz ?

Solution

1. Valeurs possibles de la :

- fréquence : $Ne = \frac{N}{k} \Rightarrow N = kNe$ N = 60 k , $k \in \mathbb{N}^*$

- vitesse angulaire de rotation : $\omega = 2\pi N$, N=376,8k , $k \in \mathbb{N}^*$

2. $Ne_{max} = 120\text{Hz}$ Ne est maximale si k =1

$N = Ne_{max} = 120\text{Hz}$.

Valeur de ω : $\omega = 2\pi N = 2\pi \times 120 \Rightarrow \omega = 753,6 rads^{-1}$

3. Observations si

- Ne = 240Hz ; N = 120Hz $Ne = 2N \Rightarrow Te = \frac{T}{2}$

On observe deux secteurs immobiles.

- Ne = 360Hz Ne = 3N $\Rightarrow Te = \frac{T}{3}$

On observe trois secteurs noirs immobiles

- Ne = 118Hz Ne < N $\Rightarrow$ Te > T. Entre deux éclairs le disque effectue un peu plus d'un tour. On observe alors un secteur noir au ralenti dans le sens réel du mouvement.
- Ne = 122Hz Ne > N $\Rightarrow$ Te < T. Entre deux éclaires le disque effectue un peu moins d'un tour . on observe alors un secteur noir au ralenti dans le sens inverse du mouvement.

Exercice N° 2

Dans l'étude stroboscopique d'une lame vibrante, le disque troué qui produit les éclairs a p = 20 trous et fait n tours par seconde.

1. Sachant que la plus grande valeur de n pour laquelle la lame paraît unique et immobile est n = 20, calculer la fréquence du vibreur.

Solution

1. Fréquence du vibreur : Elle correspond à la fréquence des éclairs pour n=20.

$N = Ne = 20n \Rightarrow N = 400Hz$.

2. Aspect de lame.

Pour n=10 Ne=20n Ne=200Hz

$$Ne = \frac{N}{2} \Rightarrow N = 2Ne \Rightarrow T = \frac{Te}{2}$$

La lame paraît unique et immobile.

- Pour n = 40 $\Rightarrow$ $Ne = 20 \times 40 = 800Hz$

$Ne = 2N$ $T = 2T_e$

La lame paraît dédoublée et immobile.

- Pour n =19,75 Ne = 395Hz

$Ne < N \Rightarrow Te > T$

Entre deux éclairs la lame fait un peu plus d'une oscillation. La lame paraît se déplacer au ralenti dans le sens réel du mouvement.

Exercice N° 3

Un robinet qui fuit laisse échapper des gouttes d'eau à un rythme régulier (N). Nous supposons que la hauteur de chute est suffisante pour que toutes les gouttes aient toutes la même vitesse.
Une observation stroboscopique permet de les immobiliser. La plus grande fréquence du stroboscope pour laquelle l' immobilité apparente est obtenue est Ne = 500Hz.

1. Quelle est la fréquence N d'apparition des gouttes et quelle est leur vitesse, sachant qu'elles sont distantes de 2cm ?
2. Ne varie légèrement, entre 510Hz et 490Hz.

Quels sont les mouvements apparents des gouttes correspondant à ces deux fréquences.

Solution

1. Ne = 500Hz étant la plus grande fréquence pour laquelle l'immobilité des gouttes est obtenue, elle correspond alors à la fréquence N d'apparition de ces gouttes.

$$N = Ne = 500Hz$$

- vitesse des gouttes.

période d'apparition des gouttes: $T = \frac{1}{N}$ $T = \frac{1}{500} = 2.10^{-2}s$

$$d = VT \Rightarrow V = \frac{d}{T} \Rightarrow V = \frac{2.10^{-2}}{2.10^{-3}} = 10ms^{-1} \quad ; \quad V = 10ms^{-1}$$

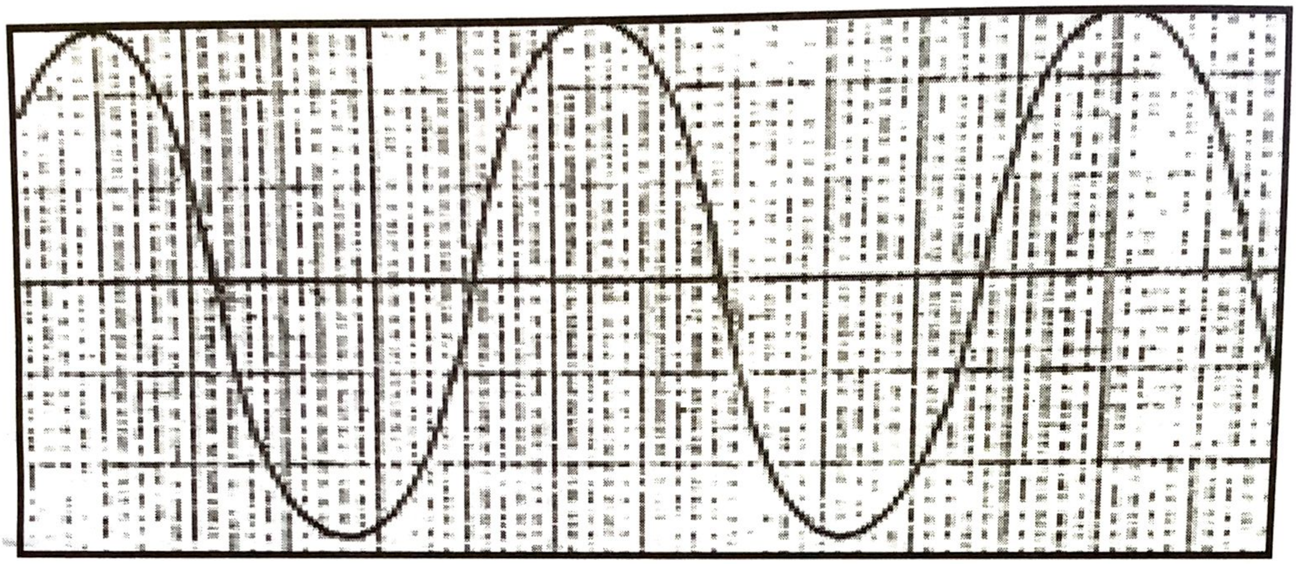
2. Pour Ne = 510Hz, on a Ne>N $\Rightarrow$ Te <T. Entre deux éclairs une goutte parcourt une distance légèrement inférieure à d = 2cm. On observe, alors les gouttes se déplacer au ralenti dans le sens inverse du mouvement.

Pour Ne = 490 Hz $Ne < N \Rightarrow Te > T$. Entre deux éclairs une goutte parcourt une distance légèrement supérieur à d = 2cm. On observe alors les gouttes se déplacer au ralenti dans le sens réel.

Exercice N° 4

La figure ci-dessous, représente l'aspect de l'écran d'un oscillographe avec les réglages suivants :
$Ky = 2V\ cm^{-1}$; balayage : $0{,}2ms.cm^{-1}$.

1. Déterminer l'amplitude, la période et la fréquence de la tension appliquée.
2. Donner l'aspect de l'écran si l'on change le réglage: $K = 1V\ cm^{-1}$; balayage: $0{,}1ms.\ Cm^{-1}$.
3. Cet oscillogramme peut-il être celui d'un son audible par l'homme ?
   Peut-il correspondre à une voix humaine ?



Solution

1. Déterminons :
   - L'amplitude : soit l'amplitude a

$$a \rightarrow 1{,}4cm$$
$$2V \rightarrow 1cm \quad \Rightarrow \quad a = 2{,}8V$$

   - La période T

$$T = 2{,}7 \times 0{,}2$$
$$T = 5{,}4.10^{-4}\ s$$

   - La fréquence $N = \dfrac{1}{T} \Rightarrow N = \dfrac{10^4}{5{,}4} = 1851 Hz$.

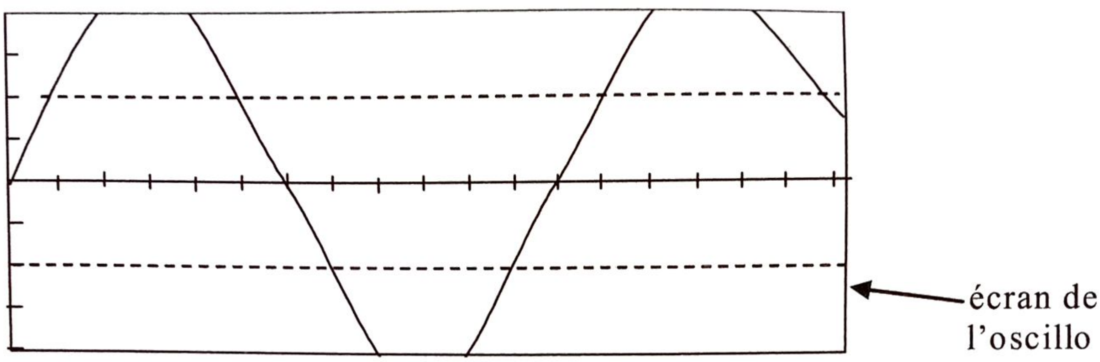
2. Donnons l'aspect de l'écran :
   En changeant le réglage : $Ky = 1Vcm^{-1}$; balayage : $0{,}1ms.cm^{-1}$
   - Longueur correspondant à une période.

$$\frac{0{,}1ms}{1cm} = \frac{0{,}54ms}{x} \Rightarrow x = 5{,}4cm$$

- Hauteur de l'amplitude avec le nouveau réglage.

$$\frac{1V}{1cm} = \frac{2,8V}{y} \Rightarrow y = 2,8cm$$

<u>Aspect de l'écran</u>



3. Oui cet oscillogramme peut être celui d'un son audible, par l'homme parce que sa fréquence est comprise dans l'intervalle [20Hz ; 20000Hz] correspondant à l'intervalle des fréquences audibles par l'homme. Il ne peut correspondre à une voix humaine, car la voix humaine est périodique mais non sinusoïdale.

Chapitre 2

PROPAGATION D'UN PHÉNOMÉNE VIBRATOIRE

RAPPEL DU COURS

I LONGUEUR D'ONDE :

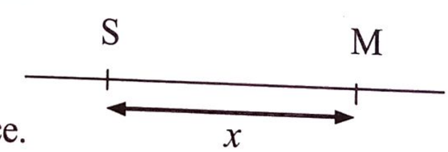
Pour une perturbation se propageant dans un milieu donné à la vitesse C, on définit la longueur d'onde par $\lambda = CT$. C est aussi appelé célérité.
Pour une corde tendue de masse m de longueur l.

$$C = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

avec F : tension de la corde

μ : masse linéique $\mu = \frac{m}{\ell}$

II ETAT VIBRATOIRE D'UN POINT M



Equation horaire du mouvement de M.
Soit ys = $a \sin \omega t$ équation horaire de la source.
Pour M situé à la distance x de la source S, l'équation de son mouvement s'établit comme suit
$y_M = a \sin \omega (t - \theta)$ avec $\theta = \frac{x}{c}$ décalage horaire entre S et M

$$y_M = a \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \right)$$

- Comparaison des états vibratoires de S et M.

- M vibre en phase avec la source S si $x = k\lambda$
- M vibre en opposition de phase avec S si $x = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$
- M vibre en quadrature de phase avec la source S si $x = (2k + 1)\frac{\lambda}{4}$

Exercices

Exercice N° 1

Un dispositif approprié laisse tomber en chute libre, de l'eau goutte à goutte, à raison de 10 gouttes par seconde. On éclaire la verticale de chute à l'aide d'une source lumineuse devant laquelle tourne un disque comportant 5 trous régulièrement repartis sur sa périphérie

1. Montrer que pour une vitesse de rotation convenable du disque, n tours/s on voit une succession de gouttes immobiles.
2. Déterminer la valeur maximale n_o de n.
3. Comment se répartissent les gouttes sur la verticale ?
4. Entre quatre crêtes consécutives la distance mesurée radialement est 18 cm. Quelle est la célérité de la propagation des ébranlements transversaux à la surface de l'eau.

Solution

Exercice N° 1

N = 10 gouttes/s = 10 HZ

Ne = np   p = 5 trous

1. a) Observation des gouttes immobiles.

$$Ne = \frac{N}{k} \quad , k \in \mathbb{N}^*$$

$$np = \frac{N}{k} \Rightarrow npk = N$$

$$n = \frac{N}{pk} = \frac{10}{5k} = \frac{2}{k} \Rightarrow n = \frac{2}{k} \quad ; \; k \in \mathbb{N}^*$$

2. Valeur maximale n_o de n

   k = 1 n_o = 2 tours/s

3. Les gouttes semblent immobiles les unes à la suite des autres.
   - Elles sont équidistantes.
4. Calcul de la célérité de la propagation :

d =18cm. Entre 4 crêtes consécutives on a 3λ

$$d = 3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{d}{3} = \frac{18}{3} = 6cm$$

$$\lambda = CT \Rightarrow \lambda = \frac{C}{N} \qquad \text{D'où } C = \lambda N$$

$$C = 6.10^{-2}.10 \quad ; \qquad C = 0{,}6 \ ms^{-1}$$

Exercice N° 2

L'extrémité A d'une lame vibrante est animée d'un mouvement rectiligne sinusoïdal vertical de fréquence N = 100HZ et d'amplitude a = 210^{-3} m. En A est attaché l'extrémité d'une corde horizontale de 1m de longueur, dont l'autre extrémité est fixée à un dispositif empêchant la réflexion des ondes. Ses vibrations transversales se propagent alors sur la corde avec l'amplitude a et une célérité C = 20 ms^{-1}. L'origine des dates est choisie à l'instant où A quitte sa position de repos dans le sens des élongations positives, le sens positif étant vers le haut.

1. Etablir l'équation horaire du mouvement de A.
2. Indiquer où sont situés les points de la corde qui vibrent en phase avec A. Quel est leur nombre ?
3. Etablir l'équation horaire du mouvement du point M situé à la distance d = 30cm de A

Comparer son mouvement à celui de A.

4. Représenter l'aspect de la corde à la date t = 0,02s en prenant pour échelle :
   - En abcisse 1cm pour 5cm de corde.
   - En ordonnée 1cm pour 1mm d'élongation.

Solution

N= 100HZ a = 210^{-3} m $\ell = 1$m C = $20ms^{-1}$

$$t = 0 \begin{pmatrix} y = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{pmatrix}$$

1. Equation horaire du mouvement de A.

$$y_A = a\sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \dot{y}_A = a\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

$$t = 0 \left| \begin{array}{l} 0 = a\sin\varphi \\ a\omega\cos\varphi > 0 \end{array} \right. \quad \begin{cases} \sin\varphi = 0 \\ \cos\varphi > 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = 0 \;; \quad y_A = 2.10^{-3}\sin 200\pi t$$

2. Points de la corde qui vibrent en phase avec le point A.

Un point M d'abscisse x vibre en phase avec A si $x = k\lambda$ *avec* $k \in N$

$$x = k\frac{C}{N} \Rightarrow \text{ x } = 0,2 \text{ k}$$

k = 1	x = 0,2m ;	k = 2	x = 0,4m
k= 3	x = 0,6m ;	k = 4	x = 0,8m
k= 5	x = 1m		

Il y a 5 points qui vibrent en phase avec le point A.

3. Equation horaire d'un point M.

Le point M reproduit le mouvement A avec un retard $\theta = \dfrac{x}{C}$

$$y_M = a\sin\frac{2\pi}{T}(t-\theta) \quad ; \quad y_M = a\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad ;$$

$$\lambda = \frac{C}{N} = 0,2m; \qquad x = d = 30.10^{-2}\,m$$

$$y_M = 2.10^{-3}\sin(200\pi t - 3\pi)$$

Comparaison des 2 mouvements.

$\Delta\varphi = 3\pi$ A et M vibrent en opposition de phase.

4. Représentons l'aspect de la corde à t = 0,02s.

$$\frac{t}{T} = tN = 0,02x100 = 2$$

t = 2T, la corde est perturbée sur une longueur $\ell = 2\lambda = 40cm$

$$y_M = 2.10^{-3}\sin\left(200\pi \times 0,02 - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$y_M = 210^{-3}\sin\left(4\pi - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \qquad y_M = -2.10^{-3}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}$$

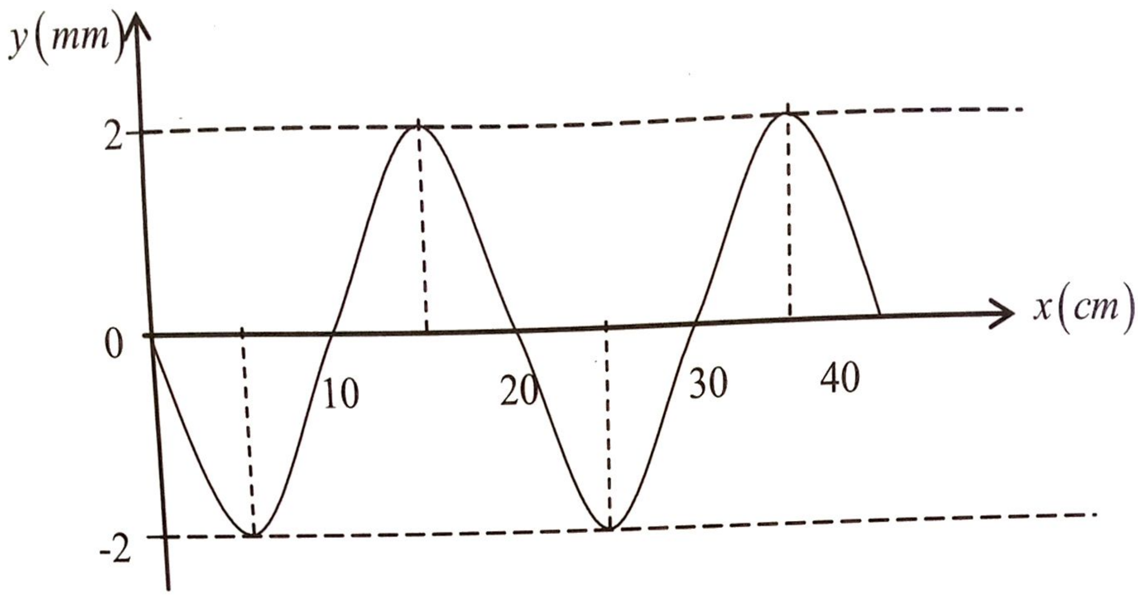
$x = 0$ $\qquad$ $y_M = 0$

$x = \frac{\lambda}{4}$ $\qquad$ $y_M = -2.10^{-3}\sin\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{\lambda}{4} = -2.10^{-3}\,m$

$x = \frac{\lambda}{2}$ $\qquad$ $y_M - 2.10^{-3}\sin\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{\lambda}{2} = 0$

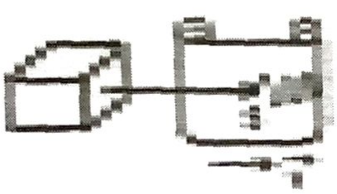
$x = \frac{3\lambda}{4}$ $\qquad$ $y_M = -2.10^{-3}\sin\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{3\lambda}{4} = 2.10^{-3}\,m$

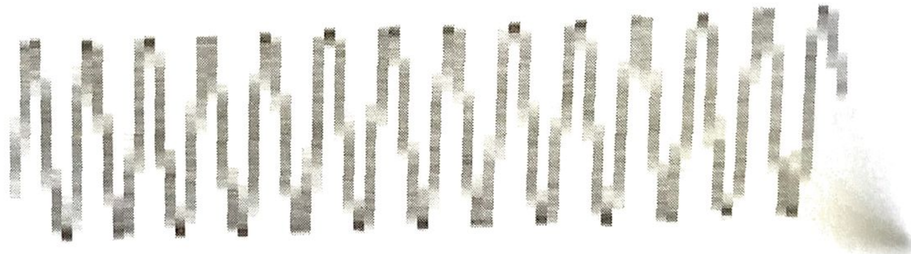
$x = \lambda$ $\qquad$ $y_M = -2.10^{-3}\sin\frac{2\pi}{\lambda}\times\lambda = 0$



Exercices N° 3 : (Partie B bac Niger 94)

1. On veut vérifier expérimentalement la fréquence N d'un vibreur. La valeur donnée par le constructeur est N = 25 HZ. On enregistre les vibrations de l'extrémité S grâce au procédé représenté ci-dessous.





Le papier défile à la vitesse constante $V = 20\ cm\ s^{-1}$, on obtient le tracé ci-dessus (en grandeur réelle).

a) Montrer que l'expérience confirme la valeur N = 25HZ.

b) Quelle est l'amplitude de S ?

2. On fixe une corde élastique à l'extrémité S, l'autre extrémité de la corde horizontale étant reliée à un dispositif amortisseur empêchant toute réflexion, on tend légèrement la corde.

Quand la corde vibre, on l'éclaire à l'aide d'un stroboscope de fréquence Ne de telle façon qu'elle paraisse immobile.

2.1. Expliquer cette immobilité apparente et déterminer la relation reliant N à Ne dans ce cas.

2.2. Avec cet éclairage, la corde a la forme d'une sinusoïde dont les sommets sont équidistants de 10 cm.

a) Représenter la forme de la corde en vraie grandeur.

b) En déduire la célérité des ondes le long de cette corde.

2.3. L'équation horaire du mouvement de S peut s'écrire $Ys(t) = a \sin \omega t$, en faisant un choix judicieux de l'instant $t = 0\,s$.

a) Quel est ce choix ?

c) En déduire l'équation horaire d'un point M situé à la distance SM = 62,5 cm de S (on négligera l'amortissement de l'amplitude des ondes).

d) Représenter graphiquement $Y_S(t)$ *et* Y_M dans un même repère d'échelles.

1 cm $\leftrightarrow$ 0,02 s et 1 cm $\leftrightarrow$ 0,5 cm.

Solution

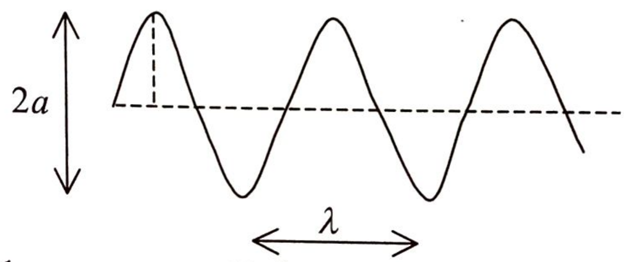
1. a) Montrons que N = 25 Hz.

Sur le tracé $10\lambda = 8cm \Rightarrow \lambda = \frac{8}{10} = 0{,}8cm = 8.10^{-3}\,m$

$\lambda = VT = \frac{V}{N} \Rightarrow N = \frac{V}{N}$; $AN : N = \frac{20.10^{-2}}{8.10^{-3}} \Rightarrow$ N = 25 Hz

L'expérience confirme bien la valeur de N.

b) Amplitude de S



Sur le tracé $2a = 2cm \Rightarrow a = 1cm$; $a = 10^{-2}\ m$

2. 2.1. Explication du phénomène.

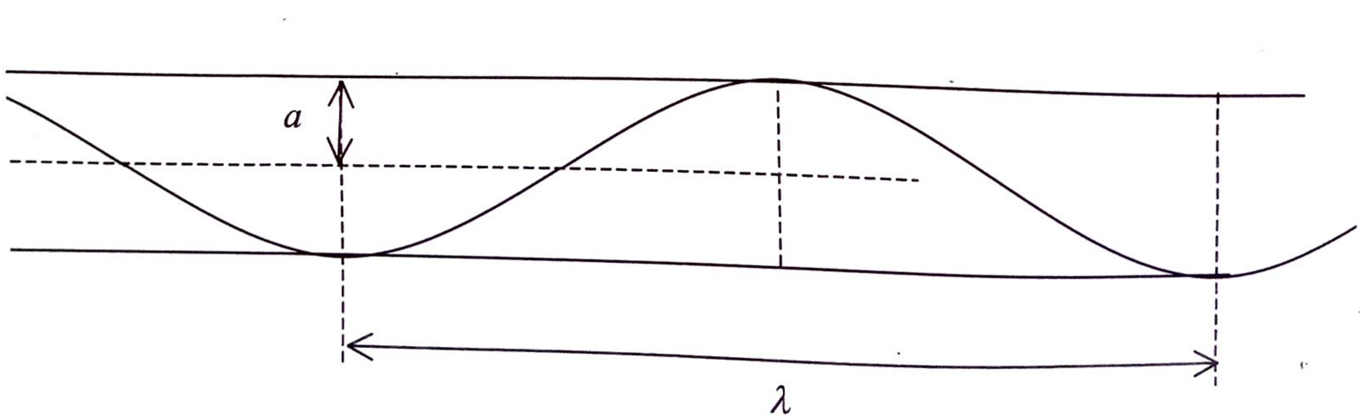
Entre deux éclairs consécutifs, de durée Te, la corde effectue k vibrations (k ∈ ℕ *). Elle est toujours éclairée dans la même position, elle paraît immobile.

Relation reliant N et N_e.

$T_e = kT$ donc $N_e = \frac{N}{k} = k \in \mathbb{N}^*$

2.2 a) Représentation de l'aspect de la corde

λ =10 cm sur la corde N = 25Hz et a = 1cm



b) La célérité des ondes.

$\lambda = CT\dfrac{C}{N} \Rightarrow C = \lambda N$; AN : $C = 0{,}1 \times 25$; C = 2,5ms-1

c) L'équation horaire de M tel SM = 62,5cm.

$y_s(t) = a\sin\omega t \Rightarrow \varphi = 0$. Donc à t=0 $\begin{cases} y = 0 \\ \dot{y} > 0 \end{cases}$

Le point M reproduit le mouvement de S avec un retard : $\theta = \dfrac{SM}{C}$

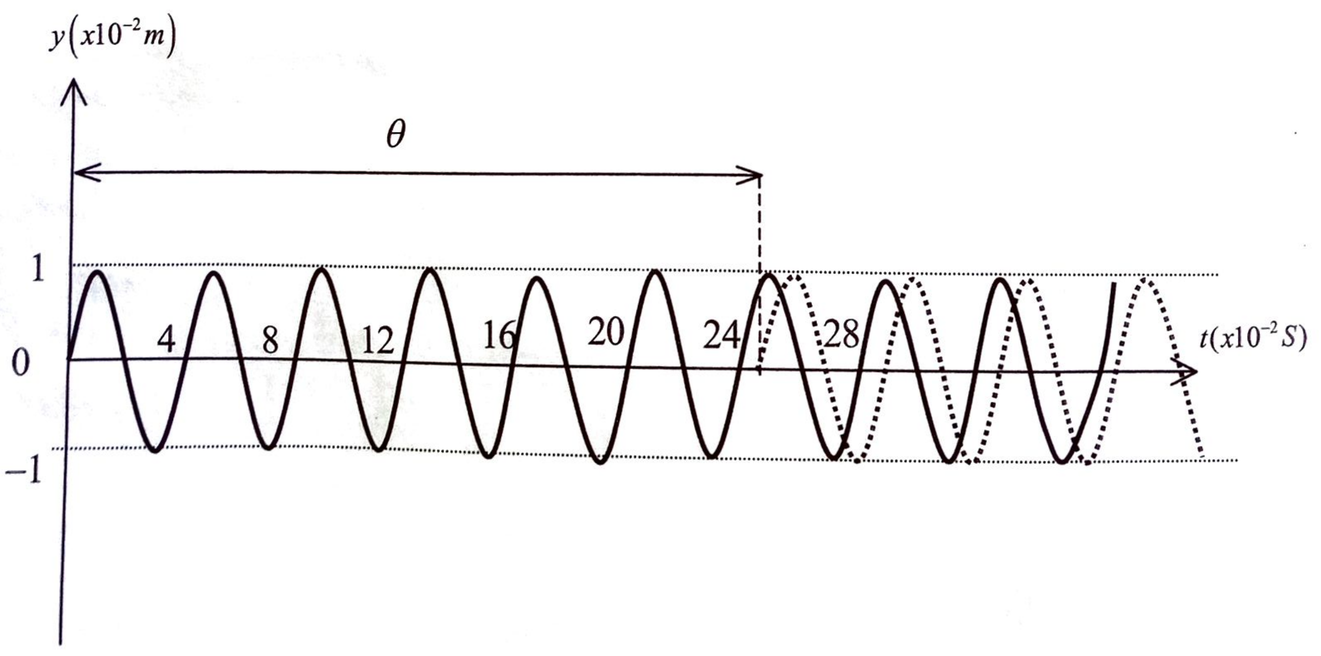
$y_M = a\sin\omega(t-\theta) = a\sin\left(2\pi\omega t - \dfrac{2\pi N.SM}{C}\right)$; $y_M = 10^{-2}\sin(50\pi t - \dfrac{\pi}{2})$

d) Représentation graphique de $y_S(t)$ et $y_M(t)$

a = $10^{-2} m$ $\Rightarrow$ a = 1cm

$T = \dfrac{1}{N} = 0{,}04s = 4.10^{-2}$ s ; $\theta = \dfrac{SM}{C} = \dfrac{62{,}5.10^{-2}}{2{,}5} = 0{,}25s$

$\dfrac{\theta}{T} = \dfrac{0{,}25}{0{,}04} = 6{,}25 \Rightarrow \theta = 6{,}25\ T$



Exercice N° 4

La pointe S d'un vibreur animé d'un mouvement sinusoïdal d'amplitude $a = 10^{-3}$ m ; de fréquence 100 Hz frappe la surface d'une eau initialement au repos. La vitesse de propagation des ondes à la surface de l'eau est $0,40 ms^{-1}$.

1. a) Ecrire l'équation horaire du mouvement d'un point M de la surface de l'eau, situé à la distance d de la source. On prendra comme origine des temps, l'instant où la pointe en contact avec la surface de l'eau immobile se met à vibrer en se déplaçant dans le sens négatif.

b) Calculer l'élongation et la vitesse de M et préciser le sens de son mouvement pour $d = 4.10^{-2}$ m et $t = 0,125$ s.

c) Calculer la distance parcourue par l'onde à l'instant $t = 0,125$s.

d) Représenter l'aspect de la surface de l'eau à cet instant. (Faire une coupe dans un plan vertical contenant la source.)

2. La pointe S du vibreur est à présent reliée à une corde de longueur 2m, tendue horizontalement. L'autre extrémité A de la corde est reliée à un dispositif d'amortissement empêchant toute réflexion. La célérité des ondes de la corde est $C = 30 ms^{-1}$. La fréquence reste inchangée.

a) Comparer le mouvement d'un point M de la corde à celui de S si $d = SM = 60$ cm.

b) Déterminer les positions par rapport à S des points vibrant en opposition de phase avec S. En déduire leur nombre.

c) Soient deux points M_1 et M_2 de la corde dont les positions respectives par rapport à la source S sont $x_1 = 82,5$ cm et $x_2 = 120$ cm. Comparer les mouvements de M_1 et M_2.

Solution

1. a) Equation horaire de la source S.

$$y_S = a\sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad t = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ \dot{y} < 0 \ (\text{sens négatif}) \end{cases}$$

$$\dot{y} = a\omega\cos(\omega t + \varphi) \quad ; \quad t = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = a\sin\varphi \\ a\omega\cos\varphi < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\varphi = 0 \\ \cos\varphi < 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \pi$$

$$y_S = 10^{-3}\sin(200\pi t + \pi) \quad \text{ou} \quad y_S = -10^{-3}\sin 200\pi t$$

- Equation du mouvement de M.

M reproduit le mouvement de S, de façon identique avec un retard : $\theta = \dfrac{d}{c}$

$$y_M = 10^{-3}\sin\left[200\pi(t - \theta) + \pi\right] \quad ; \quad y_M = 10^{-3}\sin\left(200\pi t - 500\pi d + \pi\right)$$

D'ou $\quad y_M = -10^{-3}\sin(200\pi t - 500\pi d)$

b) Elongation de M si $d = 4.10^{-2}$ m et $t = 0,125$s.

$$y_M = -10^{-3}\sin\left(200\pi \times 0,125 - 500\pi \times 4.10^{-2}\right)$$

$$y_M = -10^{-3}\sin\left(25\pi - 20\pi\right)$$

$$y_M = 0$$

Vitesse de M.

$$\dot{y}_M = -10^{-3}.200\pi\cos\left(200\pi t - 500\pi d\right)$$

$$\dot{y}_M = -10^{-3}.200\pi\cos\left(25\pi - 20\pi\right)$$

$$\dot{y}_M = 10^{-3}.200\pi$$

$$\dot{y}_M = V_M = 0,63 ms^{-1}$$

$V_M > 0$, le point M se déplaçait dans le sens positif.

c) Distance parcourue par l'onde.

$\frac{t}{T} = 0,125 \times 100 = 12,5 \Rightarrow t = 12,5$ T.

En une période la longueur parcourue par l'onde est λ .

Donc $\ell = 12,5\ \lambda$; $\lambda = C.T = \frac{C}{N} \Rightarrow \ell = 12.5\frac{C}{N}$

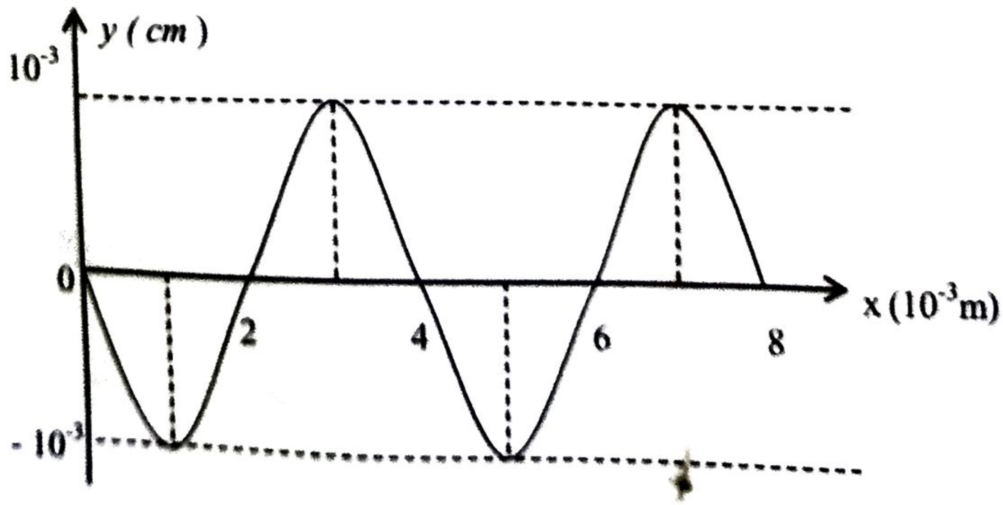
$\ell = 12,5.\frac{0,4}{100}$; $\ell = 5.10^{-2}$m

d) L'aspect de la surface de l'eau.

$y_M = -10^{-3}\sin(200\pi t - 500\pi d)$; $t = 0,125s \Rightarrow y_M = -10^{-3}\sin\left(25\pi - 500\pi d\right)$

$y_M = -10^{-3}\sin 500\pi d$

Représentation sur 2 λ

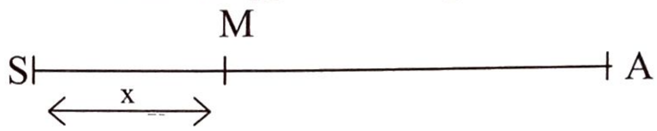


2. a) Comparaison des mouvements de S et M.

$$\frac{SM}{\lambda}=\frac{d}{CT}=\frac{dN}{C}=\frac{60.10^{-2}\times 100}{30}=2\Rightarrow d=2\lambda$$

Est de la forme d = k λ, donc S et M vibrent en phase.

b) Positions des points vibrant en opposition de phase avec S.



$$x=(2k+1)\frac{\lambda}{2}=(2k+1)\frac{C}{2N} \qquad k\in\mathbb{N}$$

$$x=(2k+1)\frac{30}{2\times 100}=0,3k+0,15 \quad \text{avec } 0\le x\le 2m$$

k = 0 x = 0,15m

k = 1 x = 0,45

k = 2 x = 0,75

k = 3 x = 1,05

k = 4 x = 1,35m

k = 5 x = 1,65m

k = 6 x = 1,95m

- Il y a 6 points sur SA qui vibrent en opposition de phase avec S.

c) Comparaison des mouvements de S, M_1 et M_2.

$$\frac{SM_1}{\lambda}=\frac{82,5.10^{-2}}{0,3}=\frac{11}{4}\Rightarrow SM_1=11.\frac{\lambda}{4};$$ S et M_1 vibrent en quadrature de phase.

$$\frac{SM_2}{\lambda}=\frac{120.10^{-2}}{0,3}=4\Rightarrow SM_2=4.\lambda \ ;$$ S et M_2 vibrent en phase.

$$\frac{x_2-x_1}{\lambda}=\frac{(120-82,5)10^{-2}}{0,3}=\frac{5}{4};$$ M_1 et M_2 vibrent en quadrature de phase.

Exercice N° 5

Un haut-parleur alimenté par un générateur GBF, émet un son de fréquence N =1 000Hz et joue le rôle d'une source ponctuelle sonore.

Un microphone est placé en un point M_1 quelconque devant S et il est relié à la voie A d'un oscillographe.

1. Quelle courbe observe-t-on, sur l'écran (comportant 10 divisions) lorsque le balayage est réglé sur 200µs /div ?

3. Un second microphone est placé en un point M et relié à la voie B de l'oscillographe bicourbe. SM_1 vaut 15cm. La célérité C du son dans l'air vaut 340m.s^{-1}.
Comparer les courbes (1) et (2) obtenues sur l'écran et les tracer.

a) lorsque SM_2 =49cm

b) lorsque SM_2 = 32cm

c) lorsque SM_2 =40,5cm

Solution

1. Observation sur l'écran.

$$T = \frac{1}{N} = \frac{1}{1000} \Rightarrow T = 10^{-3}\,s$$

Temps correspondant à l'écran : t = 200µs/div × 10div = 2000µs =2.10^{-3}s.
t = 2T

On observe sur l'écran la sinusoïde des temps sur deux périodes.

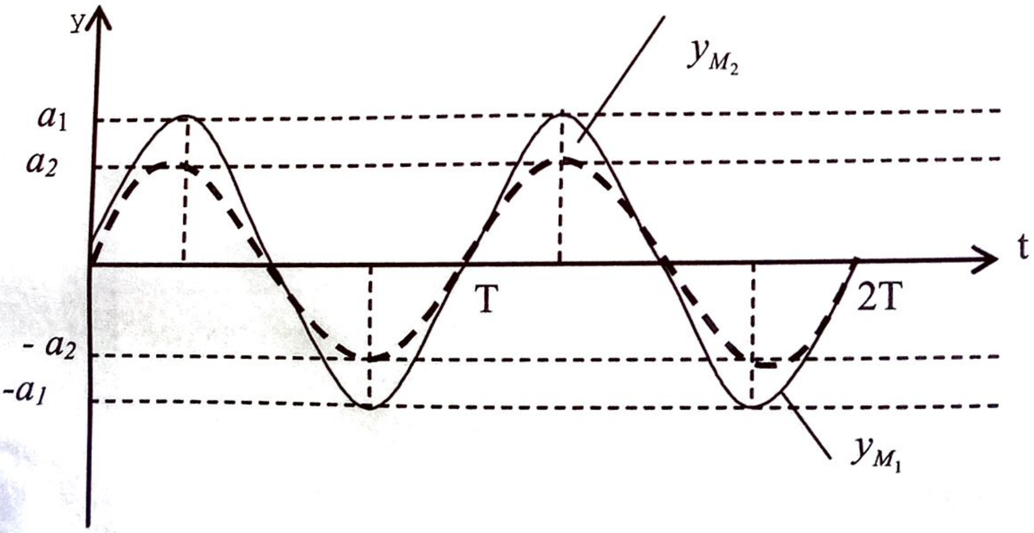
2. Lorsque le microphone passe d'un point M_1 à un autre : la période ne varie pas mais l'amplitude varie.

3. Comparaison des courbes (1) et (2).

$\lambda = CT = 340 \times 10^{-3} = 34.10^{-2}\,m \Rightarrow \lambda = 34cm$

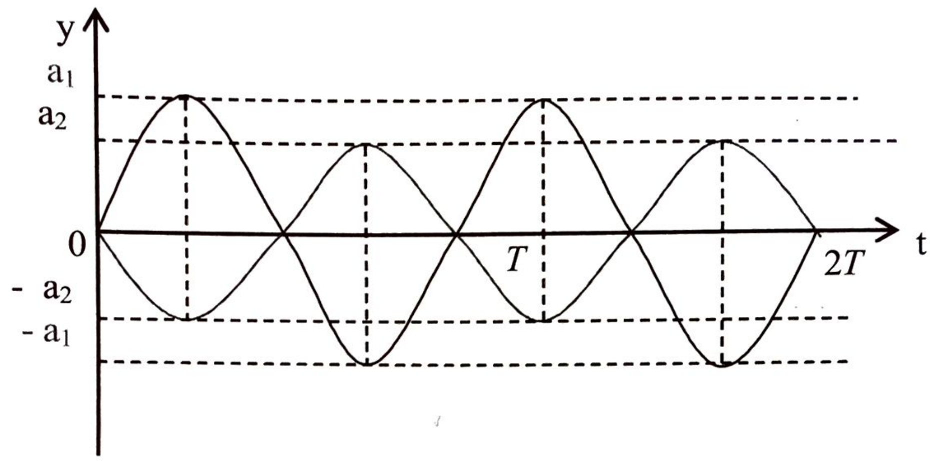
a) SM_2 = 49cm.

$\frac{SM_2 - SM_1}{\lambda} = \frac{49-15}{34} = 1;$ y_{M_2} *et* y_{M_1} sont en phase



b) $SM_2 = 32\text{cm}$

$$\frac{SM_2 - SM_1}{\lambda} = \frac{32-15}{34} = \frac{1}{2}$$. Donc y_{M_1} *et* y_{M_2} sont en opposition de phase.

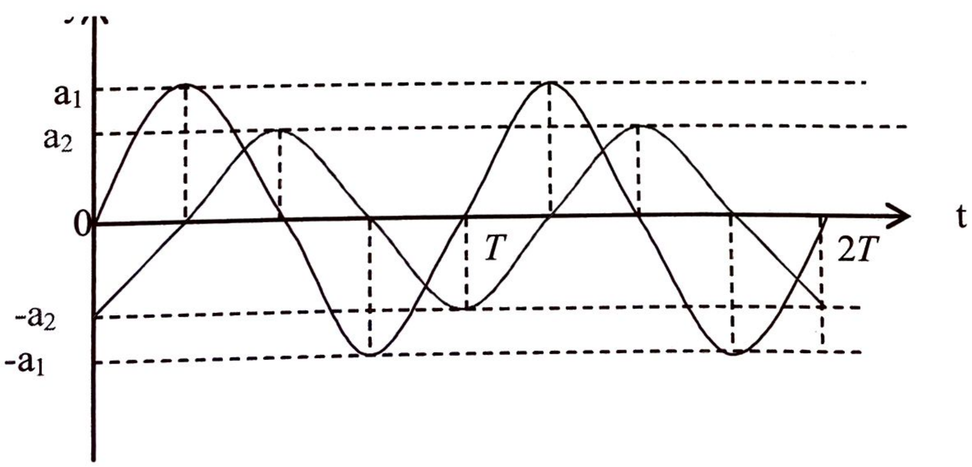


gure 10

c) $SM_2 = 40{,}5\text{cm}$

$$\frac{SM_2 - SM_1}{\lambda} = \frac{40{,}5-15}{34} = \frac{3}{4}$$

Y_{M_1} *et* Y_{M_2} sont en quadrature de phase .



Exercice N° 6 : Bac Niger 2006 série D

Un haut-parleur émet à l'origine O d'un axe OX, une onde sonore progressive de fréquences f = 680 Hz.

1. On considére un point M_1 d'abscisse x situé sur l'axe OX.

   a) Déterminer l'équation horaire de la vibration sonore en M.

   b) Dire quand est-ce-que M vibre en phase, en opposition de phase avec la source lorsqu'il est atteint par la vibration issue de 0.

2. Pour déterminer la longueur d'onde (λ), le son est capté par deux microphones identiques M_1 et M_2 d'un oscillographe bicourbe. Les microphones M_1 et M_2 Considérés comme ponctuels sont progressiveent écartés l'un de l'autre jusqu'au ce que l'on observe deux courbes en opposition de phase sur l'écran de oscillographe. La distance $M_1 M_2$ séparant les deux microphones est alors : d = 25 cm.

   a) Donner les équations horaires des vibrations enregistrées par les microphones M_1 et M_2

   b) Etablir une relation liant la distance d et la longueur d'onde λ du son emis par le haut-parleur.

   c) En déduire la longeur d'onde λ.

3. En considérant un point M tel que OM = 0,875 m, donner une représentation graphique des vibrations sonorer en O et M.

Solution

1. a) Equation horaire de la vibration au point M. Soit :

$$y = A \sin \omega t = A \sin \frac{2\pi}{T} t \quad \text{Equation de la source}$$

$$y_M = A \sin \frac{2\pi}{T}(t - \theta) \text{ avec } \theta = \frac{x}{C} \quad y_M = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$y_M = A \sin \left(2\pi ft - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

b) M vibre en phase avec la source pour : $(\Delta\varphi) = \frac{2\pi x}{\lambda} = 2K\pi \Rightarrow x = K\lambda$

M vibre en opposition de phase avec la source pour :

$$(\Delta\varphi) = \frac{2\pi x}{\lambda} = (2K+1)\pi \Rightarrow x = (2K+1)\frac{\lambda}{2}.$$

2. a) Equation de la vibration captée par M_1.

$$y_{M_1} = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right)$$

Equation de la vibration captée par M_2.

$$y_{M_2} = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_2}{2}\right)$$

b) Relation entre d et λ.

M_1 et M_2 sont en opposition de phase.

$$(\Delta\varphi) = \frac{2\pi}{\lambda}|x_2 - x_1| = \frac{2\pi d}{\lambda} = (2K+1)\pi \Rightarrow d = (2K+1)\frac{\lambda}{2}$$

c) Il n'y a pas d'autres points en opposition de phase entre M_1 et M_2.

Donc $K = 0 \Rightarrow d = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2d = 0,5m$

$$\lambda = 0,5m$$

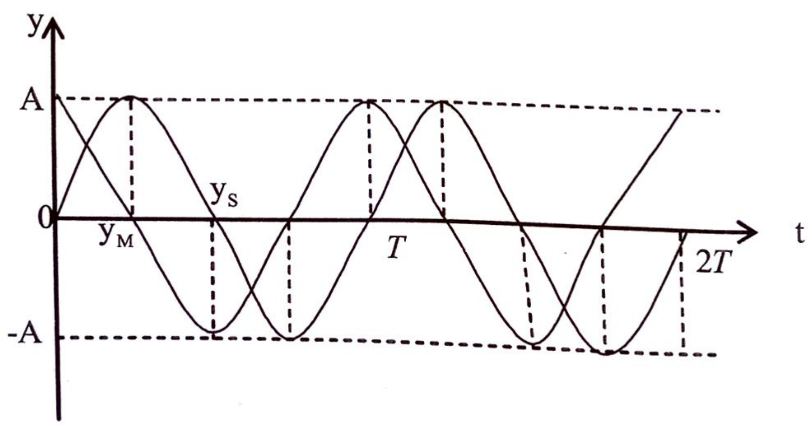
3. Pour OM = 0,875 m donnons la représentation graphique des vibrations en O et M.

$y_0 = A\sin 1360\pi t$ $\qquad$ $y_M = A\sin\left(1360\pi t - \frac{2\pi x 0,875}{0,5}\right)$

$$y_M = A\sin(1360\pi t - 3,5\pi) = A\sin\left(1360\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ les vibrations en O et M sont en quadrature de phase.

A t = 0 $\quad y_S = 0 \quad y_M = A$



Exercice N° 7

Un haut parleur, assimilé à une source ponctuelle s, est alimenté par un générateur basse fréquence. La fréquence des vibrations électriques appliquées à l'entrée du haut parleur est réglable. Les ondes sonores émises sont assimilées à des ondes sphériques. La célérité du son est égale à 340 $m.5^{-1}$.

1) En un point M situé à une distance = 2m de s, on place microphone, lui aussi considéré comme ponctuel. Pour quelles valeurs de la fréquence, les vibrations du haut parleur et du microphone sont-elles a) En phase ? b) en opposition de phase ?

2) a) On fixe la fréquence à 510 Hz. Préciser les positions des points vibrant en phase avec M.

b) Quel en est le nombre sur le segment SM ?

3) On fixe la fréquence à 550 Hz. De quelle distance minimale faut-il éloigner ou rapprocher le microphone sur le segment SM pour détecter une vibration sonore en phase avec la source ?

Solution

*S*__________________M SM = 2m

1.a) Fréquences pour lesquelles S et M vibrent en phase.

$d = k\lambda$ avec $\lambda = \dfrac{C}{N}$ $\quad d = k\dfrac{C}{N}$

$\Rightarrow N = k\dfrac{C}{N}$ $\quad N = \dfrac{340}{2} = 270\ k$

$N = 270\ k\ KE\ \mathbb{N}$

AN : Pour K = 1 N = 270 Hz

K = 2 N = 540 Hz

K = 3 N = 810 Hz

c) S et M vibrant en opposition de phase.

$d = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} = (2k+1 = \dfrac{C}{2N} \quad \Rightarrow \quad N = \dfrac{240}{4}(2k+1)$

$N = 85\ (2k+1)\ KE\ \mathbb{N}$

2. a) N fixée à 510 Hz, précisions les positions des points vibrant en phase avec M

Calcul de λ : $\lambda = CT = \dfrac{C}{N} = \dfrac{240}{540} = 0{,}67m$;

$x = k\lambda = 0{,}67K \qquad k=0 \Rightarrow x = 0$; $\quad k = 1 \Rightarrow x = 0{,}67m$;

$k = 2 \Rightarrow x = 1{,}34m$; $\qquad k = 3 \Rightarrow x = 2m$

b) Trois points dont la source vibrant en phrase avec M

3 N fixée à 550 Hz, déterminons la distance minimale dont il faut approcher ou éloigner le micro.

$d'\ k\lambda = \dfrac{240}{550}\ k\ \ 0{,}618K$

K = 1	d' = 0,618 m	on approche de
K = 2	d' = 1,36 m	Δd 2 - 1,854 = 0,146
K = 3	d' = 1,854 m	Δd = 14,6m
K = 4	d' = 2,47	

Chapitre 3

SUPERPOSITION DE DEUX PHÉNOMÈNES VIBRATOIRES

RAPPEL DU COURS

PRINCIPE DE SUPERPOSITION :

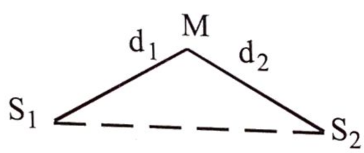
Quand deux signaux de même nature se superposent, la résultante est la somme algébrique des perturbations que provoquerait chacun des signaux agissant seul.

II INTERFÉRENCE MÉCANIQUE

Considérons deux sources S_1 et S_2 synchrones.

Etudions la perturbation en un point M atteint par les vibrations issues de S_1 et S_2.

$S_1M = d_1$ $\qquad$ $S_2M = d_2$.



M est sur une frange d'amplitude maximale si $d_2 - d_1 = k\lambda$ avec $k \in Z$.

M est sur une frange d'amplitude nulle si $d_2 - d_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$; $k \in Z$.

NB: Formule permettant de déterminer le nombre de franges sur l'axe S_1S_2.

$|d_2 - d_1| \leq S_1S_2$ ou $-S_1S_2 \leq d_2 - d_1 \leq S_1S_2$.

III INTERFÉRENCE LUMINEUSE : Expérience de Young.

1. Observation : En éclairant une plaque percée de deux trous fins S_1 et S_2. ($S_1S_2 = a$), à la lumière monochromatique, on observe sur un écran E situé à une distance D de S_1S_2, des bandes rectilignes alternativement brillantes et sombres, équidistantes.
2. Expression de la différence de marche :

3. Positions des franges.

Franges brillantes : $\delta = k\lambda \Rightarrow x = k\dfrac{\lambda D}{a}$

Franges sombres : $\delta = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\dfrac{\lambda D}{2a}$

4. Interfrange (i) : C'est la distance qui sépare les centres de deux (2) franges consécutives. de même nature. $i = \dfrac{\lambda D}{a}$

5. Ordre d'interférence $P = \dfrac{\delta}{\lambda}$.

Il renseigne sur le numéro de la frange par rapport à la frange centrale.

- Pour une frange brillante : $P = k$; $k \in N$.
- Pour une frange sombre $P = k + \dfrac{1}{2}$; $k \in N$.

Exercices

Exercice N°1 : (Bac 1995 Niger)

1. La pointe S d'un vibreur animé d'un mouvement sinusoïdal d'amplitude faible, de fréquence $N = 40{,}0Hz$ frappe la surface de l'eau d'une cuve à ondes. La célérité des ondes est $C = 64{,}0cms^{-1}$.

a) On éclaire la surface de l'eau avec une lampe stroboscopique à la fréquence $Ne = 40{,}0Hz$. Qu'observe-t-on à la surface de l'eau ?

b) La fréquence des éclairs est réduite à 39,0Hz ? Qu'observe-t-on ? Quelle est la célérité apparente des ondes ?

c) Comparer l'état vibratoire des points M_1 et M_2 de la surface de l'eau à celui de la source S pour $SM_1 = 5{,}60cm$ et $SM_2 = 9{,}60cm$.

2. On remplace la pointe S du vibreur par une fourche à deux pointes S_1 et S_2 qui frappent simultanément la surface de l'eau toutes les 24 millisecondes, $d(S_1 S_2) = 5cm$. La célérité des ondes est $C = 64{,}0cms^{-1}$.

a) La surface de l'eau est éclairée à la lumière continue. Qu'observe-t-on ? Faire un schéma simple et approximatif.

b) Combien de points sur le segment $S_1 S_2$ vibrent avec une amplitude maximale? Donner leurs positions par rapport au milieu O du segment $S_1 S_2$.

Solution

1. a) Observation à la surface de l'eau.

$N = 40$ Hz

$Ne = 40$ Hz $\Rightarrow N = Ne$: On observe des rides circulaires, équidistantes, alternativement claires et sombres, immobiles.

b) Observation à la surface de l'eau.

$N = 40$ Hz

$Ne = 39Hz \Rightarrow Ne < N$: on observe des rides circulaires qui se déplacent au ralenti vers les bords de la cuve à ondes.

Célérité apparente des ondes Ca.

$$\lambda = CaTa = \frac{Ca}{Na} \Rightarrow Ca = \lambda Na \quad \text{or} \quad \lambda = CT$$

D'où $$Ca = C.\frac{Na}{N} \Rightarrow Ca = C.\frac{N - Ne}{N}$$

AN : $$Ca = 64.\frac{40-39}{40} = 1,6cms^{-1}; \qquad Ca = 1,6cms^{-1}$$

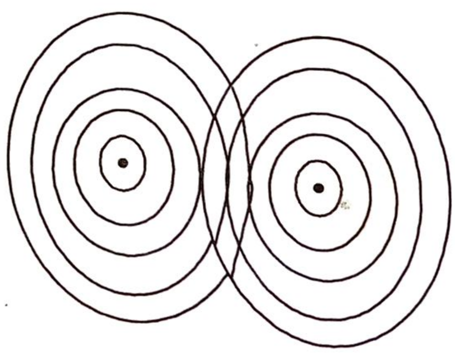
c) Etat vibratoire des points M_1 et M_2 par rapport à celui de la source.

$$\frac{SM_1}{\lambda} = \frac{SM_1 \times N}{C} = \frac{5,6 \times 40}{64} = \frac{7}{2} \Rightarrow SM_1 = 7.\frac{\lambda}{2}$$

M_1 et S_1 vibrent en opposition de phase.

$$\frac{SM_2}{\lambda} = \frac{SM_2.N}{C} = \frac{9,6\times40}{64} = 6 \Rightarrow SM_2 = 6\lambda \Rightarrow$$ M_2 vibre en phase avec S.

2. a) On observe des rides circulaires issues de S_1 et S_2 qui se propagent dans toutes les directions. Ces rides s'interfèrent en certains points de la surface de l'eau. Elles forment des franges alternativement claires et sombres.



b) Nombre de points d'amplitude maximale sur S_1S_2.

Soit un point M d'amplitude maximale tel que $S_1M = d_1$ et $S_2M = d_2$.

On a $|d_2 - d_1| \leq S_1S_2 \Rightarrow -S_1S_2 \leq d_2 - d_1 \leq S_1S_2$

$$-S_1S_2 \leq k\lambda \leq S_1S_2$$

$$\frac{-S_1S_2}{\lambda} \leq k \leq \frac{S_1S_2}{\lambda}$$

$$\frac{-S_1S_2}{CT} \leq k \leq \frac{S_1S_2}{CT}$$ avec $T = 24.10^{-3}s$ $k \in \mathbb{Z}$; $-3,25 \leq k \leq 3,25$

$k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Il y a 7 points d'amplitude maximale sur S_1S_2.

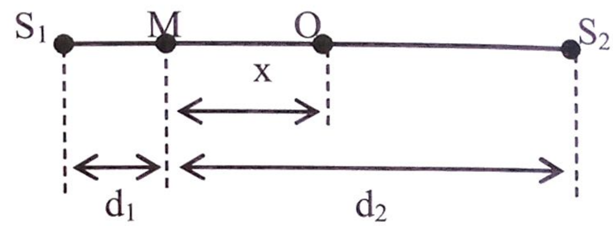
Leurs positions par rapport au milieu O de S_1S_2.

$d_1 = S_1O - x$ et $d_2 = S_2O + x$

$d_2 - d_1 = 2x$

$k\lambda = 2x \Rightarrow x = k\dfrac{\lambda}{2} = k.\dfrac{CT}{2}$

$x = 0{,}768k(cm)$



k = -3	x = -2,3cm	k = 1	x = 0,77cm
k = -2	x = -1,54cm	k = 2	x = 1,54cm
k = -1	x = -0,77cm	k = 3	x = 2,3cm
k = 0	x = 0cm		

Exercice : N° 2

1. Une pointe frappe la surface d'une nappe d'eau, en S, à la fréquence N = 20Hz. La célérité des ondes est $C = 24cms^{-1}$.
   a) Quelle est la longueur d'onde ?
   b) En éclairage stroboscopique à la fréquence Ne = 19Hz ; Quel est l'aspect de la surface de d'eau ? Quelle est la vitesse du mouvement apparent ?
2. La pointe S est remplacée par une fourche avec deux pointes S_1 et S_2 distantes de 6cm et l'amplitude du mouvement vaut 3mm
   a) Quel est l'aspect de la surface de l'eau ?
   b) Ecrire l'équation horaire des sources.
3. On veut déterminer la vibration d'un point A situé à $d_1 = 22mm$ de S_1 et $d_2 = 30mm$ de S_2.
   a) Déterminer l'équation y_1 de M due à S_1 seule.
   b) Déterminer l'équation y_2 de M due à S_2 seule.
   c) Déterminer l'équation y de M due aux deux sources.
   d) Tracer les vecteurs de Fresnel correspondant
4. Déterminer le nombre de points immobiles sur S_1S_2.

Solution

1. a) La longueur d'onde λ.

$\lambda = CT = \dfrac{C}{N}$ AN : $\lambda = \dfrac{0{,}24}{20}$ $\lambda = 1{,}2.10^{-2}m$

b) On voit des rides circulaires concentriques, équidistantes se propager dans toutes les directions.

La vitesse du mouvement apparent.

$Va = Na.\lambda = (N - Ne)\,\lambda \Rightarrow Va = 1{,}2cms^{-1}$

2. a) Aspect de la surface de l'eau.

On observe des rides circulaires issues de S_1 et S_2 qui se propagent dans toutes les directions. Ces rides s'interfèrent en certains points de la surface de l'eau. Elles forment des franges alternativement claires et sombres.

b) Equation horaire des sources.

$y_{S1} = y_{S2} = a\sin\omega t = a\sin\dfrac{2\pi t}{T}$ (on pose $\varphi = 0$).

3. a) L'équation y_1 de M.

M reproduit le mouvement de S_1 de façon identique, avec un retard θ_1.

$y_1 = a\sin(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi d_1}{\lambda})$ AN : $y_1 = 3.10^{-3}\sin(40\pi t - \frac{11\pi}{3})$.

$y_1 = 3.10^{-3}\sin(40\pi t + \frac{\pi}{3})$.

b) L'équation y_2 de M.

M_2 reproduit le mouvement de S_2, de façon identique, avec un retard θ_2.

$y_2 = a\sin(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi d_2}{\lambda})$ AN : $y_2 = 3.10^{-3}\sin(40\pi t - 5\pi) \Rightarrow y_2 = 3.10^{-3}\sin(40\pi t - \pi)$.

c) L'équation y de M.

$y = y_1 + y_2$ (principe de la superposition des petits mouvements).

$$y_M = a\sin(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi d_1}{\lambda}) + a\sin(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi d_2}{\lambda}).$$

$$y_M = 2a\cos\pi.\frac{d_2 - d_1}{\lambda}\sin(\frac{2\pi t}{T} - \pi\frac{d_1 + d_2}{\lambda})$$

$$y_M = 2\cos\frac{2\pi}{3}\sin(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{3}).$$

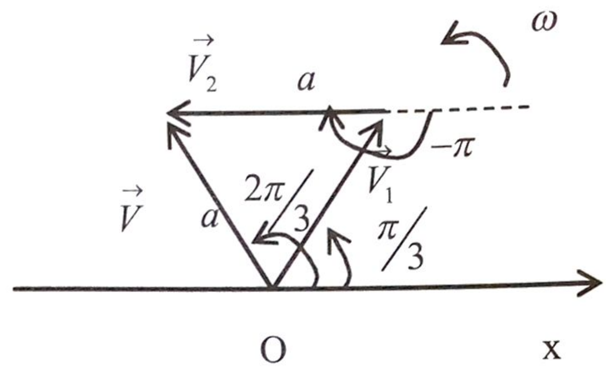
$$y_M = -3.10^{-3}\sin(40\pi t - \frac{\pi}{3}) \text{ ou } y_M = +3.10^{-3}\sin(40\pi t + \frac{2\pi}{3}).$$

d) Tracé des vecteurs de Fresnel.

A y_1 on associe le vecteur $\vec{V_1}$ $\left|\begin{array}{l} \|\vec{V_1}\| = a \\ \left(\overrightarrow{Ox}, \vec{V_1}\right) = \dfrac{\pi}{3} \end{array}\right.$

A y_2 on associe le vecteur $\vec{V_2}$ $\left| \begin{array}{l} \left\|\vec{V_2}\right\| = a \\ \left(\overrightarrow{Ox}, \vec{V_2}\right) = -\pi \end{array} \right.$

A y on associe le vecteur $\vec{V}$ $\left| \begin{array}{l} \left\|\vec{V}\right\| = a \\ \left(\overrightarrow{Ox}, \vec{V}\right) = \dfrac{2\pi}{3} \end{array} \right.$



4. Nombre de points immobiles sur S_1S_2

Soit M un point immobile situé sur S_1S_2 tel que $S_1M = d_1$ et $S_2M = d_2$

On a $|d_2 - d_1| \leq S_1S_2 \Rightarrow -S_1S_2 \leq d_2 - d_1 \leq S_1S_2$

$$-S_1S_2 \leq (2k+1)\frac{\lambda}{2} \leq S_1S_2 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{-S_1S_2}{\lambda} - \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{S_1S_2}{\lambda} - \frac{1}{2}; \qquad -5{,}5 \leq k \leq 4{,}5$$

$k \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

On a 10 points immobiles sur S_1S_2

Exercice : N° 3

Un vibreur muni d'un double stylet dont les pointes distantes de 3,8cm, sont animées d'un mouvement sinusoïdale de fréquence N = 50Hz. Elles frappent verticalement en S_1 et S_2 une nappe deau, S_1 et S_2 sont considérées comme deux sources synchrones, en phase, d'amplitude a = 2mm. La célérité des ondes est $C = 0{,}60 ms^{-1}$.

1. a) Expliquer le phénomène observable à la surface de l'eau.

b) Déterminer l'état vibratoire des points suivants :

M_1 ($d_1 = 3cm$; $d_2 = 6cm$) ; M_2 ($d_1 = 4cm$; $d_2 = 5{,}4$ cm) ; M_3 situé sur la médiatrice de S_1S_2

2. La position d'un point quelconque sur le segment S_1S_2 est définie par son abscisse x, la droite S_1S_2 étant orienté de S_2 vers S_1 ; l'origine O étant le milieu de S_1S_2.

a) Etablir la relation entre la longueur d'onde λ et les abscisses des points du segment S_1S_2 pour lesquels l'amplitude de la vibration est nulle.

b) Montrer que ces points sont équidistants. Préciser leur nombre.

Solution

1. a) On observe à la surface de l'eau des rides circulaires, issues de S_1 et S_2 concentriques, qui se superposent à la surface de l'eau.

b) Etat vibratoire des points suivants :

M_1 ($d_1 = 3cm$; $d_2 = 6cm$) . $\lambda = CT = \frac{C}{N}$ $\qquad \lambda = \frac{0,6}{50} = 0,012m = 1,2cm.$

$\frac{d_2 - d_1}{\lambda} = \frac{6-3}{1,2} = \frac{5}{2} \Rightarrow d_2 - d_1 = 5\frac{\lambda}{2}$. Le point M_1 est sur une frange d'amplitude nulle.

M_2 ($d_1 = 4cm$; $d_2 = 5,4cm$) $\qquad \frac{d_2 - d_1}{\lambda} = \frac{5,4-4}{1,2} = 1,17$.

M_2 n'est ni situé sur une frange claire, ni sur une frange sombre.

M_3($d_1 = d_2$) $\frac{d_2 - d_1}{\lambda} = 0$ M_3 vibre avec une amplitude maximale (frange centrale).

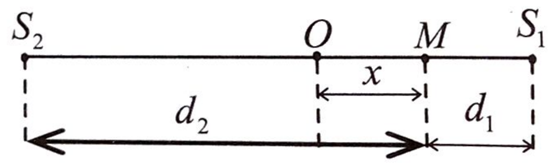
2. a) Relation entre λ et x.

$d_2 = S_2O + x \qquad d_1 = S_1O - x$

$d_2 - d_1 = S_2O + x - S_1O + x = 2x$

$d_2 - d_1 = k\lambda \Rightarrow x = k\frac{\lambda}{2}$

$d_2 - d_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$



b) Montrons que ces points sont équidistants.

$x_2 = (2k_2 + 1)\frac{\lambda}{4} \qquad x_1 = (2k_1 + 1)\frac{\lambda}{4}$

$x_2 - x_1 = (2k_2 + 1 - 2k_1 - 1)\frac{\lambda}{4} = 2(k_2 - k_1)\frac{\lambda}{4}$

Pour deux points consécutifs d'amplitude nulle : $k_2 - k_1 = 1$

$x_2 - x_1 = \frac{\lambda}{2}$

Nombre de points d'amplitude nulle. $|d_2 - d_1| \leq S_1S_2$

$-S_1S_2 \leq (2k+1)\frac{\lambda}{2} \leq S_1S_2 \qquad -\frac{S_1S_2}{\lambda} - \frac{1}{2} \leq k \leq -\frac{1}{2} + \frac{S_1S_2}{\lambda}.$

$-\frac{3,8}{1,2} - 0,5 \leq k \leq \frac{3,8}{2} - 0,5 \Rightarrow -3,6 \leq k \leq 2,66.$

$k \in \{-3,-2,-1,0,1,2,\}$. Il y'a six points d'amplitude nulle.

Exercice : N° 4

On place deux haut-parleurs identiques face à face. Ils émettent le même son (même fréquence et même amplitude) et vibrent en phase.

La fréquence du son émis est 1600Hz ; la vitesse du son dans l'air est $336ms^{-1}$. La distance séparant les centres S_1 et S_2 des haut-parleurs vaut 120cm.

1. Calculer la longueur d'onde du son émis.

2. On place un micro entre S_1 et S_2. Le son capté est visualisé sur l'écran d'un oscillographe. L'amplitude des vibrations varie avec la position du micro.
Pour quelles positions cette amplitude est-elle maximale ? Minimale ?
Le micro est placé en un point situé à 169cm de S_1 et 106cm de S_2. L'intensité du son capté est-elle maximale ?

Solution

1. Longueur d'onde du son émis :

$$\lambda = CT = \frac{C}{N} ; \qquad \lambda = \frac{336}{1600} = 0{,}21\text{m} = 21\text{cm} ;$$

2. Déterminons la vibration en un point M situé à d_1 de S_1 et d_2 de S_2.

- Soit $y_1 = y_2 = a\sin 2\pi Nt = a \sin \omega t$ équation des deux sources S_1 et S_2.
- Equation de la vibration au point M atteint par le signal issu de S.

$$y_1(M) = a\sin\frac{2\pi}{T}(t-\theta_1);\theta_1 = \frac{d_1}{C}; y_1(M) = a\sin(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi d_1}{CT})$$

Equation de M lorsqu'il est atteint par le signal issu de S_2.

$$y_2(M) = (\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi d_2}{\lambda})$$

Lorsque les deux signaux agissent simultanément au point M.

$$y(M) = y_1(M) + y_2(M)$$

$$y(M) = a\sin(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi d_1}{\lambda}) + a\sin(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi d_2}{\lambda})$$

$$y(M) = 2a\cos\pi\frac{(d_2-d_1)}{\lambda}\sin\left[\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi(d_2+d_1)}{\lambda}\right]$$

- Positions du micro pour lesquelles l'amplitude est maximale.

$$\cos\pi\frac{(d_2-d_1)}{\lambda} = \pm 1 ; \qquad \pi\frac{d_2-d_1}{\lambda} = k\pi \Rightarrow d_2 - d_1 = k\lambda ; \quad d_2 - d_1 = k\lambda .$$

- Positions du micro pour lesquelles l'amplitude est minimale.

$$\cos\pi\frac{(d_2-d_{1)}}{\lambda} = 0 \Rightarrow \pi\frac{(d_2-d_1)}{\lambda} = (2k+1)\frac{\pi}{2} ; \quad d_2 - d_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2} .$$

3. Au point M tel que $S_1M = d_1 = 169$cm et $S_2M = d_1 = 106$cm ; l'intensité du son capté est maximale si $|d_2 - d_1| = k\lambda$.

$$|d_2 - d_1| = |106-169| = 63cm \qquad \frac{|d_2-d_1|}{\lambda} = \frac{63}{21} = 3$$

$|d_2 - d_1| = 3\lambda$. Donc le son capté est maximal.

Exercice N° : 5

Un vibreur est muni d'une pointe fine dont l'extrémité, animée d'un mouvement vertical sinusoïdal, de fréquence N=25Hz et d'amplitude 2,5 mm, frappe, en un point O, la surface d'un liquide au repos. On négligera l'amortissement au cours de la propagation et on supposera qu'il n'y a pas de réflexion des ondes sur les parois du récipent.

On provoque l'immobisation apparente du phénomène par éclairage stroboscopique.

1. a) Quelle relation doit exister entre Ne, fréquence des éclairs et N, fréquence du vibreur?

b) Décrire l'aspect de la surface du liquide.

c) La distance séparant 6 crêtes consécutives est d = 10cm.

- Définir la longueur d'onde d'un mouvement vibratoire.
- Calculer la longueur d'onde et la célérité des ondes à la surface du liquide.

2. Ecrire l'équation du mouvement du point O, $y_o = f(t)$, en supposant qu'à l'instant t = 0 $y_o = 0$, le mouvement allant dans le sens positif des élongations.

3. Ecrire l'équation du mouvement d'un point M situé à 3cm de O et celle du mouvement d'un point N stué à 5,5 cm de O. Que peut-on-dire du mouvement de M par rapport à celui de N.

4. Le vibreur est maintenant muni d'une fourche. Les extrémités des pointes de la fourche, animées d'un mouvement vertical sinusoïdal de fréquence N = 25Hz, frappent en deux points O_1 et O_2 la surface d'un liquide au repos. La distance O_1O_2 vaut d' = 72mm. Les ondes se propagent à la surface du liquide avec la célérité C = 50cm/s.

a) Décrire l'aspect de la surface du liquide.

b) Donner la condition pour qu'un point de la surface du liquide soit:

- Sur une ligne de vibration maximale; - sur une ligne de vibration nulle.

En déduire l'état vibratoire d'un point P situé à 17cm de O_1 et à 10cm de O_2 et d'un point Q situé à 9cm de O_1 et à 5cm de O_2.

c) Déterminer le nombre et la position des points de vibration maximale sur le segment O_1 et O_2. Leur position sera comptée à partir de O^{1}.

<u>**Solution**</u>

1. a) La relation entre N_e et N : $N_e = \dfrac{N}{K}$

la plus grande valeur de $N_e = N = 25H_z$

b) On observe à la surface de l'eau des rides circulaires fixes.

c) La longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde pendant une période du vibreur.

$$\lambda = \frac{d}{5} = \frac{10}{5} = 2cm = 2 10^{-2} m$$

2. Equation du mouvement de O : $y_o = a\sin(\omega_o t + \varphi)$

$$\text{à t} = \begin{cases} y_o(0) = a\sin\varphi = 0 \\ \dot{y}_o(0) = a\omega\cos\varphi > 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = 0$$

$$y_o = \text{a sin } \omega t$$

$$AN\text{: } Y_o = 2,5 10^{-3}\sin(50\pi t)$$

3. Equation des mouvement de M et N.

$y_M(t) = y_o(t - \frac{x_M}{c}) = a\sin(2\pi Nt - 2\pi\frac{x_M}{\lambda}$

$AN:\ y_M = 2{,}5 10^{-3}(50\pi t - \pi)$

$y_N(t) = y_o(t - \frac{x_N}{c}) = a\sin(2\pi Nt - 2\pi\frac{x_N}{\lambda}$

$AN:\ y_N(t) = 2{,}5 10^{-3}\sin(50\pi t - \frac{3\pi}{2})$

4. a) A la surface du liquide on observe des rides ayant la forme des hyperboles appelées franges d'interferences.

b) Pour qu'un point de la surface soit :

- Sur une ligne de vibration maximale, il faut que: $d_2 - d_1 = k\lambda$
- Sur une ligne de vibration nulle il faut que: $d_2 - d_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$

* Pour P on a : $|d_2 - d_1| = |10 - 17| = 7cm = \frac{7}{2}\lambda \Rightarrow$ P = Point immobile

Pour Q on a : $|d_2 - d_1| = |9 - 5| = 4cm = 2\lambda \Rightarrow$ P est un point d'amplitude maximale.

c) Nombre de points d'amplitude maximale sont tels que $d_2 - d_1 = K\lambda$

$-O_1O_2 \le d_2 - d_1 \le O_1O_2$ avec $d_2 - d_1 = K\lambda$

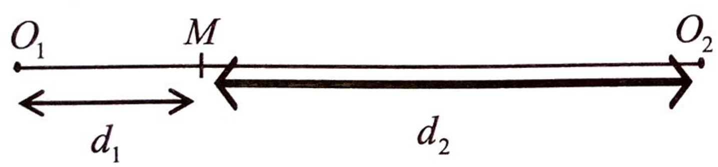
$\frac{-O_1O_2}{\lambda} \le K \le \frac{O_1O_2}{\lambda}$

$AN:\ -\frac{7{,}2}{2} \le K \le \frac{7{,}2}{2} \Leftrightarrow -3{,}6 \le K \le 3{,}6$

$K = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$: Il y a donc

7 points d'amplitude maximale sur O_1O_2

leurs positions



$\begin{cases} d_1 = x \\ d_2 = O_1O_2 - x \end{cases}$ $\quad d_2 - d_1 = O_1O_2 - 2x = K\lambda$

$x = \frac{O_1O_2}{2} - \frac{K\lambda}{2}$ $\quad x = 3{,}6 - K$

$x_{-3} = 6{,}6cm; x_{-2} = 5{,}6cm; x_{-1} = 4{,}6cm; x_o = 3{,}6cm$

$x_1 = 2{,}6cm; x_2 = 1{,}6cm; x_3 = 0{,}6cm$

Exercice N° 6

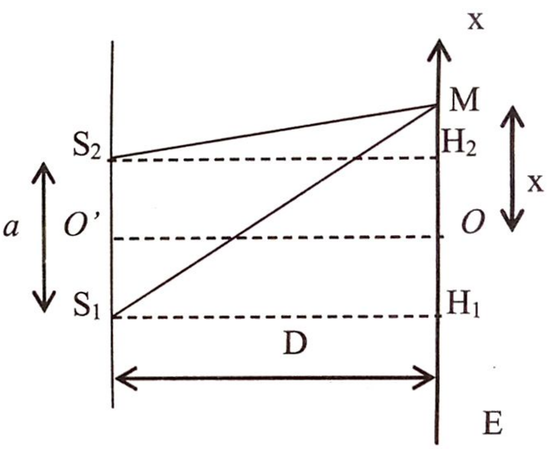
Une source lumineuse monochromatique S éclaire un écran percé de deux trous S_1 et S_2, S, S_1 et S_2 appartiennent à un même plan vertical. S_1 et S_2 sont à la même distance de S.

$d(S_1S_2) = a = 1{,}20mm$. $\lambda = 0{,}588\mu m$.

1. Qu'observe-t-on sur un écran vertical, parallèle à (S_1S_2), situé à la distance $D = 2{,}00m$ de S_1 et S_2 ?
2. Un point M de l'écran E est situé à la distance x de la frange centrale.
   a) Etablir l'expression de la différence de marche entre les deux rayons S_1M et S_2M.
   b) Définir l'interfrange et le calculer.
   c) M appartient à la neuvième frange brillante comptée à partir de la frange centrale numérotée 0. Calculer x.

Solution

1. On observe une série de raies alternativement brillantes et sombres : Ce sont des franges d'interférence.



2. a) Expression de la différence de marche.

- Considerons le triangle S_1MH_1 rectangle en H_1

$S_1M^2 = S_1H_1^2 + HM^2 \qquad S_1M^2 = D^2 + (x + \frac{a}{2})^2$

Considérons le triangle S_2MH_2 rectangle en H_2

$S_2M^2 = S_2H_2^2 + H_2M^2 \qquad S_2M^2 = D^2 + (x - \frac{a}{2})^2$

$S_1M^2 - S_2M^2 = D^2 + (x + \frac{a}{2})^2 - D^2 - (x - \frac{a}{2})^2$

$S_1M - S_2M = \delta$; $\quad S_1M \approx S_2M \approx D$; $\quad \delta = \frac{ax}{D}$

b) l'interfrange est la différence séparant les milieux de deux franges consécutives de même nature

$i = \frac{\lambda D}{a} \qquad i = \frac{5{,}88 10^{-7} x2}{1{,}20 10^{-3}} \qquad i = 9{,}8 10^{-4} m$

c) Calcul de x.

$x = 8i \Rightarrow x = 7{,}84\ 10^{-3} m \qquad x = 7{,}84mm$

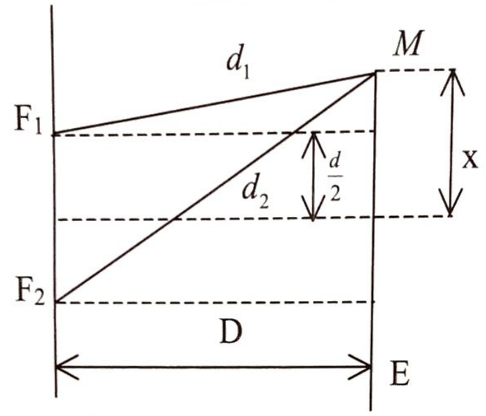
Exercice N° 7 : Bac Niger 2003 2ème groupe Série D

Une lumière monochromatique de longueur d'onde λ issue d'une fente F, tombe sur un écran K percé de deux fentes F_1 et F_2 parallèles à F. Un dispositif spécial permet de faire varier la distance a entre les fentes F_1 et F_2 ($F_1F_2 = a$) qui restent toutefois situés à égale distance de F.

1. On dispose un écran E, parallèle à K et à une distance D de celui-ci.
   a) Qu'observe-t-on sur l'écran ?
   b) Déterminer la différence de marche $\Delta = F_2M - F_1M$, pour un point M de l'écran à une distance x de la frange centrale. En déduire l'expression de i (interfrange).
2. On mesure dans le plan E, l'intervalle L séparant N franges brillantes consécutifs.
   - Etablir la formule donnant a en fonction de λ, N, D et L.

3. On augmente l'intervalle a = F F. Qu'en résulte-t-il sur le phénomène observé ? D'autre part on remarque que pour un interfrange inférieur à 0,2mm, l'observation du phénomène devient très difficile à l'œil nu.
Quelle est alors la valeur limite a de la distance F_1F_2 séparant les deux fentes ?
4. Combien observe-t-on de franges brillantes sur l'intervalle L = 7,2mm de l'écran E quand a = a' ? La mesure de l'intervalle est faite à partir d'une frange brillante.

Solution



1. a) On observe des franges d'interférences alternativement claires et sombres, équidistantes.

b) Différences de marche.

$$F_1M^2 = d_1^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

$$F_2M^2 = d_2^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \qquad \text{d'où } \Delta = F_2M - F_1M = \frac{ax}{D}; \qquad \Delta = \frac{ax}{D}$$

- Expression de l'interfrange.

Pour une frange brillante $F_2M - F_1M = k\lambda$.

$$\frac{ax}{D} = k\lambda \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k\lambda D}{a}$$

$$i = x_2 - x_1 = k_2\frac{\lambda D}{a} - k_1\frac{\lambda D}{a} = \frac{\lambda D}{a}(k_2 - k_1)$$

Pour deux franges brillantes consécutives $k_2 - k_1 = 1$.

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

2. Formule $a = f(\lambda, N, D, L)$.

$$L = (N-1)i = (N-1)\frac{\lambda D}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{(N-1)\lambda D}{L}$$

- Calcul de a.

$$a = \frac{(7-1).0,55.^{10-6}.1,2}{7,210^{-3}} \Rightarrow a = 5,5.10^{-4}m$$

3. Si on augmente a, i diminue. Les franges deviennent plus serrées. Pour certaines valeurs de a, le phénomène est inobservable à l'oeil nu.

Valeur limite de a.

Phénomène observable si i $\geq$ $0,2.10^{-3}$m.

$$\frac{\lambda D}{a} \geq 0,2.10^{-3} \quad \Rightarrow \quad a \leq \frac{\lambda D}{2.10^{-4}}$$

$$a' = \frac{\lambda D}{2.10^{-4}} = \frac{0,55.10^{-6}.1,2}{2.10^{-4}} \Rightarrow a' = 3,3.10^{-3}\,m$$

4. Calcul du nombre de frange si a = a'.

$$a' = \frac{(N'-1)\lambda D}{L} \Rightarrow a'L = (N'-1)\lambda D$$

$$N' - 1 = \frac{a'L}{\lambda D} \Rightarrow N' = \frac{a'L}{\lambda D} + 1$$

$$N' = \frac{3,3.10^{-3}.7,2.10^{-3}}{0,55.10^{-6}.1,2} + 1 \Rightarrow N' = 37$$

Exercice N° 8 Bac série D 2007

Dans le dispositif des fentes de Young, deux fentes F_1 et F_2 sont percées dans un écran opaque Eo, à une distance a = 0,5 mm l'une de l'autre.

A partir d'une troisième fente F, source lumineuse percée dans un écran E, les deux fentes F_1 et F_2 sont éclairées par une lampe à vapeur de sodium. E est parallèle à E_o et F est situé à égale distance de F_1 et F_2 qui se comportent comme des sources cohérentes de lumière monochromatique. On place un écran E_2 à une distance D = 1m de E_o et parallèlement à celui-ci. La longueur d'onde de la lumière émise par la lampe à vapeur de sodium est λ_o = 589 nm.

On désigne par y l'ordonnée d'un point M situé l'écran E_2 et appartenant à la zone d'interférence y est mesurée à partir du point 0 correspondant au centre de l'écran E_2.

1) Représenter qualitativement la figure observéesur l'écran E_2.

2) Etablir l'expression de l'interfrange i en fonction de λ_o, D et a, sachant que la différence de marche entre deux rayons provenant de F_1 et F_2 est de la forme : $\delta = \frac{ay}{D}$.

3) Que devient l'interfrange i lorsqu'on augmente la distance a ?

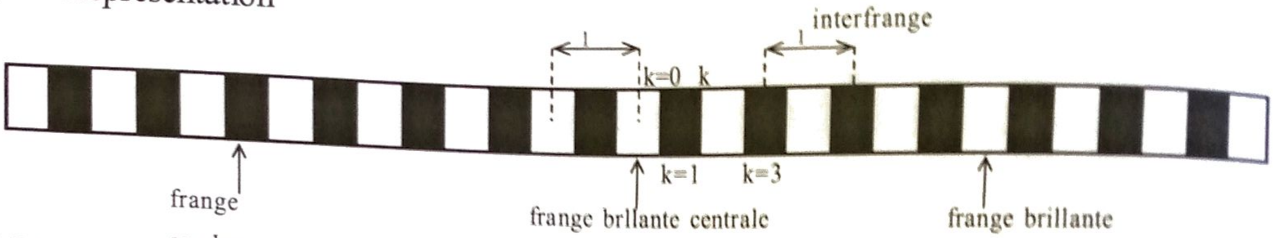
4) Quel est l'état lumineux observé aux points M_1 et M_2 situés sur l'écran E_2 lorsque OM_1 = 4,712 mm et OM_2 = 3,534 mm ?

5) La lampe à vapeur de sodium est remplacée par une source monochromatique du longueur d'onde λ_1. Sur l'écran E_2, on mesure la distance d entre la quatrième frange brillante et la septième

frange sombre situées de part et d'autre et de la frange centrale brillante : d = 10,29 mm. Calculer la longueur d'onde λ_1 de la nouvelle source.

Solution

1) Représentation



2) L'expression de l'interfrange en fonction de λ_o, D et a.

$$\delta = \frac{ay}{D} k\lambda_0 \Rightarrow y_k = k\frac{\lambda_0 D}{a} \text{ et } y_{k-1} = (k+1)\frac{\lambda_0 D}{a}$$

$$\text{L'interfrange } i = y_{k-1} - y_k = (k+1)\frac{\lambda_0 D}{a} - k\frac{\lambda_0 D}{a}$$

$$\text{Donc } i = \frac{\lambda_0 D}{a}$$

3) L'expression de i lorsque a augmente ; $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$

Lorsque a augment, i diminue et on observe des franges qui sont de plus en plus serrées.

4) L'état lumineux en M_1 et M_2

$$i = \frac{\lambda_0 D}{a} = \frac{589.10^{-3} \text{ x } 1}{0,5.10^{-3}} = 1,178.10^{-3} \text{ m}$$

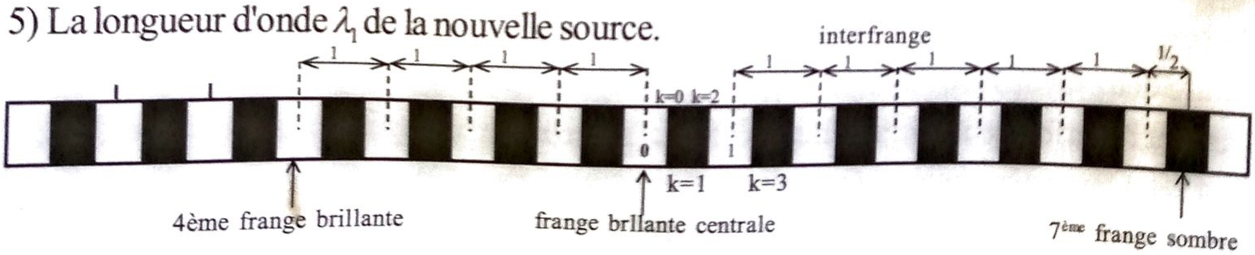
O centre de l' $\forall$ M $\in$ à la zone d'interférance

OM = k $*$ i ; pour la frange centrale brillante k = 0

$$k_{M_1} = \frac{OM_1}{1} = \frac{4,712.10^{-3}}{1,178.10^{-3}} = -4 \text{ : frange brillante en } M_1$$

$$k_{M2} = \frac{OM_2}{1} = \frac{3,534.10^{-3}}{1,178.10^{-3}} = -3 \text{ : frange sombre en } M_2$$

5) La longueur d'onde λ_1 de la nouvelle source.



Entre les deux franges, on compte 10,5 i.

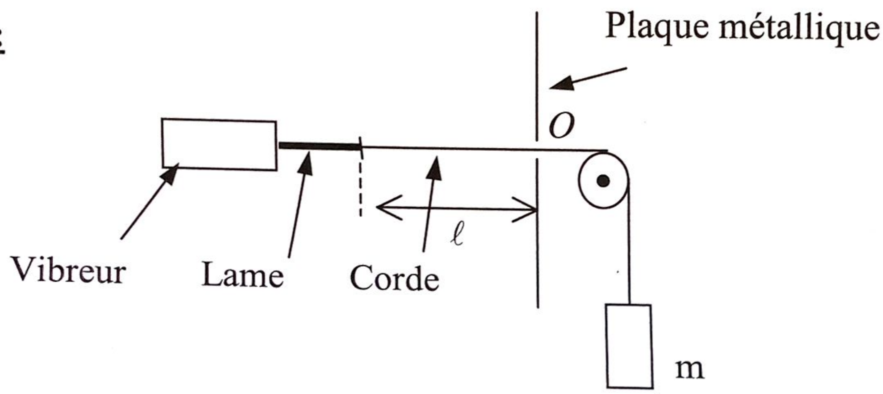
$$d = 10,5\,i = 10,5\frac{\lambda_1 D}{a} \Rightarrow \lambda_1 \frac{d.a}{10;5D} = \frac{10,29.10^{-3} * 0,5.10^{-3}}{10,5*1} = 0,49.10^{-6} \text{ m} = 0,49\ \mu\text{m} = 490 \text{ nm}$$

Chapitre 4

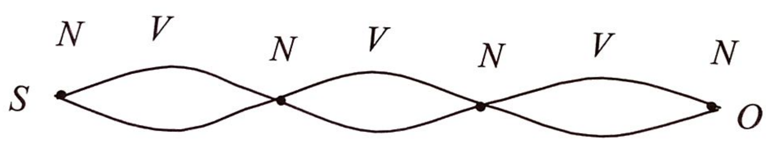
ONDES STATIONNAIRES : EXPÉRIENCE DE MELDE

RAPPEL DU COURS

I DISPOSITIF :



II OBSERVATIONS : En éclairage normale on observe la formation de fuseaux de même longueur.

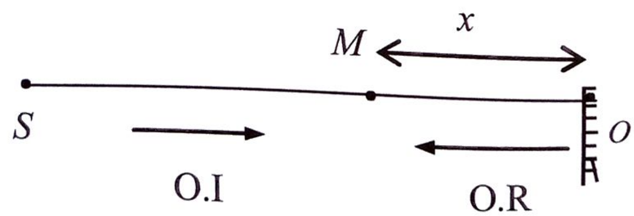


V : ventre, point d'amplitude maximale.
N : nœud, point d'amplitude minimale.

III INTERPRÉTATION

O.I : Onde incidente.

O.R : Onde réfléchie.



- Détermination de l'élongation d'un point M atteint par les deux ondes.

Soit $y_I = a\sin\frac{2\pi}{T}t$ onde incidente.

$y_I(\mathrm{M}) = a\sin(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi x}{\lambda})$.

Soit $y_R = -a\sin\frac{2\pi}{T}t$ onde réfléchie $y_R(\mathrm{M}) = -a\sin(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi x}{\lambda})$

$y(\mathrm{M}) = y_I(\mathrm{M}) + y_R(\mathrm{M}) = 2a\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2})$

$y(\mathrm{M}) = 2a\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2})$

- Positions des ventres :

L'amplitude est maximale si $\sin\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1$.

$x = (2k + 1)\frac{\lambda}{4}$ $k \in N$

Positions des nœuds .

- amplitude nulle.

- $\sin\frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \Rightarrow x = k\frac{\lambda}{2}$ $k \in N$.

Remarques :

- $x = k\frac{\lambda}{2}$ $k = 0 \Rightarrow x = 0$. L'obstacle fixe est un nœud.
- Distance entre deux nœuds ou deux ventres consécutifs est de $\frac{\lambda}{2}$.
- Distance entre un nœud et un ventre consécutifs est $\frac{\lambda}{4}$.
- Si la corde vibre avec k fuseaux $\ell = k\frac{\lambda}{2}$.

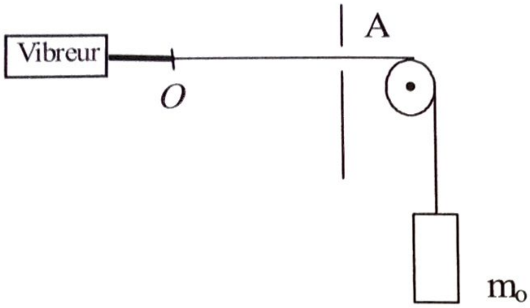
Exercices

Exercice : N°1

Soit une lame vibrante, soumise à des vibrations sinusoïdales, verticales, d'amplitude a = 2mm, de fréquence N = 100Hz. On attache, une corde élastique à l'extrémité O de la lame afin de réaliser l'expérience de Melde.

La vitesse de propagation des ondes vaut $20 ms^{-1}$ et on rappelle qu'elle est donnée par la relation

$C = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$; F désignant la tension de la corde et μ sa masse linéique.



1. Pour la valeur $m_0 = 100g$, on a OA = $\ell_0 = 1m$; décrire le phénomène observé et déterminer le nombre n_0 de fuseaux visibles, O étant considéré comme un nœud de vibration.
2. On fait varier la longueur de la partie vibrante de la corde en déplaçant la plaque placée en A, la masse m_0 restant constante.

Etablir la relation entre le nombre n, de fuseaux, la longueur $\ell_1 = OA_1$ de la corde. ℓ_0 et n_0.

Application numérique : $n_1 = 8$, calculer ℓ_1.

3. On maintient la longueur $\ell = \ell_0 = 1m$ constante et on suspend à l'extrémité de la corde,des masses différentes. Etablir la relation existant entre le nombre n_2 de fuseaux, les masses m_2, m_0, et n_0.

Application numérique : $n_2 = 5$; calculer m_2.

Solution

1. Phénomène observé : on observe des fuseaux de même longueur, stationnaires.

- Nombre de fuseaux. $\ell_0 = n_0 \dfrac{\lambda}{2}$ $\quad n_0 = 2\dfrac{l_0}{\lambda} = \dfrac{2l_0 N}{C}$.

$$n_0 = \frac{2.1.100}{20} = 10 \qquad n_0 = 10 \text{ fuseaux.}$$

2. Relation entre n, l, ℓo et n_0.

$$\ell_1 = n_1 \frac{\lambda}{2} \qquad = n_0 \frac{\lambda}{2} \qquad \lambda = \frac{2\ell o}{n_0}$$

$$\ell_1 = \frac{n_1}{2}\frac{2\ell o}{n_0 \ell o} = \frac{n_1}{n_0}\ell_0 \qquad \ell_1 = \frac{n_1}{n_0}\ell o$$

Application numérique : $\ell_1 = \dfrac{8}{10} \times 1 = 0{,}8m.$

3. $\ell = \ell_0 = 1\text{m}$.

Relation entre n_2, m_2, m_0 et n_0.

$$\ell_0 = n_0 \frac{\lambda_0}{2} \quad ; \quad \lambda_0 = \frac{c}{N} = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{F_0}{\mu}} \quad ; \quad \ell_0 = \frac{n_0}{2}\frac{1}{N}\sqrt{\frac{m_0 g}{\mu}}$$

$$\ell_0 = n_2 \frac{\lambda_2}{2}; \quad \lambda_2 = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{F_2}{\mu}} = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{m_2 g}{\mu}} \qquad \ell_0 = \frac{n_2}{2}\frac{1}{N}\sqrt{\frac{m_2 g}{\mu}}$$

$$\ell_0 = \ell_0 \Rightarrow \frac{n_0}{2}\frac{1}{N}\sqrt{\frac{m_0 g}{\mu}} = \frac{n_2}{2}\frac{1}{N}\sqrt{\frac{m_2 g}{\mu}} \quad ; \quad n_0\sqrt{m_0} = n_2\sqrt{m_2} \Rightarrow m_2 = \left(\frac{n_0}{n_2}\right)^2 m_0$$

Application numérique : $m_2 = \left(\dfrac{10}{5}\right)^2 \times 100 = 400g$.

Exercice : N° 2

1. Une corde élastique sans raideur est placée verticalement. L'extrémité supérieure A est reliée à un vibreur, qui impose un mouvement entretenu, sinusoïdal, transversal de fréquence N = 100Hz et d'amplitude a = 2mm. La corde traverse en un point B une plaque métallique mince percée d'un petit trou qui interdit pratiquement tout déplacement transversal de B. On tend la corde par le poids P d'une masse, suspendue à l'extrémité inférieure de la corde .

   a) Sachant que la masse linéique de la corde est $\mu = 0{,}2\text{g/m}$ et que d (AB) = 50cm, déterminer P pour que la portion AB de la corde se partage en k fuseaux.

   Calculer P pour k = 1, k = 2 et k = 3.

   b) On essaie de réaliser le réglage pour un seul fuseau, au moyen d'une masse marquée de 200g. D'autre part la fréquence du vibreur se stabilise à 99Hz. Quelle valeur faut-t-il donner à la longueur de la corde ? g = 9,8N/kg.

2. La corde est placée horizontalement. L'extrémité B est maintenant reliéeà un deuxième vibreur identique, de fréquence100Hz qui lui impose un mouvement transversal de même direction que celui de A, d'amplitude 2mm et en retard de phase de $\frac{\pi}{3}$ par rapport à celui de A . On supposera qu'il n'y a ni réflexion, ni amortissement des ondes. La tension de la corde vaut $\frac{2}{9}$N.

   a) Ecrire l'équation du mouvement d'un point M quelconque de AB. On pose AM = x.

   b) Préciser la position des points vibrant avec une amplitude maximale sur AB. En déduire leur nombre. On rappelle que $C = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$.

Solution

1. a) Expression de P pour que la corde vibre avec k fuseaux.

$$AB = k\frac{\lambda}{2} \quad \text{et} \quad C = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \lambda \;=\; CT = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{P}{\mu}} \qquad AB = \frac{k}{2N}C = \frac{k}{2N}\sqrt{\frac{P}{\mu}}$$

$$AB^2 = \frac{k^2}{4N^2}\,\frac{P}{\mu} \quad \Rightarrow P = \frac{4N^2AB^2\mu}{k^2}$$

$$AN:\ P = \frac{4x100^2x(50.10^{-2})^2x0{,}2.10^{-3}}{k^2} = \frac{2}{k^2} \;; \qquad P = \frac{2}{k^2}$$

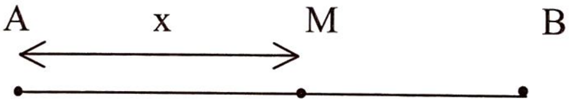
Calcul de P.

$k = 1 \quad P = 2N \;;\; k = 2 \quad P = 0{,}5N \;;\; k = 3 \quad P = \frac{2}{9}N = 0{,}22N$

b) Longueur de la corde.

$$\ell = k\frac{\lambda}{2} = \frac{k}{2N}C = \frac{k}{2N}\sqrt{\frac{mg}{\mu}} \qquad \ell = \frac{1}{2x99}\sqrt{\frac{200.10^{-3}9{,}8}{0{,}2.10^{-3}}} = 0{,}499\text{m} \;;\; \ell = 0{,}5\text{m}$$

2. a) Equation du mouvement d'un point M de AB tel que AM = x.



$$Y_A = 2.10^{-3}\sin 200\pi t \;; \qquad Y_B = 2.10^{-3}\sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$Y_A(M) = 2.10^{-3}\sin\left(200\pi t - \frac{200\pi x}{C}\right)$$

$$Y_B(M) = 2.10^{-3}\sin\left(200\pi t - \frac{200\pi(AB - x)}{C} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$Y(M) = Y_A + Y_B = 4.10^{-3}\cos\left[\frac{200\pi}{C}(AB - 2x) + \frac{\pi}{6}\right]\sin\left(200\pi t - \frac{100}{C}\pi AB - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$C = \sqrt{\frac{P}{\mu}} = \sqrt{\frac{2}{9{,}2.10^{-4}}} = \frac{100}{3} = 33{,}33ms^{-1}$$

$$Y(M) = 4.10^{-3}\cos\left[3\pi(AB - 2x) + \frac{\pi}{6}\right]\sin\left(200\pi t - 3\pi AB - \frac{\pi}{6}\right)$$

b) Position des points vibrant avec une amplitude maximale.

$\cos[3\pi(AB-2x)+\frac{\pi}{6}] = \pm 1 \Rightarrow 3\pi(AB-2x) + \frac{\pi}{6} = k\pi \quad k \in Z$

$$AB - 2x = \frac{k}{3} - \frac{1}{18} \Rightarrow 2x = -\frac{k}{3} + \frac{1}{18} + AB \quad x = \frac{AB}{2} - \frac{k}{6} + \frac{1}{36}$$

$$x = 0{,}278 - \frac{k}{6} \text{ en m}$$

$k = 0 \qquad x = 0{,}278 \text{ m} = 27{,}8\text{cm}$

$k = -1 \qquad x = 0{,}278 + \frac{1}{6} = 0{,}445 \text{ m} = 44{,}5\text{cm}$

$k = 1 \qquad x = 0{,}278 - \frac{1}{6} = 0{,}111\text{m} = 11{,}1 \text{ cm}$.

Il y a trois points vibrant avec une amplitude maximale sur AB.

Exercice N° 3

L'extremité A d'une corde élastique et relié à un vibreur qui lui communique un mouvement de vibration transversal, sinusoïdale de fréquence N.

L'autre extremité B est immobile et la corde est tendu de façon que la célérité des ondes soit C = 20m/s.

1. La fréquence du vibreur est N = 50Hz

 a) Définir la longueur d'onde d'un mouvement vibratoire. Calculer la longueur d'onde des ondes qui se propagent le long de la corde.

 b) On observe que la corde en vibration présentent 5 fuseaux nets.

- Comment appelle-t-on le phénomène observe? A quoi est-il dû ?
- Calculer la longueur de la corde.

 c) On observe la corde en éclairage stroloscopique.

Que voit-on si la fréquence des éclairs est 50Hz puis 100 Hz?

2. On fait maintenant décroitre la fréquence du vibreur de 50Hz à 15Hz. Trouver une relation entre la fréquence N et le nombre de fuseaux.

Pour quelles valeurs de N observe-t-on un système stable de fuseaux et quel sera dans chaque cas, le nombre de fuseaux.

Solution

1. a) La longueur d'onde d'un mouvement vibratoire est la distance parcouru par l'onde en une période .

$$\lambda = C.T \Rightarrow \lambda = \frac{C}{N} = \frac{20}{50} \Rightarrow \lambda = 0{,}4m$$

 b) Le phénomène observe est appelé onde stationnaire il est du à la superposition d'une onde incidente et d'une onde reflèchi.

- Longueur de la corde.
- Si la corde vibre avec K fuseaux.

3. $\ell = \ell_0 = 1\text{m}$.

Relation entre n_2, m_2, m_0 et n_0.

$$\ell_0 = n_0 \frac{\lambda_0}{2} \quad ; \quad \lambda_0 = \frac{c}{N} = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{F_0}{\mu}} \quad ; \quad \ell_0 = \frac{n_0}{2}\frac{1}{N}\sqrt{\frac{m_0 g}{\mu}}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{F_2}{\mu}} = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{m_2 g}{\mu}} \qquad \ell_0 = \frac{n_2}{2}\frac{1}{N}\sqrt{\frac{m_2 g}{\mu}}$$

$$\ell_0 = n_2 \frac{\lambda_2}{2};$$

$$\ell_0 = \ell_0 \Rightarrow \frac{n_0}{2}\frac{1}{N}\sqrt{\frac{m_0 g}{\mu}} = \frac{n_2}{2}\frac{1}{N}\sqrt{\frac{m_2 g}{\mu}} \quad ; \quad n_0\sqrt{m_0} = n_2\sqrt{m_2} \Rightarrow m_2 = \left(\frac{n_0}{n_2}\right)^2 m_0$$

Application numérique : $m_2 = \left(\frac{10}{5}\right)^2 \times 100 = 400g$.

Exercice : N° 2

1. Une corde élastique sans raideur est placée verticalement. L'extrémité supérieure A est reliée à un vibreur, qui impose un mouvement entretenu, sinusoïdal, transversal de fréquence

N = 100Hz et d'amplitude a = 2mm. La corde traverse en un point B une plaque métallique mince percée d'un petit trou qui interdit pratiquement tout déplacement transversal de B. On tend la corde par le poids P d'une masse, suspendue à l'extrémité inférieure de la corde .

a) Sachant que la masse linéique de la corde est μ = 0,2g/m et que d (AB) = 50cm, déterminer P pour que la portion AB de la corde se partage en k fuseaux.

Calculer P pour k = 1, k = 2 et k = 3.

b) On essaie de réaliser le réglage pour un seul fuseau, au moyen d'une masse marquée de 200g. D'autre part la fréquence du vibreur se stabilise à 99Hz. Quelle valeur faut-t-il donner à la longueur de la corde ? g = 9,8N/kg.

2. La corde est placée horizontalement. L'extrémité B est maintenant reliéeà un deuxième vibreur identique, de fréquence100Hz qui lui impose un mouvement transversal de même direction que celui de A, d'amplitude 2mm et en retard de phase de $\frac{\pi}{3}$ par rapport à celui de A . On supposera qu'il n'y a ni réflexion, ni amortissement des ondes. La tension de la corde vaut $\frac{2}{9}$N.

a) Ecrire l'équation du mouvement d'un point M quelconque de AB. On pose AM = x.

b) Préciser la position des points vibrant avec une amplitude maximale sur AB. En déduire leur nombre. On rappelle que $C = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$.

Solution

1. a) Expression de P pour que la corde vibre avec k fuseaux.

$$AB = k\frac{\lambda}{2} \quad \text{et} \quad C = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \lambda = CT = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{P}{\mu}} \qquad AB = \frac{k}{2N}C = \frac{k}{2N}\sqrt{\frac{P}{\mu}}$$

$$AB^2 = \frac{k^2}{4N^2}\,\frac{P}{\mu} \quad \Rightarrow P = \frac{4N^2AB^2\mu}{k^2}$$

$$AN:\ P = \frac{4x100^2x(50.10^{-2})^2x0,2.10^{-3}}{k^2} = \frac{2}{k^2}\ ; \qquad P = \frac{2}{k^2}$$

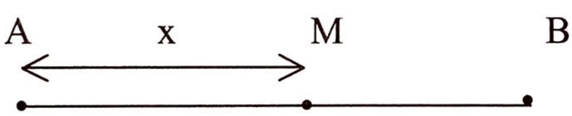
Calcul de P.

k = 1 P = 2N ; k = 2 P = 0,5N ; k = 3 $P = \frac{2}{9}N = 0{,}22N$

b) Longueur de la corde.

$$\ell = k\frac{\lambda}{2} = \frac{k}{2N}C = \frac{k}{2N}\sqrt{\frac{mg}{\mu}} \qquad \ell = \frac{1}{2x99}\sqrt{\frac{200.10^{-3}9{,}8}{0{,}2.10^{-3}}} = 0{,}499m\ ;\ \ell = 0{,}5m$$

2. a) Equation du mouvement d'un point M de AB tel que AM = x.



$$Y_A = 2.10^{-3}\sin 200\pi t\ ; \qquad Y_B = 2.10^{-3}\sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$Y_A(M) = 2.10^{-3}\sin\left(200\pi t - \frac{200\pi x}{C}\right)$$

$$Y_B(M) = 2.10^{-3}\sin\left(200\pi t - \frac{200\pi(AB - x)}{C} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$Y(M) = Y_A + Y_B = 4.10^{-3}\cos\left[\frac{200\pi}{C}(AB - 2x) + \frac{\pi}{6}\right]\sin\left(200\pi t - \frac{100}{C}\pi AB - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$C = \sqrt{\frac{P}{\mu}} = \sqrt{\frac{2}{9{,}2.10^{-4}}} = \frac{100}{3} = 33{,}33ms^{-1}$$

$$Y(M) = 4.10^{-3}\cos\left[3\pi(AB - 2x) + \frac{\pi}{6}\right]\sin\left(200\pi t - 3\pi AB - \frac{\pi}{6}\right)$$

b) Position des points vibrant avec une amplitude maximale.

$$\cos[3\pi(AB-2x)+\frac{\pi}{6}]=\pm 1 \Rightarrow 3\pi(AB-2x)+\frac{\pi}{6}=k\pi \quad k \in Z$$

$$AB-2x=\frac{k}{3}-\frac{1}{18} \Rightarrow 2x=-\frac{k}{3}+\frac{1}{18}+AB \quad x=\frac{AB}{2}-\frac{k}{6}+\frac{1}{36}$$

$$x=0,278-\frac{k}{6} \text{ en m}$$

$k=0 \quad x=0,278 \text{ m}=27,8\text{cm}$

$k=-1 \quad x=0,278+\frac{1}{6}=0,445 \text{ m}=44,5\text{cm}$

$k=1 \quad x=0,278-\frac{1}{6}=0,111\text{m}=11,1 \text{ cm}$.

Il y a trois points vibrant avec une amplitude maximale sur AB.

Exercice N° 3

L'extremité A d'une corde élastique et relié à un vibreur qui lui communique un mouvement de vibration transversal, sinusoïdale de fréquence N.

L'autre extremité B est immobile et la corde est tendu de façon que la célérité des ondes soit C = 20m/s.

1. La fréquence du vibreur est N = 50Hz

a) Définir la longueur d'onde d'un mouvement vibratoire. Calculer la longueur d'onde des ondes qui se propagent le long de la corde.

b) On observe que la corde en vibration présentent 5 fuseaux nets.

- Comment appelle-t-on le phénomène observe? A quoi est-il dû ?
- Calculer la longueur de la corde.

c) On observe la corde en éclairage stroloscopique.

Que voit-on si la fréquence des éclairs est 50Hz puis 100 Hz?

2. On fait maintenant décroitre la fréquence du vibreur de 50Hz à 15Hz. Trouver une relation entre la fréquence N et le nombre de fuseaux.

Pour quelles valeurs de N observe-t-on un système stable de fuseaux et quel sera dans chaque cas, le nombre de fuseaux.

<u>**Solution**</u>

1. a) La longueur d'onde d'un mouvement vibratoire est la distance parcouru par l'onde en une période .

$$\lambda=C.T \Rightarrow \lambda=\frac{C}{N}=\frac{20}{50} \Rightarrow \lambda=0,4m$$

b) Le phénomène observe est appelé onde stationnaire il est du à la superposition d'une onde incidente et d'une onde reflèchi.

- Longueur de la corde.
- Si la corde vibre avec K fuseaux.

$\ell = K\frac{\lambda}{2} \quad K = 5 \Rightarrow \ell = \frac{5 \times 0,4}{2} \quad \ell = 1m$

c) Observation

- $N_e = N$: On observe une sinusoïde s'aplatir puis se gonfler sur place.

$N_e = 100H_z \Rightarrow N_e = 2N$. On observe 2 cordes dessinant une sinusoïde s'aplatir puis se gonfler sur place.

2. Relation entre K et N.

$\ell = K\lambda/2 \quad \text{or} \ \lambda = \frac{C}{N} \Rightarrow \ell = \frac{KC}{2N}$

$\Rightarrow N = \frac{KC}{2\ell} \quad \Rightarrow N = 10K$

Valeur de N comprises entre 15 et $50H_z$ et nombres K de fuseaux.

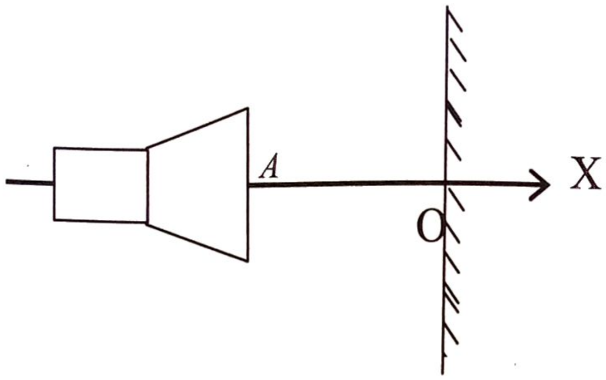
$$\begin{matrix} K = 2 & & N = 20H_z \\ K = 3 & \Rightarrow & N = 30H_z \\ K = 4 & & N = 40H_z \\ K = 5 & & N = 50H_z \end{matrix}$$

Exercice N° 4 : (Bac Niger 98)

L'émission d'un son par un haut-parleur est dû à la vibration de sa membrane qui communique son mouvement aux molécules d'air situées à son voisinage. Le mouvement de vibration des molécules d'air se transmet ainsi de proche en proche. Cela se traduit par des vibrations périodiques de la pression qui se propagent pour atteindre l'oreille.

On dispose d'un haut-parleur émettant des vibrations sonores longitudinales de fréquences N = 1000Hz. On place au point O sur l'axe AX de ce haut-parleur et perpendiculairement à cet axe, une surface plane capable de réfléchir parfaitement les ondes sonores (voir figure). On admettra qu'on peut négliger tout phénomène de réflexion multiple ainsi que tout phénomène d'amortissement .

1. Déterminer la longueur d'onde λ du son émis par le haut-parleur. La célérité du son dans l'air est $C = 340ms^{-1}$.
2. Quelle est l'amplitude de vibration (déplacement moyen des molécules d'air causé par les vibrations sonores) au point O ?
3. Un microphone sensible aux variations de pression est installé au point O. Décèlera-t-il un maximum ou minimum d'intensité sonore ?
4. Analyser les variations de la pression p en un point situé sur l'axe AX à la distance x de O. Préciser l'expression analytique de p en fonction de x et du temps t.
5. A quelle distance de O sur l'axe AX faut-il placer le microphone pour retrouver la même intensité sonore qu'au point O ?



Solution

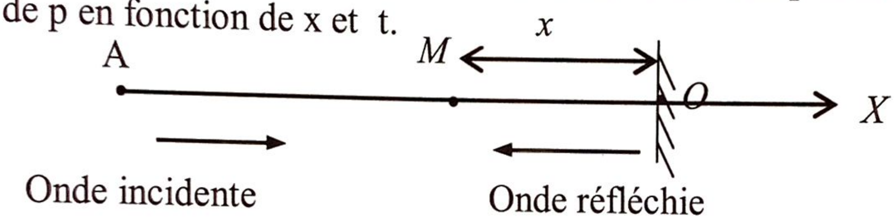
1. Longueur d'onde λ du son.

$\lambda = CT = \frac{C}{N} \Rightarrow \quad \lambda = \frac{340}{1000} = 0{,}34m \quad \lambda = 0{,}34\text{m}$

2. Le point O constitue un obstacle fixe. Il est constamment immobile. L'amplitude de vibration en O est nulle.

3. Le microphone décèlera un minimum d'intensité sonore car l'amplitude est nulle en O.

4. Expression de p en fonction de x et t.



L'onde incidente anime M avant O. Le mouvement de M présente une avance $\theta = \frac{x}{c}$ sur celui de O.

$p_i(M) = P_m \sin\omega(t + \frac{x}{C})$

L'onde réfléchie anime O avant M. Le mouvement M présente un retard $\theta = \frac{x}{c}$ sur celui de O.

$p_r(M) = -P_m \sin\omega(t - \frac{x}{C})$

La vibration résultante est donc $p = p_i(M) + p_r(M)$

$p = 2P_m \sin\frac{\omega x}{C}\cos\omega t \ \ ou \ \ p = 2P_m \sin\frac{\omega x}{C}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

Nœuds de vibration

$A = 0 \Rightarrow 2P_m \sin\frac{\omega x}{c} = 0 \Rightarrow \sin\frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = k\pi$

$x = k\frac{\lambda}{2}$ A.N $x = 0{,}17k$ avec $k \in N$

. Ventres de vibration

$A = \pm 2P_m \Rightarrow \sin\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1 \Rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$

$x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$

AN: $x = 0{,}085(2k+1)$ $k \in N$

4. Minimum d'intensité sonore.

$x = 0{,}17\text{m}$

Exercice N° 5 : (Bac Niger 96)

Dans tout l'exercice on prendra $g = 9{,}8ms^{-2}$.

On se propose de réaliser l'expérience de Melde dans un ascenseur (voir figure). Pour cela, un vibreur de fréquence f= 100Hz est fixé au plafond de la cabine. A l'extrémité O du vibreur est attaché un fil tendu verticalement par un corps de masse m = 100g, accroché à l'autre extrémité B du fil. O est animé d'un mouvement d'amplitude 3mm. Le fil passe par un petit trou C d'une plaque métallique mobile, ce qui permet de faire varier la longueur OC. L'orifice C est suffisamment petit pour que le milieu de propagation soit limité à la partie OC.

1. La cabine étant au repos, il se forme entre O et C quatre fuseaux.

a) Montrer que l'équation du mouvement d'un point A situé entre O et C, à la distance x de C, est de la forme :

$y = a\sin(2\pi x/\lambda)\cos 2\pi ft$ avec λ : longueur d'onde ; t : le temps.

On donne : $y = 6 10^{-3}\sin(5\pi x).\cos 200\pi t$ avec y et x en m et t en s.

b) Calculer la longueur OC qui correspond à l'observation des quatre fuseaux.

c) Quelle est la célérité des ondes le long du fil ?

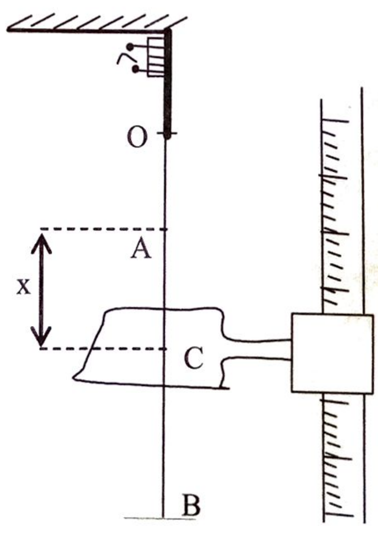
d) Déterminer la masse linéique μ du fil sachant que la célérité des ondes le long du fil est

de la forme $C = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ avec T, la tension du fil.

2. La cabine est maintenant animée d'un mouvement vertical ascendant, uniformément accéléré, d'accélération a tel que $a = 1{,}2m/s^2$.

a) Par quelle masse M faut-t-il remplacer la masse m = 100g pour que le fil vibre en formant le même nombre de fuseaux ?

b) En conservant la masse m accrochée en B, on veut modifier la longueur OC afin d'obtenir la formation du même nombre de fuseaux. De quelle hauteur h et dans quel sens faut-t-il déplacer la plaque métallique pour observer les quatre fuseaux, le mouvement de la cabine étant vertical ascendant, uniformément accéléré, d'accélération $a = 1{,}2ms^{-2}$.



Solution

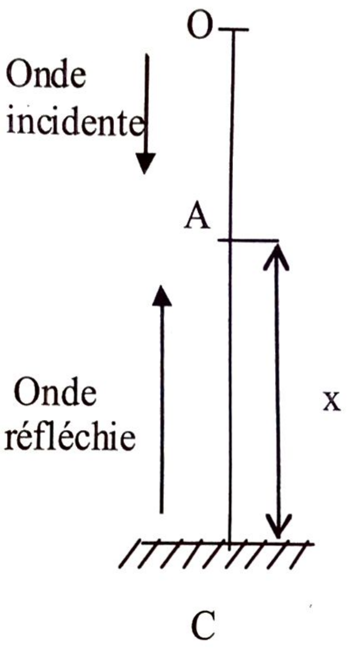
1. a) Equation du mouvement de A.

$y_0 = a\sin\omega t = a\sin\dfrac{2\pi t}{T}$ ($\varphi = 0$)

$y_{oi} = a\sin\dfrac{2\pi t}{T}$ $\quad y_{or} = -a\sin\dfrac{2\pi t}{T}$

Onde incidente : la vibration de A présente une

avance $\theta = \dfrac{x}{C}$ sur celle de C



$$y_{Ai} = a\sin\frac{2\pi}{T}\,(t + \frac{x}{C})$$

Onde réfléchie : la vibration de A présente

un retard $\theta = \dfrac{x}{C}$ sur celle de C

$$y_{AI} = -a\sin\frac{2\pi}{T}\,(t - \frac{x}{C})$$

$$y_A = y_{Ai} + y_{AI} \Rightarrow y_A = a\sin(\frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}) - a\sin(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda})$$

$$y_A = 2a\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi t}{T} \Rightarrow y_A = a\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos 2\pi f t$$

b) La longueur OC correspondant à l'observation de 4 fuseaux.

$OC = k\dfrac{\lambda}{2}$ or $y_A = 6.10^{-3}\sin(5\pi x)\cos 200\pi t$ donc $5\pi x = \dfrac{2\pi x}{\lambda}$

$5\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 0{,}4\text{m}$

$OC = k.\dfrac{0{,}4}{2} \Rightarrow OC = 0{,}8\text{m}$

c) La célérité des ondes le long du fil.

$\lambda = CT = \dfrac{C}{f} \Rightarrow C = \lambda f$; *AN*: $C = 0{,}4\text{x}100$; $C = 40\text{ms}^{-1}$

d) Masse linéique μ du fil.

$$C = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow C^2 = \frac{T}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{T}{C^2} = \frac{mg}{C^2}$$

AN: $$\mu = \frac{100.10^{-3} \times 9{,}8}{40^2} = 6{,}125.10^{-4}\,kgm^{-1}$$

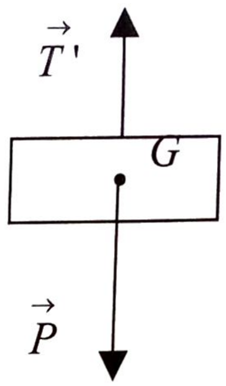
2. a) Calcul de la masse M.

- Système étudié : le solide de masse M.
- Repère utilisé : repère lié à l'ascenseur supposé galiléen.

Bilan des forces : le poids du solide, la tension $\vec{T}$ du fil.

TCI : $\sum \vec{F}ext = M\vec{a}$

$\vec{T}' + \vec{P} = M\vec{a}$



Projection sur la verticale ascendante.

$$T' - P = Ma \quad \Rightarrow \quad T' = M(g+a) \quad \Rightarrow M = \frac{T'}{g+a}$$

C = C' (pour un observateur lié à l'ascenseur).

$$\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{T'}{\mu}} \Rightarrow T = T' = mg; \qquad \text{D'où} \quad M = \frac{mg}{g+a}$$

$$M = \frac{100.10^{-3} \times 9,8}{9,8 + 1,2}$$

$$M = 0,089kg$$

$$M = 89g$$

b) Calcul de h et sens de déplacement de la plaque métallique 0.

$$OC' = k\frac{\lambda'}{2} \quad or \ \lambda' = \frac{C'}{f} = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{T'}{\mu}} \Rightarrow \lambda' = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{m(g+a)}{\mu}}$$

$$OC' = \frac{k}{2f}\sqrt{\frac{m(g+a)}{\mu}}$$

$AN: \ OC' = 0,84m$

On déplacera la plaque métallique d'une hauteur h = 0,04m = 4cm vers le bas ; car OC' > OC.

Exercice 6

A la lame vibrante horizontale d'un vibreur de fréquence f = 100 Hz, on fixe l'extrémité A d'un corde élastique tendue horizontalement. L'autre extrémité B de la corde est placée de façon à éliminer toute réflexion d'ondes. Le point A vibre verticalement.

1°)a) Ecrire l'élongation du point A en fonction du temps, en admettant qu'elle est nulle à l'instant t = 0 et qu'elle croît à partir de cet instant ; le point A décrivant un segment de 10 mm de longueur.

b) Déterminer a vitesse maximale du point A.

2°)a) La vitesse de propagation des ondes le long de la corde est de 60 m/s. Déterminer l'élongation d'un point M de la corde situé à la distance d de A.

b) Déterminer la différence de phase des mouvements des points C et D situés respectivement aux distance d_1 et d_2 du point A.

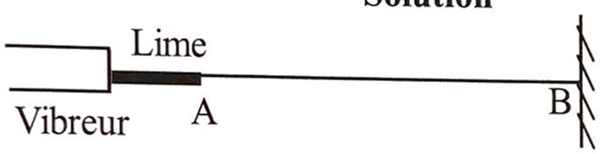
c) Calculer cette différence le phase pour d_1=15 cm et d_2 = 45 cm. Que peut-on en déduire?

3°) Admettons à présent que chaque onde émise en A subit une réflexion en B et que le système est réglé de façon à observer de ondes stationnaires.

a) Exprimer l'élongation d'un point N de la corde situé à la distance x de l'extrémité B

b) On désigne par N_1, N_2 et N_3 les points les plus proches de B, pour lesquels l'amplitude est maximale. Déterminer, en fonction de la longueur d'onde, les positions de ces points.

Solution



1) a) $y_A(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ où $\omega = 2\pi f$; φ est la phase initiale

$y_A(0) = 0 \Rightarrow a \sin\varphi = 0$, deux solutions possibles : $\varphi = 0$ et et $\varphi = \pi$. Or y croit à partir de t = 0

$$y'_A = a\,\varpi\,\cos(\varpi t + \varphi) > 0 \quad y'_A(0) = a\,\varpi\,\cos\varphi > 0$$

$$\cos\varphi > 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

Le point A décrit un segement de 10 mm qui correspond à la fois l'ampltude du mouvement de A. D'ou : 2a = 10 mm et a = 5mm = $5 10^{-3}$m l'élongation du point A est :

$$y_A(t) = 5 10^{-3} \sin 200\pi t$$

b) La vitesse du point A s'obtient en derivant $y_A(t)$ par rapport au temps

$$v_A(t) = \frac{dy_A(t)}{dt} = 200\pi \,.\, 5 10^{-3} \cos 200\pi t$$

$$v_{A\,max} = \pi \text{ m/s}$$

$$v_A(t) = \pi \cos 200\pi t$$

La vitesse maximale du point A est : $v_{A\,max} = \pi$ m/s

2) a) Chaque point de la corde reproduit le mouvement de la source A.avec un retard $\theta = \frac{d}{c}$,

c $y_M(t) = 5\ 10^{-3} \sin 200\pi\,(t - \frac{d}{c})$

b) Détermions d'abord les mouvements des points C et D.

$$y_C\ (t) = 5\ 10^{-3}\ \sin\ 200\ \pi\ (t - \frac{d_1}{c}) = 5\ 10^{-3}\ \sin\ (200\ \pi t) + \varphi_1$$

$$y_D\ (t) = 5\ 10^{-3}\ \sin\ 200\ \pi\ (t - \frac{d_2}{c}) = 5\ 10^{-3}\ \sin\ (200\ \pi t) + \varphi_2$$

$$\varphi_1 = \frac{-200\pi\ d_1}{c}\ ,\ \varphi_2 = \frac{-200\pi\ d_2}{c}$$

La difference de phase entre les deux mouvements est

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{-200\pi\ d_2}{c} + \frac{200\pi\ d_1}{c} = \frac{-200\pi}{c}\ (d_2 - d_1)$$

c) $d_1 = 15$ cm, $d_2 = 45$ cm, $c = 60$ m/s

$$\varphi = \frac{-200\pi}{60}\ (45 - 15).\ 10^{-2} = \pi$$

Les mouvements des point C et D sont en opposition de phase.

3) a) Au point N on a la supportation de deux ondes:
- une vide incidente issue de la n : y^i (t)
- une onde reflectrie issue de point e : y^r (t)

L'extrémité B est fixe il est sous l›action de l'onde incidente et de l'onde réflechie son élongation serait alors : $y_{iB} = a$ si $2\ \pi ft$

$$y_{iB}\ (t) + y_{rB}\ (t) = 0$$

$$d'où\ y_{rB} = -\ a \sin 2\ \pi ft$$

L'onde incidente arrive au point N vec une avance de $\frac{x}{c}$ par rapport au point B.

$$y_{iN}\ (t) = y_{iB}\ (t + \frac{x}{c}) = a \sin 2\ \pi f\ (t + \frac{x}{c})$$

L'onde reflechire arrive au point N avec une retard de $\frac{x}{c}$ par rapport au point B.

$$y_{rN}\ (t) = y_{rB}\ (t - \frac{x}{c}) = a \sin 2\ \pi f\ (t - \frac{x}{c})$$

L'élongation du point N est la la somme de deux élongations.

$$y_N(t) = y_{iN}\ (t) + y_{rN}\ (t) = a \sin 2\ \pi f\ (t + \frac{x}{c}) - a \sin 2\ \pi f\ (t - \frac{x}{c})$$

$$a\left[a \sin 2\ \pi f\ (t + \frac{x}{c}) - a \sin 2\ \pi f\ (t - \frac{x}{c})\right]$$

$$y_N\ (t) = 2\ a \sin \frac{2\pi f\,(t + \frac{x}{c}) - 2\pi f\,(t - \frac{x}{c})}{2}\ .\cos \frac{2\pi f\,(t + \frac{x}{c}) + 2\pi f\,(t - \frac{x}{c})}{2}$$

$$= 2\ a \sin 2\pi f\ \frac{x}{c}\ \cos 2\pi f t$$

En utilisant les relations $\lambda = \frac{c}{f}$ et $\cos x = \sin (\alpha + \frac{\pi}{2})$

on a $y_N\ (t) = 2\ a \sin\ (2\pi \frac{x}{\lambda}) : \sin (2\pi\ \ ft + \frac{\pi}{2})$

Le poin N effectue un mouvement vibratoire de même fréquence que la source avec une amplitude égale à $2a\sin\ (2\pi \frac{x}{c})$

Remarque : cette amplitude dépend de la position du point et de la longeur d'onde α .

b) L'amplitude est maximale pour

$\sin\ (2\pi \frac{x}{\lambda}) = 1$ c'est-à-dire

$2\pi \frac{x}{\lambda}\ (2k + 1)\ \frac{\pi}{2}$ $\quad k = 0, 1, 2,$

d'où $x_k = (2k + 1)\ \frac{\lambda}{2}$

$$X_{N_1} = X_0 = \frac{\lambda}{2}$$

$$X_{N_2} = X_I = \frac{3}{2}\lambda$$

$$X_{N3} = X_2 = \frac{5}{2}\lambda$$

ELECTROMAGNETISME

Chapitre 1

CHAMP MAGNÉTIQUE

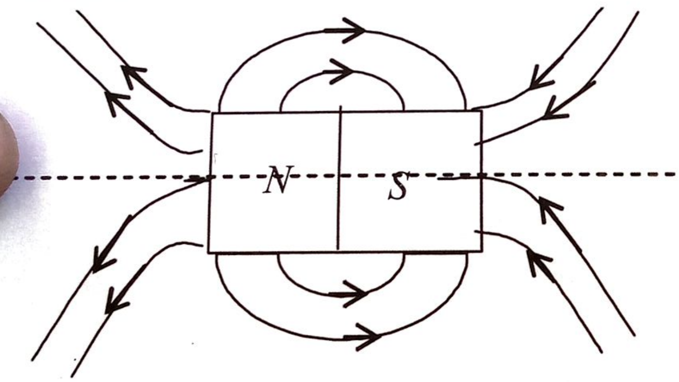
RAPPEL DU COURS

I SPECTRE MAGNÉTIQUE

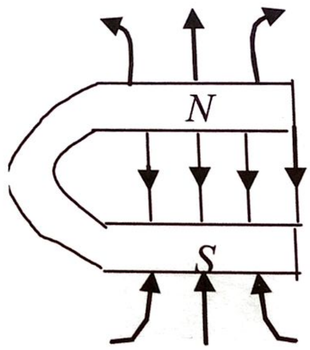
Une ligne de champ magnétique est une ligne qui en chacun de ses points est tangente au vecteur $\vec{B}$. Elle est orientée dans le sens de $\vec{B}$.
L'ensemble des lignes de champ constitue le spectre magnétique.

II TOPOGRAPHIE DE CHAMP MAGNÉTIQUE

a) aimant droit



b) aimant en U

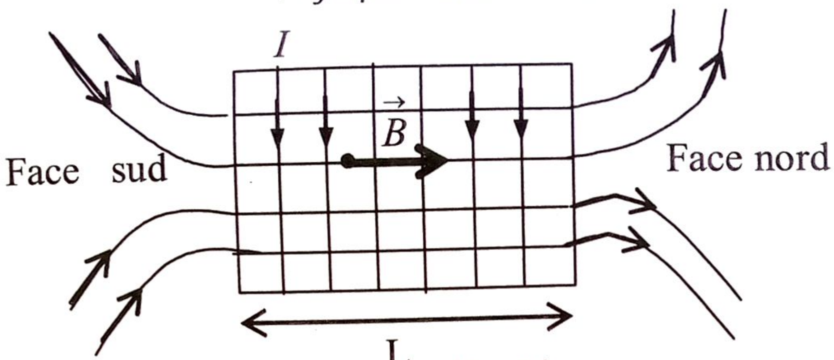


Remarque : Entre les branches de l'aimant en U, le champ magnétique est considéré comme uniforme.

III ELECTROAIMANTS

Un circuit parcouru par un courant d'intensité I, crée un champ $\vec{B}$ de norme. B = kI. k dépend des caractéristiques du circuit.
1. Champ créé par une bobine longue.

A l'intérieur de la bobine, $\vec{B}$ est uniforme, son sens est donné par la règle de la main droite ou de l'observateur d'Ampère.



2. Expression du champ créé par un solénoïde.

$$B = \mu_o n I \quad \text{avec} \quad n = \frac{N}{L}$$

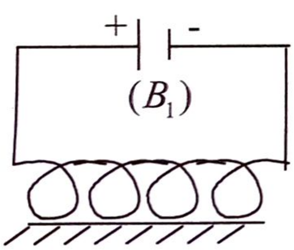
μ_0 : perméabilité magnétique du vide. $\mu_o = 4\pi.10^{-7}\ S.I$

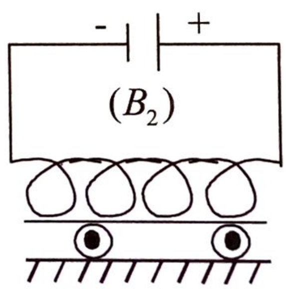
NB : Maîtriser l'une des règles pour déterminer le sens de $\vec{B}$ et les faces de la bobine.

Exercices

Exercice N° 1

Dans l'expérience schématisée ci - dessous la bobine B_1 est fixe, la bobine B_2 mobile.





1. Préciser les noms des faces des bobines.

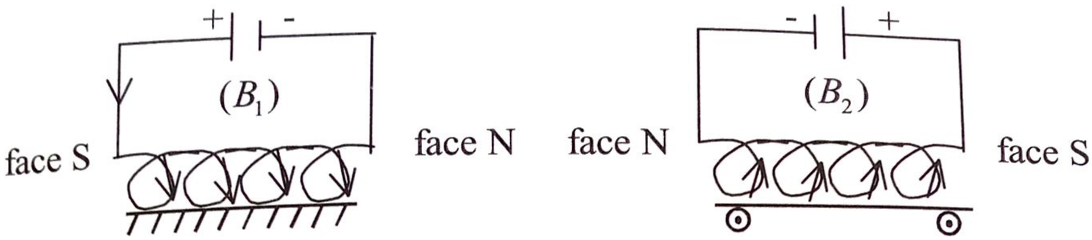
2. Quel est le mouvement de la bobine B_2 ?

3. Que se passe – t – il si l'on inverse le sens du courant ?
   a) dans les deux bobines ?
   b) dans une seule bobine ?

4. Comment peut – on renforcer l'interaction entre les deux bobines.

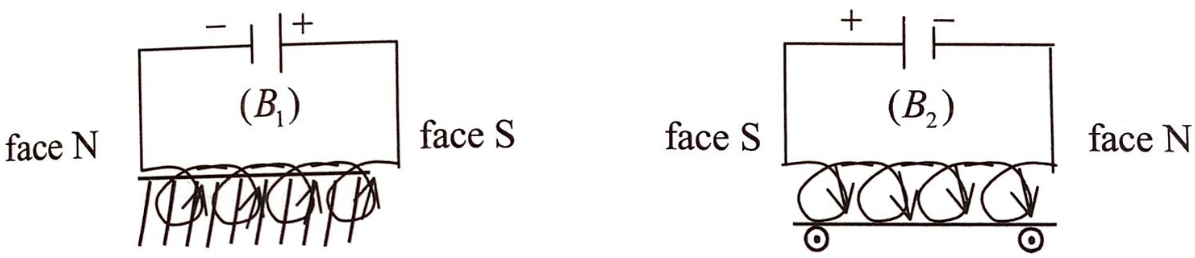
<u>Solution</u>

1. Nom des faces des bobines :



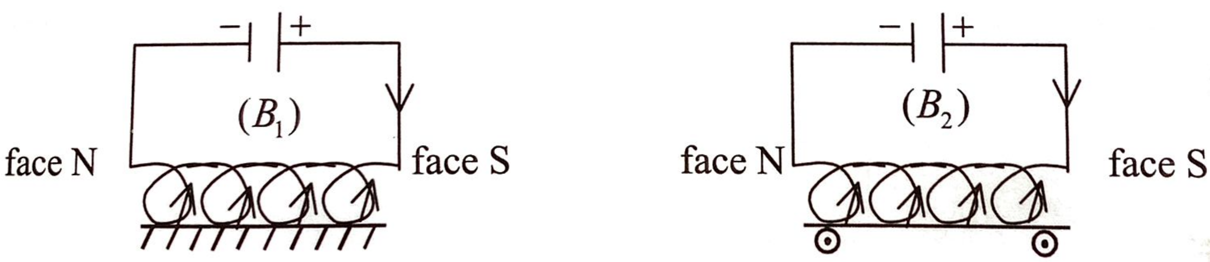
2. La bobine B_2 est repoussée par la bobine B_1 car deux faces de même nom se font face.

3. a)



La bobine B_2 est repoussée par la bobine B_1 car deux faces S sont en vis à vis.

b)

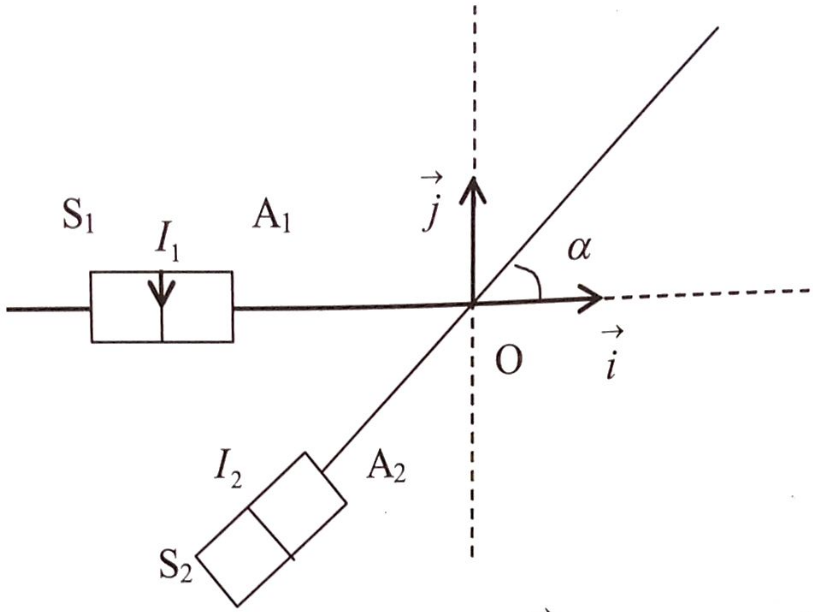


En changeant le sens du courant dans B_1, la bobine B_2 est attirée par la bobine B_1.

4. On renforce l'interaction entre les bobines en augmentant le champ magnétique :
- Soit en augmentant l'intensité du courant qui les parcourt ;
- Soit en introduisant à l'intérieur des bobines un noyau de fer doux.

Exercice N° 2

Deux solénoïdes identiques S et S_2 sont disposés comme le montre la figure ci – dessous. Leurs axes se coupent en O à la distance $d = OA_1 = OA_2$ des faces les plus proches et font un angle $\alpha = 45°$.

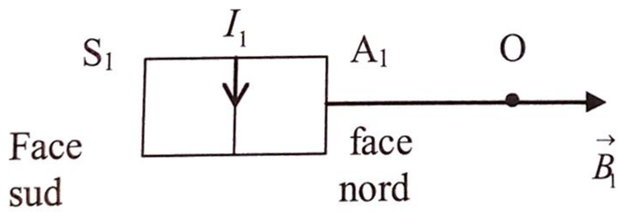


1. Le solénoïde S_1 crée en O un champ magnétique $\vec{B}_1$ de valeur 4.10^{-3} T, lorsqu'il est parcouru par un courant d'intensité I_1. Préciser la direction et le sens de $\vec{B}_1$.

La face A_1 est – elle sud ou nord ?

2. Le solénoïde S_1 fonctionnant dans les conditions précédentes, on fait passer dans le solénoïde S_2 un courant continu d'intensité I_2. Quel doit être le sens du courant I_2 pour que le champ magnétique total : $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ créé par les deux solénoïdes en O ait même direction que $\vec{j}$? Quel est alors le sens du champ $\vec{B}_2$? La face A_2 est – elle sud ou nord ?

3. Calculer la valeur du champ magnétique total B ainsi que celle de l'intensité I_2 sachant que $I_1 = 1,2$A.



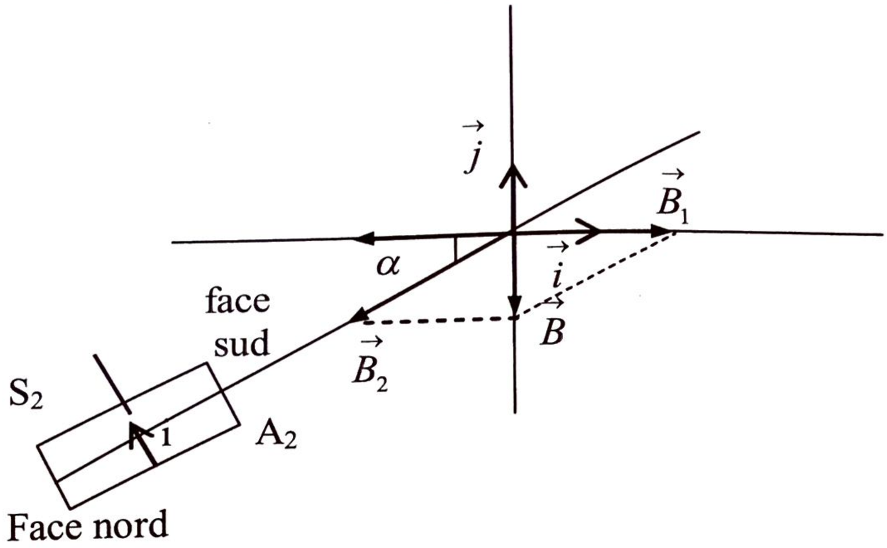
Solution

1. Direction et sens de $\vec{B}_1$ (donnés par la règle de la main droite).

$$\vec{B}_1 \begin{cases} \textit{direction : portée par } (O, \vec{i}) \\ \textit{sens : celui du vecteur unitare } \vec{i} \end{cases}$$

La face A_1 est une face nord.

2. Pour que le champ résultant ait même direction que $\vec{j}$, il faut que le sens de $\vec{B}_2$ soit de O vers S_2.



La face A_2 est une face sud.

3. Valeur du champ magnétique total B.

$$\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2}$$

Projection sur $O, \vec{i}$

$$O = B_1 - B_2 \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad B_1 = B_2 \cos\alpha.$$

$$B_2 = \frac{B_1}{\cos\alpha} \qquad \text{AN: } B_2 = \frac{4{,}0\,10^{-3}}{\cos 45°} \qquad B_2 = 5{,}66.10^{-3}\,T$$

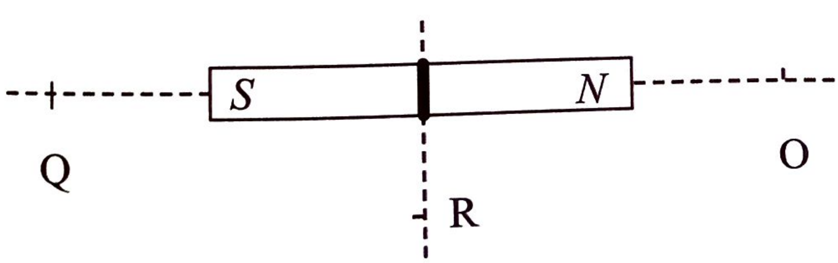
Intensité I_2

$$\begin{matrix} B_1 = \mu_0 n I_1 \\ B_2 = \mu_0 n I_2 \end{matrix} \Rightarrow \frac{B_1}{B_2} = \frac{I_1}{I_2} \Rightarrow I_2 = \frac{B_2}{B_1}.I_1$$

$$I_2 = \frac{5{,}66.10^{-3}}{4{,}0.10^{-3}}.1{,}2 \Rightarrow I_2 = 1{,}74\,A$$

Exercise N° 3

1. On considère un aimant droit disposé comme l'indique la figure1 suivante.



a) Représenter le spectre magnétique de cet aimant.

b) Représenter, en direction et sens, le vecteur champ $\vec{B}$ créé par cet aimant en chacun des points O, P, Q, R.

2. Soient deux aimants droits, A_1 *et* A_2, identiques au précédent, dont les axes sont perpendiculaires comme l'indique la figure 2.

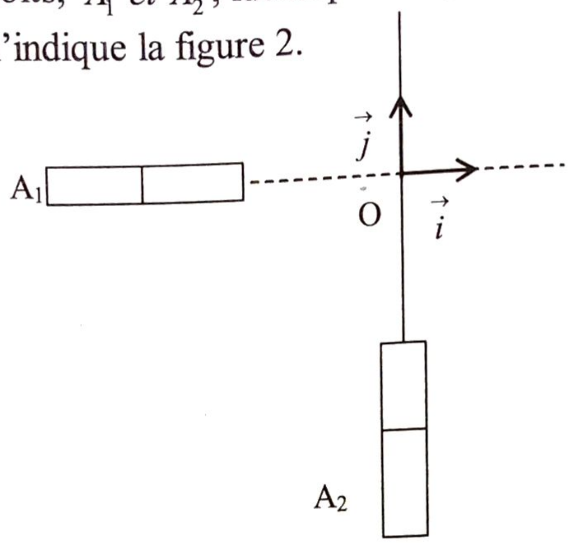


Figure 2

Les deux aimants sont situés à la même distance d'un point O.

Chaque aimant créé, en O, un champ magnétique $\vec{B}_0$, de valeur $B_0 = 2{,}5.10^{-3}$ T.

Donner dans la base ($\vec{i}, \vec{j}$), l'expression de la valeur du champ magnétique $\vec{B}$ créé par l'ensemble des aimants en O et calculer son module dans les cas suivants :

a) Les deux pôles Nord dirigés vers O.

b) Le pôle Sud de A_1 et le pôle Nord de A_2 sont dirigés vers O.

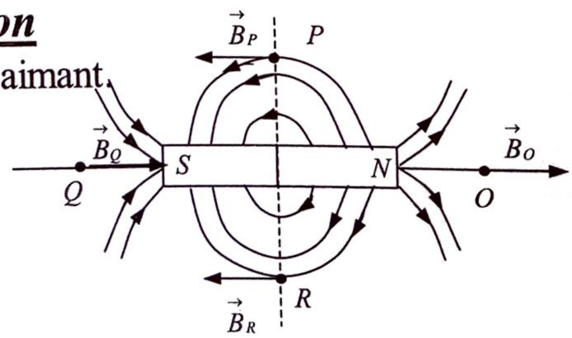
3. Les deux aimants étant toujours à la même distance de O, l'aimant A_2 est déplacé. Son axe fait un angle aigu α avec l'axe de A_1. Les deux pôles Sud des aimants sont dirigés vers le point O.

a) Exprimer, en fonction de α, le module du vecteur champ résultant en O. Calculer cette valeur pour $\alpha = 40°$.

b) Pour quelle valeur de α obtient – on un champ nul en O ?

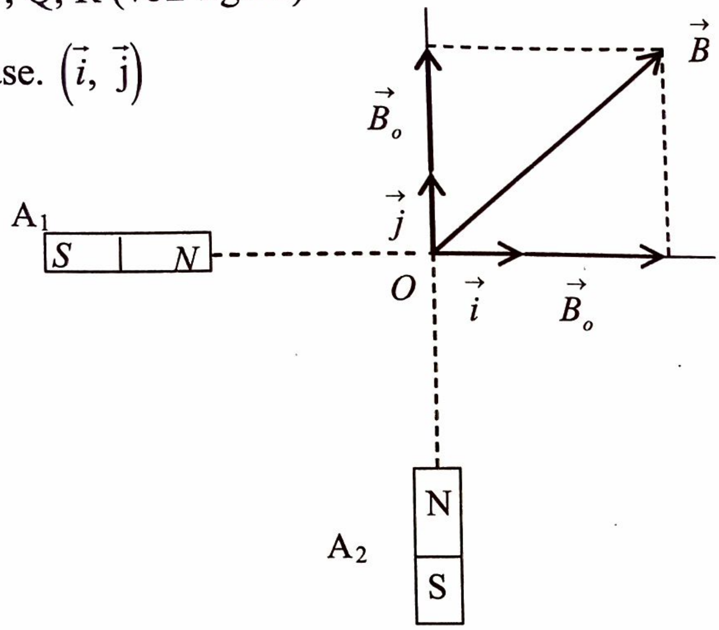
<u>Solution</u>

1. a) Représentation du spectre magnétique de l'aimant.



b) Vecteur champ $\vec{B}$ en O, P, Q, R (voir figure)

2\. a) Expression de $\vec{B}$ dans la base. $(\vec{i}, \vec{j})$



$\vec{B} = B_0\,\vec{i} + B_0\,\vec{j}$

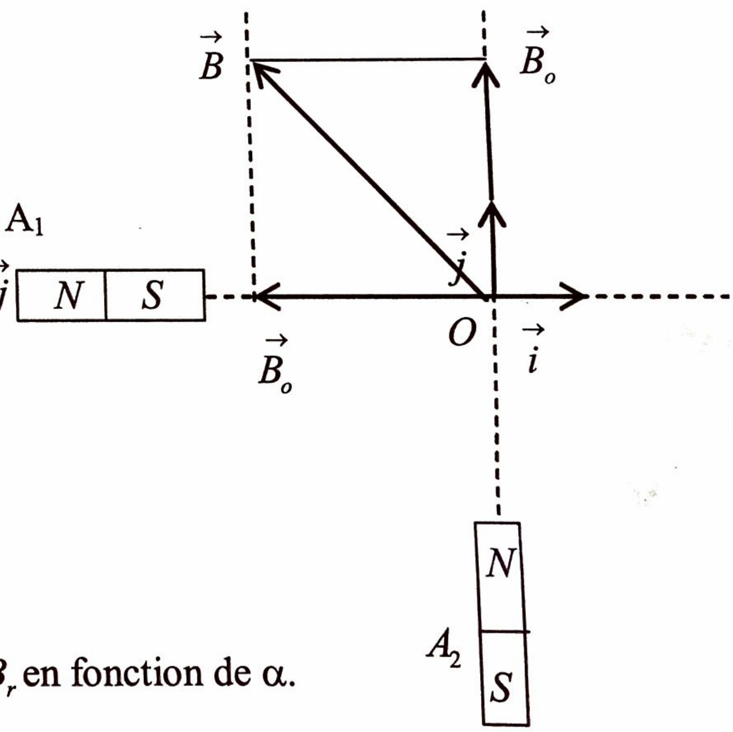
module de B

$B = \sqrt{B_0^2 + B_0^2} = B_0\sqrt{2}$

AN : $B = 2{,}5.10^{-3} \times \sqrt{2}$;

$B = 3{,}54.10^{-3}$ T

b) Expression de $\vec{B}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$



$\vec{B} = -B_0\,\vec{i} + B_0\,\vec{j}$

module de B

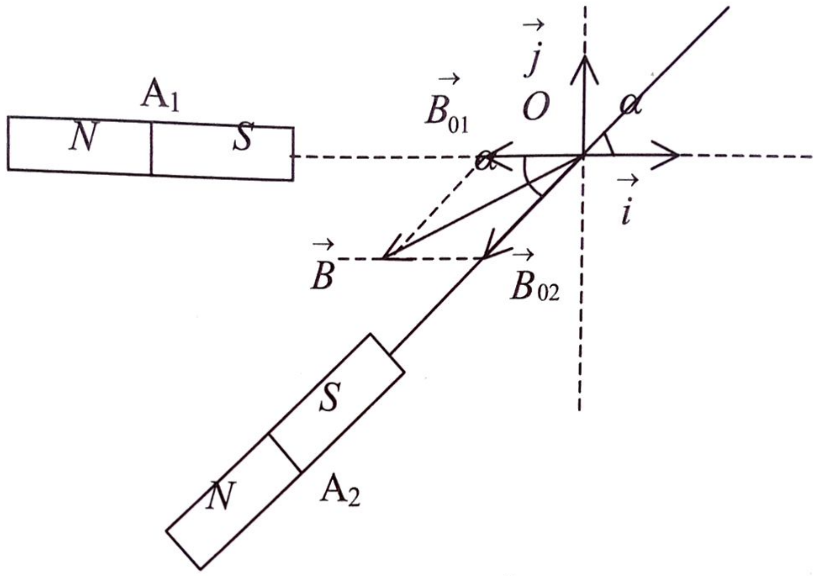
$B = B_0\sqrt{2}$; $B = 3{,}54.10^{-3}$ T

3\. a) Module du vecteur champ résultant B_r en fonction de α.

$\vec{B}_{o1}\left|\begin{matrix} -B_o \\ o \end{matrix}\right.$ $\qquad$ $\vec{B}_{o2}\left|\begin{matrix} -B_o\cos\alpha \\ -B_o\sin\alpha \end{matrix}\right.$

$\vec{B}_r = (-B_0 - B_0\cos\alpha).\,\vec{i} - B_0\sin\alpha.\,\vec{j} \Rightarrow \vec{B}_r = -B_0\,(1+\cos\alpha)\,\vec{i} - (B_0\sin\alpha)\,\vec{j}$

$B_r = \sqrt{[-B_o(1+\cos\alpha)]^2 + (-B_o\sin\alpha)^2}$



$$B_r = B_0\sqrt{(1+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha} \quad \Rightarrow \text{Br.} = B_0\sqrt{2(1+\cos\alpha)}$$

AN: α=40° $\quad B_r = 2{,}510^{-3}\sqrt{2(1+\cos\ 40°)} \quad B_r = 4{,}710^{-3}T$

Remarque: Par la méthode géométrique.

$B_{01} = B_{02} \Rightarrow$ le quadrilatère est un losange. On a $B_r = 2B_0\cos\dfrac{\alpha}{2}$

AN: $B_r = 2.2{,}510^{-3}\cos\dfrac{40°}{2} \Rightarrow B_r = 4{,}710^{-3}T$

b) Valeur de α pour que B_r soit nul.

$B_r = 0$ si $1+\cos\alpha = 0$ $(B_0 \neq 0)$ $\quad \cos\alpha = -1 \Rightarrow \cos\alpha = \cos\pi$

$\Rightarrow \alpha = \pi$

Exercice 4 : (BAC Niger 1996, TC)

L'aiguille aimantée d'une boussole est mobile autour d'un axe vertical passant par son milieu *O*.

1. On place dans le même plan horizontal que l'aiguille à une distance d, de celle-ci, un aimant droit dont l'axe est perpendiculaire au méridien magnétique. L'aiguille tourne alors d'un angle α =60° (voir figure1).

La composante horizontale du champ magnétique terrestre est $B_H = 2{,}0010^{-5}T$.

a) Représenter sur un schéma les différents champs magnétiques qui agissent sur l'aiguille et indiquer les pôles de l'aimant droit.

b) Déterminer schématiquement les intensités du champ magnétique créé en O par l'aimant et du champ magnétique horizontal résultant.
Echelle : $1,00 \times 10^{-5}$ T représenté par 2,0 cm.

c) Retrouver ces résultats par le calcul.

2. Le champ magnétique de l'aimant droit est remplacé par celui d'un solénoïde dont l'axe XY est perpendiculaire au méridien magnétique. L'aiguille aimantée est située au centre du solénoïde et suffisamment éloignée des extrémités. On règle l'intensité I du courant qui traverse le solénoïde de sorte que l'aiguille tourne d'un angle β=30° (voir figure2).

a) Représenter sur un schéma les différents champs magnétiques qui agissent sur l'aiguille. Indiquer le sens de circulation du courant électrique dans le solénoïde.

b) Quelle est l'intensité I du courant ?

Données :perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7} SI$; longueur du solénoïde $L = 40$ cm ; nombre de spires du solénoïde $N = 1600$.

Rappel : la valeur du champ magnétique créé à l'intérieur d'un long solénoïde est $B = \mu_0 \dfrac{NI}{L}$.

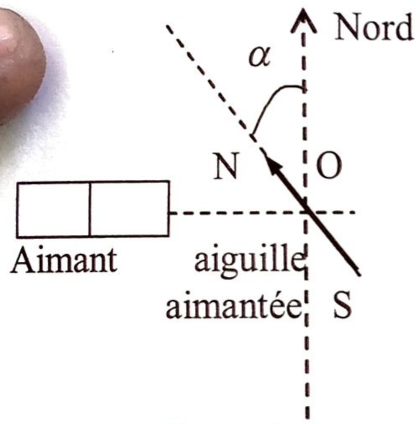


Figure 1

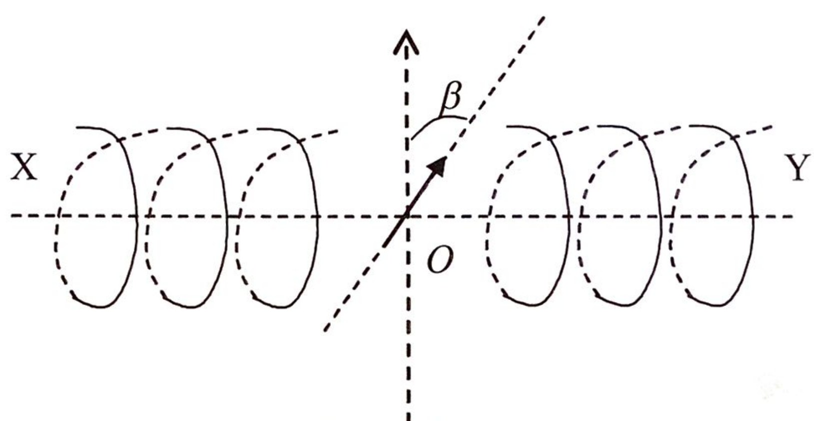


Figure 2

Solution

1. a) Champ magnétique agissant sur l'aiguille.

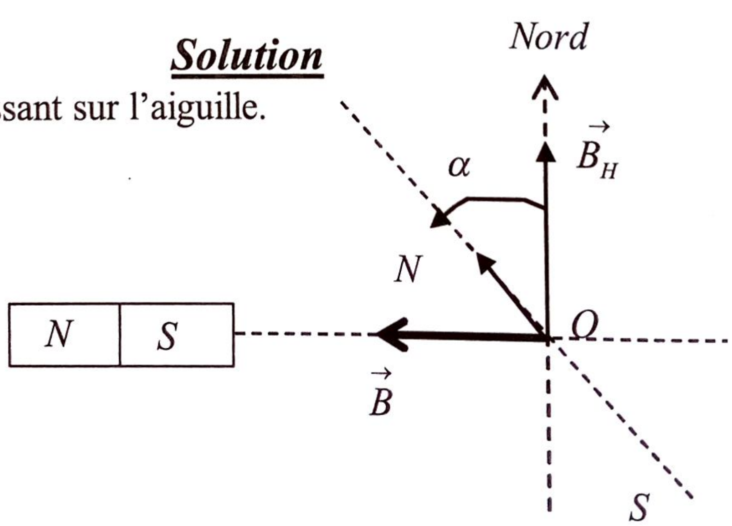


Figure 1

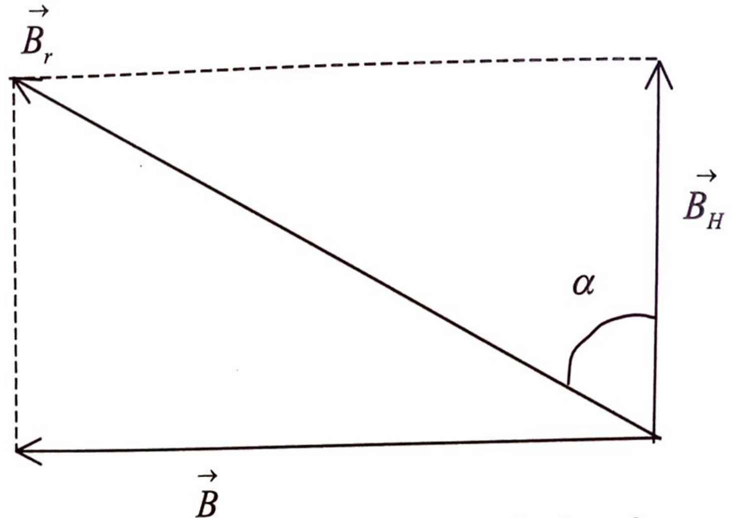
- Les pôles de l'aimant : $\vec{B}$ est dirigé du pôle Nord au pôle Sud de l'aimant. (voir figure1)

b) Représentation graphique des champs.

$B_H = 2{,}00 10^{-5} T$, $\vec{B}_H \longrightarrow$ 4cm , $\vec{B} \longrightarrow$ 7cm ; B = $\frac{7}{2}.10^{-5}$ ⇒ B = $3{,}5 10^{-5}$T

$\vec{B}_r \longrightarrow$ 8cm

$B_r = \frac{8}{2}.10^{-5} \Rightarrow B_r = 4 10^{-5} T$



c) Retrouvons ces résultats par le calcul. Considérons le triangle rectangle formé par $\vec{B}_r$ et $\vec{B}_H$

$\tan\alpha = \frac{B}{B_H} \Rightarrow$ B= $B_H.\tan\alpha$ AN : B = $2 10^{-5} \times \tan 60° = 3{,}46 10^{-5}$

B ≈ $3{,}5 10^{-5}$T

$\cos\alpha = \frac{B_H}{B_r} \Rightarrow B_r = \frac{B_H}{\cos\alpha}$ AN : $B_r = \frac{2 10^{-5}}{\cos 60°} = 4 10^{-5}$; $B_r = 4 10^{-5} T$

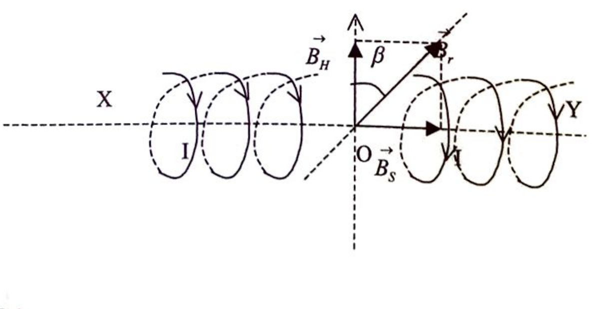
2. a) Représentation des différents champs magnétiques agissant sur l'aiguille.
   - Sens de circulation du courant (Règle de la main droite.)

   b) Intensité I du courant.

$B_S = \mu_0 \frac{NI}{L}$ *selon la figure* : $\tan\beta = \frac{B_S}{B_H} \Rightarrow B_S = B_H.\tan\beta$

$BH.\tan\beta = \mu 0 \frac{NI}{L} \Rightarrow I \frac{B_H.L.\tan\beta}{\mu_0 N}$

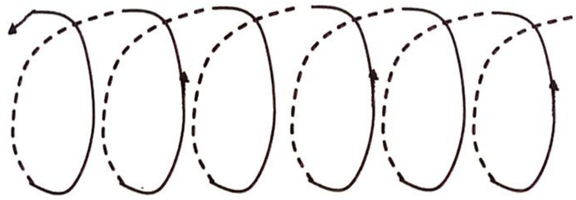
$AN : I = \frac{2.10^{-5}.40.10^{-2}\tan 30°}{4\pi.10^{-7}.1600}$ I = $2{,}3 10^{-3}$A



Exercice N° 5

Une bobine est parcourue par un courant, comme l'indique le shéma ci -dessous.

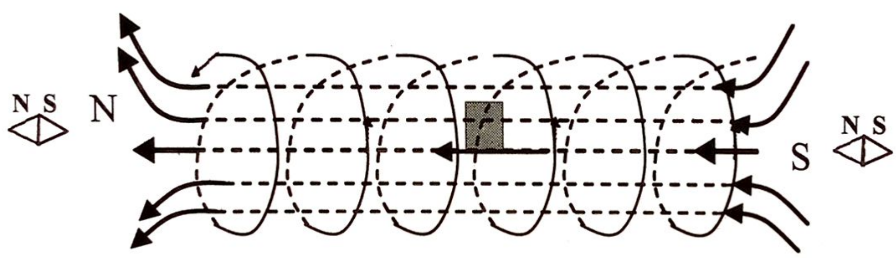
Figure



1. Quelle est la direction du champ $\vec{B}$ à l'intérieur de la bobine ? Représenter les lignes de champ en négligeant le champ magnétique terrestre.
2. Indiquer comment s'orienterait l'aiguille aimantée placée devant chaque face.
3. Donner le nom de chaque face.
4. Donner la relation qui permet de calculer la valeur du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde.

Solution

1. Direction du champ $\vec{B}$ et representation des lignes de champ (voir schéma : règle de la main droite)



2. Voir schéma
3. Voir schéma
4. Relation donnant le champ magnétique

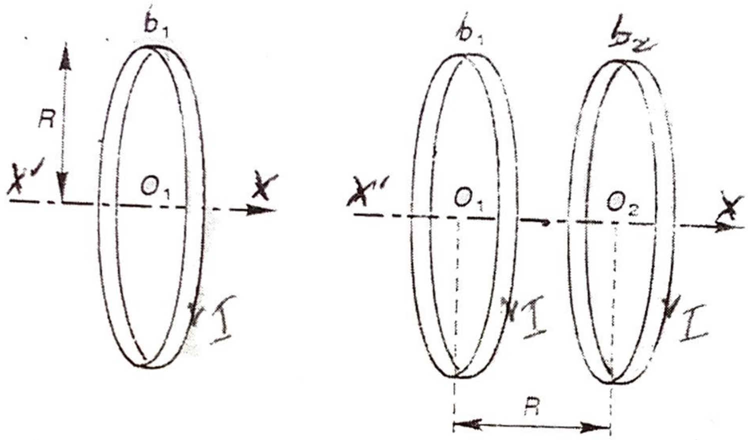
$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I$$

5. μ_0 : perméabilité du vide
   N : nombre de spires
   L : longueur du solénoïde
   I : intensité du courant.

Exercice N° 6

Soit b_1, une bobine plate circulaire parcourue par un courant d'intensitéI. Elle a pour rayon moyen R = 10cm. La mesure du champ magnetique b_1, qu'elle crée, a donné les résultats suivants pour des points situés sur son axe, à la distance x du centre O_1.

x(cm)	0	1	2	3	4	5	7,5	10	15	20
$b_1 10^{-5}$T	12,6	12,4	11,0	10,0	8,98	4,43	6,43	4,42	2,15	1,12



1. Représenter graphiquement en fonction de x les variations du champ magnétique b_1 créé par la bobine b_1, x variant de 0 à 20cm sur la partie O_1x de l'axe de la bobine. (Par symétrie on obtiendrait les correspondants à la partie O_1x; ne pas faire cette construction

Echelle en abscisses: 1cm pour 1cm

en ordonnées: 1cm pour 10^{-5}T.

2. On adjoint à la bobine b_1, une bobine b_2 identique placée parallèlement et dont le centre est situé en O_2. Tel que O_1O_2 = R= 10cm

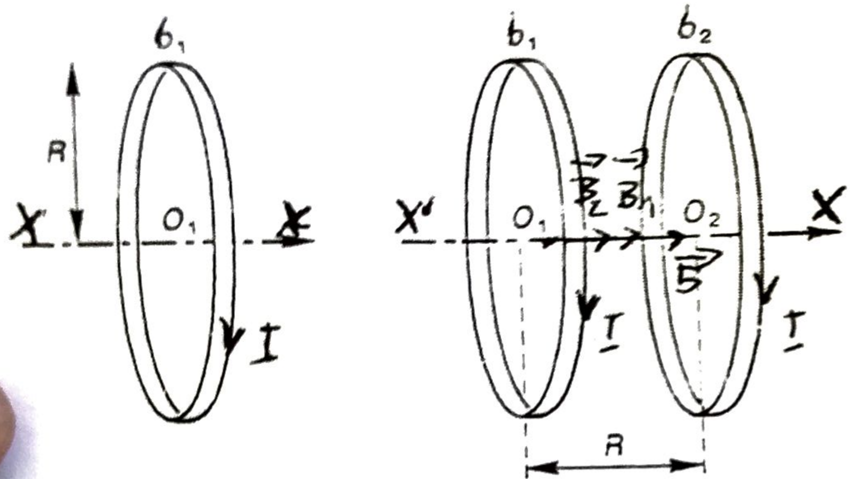
Les deux bobines sont montées en série et parcourues par un courant de même sens et de même intensité I. (Fig .2)

Indiquer la direction et le sens du champ magnétique $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B_2}$ qui existe entre les bobines b_1 et b_2 et en déduire par addition graphique la courbe donnant en fonction de x la valeur du champ magnétique sur l'axe des deux bobines.

3. Quel intérêt présente ce dispositif ? Quel nom donne-t-on à cet ensemble ?

Solution

1. Représentation graphique (voir papier millimètre)
2. Direction et sens de $\vec{R}$



$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}_1 + \overrightarrow{B_2}$

$\overrightarrow{B}_1$ et $\overrightarrow{B}_2$ même direction et

même sens

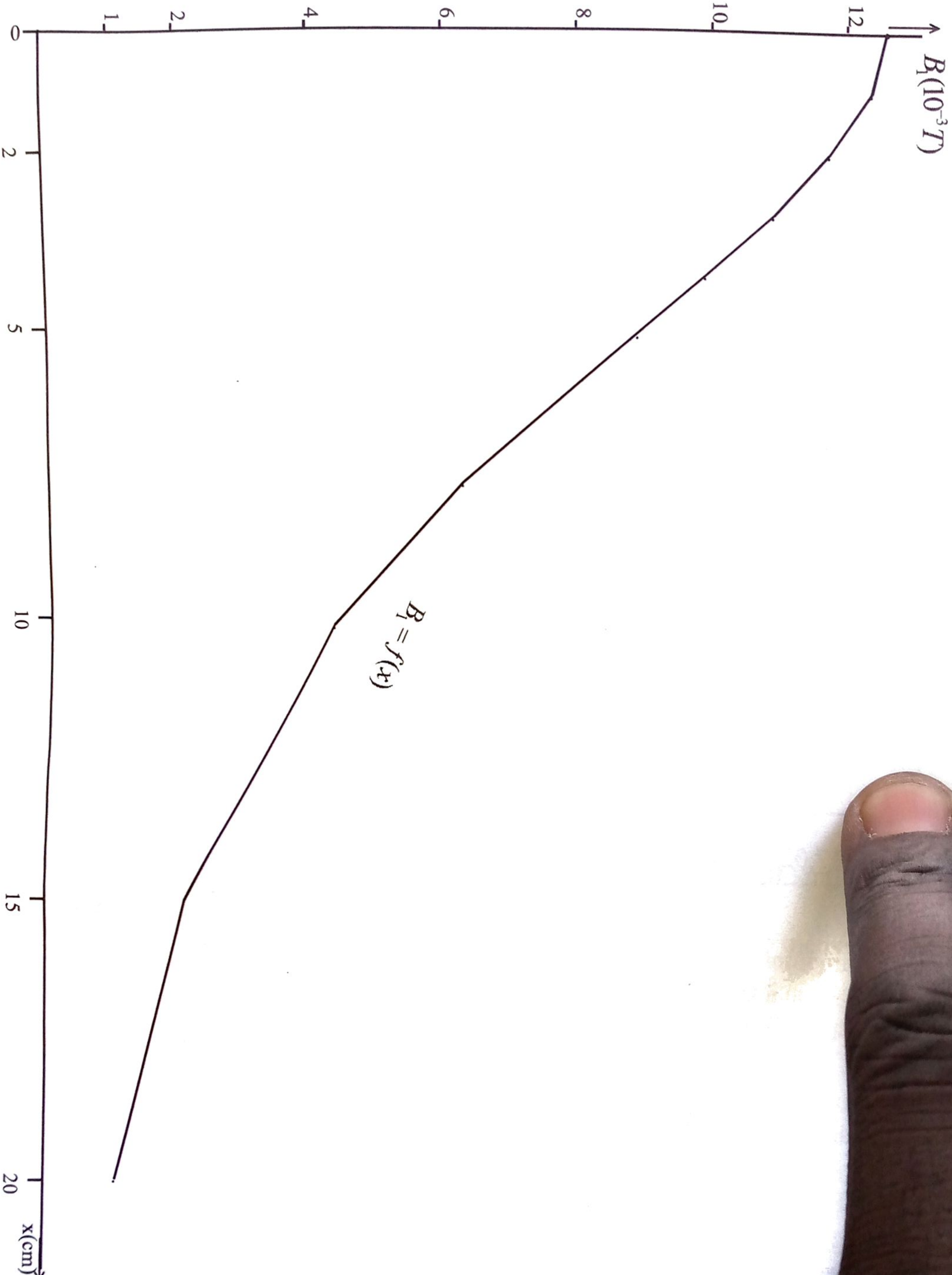
$B = B_1 + B_2$

x	0	1	2	3	4	5	7,5	10
B1	12,6	12,4	11,8	11,0	10,0	8,98	6,43	4,42
B2	4,42	5,15	6	6,95	8	8,98	11,45	12,6
B	17,02	17,65	17,8	17,95	18	17,96	17,88	17,02

Soit un point M entre le deux bobines
M est situé à la distance x de O_1
M est situé à la distance R-x de O_2

3. Intérêt du dispositif.

On remarque qu'à l'intérieur des deux bobines le champ magnétique est constant. Le dispositif permet de réaliser un champ magnétique uniforme ; cet ensemble porte le nom de : bobines de Helmotz.


$B_1(10^{-3}T)$
12
10
8
6
4
2
1
0
2
5
10
15
20
x(cm)
$B_1 = f(x)$

Chapitre 2

FORCE DE LORENTZ

RAPPEL DU COURS

I. <u>EXPRESSION</u> : La force de Lorentz est la force s'exerçant sur toute particule chargée en

mouvement dans un champ magnétique. $\vec{F} = q\,\vec{V} \wedge \vec{B}$.

- Caractéristiques de $\vec{F}$:

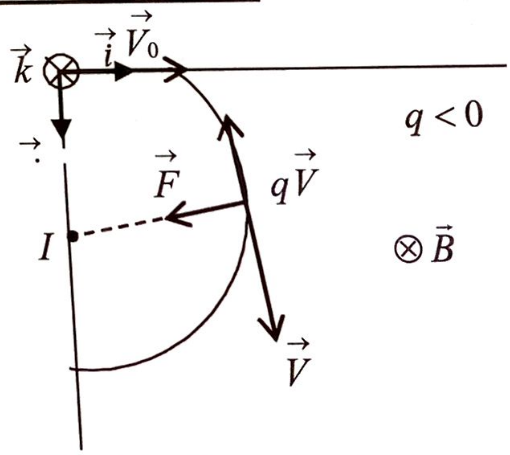
- Direction : $\perp$ ($\vec{V}$, $\vec{B}$)

- Sens : tel que (q. $\vec{V}$, $\vec{B}$, $\vec{F}$) constitue un trièdre direct. Le sens est déterminé par la règle de la main droite.

- Norme : F =| q | VB sin α avec $\alpha = \left(\vec{V}, \vec{B}\right)$.

II. <u>ETUDE DU MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE</u>

1. Trajectoire plane



T.C.I $\vec{F} = q\,\vec{V} \wedge \vec{B} = m\,\vec{a}$

$\vec{a} = \dfrac{q}{m}\vec{V} \wedge \vec{B}$ $\quad \vec{a} \perp \vec{B}$ et $\vec{V} \perp \vec{B} \Rightarrow$

Le mouvement a lieu dans le plan contenant $\vec{a}$ et $\vec{V}$ et $\perp$ à $\vec{B}$.

2. Mouvement uniforme : $\vec{a}$ dans la base de Frenet.

$\vec{a} \perp \vec{V}$ et $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$ $\quad \vec{a}_T = \dfrac{dV}{dt}\vec{T} = \vec{0} \Rightarrow V = cte.$

Donc le mouvement est uniforme

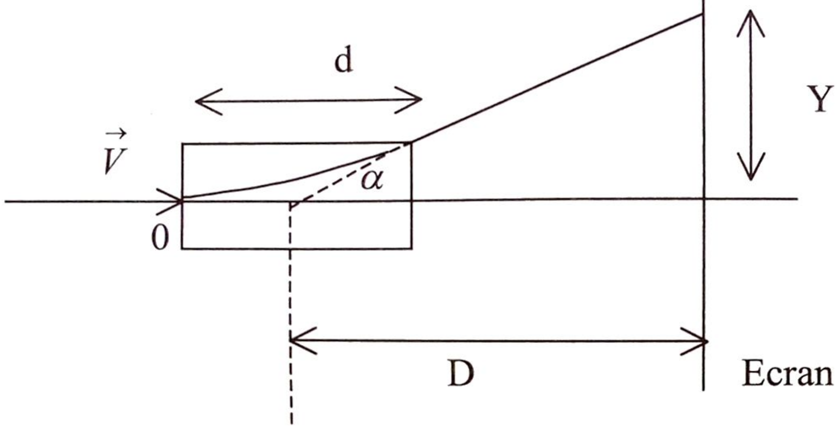
3. Mouvement circulaire :

Donc la trajectoire est un cercle. Le mouvement est circulaire uniforme.

Exercices

Exercice N° 1

Un faiceau homocinétique d'électrons pénètre en O à la vitesse $\vec{V}$ dans une région où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orthogonal à $\vec{V}$, qui est nul à l'extérieur de la région.



Pour les applications numériques V=10^7ms^{-1} d = 2 cm D = 20 cm Y = 2,5 cm.

1. Le faiceau est dévié vers le haut. Quel est le sens du vecteur champ $\vec{B}$?
2. Quel est, exprimé, en fonction de la charge massique $q_1 = \frac{q}{m}$ de V et de B le rayon de courbure R de la trajectoire ?
3. A sa sortie du champ, le faiceau semble provenir d'un point I très proche de la région centrale du champ. Le champ magnétique s'exerce sur un trajet de longueur très voisine de d. Exprimer l'angle α de déflexion en fonction de d, *q*, *B* et V.
4. On observe une distance de déflexion Y = 2,5cm.Que vaut le champ magnétique ?

Solution

1. Le sens du champ magnétique $\vec{B}$.

La force magnétique $\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B} = -e\vec{V} \wedge \vec{B}$

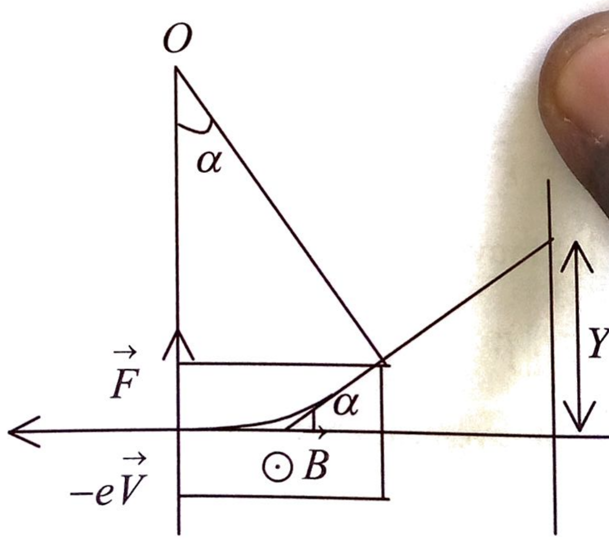
Règle de la main droite : $\vec{B}$ est sortant.

2. Rayon de courbure en fonction de q_1,V et B.

T.C.I : $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -e\vec{V} \wedge \vec{B} = \mathrm{m}\vec{a}$

$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{V} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{V}$ donc $\vec{a} = \vec{a}_n = \frac{V^2}{R}\vec{n}$

$\frac{|q|}{m}VB = \frac{V^2}{R}$ or $\frac{q}{m} = q_1$



$$|q_1|\ VB = \frac{V^2}{R} \Rightarrow \mathrm{R} = \frac{\mathrm{V}}{|\mathrm{q}_1|\ \mathrm{B}}$$

3. L'angle de déflexion α en fonction de d, q_1, V et B.

α petit sinα ≈ tanα ≈ α (rad).

$$\alpha(rad) = \frac{d}{R} = d\frac{|q_1|B}{V}$$

4. Valeur du champ magnétique.

$$\alpha = \frac{Y}{D} = \frac{d|q_1|B}{V} \Rightarrow B = \frac{YV}{Dd|q_1|} = \frac{YVm}{Dd|q_1|}$$

$$B = \frac{2{,}5\,10^{-2} \times 10^{7} \times 9{,}1\,10^{-31}}{20\,10^{-2} \times 1{,}6\,10^{-19} \times 2\,10^{-2}} \Rightarrow B = 3{,}55.10^{-4}\ T$$

Exercice N° 2

A l'aide d'un spectrographe de masse, on veut séparer les isotopes du chlore. Une chambre d'ionisation produit des ions $^{35}Cl^-$ et $^{37}Cl^-$.Ces ions sont ensuite accélérés entre deux plaques parallèles (P_1) et (P_2). La tension accélératrice a pour valeur U = 20.10³V. On négligera la vitesse des ions lorsqu'ils traversent la plaque (P_1) en O_1.

1. a) Quelle est la plaque qui doit être portée au potentiel le plus élevé ? Représenter $\vec{E}$.

b) Montrer que le poids de l'ion $^{35}Cl^-$ est négligeable devant la force électrique à la quelle il est soumis.

c) Calculer les vitesses V_o de $^{35}Cl^-$ et V'_o de $^{37}Cl^-$ en O_2.

Déterminer le rapport $\frac{V_0}{V_0}$.

2. Les ions pénètrent ensuite dans une région où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orthogonal au plan de la figure, d'intensité B = 0,2T.

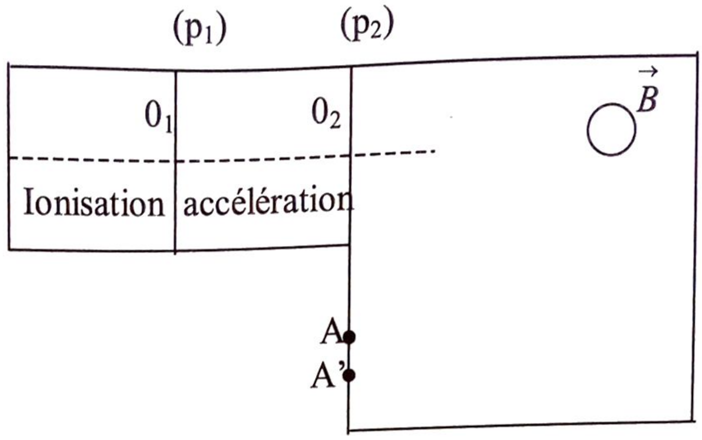
a) Indiquer sur le schéma le vecteur $\vec{B}$ pour que les ions $^{35}Cl^-$ arrivent en A et $^{37}Cl^-$ en A'. Justifier la construction.

b) Montrer que les trajectoires des ions sont planes ; établir la nature du mouvement, ainsi que la forme des trajectoires.

c) Calculer le rayon de courbure des ions $^{35}Cl^-$.

3. Calculer la distance entre les points d'impact des deux ions $^{35}Cl^-$ et $^{37}Cl^-$.

Données : masse du nucléon. $m_N = 1{,}67\,10^{-27} kg$; $g = 10 ms^{-2}$.



Solution

1. a) $\vec{F} = q\vec{E}$, $q < 0$ $\vec{F}$ et $\vec{E}$ ont même direction mais de sens contraires $\vec{F}$ étant dirigée de O_1 vers O_2, donc $\vec{E}$ *est orienté de* O_2 *vers* O_1. Ce qui signifie que P_2 est portée au potentiel le plus élevé.

b) Comparaison entre P et F

$$P = mg \quad P = 35 \times 1{,}67.10^{-27} \times 10 = 5{,}84.10^{-25} N$$

$$F = qE = \frac{qU}{d} \qquad F = 1{,}610^{-19} \times \frac{2010^3}{10^{-2}} = 3{,}210^{-13} N$$

$$\frac{F}{P} = \frac{3{,}210^{-13}}{5{,}8410^{-25}} \approx 10^{12} \Rightarrow F >> P$$

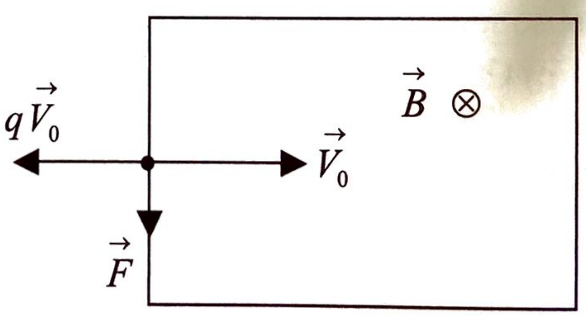
c. Calcul des vitesses.

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

$$-\frac{1}{2} m V_0^2 = -eU \quad \Rightarrow V_0^2 = \frac{2eU}{m} \qquad V_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

$$V_0' = \sqrt{\frac{2eU}{m'}}$$

AN : $V_0 = 3{,}3.10^5 ms^{-1}$ $\qquad V_0' = 3{,}23.10^5 ms^{-1}$



2. a) Sens de $\vec{B}$

$$\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$$

Pour que $\vec{F}$ soit tel que représentée, il faut que $\vec{B}$ soit entrant (règle de la main droite).

b) Trajectoires planes

T.C.I $\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m} \vec{V} \wedge \vec{B}$

$\vec{a} \perp \vec{B}$ et $\vec{V} \perp \vec{B} \Rightarrow$ le mouvement a lieu dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$ et contenant $\vec{a}$ et $\vec{V}$.

Nature du mouvement.

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{V} \wedge \vec{B} = \vec{a}_N + \vec{a}_T = \frac{V^2}{R}\vec{N} + \frac{dV}{dt}\vec{T} \quad \text{or} \quad \vec{a} \perp \vec{V} \Rightarrow \frac{dV}{dt}\vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 0.$$

D'où $V = \text{cte}$ $\quad V = V_0$ le mouvement est uniforme

Trajectoire

$$\frac{V^2}{R} = \frac{|q|VB}{m} \Rightarrow R = \frac{mV_0}{|q|\,\text{B}} = \text{cte}$$

La trajectoire est alors circulaire

c) Rayon des ions $^{35}Cl^-$

$$R = \frac{35 \times 1{,}67.10^{-27} \times 3{,}3.10^5}{1{,}6.10^{-19} \times 0{,}2} = 0{,}603\text{m}$$

3. Calcul de AA'

$$AA' = O_2A' - O_2A = 2R' - 2R \Rightarrow AA' = 2(R' - R)$$

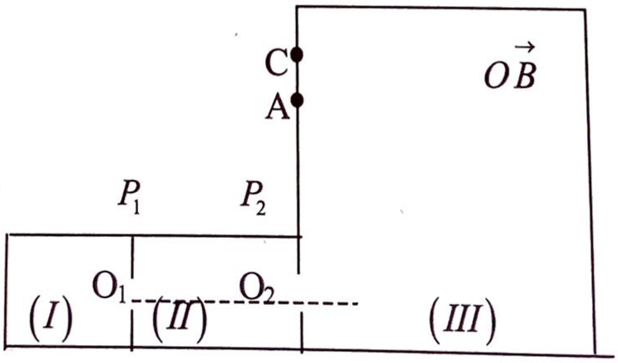
$$R' = \frac{37 \times 1{,}67.10^{-27} \times 3{,}23.10^5}{1{,}6.10^{-19} \times 0{,}2} = 0{,}624\text{m}$$

$$AA' = 2(0{,}624 - 0{,}603)\text{m} = 0{,}042\text{m} = 4{,}2\text{cm}$$

$$AA' = 4{,}2\text{cm}$$

Exercice N° 3

On admettra dans cet exercice que le poids des particules est négligeable devant les autres forces. On désire séparer les isotopes du chlore (Cl) à l'aide d'un spectrographe de masse schématisé ci – dessous :



1. Les ions chlores $^{35}Cl^-$ et $^{x}Cl^-$ sont produits dans une chambre d'ionisation (I),puis dirigés vers une chambre d'accélération (II) entre deux plaques parallèles P_1 et P_2 soumise à une

tension $|U_1| = 10^4$v. Au delà de O_2 les ions sont alors séparés grâce à un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ de norme0,2T, normal au plan de la figure.

a) Préciser sur un schéma le sens de $\vec{E}$ et le signe de $U_1 = Vp_1 - Vp_2$ qui permet l'accélération des ions.

b) Les deux sortes d'ions pénètrent en O_1 avec une vitesse négligeable. Montrer que ceux-ci ont la même énergie cinétique au point O_2.Calculer la vitesse V_1 de l'ion $^{35}Cl^-$ au point O_2.

c) Exprimer l'intensité V_2 de l'ion $^{x}Cl^-$ en fonction de V_1 et x.

2. Les ions passent en O_2 avec les vitesse V_1 et V_2 précédentes et subissent l'action du champ magnétique $\vec{B}$ normal à ces vecteurs vitesse.

a) Déterminer le sens de $\vec{B}$ pour que les ions arrivent en A et C.

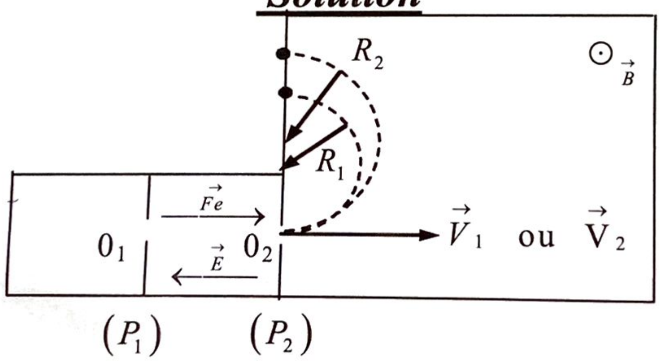
b) Monter que dans la région où règne $\vec{B}$, le mouvement des ions est plan, uniforme et circulaire.

En déduire les expressions des rayons de courbure R_1 et R_2 pour chacune des trajectoires. Calculer R_1.

c) Les ions $^{35}_{17}Cl^-$ et $^{x}_{17}Cl^-$ décrivent des demi – cercles et arrivent respectivement aux points A et C distants de d = 2,4cm. En déduire la valeur de x.

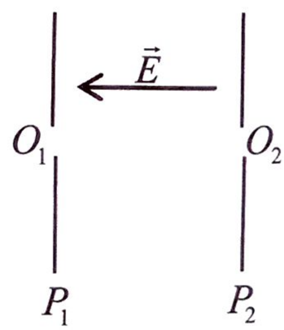
Données : e = $1{,}6.10^{-19}$C unité de masse atomique $\mu = 1{,}67.10^{-27}$ Kg.

Solution



1. a) Sens de $\vec{E}$ et signe de U_1 $\quad \vec{F}_e = q\vec{E}$, $\quad q < 0 \Rightarrow \vec{F}_e$ et $\vec{E}$ sont de sens contraires

$U_1 = Vp_1 - Vp_2 < 0$



b) Montrons que $^{35}_{17}Cl^-$ et $^{X}_{17}Cl^-$ ont même énergie cinétique en O_2.

T.E.C $\quad \Delta E_C = \sum W_{\vec{F}ext} \quad\quad E_C = W(\vec{Fe})$

$$E_C = - eU_1 = cte$$

Calculons V_1.

Pour l'ion $^{35}_{17}Cl^-$ $\frac{1}{2}mV_1^2 = -eU_1 \Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{-2eU_1}{m_1}}$

$$AN: V_1 = \sqrt{\frac{2\times 1,6.10^{-19}\times 10^4}{35\times 1,67.10^{-27}}} = 2,34.10^5 ms^{-1}$$

$V_1 = 2,34.10^5 ms^{-1}$

c) Exprimons V_2 en O_2 en fonction de V_1 et x.

En O_2 les deux ions ont la même énergie cinétique.

$$\frac{1}{2}35\mu V_1^2 = \frac{1}{2}.X\mu V_2^2 \Rightarrow V_2^2 = V_1^2\frac{35}{X} \Rightarrow V_2 = V_1\sqrt{\frac{35}{X}}$$

2. a) Sens de $\vec{B}$ pour que les ions arrivent en A et C.

$\vec{f} = q\vec{V}\wedge\vec{B}$. $\vec{B}$ est alors sortant. (règle de la main droite).

b) Mouvement plan.

T.C.I $\vec{f} = m\vec{a}$ $\quad q\vec{V}\wedge\vec{B} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{V}\wedge\vec{B}$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\perp\vec{B}\\ \vec{V}\perp\vec{B}\end{array}\right\} \Rightarrow$$ les particules se déplacent dans le plan $\perp$ $\vec{B}$ et contenant $\vec{a}$ et $\vec{V}$.

- Mouvement uniforme

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{V}\wedge\vec{B} \quad \vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T = \frac{V_2}{R}\vec{N} + \frac{dV}{dt}\vec{T} \text{ or } \vec{a}\perp\vec{V}$$

$$\Rightarrow a_T = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow V = V_0 = cte.$$

- Trajectoire circulaire

$$\vec{a}_N = \vec{a} \qquad \frac{|q|}{m}V_0 B = \frac{V_0^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mV_0}{|q|B} = cte$$

$$.R_1 = \frac{35\mu V_1}{eB} \qquad R_2 = \frac{X\mu V_2}{eB}$$

Calcul de R_1 $\quad R_1 = \frac{35\times 1,6710^{-27}\times 2,3410^5}{1,610^{-19}\times 210^{-1}} = 42,710^{-2}m = 42,7cm$.

c) Déduction de X

$$AC = 2(R_2 - R_1) \Rightarrow R_2 = \frac{d}{2} + R_1 \qquad R_2 = 0{,}439\text{m} = 43{,}9\text{cm}$$

$$R_2 = \frac{X\mu}{eB}V_1\sqrt{\frac{35}{X}} \Rightarrow R_2 = \frac{V_1\mu\sqrt{35X}}{eB} \Rightarrow R_1^2 = \frac{V_1^2\mu^2}{e^2B^2}.35X$$

$$X = \frac{R_2^2e^2B^2}{35V_1^2\mu^2} \qquad \text{AN: } X = 36{,}9 \approx 37 \qquad X = 37.$$

Exercice N° 4

Dans tout l'exercice les particules se déplacent dans le vide et leur poids est négligeable devant les autres forces. Un spectrographe (schéma ci-dessous) permet de séparer les atomes de lithium isotopes ^6Li *et* ^7Li de masses respectives m_1 *et* m_2. La chambre d'ionisation (C_1) produit des ions lithium $^6Li^+$ *et* $^7Li^+$ qui pénètrent en O', avec une vitesse négligeable dans le champ électrique uniforme $\vec{E}$ crée par la différence de potentiel existant entre les deux plaques verticales P' et P. Des ions Li^+ seront accélérés dans le vide jusqu'en O.

1. Quel est le signe de la tension électrique $U = V_{P'} - V_P$ que l'on établit entre P' et P ?.
2. Calculer les vitesses $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ des ions $^6Li^+$ *et* $^7Li^+$ lorsqu'ils atteignent O.
3. En O, les ions Li^+ pénètrent dans la chambre (C_2) où règne un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au plan du schéma. Ils atteindront ensuite la zone de réception indiquée sur le schéma.

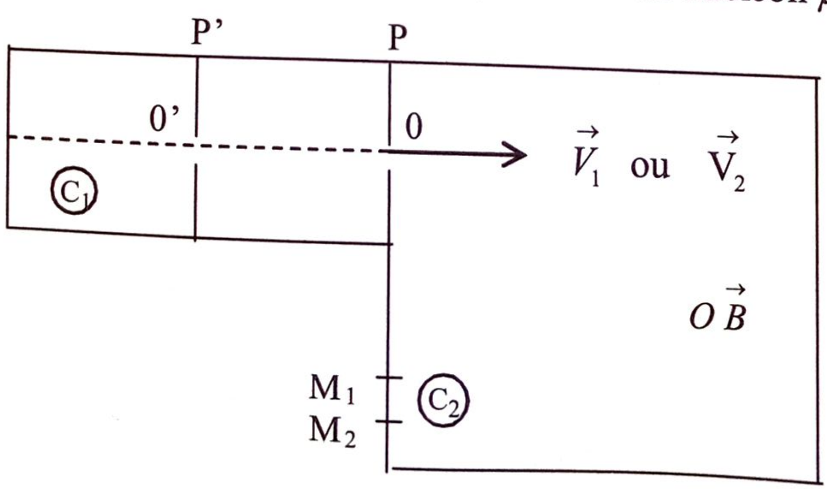
   a) Préciser, en justifiant, le sens du vecteur champ magnétique $\vec{B}$.

   b) Montrer que la trajectoire des ions est plane.

   c) Montrer que le mouvement de chaque ion lithium est uniforme et circulaire.

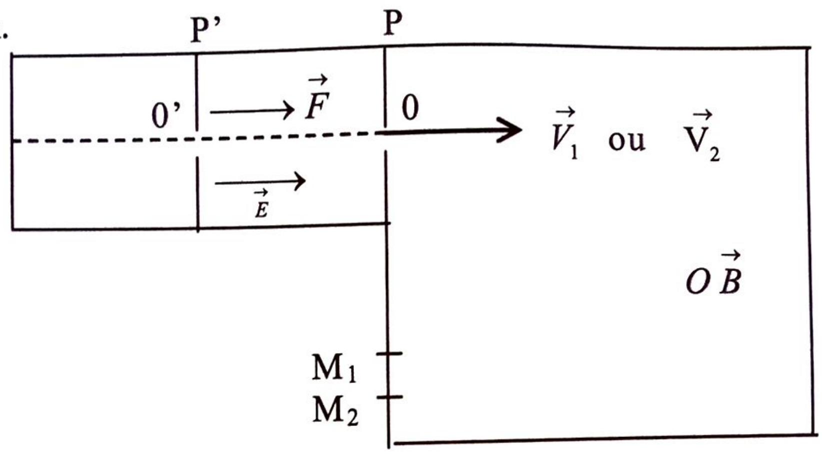
Calculer les rayons respectifs R_1 et R_2 des trajectoires des ions $^6Li^+$ *et* $^7Li^+$. En déduir distance M_1M_2 d'impact des ions $^6Li^+$ *et* $^7Li^+$ dans la zone de réception.

AN : $|U| = 5{,}00.10^3V$; B = 2,00.10^{-3} T e = 1,60^{-19}C ; masse d'un nucléon μ = 1,66.10^{-27}kg.



Solution

1. Signe de la tension.



$U = V_{P'} - V_P$ $\quad \vec{F} = q\vec{E}$ $\quad q > 0$ $\quad \vec{F}$ et $\vec{E}$ ont même sens. Donc $V_{P'} > V_P \Rightarrow$ U>0.

2. Calcul de V_1 et V_2

T.E.C : $^6Li^+$ $\quad \frac{1}{2}m_1V_1^2 = W(\vec{F})$ $\quad\quad \frac{1}{2}m_1V_1^2 = eU$

$$V_1^2 = \frac{2eU}{m_1} \qquad V_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m_1}}$$

$$AN: V_1 = \sqrt{\frac{2\times1,610^{-19}\times510^3}{6\times1,66.10^{-27}}} = \sqrt{\frac{16\times10^{11}}{9,96}} \approx 4,0110^5 ms^{-1}$$

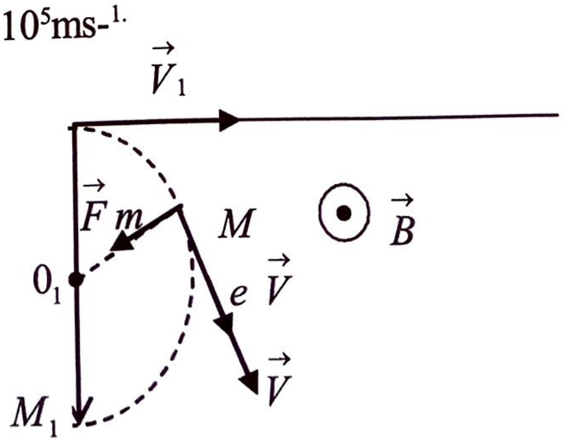
$V_1 = 4,00802410^5 \text{ms}^{-1}$ $\qquad V_1 = 4,0110^5 \text{ms}^{-1}$.

$^7Li^+$ $\qquad V_2 = \sqrt{\frac{2eU}{m_2}}$

$$AN: V_2 = \sqrt{\frac{1,610^{11}}{11,62}} = 3,71070910^5 \text{ms}^{-1} \approx 3,7110^5 \text{ms}^{-1}.$$

$V_2 = 3,7110^5 \text{ms}^{-1}.$

3. a) Le sens du vecteur $\vec{B}$.



$\vec{F}_m = e\vec{V} \wedge \vec{B}$. En appliquant la règle de la main droite on montre que $\vec{B}$ sort du plan.

b) Trajectoire plane.

T.C.I : $\vec{F}_m = e\vec{V} \wedge \vec{B} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{e}{m}\vec{V} \wedge \vec{B}$

$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \perp \vec{B} \\ \vec{V} \perp \vec{B} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Le mouvement s'effectue dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$ et contenant $\vec{a}$ et $\vec{V}$.

c) Mouvement uniforme.

$\vec{a} = \frac{e}{m}\vec{V} \wedge \vec{B}$ $\quad \vec{a} \perp \vec{V}$ ($\vec{V}$ porté par $\vec{T}$)

$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = \frac{dV}{dt}\vec{T} + \frac{V^2}{R}\vec{N}$ $\quad \vec{a}_T = \vec{o}$ $\quad \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow V = cte.$

.Trajectoire circulaire.

$\vec{a} = \vec{a}_N$ $\quad \frac{e}{m}VB = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mV}{eB} = cte$

.Calcul de R_1 : $\quad R_1 = \frac{m_1 V_1}{eB}$

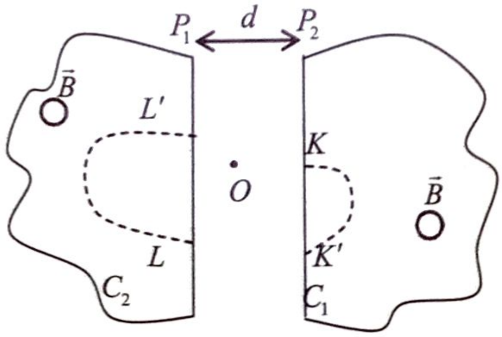
$$R_1 = \frac{6 \times 1{,}66\,10^{-27} \times 4{,}01\,10^{5}}{2\,10^{-1} \times 1{,}6\,10^{-19}} = 12{,}48\,10^{-2} m$$

$$R_2 = \frac{m_2 V_2}{eB} \qquad R_2 = \frac{7 \times 1{,}66\,10^{-27} \times 3{,}71\,10^{5}}{2\,10^{-1} \times 1{,}6\,10^{-19}} = 13{,}47\,10^{-2} m.$$

$M_1M_2 = 2(R_2 - R_1)$ $\quad M_1M_2 = 0{,}99\,10^{-2}\,\text{m} = 0{,}99\,\text{cm} \approx 1\,\text{cm}.$

Exercice N° 5 : Bac Niger série D 1999

Entre deux parois planes parallèles. P_1 et P_2 soumises à une différence de potentiel (d.d.p) $V_{P_1} - V_{P_2}$ positive règne un champ électrique uniforme $\vec{E}$. De part et d'autre des parois règne un champ magnétique uniforme constant, perpendiculaire au plan de la figure ci-contre.



Une particule de masse m et de charge électrique q pénètre en O dans le champ électrique avec une vitesse négligeable, puis, par K dans le champ magnétique où elle décrit la trajectoire (C_1). Soient V_K la vitesse de la particule en K, et U la valeur absolue de la d.d.p.

1. a) En déduire le sens $\vec{E}$, le signe de q et la nature du mouvement de la particule entre O et K.

   b) Donner le sens du vecteur champ magnétique $\vec{B}$

   c) Quelle est l'énergie cinétique de la particule aux points K et K' ? Quelle est l'influence de $\vec{B}$ sur le mouvement de la particule ?

   d) Exprimer la distance KK' en fonction de m, q, B et V_K.

2. Dès que la particule sort du champ magnétique, la d.d.p devient négative.

   a) Quelle est alors la nature du mouvement de la particule en allant de P_2 à P_1 ?

   b) Donner l'énergie cinétique de la particule en L en fonction de m, q, V_K et U.

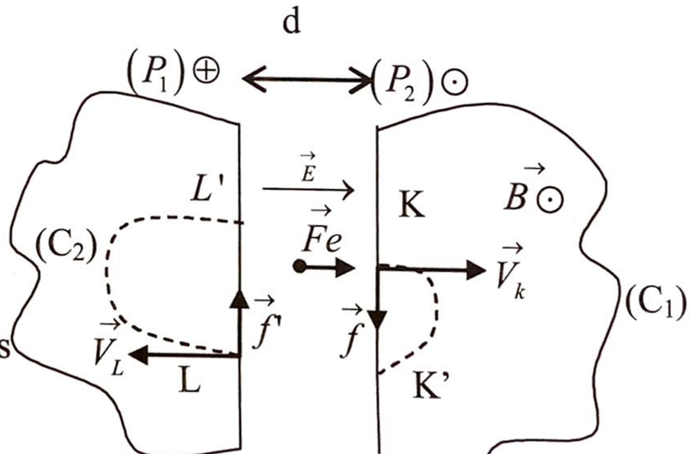
   c) Quel est l'intérêt du passage de la particule dans le champ électrique ?

3. A partir de L la particule décrit la trajectoire (C_2) et sort du champ magnétique par L'.

   a) Exprimer LL' en fonction m, q, B, U et V_K. Comparer LL' et KK'.

   b) Calculer les temps t_1 et t_2 mis pour parcourir respectivement (C_1) et (C_2).

<u>Solution</u>



1. a) - Sens de $\vec{E}$

$V_{P_1} - V_{P_2} > 0 \Rightarrow V_{P_1} > V_{P_2}$.

Donc $\vec{E}$ et dirigé de P_1 vers P_2.

- Signe de q

La particule se déplace de O vers K.

$\vec{F}_e$ est dirigé de O vers K.

$\vec{F}_e$ et $\vec{E}$ ayant même direction et même sens alors q > 0.

- Nature du mouvement entre O et K.

Appliquons le T.C.I : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_e = m\vec{a} \Rightarrow q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$

Projetons cette relation sur $\vec{OK}$: $a = \frac{q}{m}E$

a = cte, $a>0$ $\Rightarrow$ le mouvement de la particule est rectiligne uniformément accéléré entre O et K.

b) Sens de $\vec{B}$

$\vec{B}$ est sortant (règle de la main droite).

c) Energie cinétique de la particule en K et K'

Appliquons le T.E.C : $\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ext})$

$$\frac{1}{2}mV_K^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = \vec{F}_e \cdot \vec{OK} \qquad V_0 = 0 \text{ et } F_e = qE = q\frac{U}{d}$$

$\frac{1}{2}mV_K^2 = \frac{1}{2}qU \Rightarrow E_C(K) = \frac{1}{2}qU$

Le champ magnétique ne modifie pas la vitesse de la particule ; donc $E_C(K) = E_C(K')$.

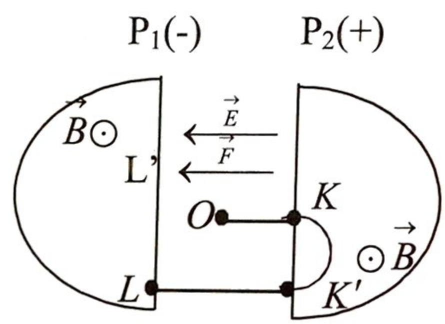
- $\vec{B}$ rend le mouvement de la particule circulaire uniforme.

d) Expression de $KK' = f(m, q, B, V_K)$

T.C.I : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$; $\vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow q\vec{V}_K \wedge \vec{B} = m\vec{a}$

$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{V}_K \wedge \vec{B}$. $\vec{a} \perp \vec{V}_K \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_n \Rightarrow \frac{q}{m}V_K.B = \frac{V_K^2}{R_1} \Rightarrow$

$R_1 = \frac{mV_K}{qB}$ $KK' = 2R_1 \Rightarrow KK' = \frac{2mV_K}{qB}$



2. a) Nature du mouvement de P_2 à P_1

$\vec{F}$ et $\vec{E}$ ont encore même direction, même sens $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$ et par projection

$a = \frac{q}{m}E = cte$,$a > 0 \Rightarrow$ le mouvement de

La particule est rectiligne uniformément accéléré.

b) Energie cinétique de la particule en L

$\Delta E_c = \sum W(\vec{F}ext) \Rightarrow E_{C_L} - E_{C_K} = qU$

$E_C(L) = qU + \frac{1}{2}mV_K^2$

c) Le passage de la particule dans le champ électrique permet d'augmenter sa vitesse (ou son énergie cinétique).

3. a) Expression de $LL' = f(m, q, B, U, V_K)$

Par analogie avec la question 1) d) on a = $R_2 = \frac{mV_L}{qB}$

$$LL' = 2R_2 \Rightarrow LL' = \frac{2mV_L}{qB}$$

$$Ec(L) = \frac{1}{2}mV_L^2 = qU + \frac{1}{2}mV_K^2 \Rightarrow V_L = \sqrt{\frac{2qU}{m} + V_K^2}$$

$$LL' = \sqrt{\frac{2qU}{m} + V_K^2}$$

Comparons LL' et KK'

$$KK' = \frac{2mV_K}{qB} \qquad LL' = \frac{2m}{qB}\sqrt{\frac{2qU}{m} + V_K^2}$$

$$\frac{LL'}{KK'} = \frac{\frac{2m}{qB}\sqrt{\frac{2qU}{m} + V_K^2}}{\frac{2mV_K}{qB}} = \frac{\sqrt{\frac{2qU}{m} + V_K^2}}{\sqrt{V_K^2}} = \sqrt{1 + \frac{2qU}{mV_K^2}}$$

$$\frac{LL'}{KK'} > 1 \Rightarrow LL' > KK'$$

b) Calcul de t_1

Le mouvement étant circulaire uniforme : $t_1 = \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$

$$t_1 = \frac{\pi R_1}{V_K} = \frac{\pi m V_K}{qBV_K} = \frac{\pi m}{qB}$$

$$t_2 = \frac{\pi R_2}{V_K} = \frac{\pi m V_K}{qBV_K} = \frac{\pi m}{qB}$$

Donc $t_1 = t_2$

Chapitre 3

FORCE DE LA PLACE

RAPPEL DU COURS

I EXPRESSION :

Une portion de conducteur de longueur ℓ parcourue par un courant électrique d'intensité I dans un champ magnétique $\vec{B}$ est soumise à une force électromagnétique : $\vec{F} = I \cdot \vec{\ell} \wedge \vec{B}$.

II CARACTÉRISTIQUES DE $\vec{F}$:

- Direction : perpendiculaire à $\left(\vec{\ell} \wedge \vec{B}\right)$
- Sens : tel que $\left(\vec{\ell}, \vec{B}, \vec{F}\right)$ constitue un trièdre direct.
- Norme : $F = I\ell B\sin\alpha$ avec $\alpha = \left(\vec{\ell}, \vec{B}\right)$
- Point d'application : milieu de la portion soumise à $\vec{B}$.

NB : Maîtriser les règles permettant de déterminer le sens de $\vec{F}$.

Exercices

Exercice N° 1

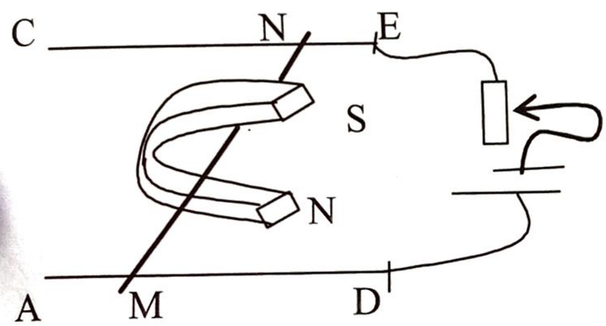
I. Une tige en cuivre *MN*, de masse m, homogène et de section constante est placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ sur une longueur ℓ . Elle est parcourue par un courant constant *I*. On admettra que la tige ne peut que glisser sans frottement sur les rails *CE* et *AD* (figure 1)

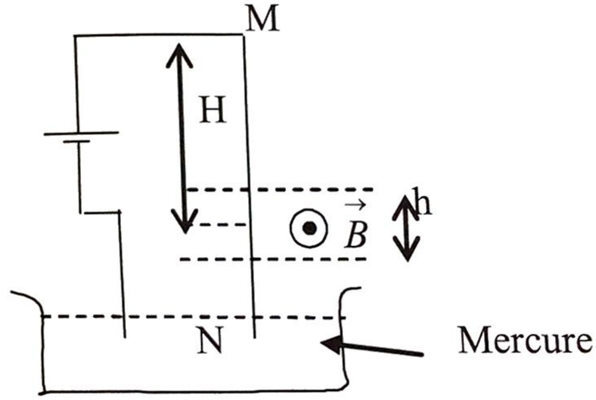
1. De quel angle α peut-on incliner les rails *AD* et *CE*, et dans quel sens pour que la tige soit en équilibre, dans les cas suivants :
   a) $\vec{B}$ reste perpendiculaire aux rails.
   b) $\vec{B}$ reste vertical ?
2. On incline le plan des rails d'un angle $\alpha = 30°$ dans le sens défini à la question 1) a). $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan des rails.
   a) Quelle est la nature du mouvement de la tige *MN* ?
   b) Calculer son accélération et sa vitesse 0,5s après la fermeture du circuit.

II La tige MN, est à présent mobile autour du point M (figure2).
Elle passe entre les branches d'un aimant en U.La largeur des branches est h. Le plan de symétrie horizontal de l'aimant est à la hauteur H au dessous de M. Cet aimant produit un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ .On passe un courant d'intensité I'. La tige dévie d'un angle $\alpha'=20°$.

1. Quel est le sens de déviation de la tige ? Justifier la réponse.
2. Calculer numériquement I'

Application numérique : **(I)**: $B = 0,5\ T$; $I = 2A$; $m = 10g$; $\ell = 6\ cm$; $g = 10ms^{-2}$
(II) : $MN = 40cm$; $m = 10g$; $h = 5\ cm$; $H = 30\ cm$; $B = 0,03T$;
$g = 10\ ms^{-2}$





Solution

I) 1. Angle d'inclinaison et sens d'inclinaison

a) $\vec{B} \perp$ aux rails

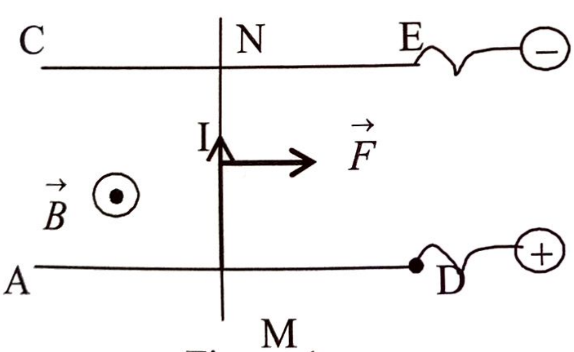


Figure 1

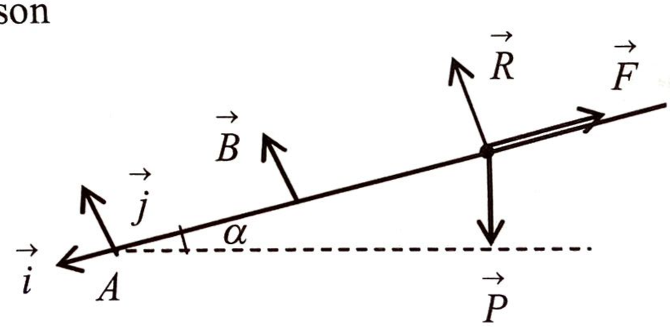


Figure 2

Sur la longueur la force de Laplace est donnée par $\vec{F} = I \cdot \vec{\ell} \wedge \vec{B}$.
Pour maintenir la tige en équilibre sur les rails, il faut relever les extrémités E et D.
Déterminons la valeur de α
A l'équilibre $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$ projection sur $\left(A, \vec{i}\right)$

$p\sin\alpha - F = 0 \quad mg\sin\alpha = BI\ell \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{BI\ell}{mg}$

AN: $\sin\alpha = \dfrac{2\times 6.10^{-2}\times 0{,}5}{10.10^{-3}\times 10} = 0{,}6 \Rightarrow \alpha = 36{,}87^\circ$

b) $\vec{B}$ est vertical .(Voir figure 3)

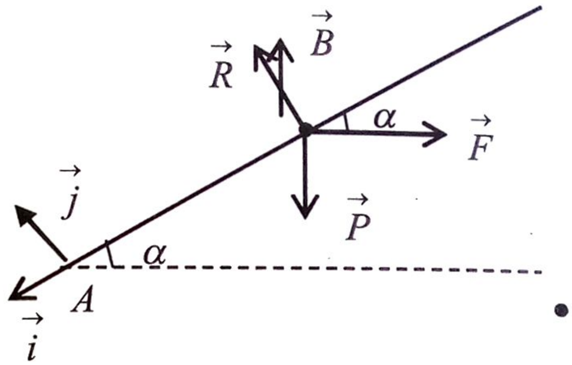


Figure 3

A l'équilibre $\vec{R}+\vec{P}+\vec{F}=\vec{O}$

Projection sur $(A, \vec{i})$

$P\sin\alpha - F\cos\alpha = 0$

$mg\sin\alpha = I\ell B\cos\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{I\ell B}{mg}$

$\tan\alpha = \dfrac{2\times 6.10^{-2}\times 0{,}5}{10.10^{-3}\times 10} = 0{,}6 \Rightarrow \alpha = 30{,}96^\circ$

2. Pour $\alpha = 30^\circ$

a) Nature du mouvement de la tige.

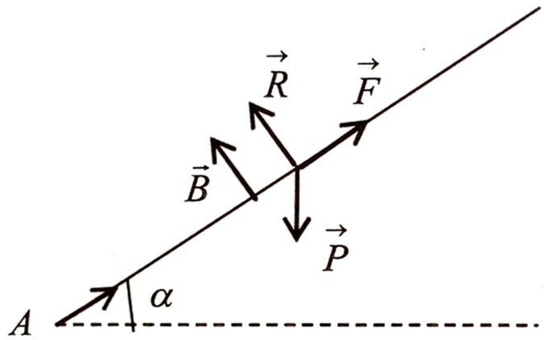


Figure 4

T.C.I : $\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}=m\vec{a}$

Projection sur $\left(A, \vec{i}\right)$

$-P\sin\alpha + F = ma \Rightarrow a = \dfrac{F}{m} - g\sin\alpha = \dfrac{BI\ell}{m} - g\sin\alpha.$

$a = C^{te} \Rightarrow$ le mouvement est uniformément varié

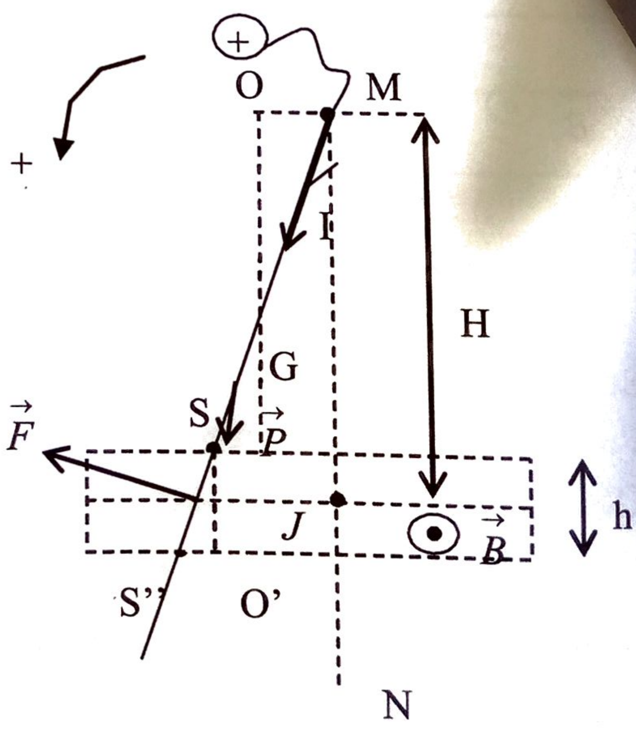
b) Calcul de a.

$a = -10\sin 30^\circ + \dfrac{2\times 6.10^{-2}\times 0{,}5}{10.10^{-3}} = 1ms^{-1}$

Calcul de V à $t = 0{,}5$ s

$V = at + V_0 \qquad V_0 = 0$

$V = \text{a t} \qquad V = 1\times 0{,}5 = 0{,}5\text{ms-1}$



II

1. Sens de déviation de la tige $\vec{F} = I'\vec{MN}\wedge\vec{B}$

L'utilisation de la règle de la main droite montre que la tige dévie vers la gauche.

2. Calcul de I'.

A l'équilibre $M_0(\vec{R}) + M_0(\vec{p}) + M_0(\vec{F}) = 0$

$M_0(\vec{R}) = 0$ ($\vec{R}$ rencontre l'axe)

$M_0(\overrightarrow{P}) = P.MO = mgMG\sin\alpha' = mg\frac{MN}{2}\sin\alpha'$

$M_0(\vec{F}) = -F.MK$ Considérons le triangle (MJK)

$\cos\alpha' = \frac{MJ}{MK} \Rightarrow MK = \frac{MJ}{\cos\alpha'} = \frac{H}{\cos\alpha'}$

$F = I'.SS'B$ Considérons le triangle ($SO'S'$)

$\cos\alpha' = \frac{SO'}{SS'} = \frac{h}{SS'} \Rightarrow SS' = \frac{h}{\cos\alpha'}$

$F = \frac{I'hB}{\cos\alpha'}$

D'où à l'équilibre $mg\frac{MN}{2}\sin\alpha' - \frac{I'hB}{\cos\alpha'}.\frac{H}{\cos\alpha'} = 0$

$$mg\frac{MN}{2}\sin\alpha' = \frac{I'hBH}{\cos^2\alpha'} \Rightarrow I' = \frac{mgMN\sin\alpha'\cos^2\alpha'}{2hBH}$$

$$\text{A.N. : } I' = \frac{10.10^{-3} \times 10 \times 40.10^{-2} \times \sin 20° \cos^2 20°}{2 \times 5.10^{-2} \times 30.10^{-2} \times 0{,}03} = 13{,}42\ A$$

$I' = 13{,}42\ A$

Exercice N° 2 : (Bac série D 1997-Niger)

Dans l'exercice on prendra g = 10N/kg

1. Le dispositif expérimental comporte (figure 1):

- Un conducteur cylindrique AA' de masse m = 20g qui ferme le circuit. Il est disposé perpendiculairement aux rails et peut glisser sans frottement sur les rails. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme vertical, de module B_1 = 1Tesla.Au milieu de la tige AA' est attaché un fil inextensible, de masse négligeable, parallèle aux rails et relié par l'intermédiaire d'une poulie simple à un solide S de masse M = 50g. Quand on fait passer le courant dans les rails, on constate que la tige AA' est en équilibre.

  a) Reproduire la figure n° 1 en vue de face et indiquer les forces qui s'exercent sur la tige AA'.

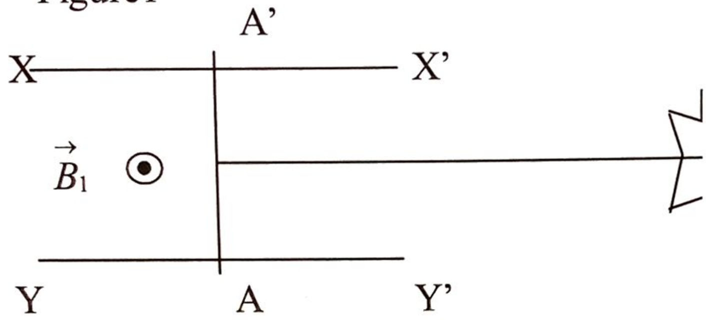
  b) Déterminer le sens du courant dans la tige AA'.

2. Le conducteur AA' est maintenant susceptible de se mouvoir dans un plan vertical autour de son extrémité A. L'autre extrémité A' plonge dans un bac de mercure (Hg) qui permet de maintenir le contact électrique avec une générateur de tension continue (Figure n° 2). L'intensité du courant dans le circuit est I. Le dispositif est plongé dans un champ magnétique uniforme, de module B, horizontal et orthogonal au plan de la figure n° 2.

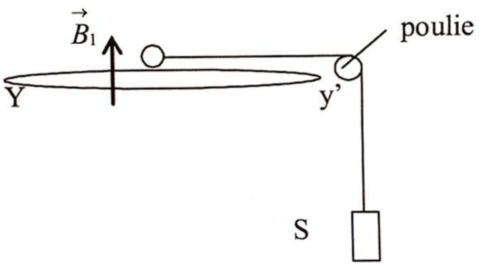
a) Que se passe-t-il dans chacun des cas suivants :
$I = 0$ et $B \neq 0$; $I \neq 0$ et $B = 0$; $I \neq 0$ et $B \neq 0$. Les résultats sont-ils conservés lorsqu'on permute les bornes du générateur ?

b) On néglige la partie de la tige plongée dans le mercure, on admet d'autre part que la ligne d'action de la force électromagnétique passe par le milieu de la tige. Calculer la déviation angulaire de la tige quand elle atteint sa position d'équilibre dans le cas où $I = 10A$ et $B = 0{,}1T$.

Figure1

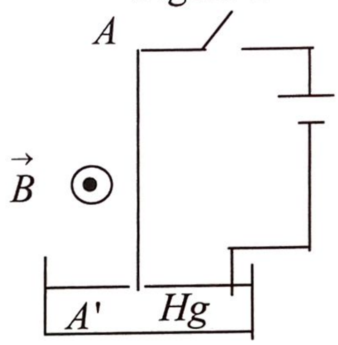


Vue de dessus



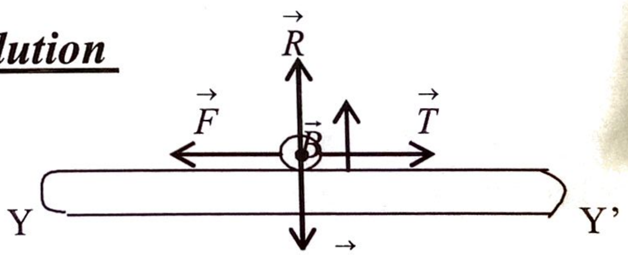
Vue de face

Figure 2



Solution

1. a) Forces s'exerçant sur la tige AA'.



b) Sens du courant : pour que $\vec{F} = I\,\vec{AA'} \wedge \vec{B}$ ait le sens indiqué, le courant doit circuler de A' vers A (règle de la main droite).

- Intensité du courant

Condition d'équilibre : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$

Projection sur YY' $-F + T = 0 \Rightarrow F = T$ $T = mg$.

$BIAA' = mg \Rightarrow I = \dfrac{Mg}{B\,AA'}$

$AN: \quad I = \dfrac{5010^{-3} \times 10}{1 \times 510^{-2}} = 10A$

2. a) .pour $I = 0$ et $B \neq 0$ $\qquad F = 0$ pas de déviation de la tige.
.pour $I \neq 0$ et $B = 0$ $\qquad F = 0$ pas de déviation de la tige.
.pour $I \neq 0$ et $B \neq 0$ $\qquad F \neq 0$ la tige dévie à gauche.

Quand on permute les bornes du générateur la tige dévie à droite (3ème cas)

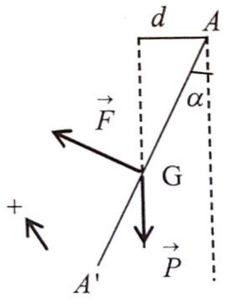
b) Déviation angulaire.

Condition d'équilibre : $M_A(\vec{P}) + M_A(\vec{F}) = 0$

$- PAG\sin\alpha + FAG = 0$

$- PAG\sin\alpha = BI.AA'.AG$

$\text{Sin}\,\alpha = \dfrac{BIAA'}{mg} \qquad \sin\alpha = \dfrac{0{,}1 \times 10 \times 510^{-2}}{2010^{-3} \times 10} = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 14{,}47°.$



Exercice N° 3 : Bac C Niger 2003

Un conducteur AB de longueur $l = 10$cm, de masse $m = 15$g et de résistance $R = 4\ \Omega$ est posé perpendiculairement sur deux rails parallèles (CT) et ($C'T'$) de résistance négligeable et contenus dans un plan horizontal. Le conducteur AB peut se déplacer sans frottement sur les rails en restant parallèles à lui même. Le circuit est constitué par les rails et le conducteur est fermé sur un générateur de f.é.m constante $E = 10V$ et de résistance interne $r = 1\Omega$. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$.

1. Déterminer la direction, le sens et l'intensité de la force électromagnétique $\vec{F}$ qui s'exerce sur le conducteur AB dans les deux cas suivants.

a) $\vec{B}$ est dans le plan des rails et de direction parallèle aux rails.

b) $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan des rails.

Dans chaque cas faire un schéma en indiquant le sens du courant, le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ et le vecteur force magnétique $\vec{F}$.

2. Le champs $\vec{B}$ étant perpendiculaire au plan des rails, on relie le milieu J du conducteur AB à une masse m = 25g par l'intermédiaire d'un fil inextensible passant par la gorge d'une poulie O de masse négligeable. On néglige les frottements. La portion de fil JO est parallèle aux rails.

a) Indiquer le sens du courant et celui du champ magnétique $\vec{B}$ pour que la force électromagnétique s'oppose à la chute de la masse m.

b) Calculer l'intensité du champ $\vec{B}$ pour laquelle la masse m reste en équilibre.

c) Une fois l'équilibre établi on place une surcharge m' =10g sur la masse m.

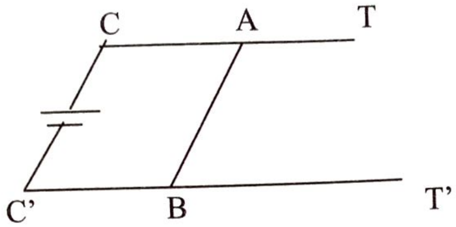


figure 1

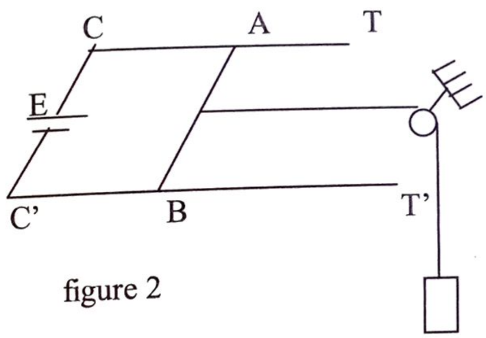
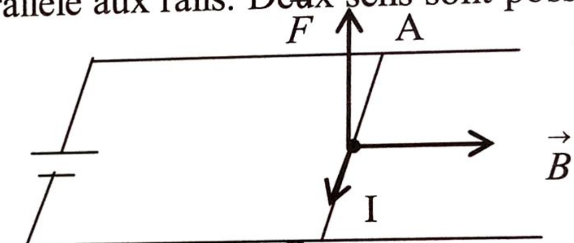


figure 2

Calculer la vitesse de déplacement de la tige AB une seconde après.On donne g = $10ms^{-2}$.

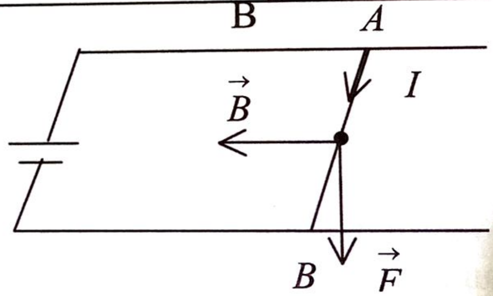
Solution

1) a) $\vec{B}$ est dans la plan des rails et de direction parallèle aux rails. Deux sens sont possibles pour le champ $\vec{B}$.



1er cas :

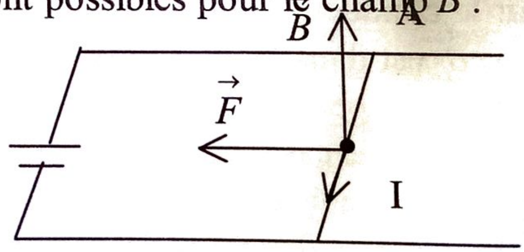
la force $\vec{F}$ est perpendiculaire au plan des rails et orienté vers le haut.



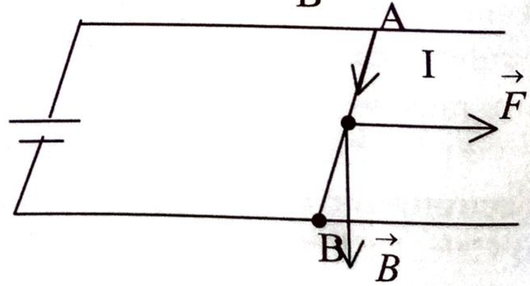
2ème cas :

la force $\vec{F}$ est perpendiculaire au plan des rails et orienté vers le bas.

b) $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan des rails. Deux sens sont possibles pour le champ $\vec{B}$.

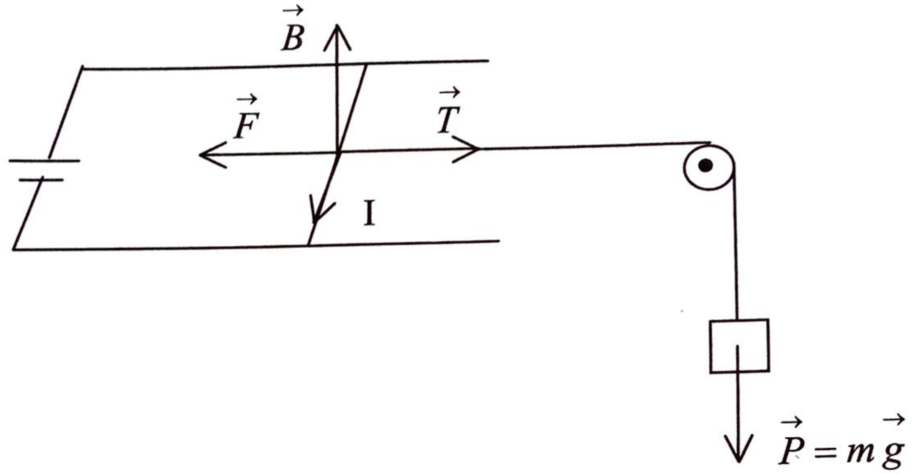


1er cas :
La force est orientée vers la gauche.



2ème cas :
La force est orientée vers la droite.

2) a) La force $\vec{F}$ qui s'oppose au déplacement du conducteur AB est dirigée vers la droite.



b) Le conducteur AB est soumis à l'action de la force magnétique $\vec{F}$ et de la tension $\vec{T}$ du fil.

A l'équilibre

$\vec{T} + \vec{F} = \vec{O} \quad \Rightarrow T = F \qquad T = I\ell B$

L'intensité du courant est donnée par la loi d'ohm.

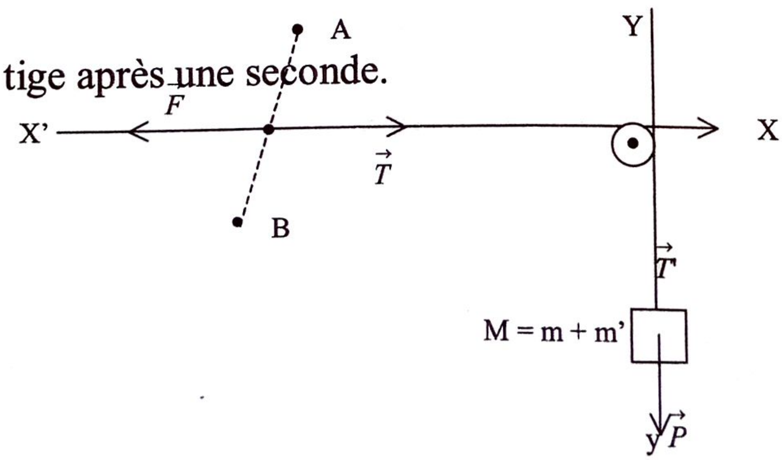
$E = (R+r)I$ soit $I = \dfrac{E}{R+r}$

Comn [illegible] poulie change la direction d'une force sans changer son intensité on a $T = P = mg$.

$$\frac{E\ell B}{R+r} = mg \quad \text{d'où} \quad B = \frac{mg(R+r)}{E\ell}$$

$$AN:\ B = \frac{15 10^{-3} \times 10 \times (4+1)}{10 \times 0{,}1} \qquad B = 1{,}25T$$

c) La vitesse de la tige après une seconde.



- Système : tige AB :
- Bilan Forces $\vec{F}$, $\vec{T}$

T.C.I : $\vec{F}+\vec{T}'=m_t\,\vec{a}$

Projection sur xx'

$T-F=m_t\,a$ or $F=mg$ $\qquad T=m_t\,a+mg$

- Système masse M
- Bilan des forces $\vec{P},\vec{T}$

$\vec{P}+\vec{T}'=m\vec{a}'$

Projection sur y'y :

$P-T'=ma' \Rightarrow T'=M(g-a')$ or $T=T'$ et $a=a'$

$(m+m')(g-a)=m_t\,a+mg$

$a=\dfrac{m'}{m+m'+m_t}g$. $\quad a=$ cte , la tige AB et la masse $M=m+m'$ sont soumises à un

Mouvement uniformément accéléré

$v=at$

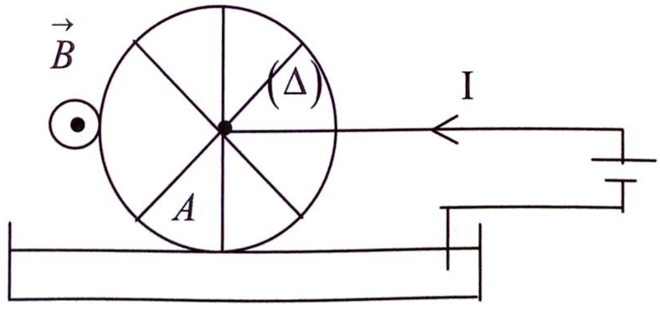
$a=\dfrac{10\,10^{-3}}{50\,10^{-3}}10=2ms^{-2}$ $\qquad v=2ms^{-1}.$

Exercice N° 4

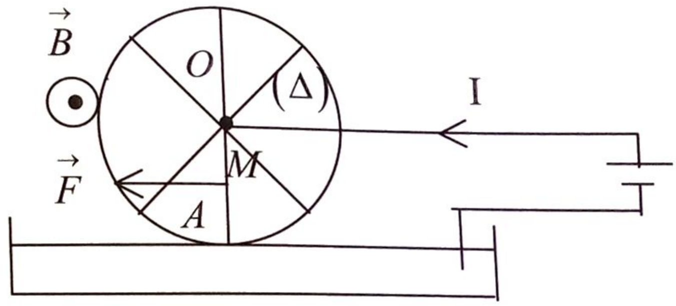
Une roue de Barlow est constituée de rayons rigides en cuivre, de longueur R. Elle est mobile autour d'un axe (Δ) horizontal passant par son centre O. La roue fait partie d'un circuit électrique d'intensité I. Elle est toute entière plongée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$.

1. Donner les caractéristiques de la force de Laplace qui s'exerce sur un rayon.
2. La roue entre en rotation autour d'un axe (Δ). Expliquer pourquoi et préciser le sens de rotation.
3. La roue tourne avec une vitesse angulaire constante ω. Calculer la puissance de la force de Laplace.

Données numérique : $B=2{,}5\,10^{-2}T$; $R=10{,}0$cm ; $I=5{,}0$A ; n =50 tours par minute.



Solution



1. Caractéristiques de $\vec{F}$
- Point d'application : milieu du rayon OA
- Direction : horizontale
- Sens : de droite à gauche
- Intensité : $F = I\,R\,B$

$AN : F = 1{,}3 10^{-2} N$

2. $\sum M_{\Delta}\left(\vec{F}_{ext}\right) = M_{\Delta}\left(\vec{F}\right) \neq 0$, donc la roue se met en mouvement de rotation. Elle tourne dans le sens de l'aiguille d'une montre.

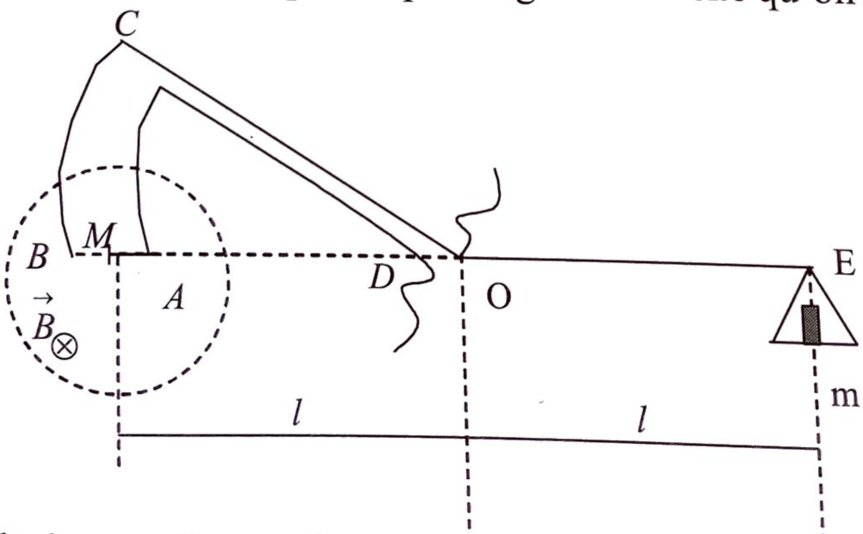
3. Puissance de la force de la Laplace

$$P = M_{\Delta}(\vec{F}).\omega = M_{\Delta}(\vec{F}).2\pi\, n \Rightarrow P = 2\pi\, n \times F.\frac{R}{2} = \pi n F.R$$

$$AN: P = \pi \times \frac{50}{60} \times 1{,}3 10^{-2} \times 10 10^{-2} \qquad P = 3{,}4 10^{-3}\ \text{w}$$

Exercice N° 5

Une balance de coton est constituée par un fléau en alliage non magnétique rigide DABCOE, mobile autour d'un axe fixe O. Les bords CB et AD sont des arcs de cercles de centre O. A l'équilibre, AB et OE sont sur une même horizontale. Dans la région limitée par des hachures, on crée un champ magnétique uniforme au voisinage de AB, orthogonal au plan de la figure et dirigé vers l'arrière. Un fil conducteur est fixé le long de ODABCO : il correspond à une portion de circuit électrique dans lequel on peut régler l'intensité qu'on lit sur un ampérmètre.



Sur le plateau de droite, on dispose des masses marquées. Par construction $OM = OE = l$, où M est le milieu de AB. Quand l'intensité du courant est nulle et qu'il n'y a pas de masse dans le plateau, le dispositif est en équilibre.

1. a) Indiquer sur un schéma les directions et les orientations des forces qui s'exercent sur le dispositif quand l'équilibre est réalisé pour une intensité I et une masse m. Préciser le sens du courant.

b) Montrer que la condition de l'équilibre se réduit à : $m = \frac{BdI}{g}$, où $d = AB$

2. Des mesures ont donné le tableau suivant :

$I(A)$	0	1	2	3	4	5
$m(g)$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0

a) Tracer la courbe représentative de m en fonction de I.

Echelle : 1cm pour 0,1g ; 1cmpour 0,5A

b) En déduire une valeur du champ $\vec{B}$

Données : d = 2cm ; g = 10ms^{-2}.

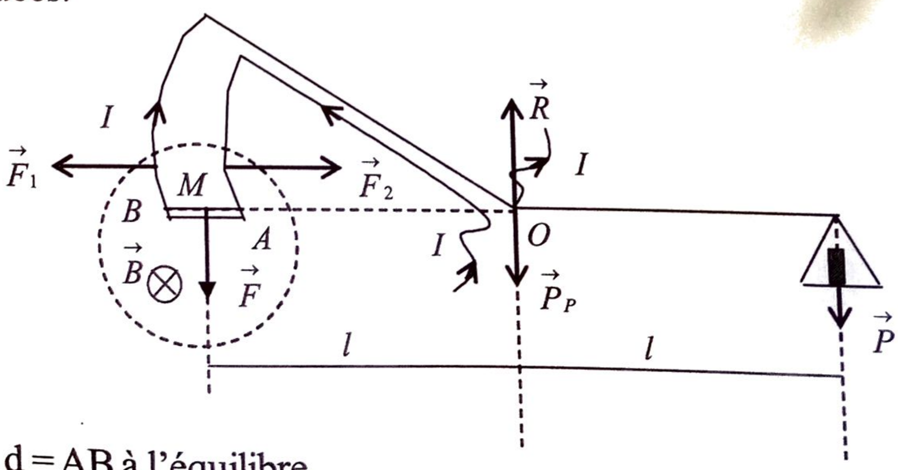
Solution :

1. a) Les directions et les sens des forces.

Les forces appliquées aux système :

- son poids $\vec{P}_P$;
- sl a réaction $\vec{R}$ de l'axe ;
- la force de Laplace $\vec{F}$ exercée sur AB ;
- les forces de Laplace $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$;
- le poids $\vec{P}$ des masses marquées.

Sens du courant (voir figure)



b) Montrer que $m = \frac{BdI}{g}$, avec d = AB à l'équilibre.

Appliquons au système le théorème des moments.

$$\sum M_0(\vec{F}_{ext}) = 0 \Rightarrow M_0(\vec{P}_P) + M_0(\vec{R}) + M_0(\vec{F}) + M_0(\vec{F}_1) + M_0(\vec{F}_2) + M_0(\vec{P}) = 0 \ (1)$$

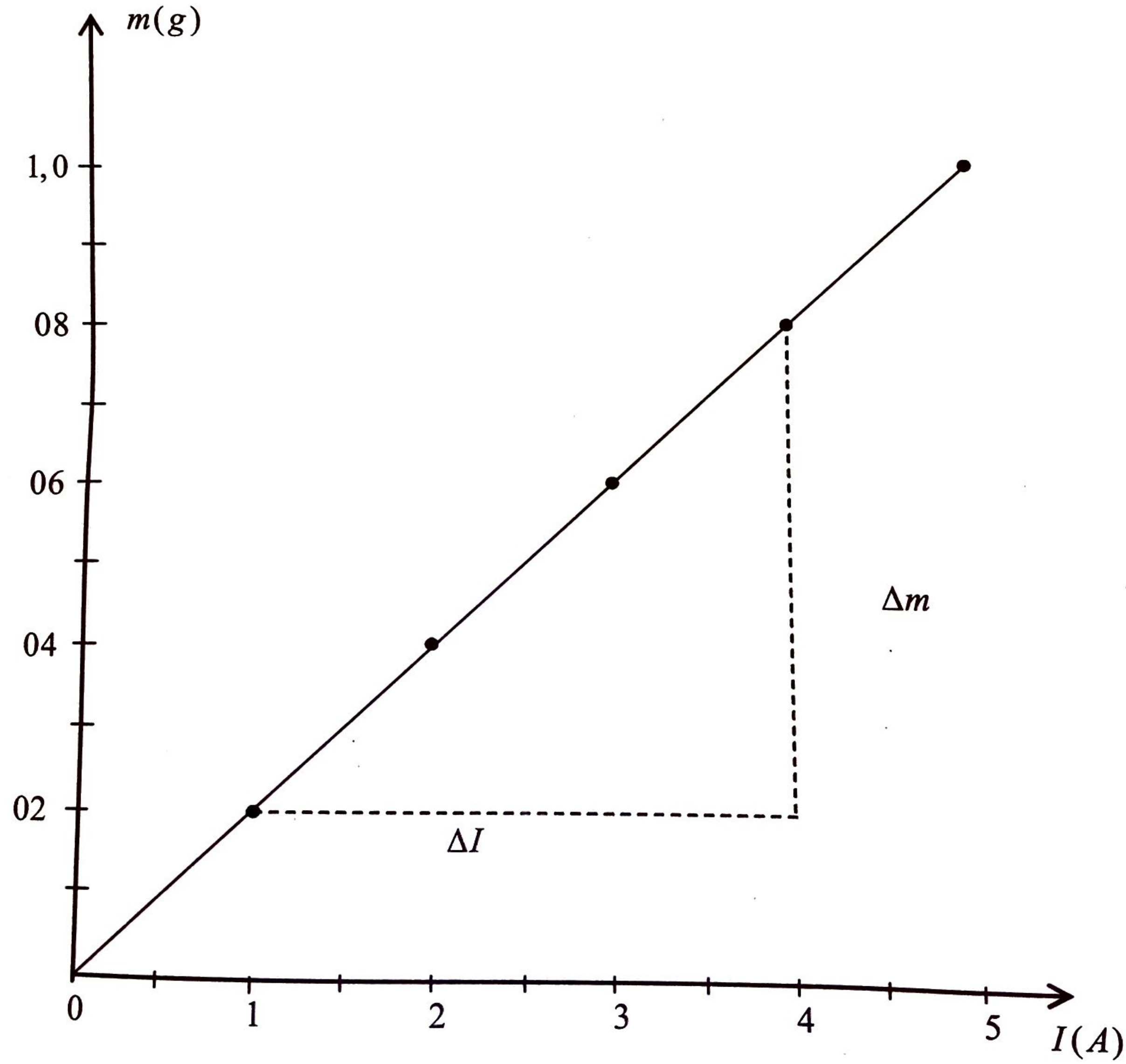
$M_0(\vec{P}_P) = M_0(\vec{R}) = 0$ ($\vec{P}_P$ *et* $\vec{R}$ passent par l'axe de rotation)

$M_0(\vec{F}_1) + .M_0(\vec{F}_2) = 0$ ($\vec{F}_1$ *et* $\vec{F}_2$ passent par l'axe de rotation)

$\Leftrightarrow M_0(\vec{F}) + M_0(\vec{P}) = 0 \Rightarrow F_1 - P_1 = 0$ soit F = P

$F = IABB = I\,d\,B \quad P = mg \Rightarrow I\,B\,d = mg \Rightarrow m = \dfrac{BdI}{g}$

2. a) Tracé de la courbe m = f(I)



b) La valeur du champ $\vec{B}$

$$m = \frac{BdI}{g} \Rightarrow m = kI \qquad \text{avec } k = \frac{Bd}{g}$$

Selon le tracé m = f(I), ou m = k I, k coefficient directeur de la droite.

$$k = \frac{\Delta m}{\Delta I} \Rightarrow k = \frac{(0{,}8 - 0{,}2)10^{-3}}{4 - 1} = 210^{-4} kg / A$$

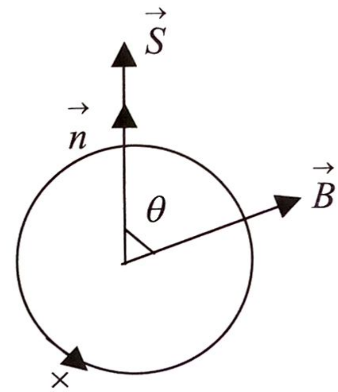
$$\text{or } k = \frac{Bd}{g} \Rightarrow B.d = k.g \Rightarrow B = \frac{kg}{d}$$

$$AN\text{: } B = \frac{210^{-4} \times 10}{210^{-2}} = 0{,}1T \text{ ;} \qquad B = 0{,}1T.$$

Chapitre 4

INDUCTION - AUTO - INDUCTION

RAPPEL DU COURS



I FLUX MAGNÉTIQUE À TRAVERS UN CIRCUIT

$$\Phi = \vec{B}.\vec{S} = \mathrm{BS}\cos\theta \qquad \theta = \left(\vec{B}, \vec{n}\right)$$

II INDUCTION

1. Expérience

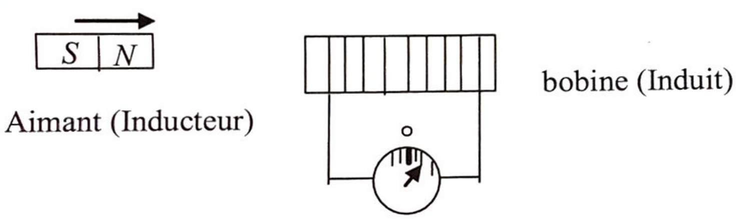


Figure 3

Le mouvement de l'aimant provoque la déviation de l'aiguille.
L'apparition du courant induit est dûe à la variation du flux.

Loi de Lenz

Le sens du courant est tel que, par ses effets, il s'oppose à la cause qui lui a donné naissance.

Loi de Faraday

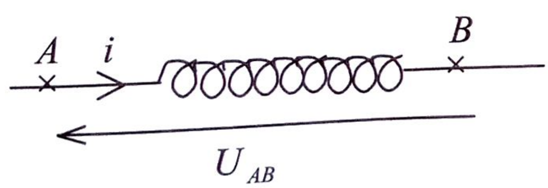
$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

III AUTO – INDUCTION : L'induit et l'inducteur sont confondus.

Flux propre. $\Phi = Li$ L= inductance

- Loi de Faraday Lenz : $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$

- Loi d'Ohm



$$U_{AB} = ri - e$$

$$U_{AB} = ri + L\,\frac{di}{dt}$$

$$E_m = \frac{1}{2} L i^2$$

IV ENERGIE EMMAGASINÉE PAR LA BOBINE :

Exercices

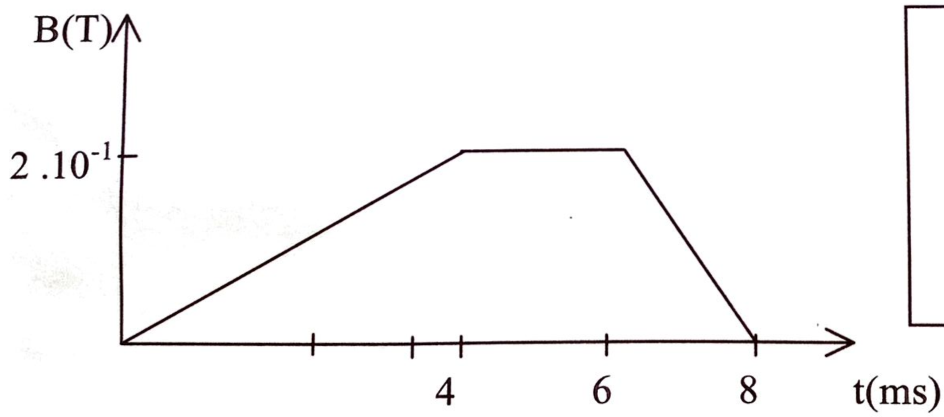
Exercices N° 1

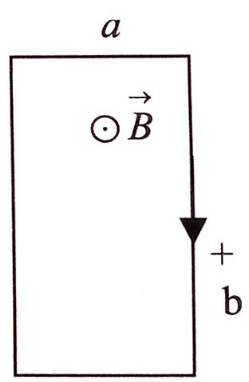
On Considère une bobine plate comportant N = 20 spires de forme rectangulaire, ses côtés ayant pour longueur a = 2 cm et b = 3 cm. Cette bobine, placée dans un plan vertical, est plongée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan de la bobine et sa mesure varie au cours du temps suivant le graphique représenté ci-dessous. On oriente la bobine dans le sens indiqué ci-contre.

1. a) Déterminer les valeurs de la f.e.m induite aux bornes de la bobine.

   b) Représenter la courbe de la f.e.m induite en fonction du temps.

2. Déduire le sens du courant induit circulant dans la bobine (supposée fermée) selon les intervalles de temps considérés.





Solution

1. a) Valeur de la f.e.m induite aux bornes de la bobine.

$$e = \frac{-d\Phi}{dt} \quad \text{avec } \Phi = \text{NS}\ \vec{B}.\vec{n} \qquad \vec{n} \text{ étant entrant}$$

on a $\Phi = -\text{NSB}$

$$e = \text{NS}\frac{dB}{dt} = Nab\frac{dB}{dt}$$

$t = \in [0,\ 4ms]$ $\quad \dfrac{dB}{dt} = \dfrac{2.10^{-1}}{4.10^{-3}} = 50Ts^{-1}$

$$e = 20 \times 2.10^{-2} \times 3.10^{-2} \times 50 = 0,60V$$

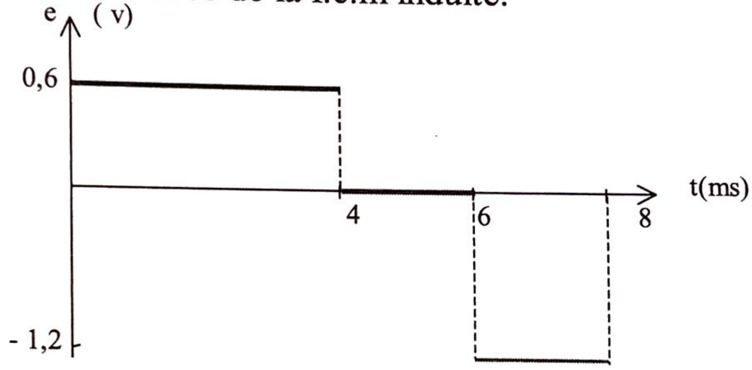
$$e = 0,60V$$

$[4ms;\ 6ms]$ $\quad \dfrac{dB}{dt} = 0 \Rightarrow e = 0V$

$[6ms;\ 8ms]$ $\quad \dfrac{dB}{dt} = -\dfrac{2.10^{-4}}{2.10^{-3}} = -100Ts^{-1}$

$$e = 20 \times 6.10^{-4} \times (-100) = -1,2V$$

b) Représentation de la courbe de la f.e.m induite.



2. Sens du courant dans la bobine.

La bobine étant fermé on a : $U = ri - e = 0 \Rightarrow i = \dfrac{e}{r}$

i et e ont même signe .

$[0;\ 4ms]$ $e > 0 \Rightarrow i > 0$; $\quad$ i circule dans le sens positif indiqué

$[4ms;\ 6ms]$ $e = 0 \Rightarrow i = 0$

$[6ms;\ 8ms]$ $e < 0 \Rightarrow i < 0$ $\quad$ sens opposé à celui indiqué.

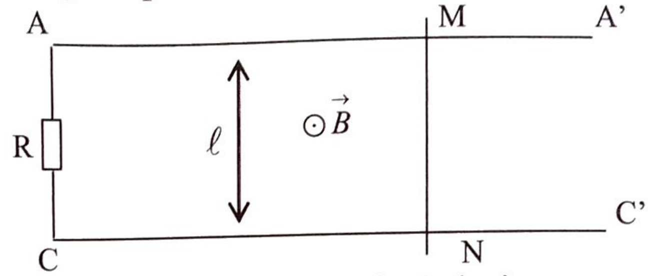
Exercice N° 2

Deux rails conducteurs AA' et CC', parallèles de résistance négligeable, séparée par une distance $\ell = 25$ cm sont placés dans un plan horizontal.

Une tige métallique rigide, de masse négligeable, perpendiculaire aux rails, peut glisser sans frottement dans une direction parallèles aux rails.

La résistance de la longueur ℓ de cette tige est $r = 0,5\Omega$.

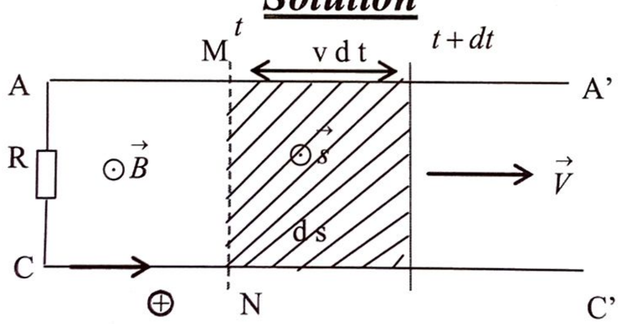
L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}$, perpendiculaire au plan des rails, d'intensité B = 1T.



On déplace la tige à vitesse constante v = 10 ms^{-1}, de gauche à droite.

1. a) Choisir sur le circuit un sens de parcours arbitraire et déterminer le vecteur surface $\vec{S}$.
   b) Calculer le flux du champ magnétique à travers ce circuit pour une position quelconque de la tige MN ; poser $AM = x$
2. En utilisant la loi de Faraday :
   a) Calculer la force électromotrice induite ;
   b) Calculer l'intensité du courant induit ;
   c) Déterminer le sens du courant induit.
3. Retrouver le sens du courant induit en utilisant la loi de lenz.
4. Montrer qu'une force électromagnétique est créée au cours du déplacement du barreau. Dans quel sens est – elle dirigée (répondre sans calcul)

Solution



1. a) En choisissant le sens tel que indiqué sur le schéma, $\vec{S}$ et $\vec{B}$ ont même sens.
   b) Flux magnétique à travers le circuit :

Pour une position telle que $AM = x$

$$\Phi = \vec{B}.\vec{S} = B.x.\ell \qquad \theta = \left(\vec{B}.\vec{S}\right) = 0$$

2. En utilisant la loi de Faraday.
   a) Calcul de la force électromotrice induite.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad d\Phi = \vec{B}.d.\vec{S} = B\ell V dt$$

$$e = -\frac{B\ell V dt}{dt} = -B\ell V \quad e = \text{-}B\ell V$$

$AN: \ e = -1 \times 0,25 \times 10 = -2,5V$

$e = -2,5V$

b) Calcul de l'intensité du courant induit.

$(r+R)\,i - e = 0 \quad \Rightarrow \quad i = -\dfrac{e}{r+R} \qquad i = -\dfrac{2,5}{0,5+0,5} = -2,5A$

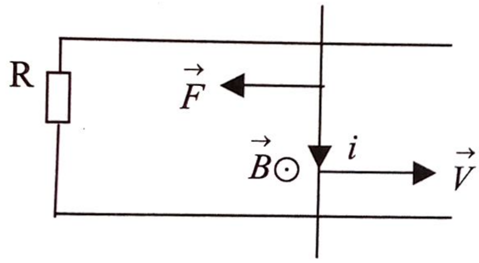
c) Sens de l'intensité i du courant induit.

$i = -2,5\,A$. i circule en sens inverse du sens positif choisi.

3. Sens de i utilisant la loi de Lenz.

i est tel que par ses effets il s'oppose au mouvement de la tige, par conséquent il crée une force $\vec{F} = i\ \vec{l} \wedge \vec{B}$ de sens opposé à $\vec{V}$. Par la règle de la main droite, on vérifie que i est de sens inverse à celui choisi.

4. L'intensité de cette force électromagnétique créée au cours du déplacement du barreau.



$\vec{F} = i\ \vec{l} \wedge \vec{B}$

Le sens de $\vec{F}$ est déterminé en utilisant la règle de la main droite.

Exercice N° 3 : Principe d'un alternateur

On négligera le phénomène d'auto-induction.

Une bobine plate est formée de N = 500 spires de fil conducteur isolé. Chaque spire circulaire a une surface 100cm^2.

La bobine tourne à vitesse angulaire constante autour d'un axe Δ diamétral et vertical dans un champ magnétique uniforme horizontal et constant dans le temps noté $\vec{B}$. Figure1

Des contacts électriques mobiles permettent de relier les extrémités A et C du conducteur respectivement à l'entrée Y et à la masse M d'un oscillographe.

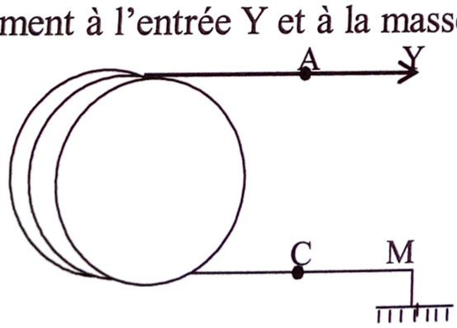


Figure 1

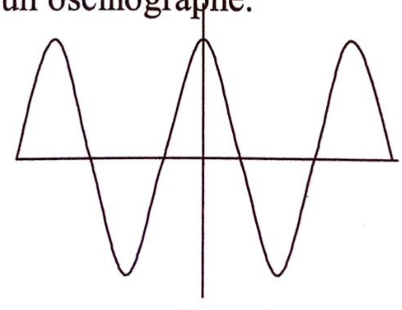


Figure 2

1. Le balayage horizontal étant réglé sur 10 *ms*/division et la sensibilité verticale étant réglée sur

1 V/division. On observe la courbe de la figure 2 sur l'écran de l'oscillographe.

a) Justifier qualitativement l'existence d'une tension entre A et C lors de la rotation de la bobine.

b) Déterminer la valeur ω_1 de la vitesse angulaire.

c) Déterminer la valeur B du champ magnétique.

2. On fait tourner la bobine deux fois moins vite. En supposant que le réglage de l'oscilloscope n'est pas modifié, donner en la justifiant, l'allure de la courbe décrite par le spot en précisant sa période et son amplitude.

3. La bobine a une résistance $R = 100\Omega$, on branche entre les extrémités A et C un conducteur ohmique de résistance $R' = 200\Omega$. La bobine tournant à la vitesse angulaire ω_1, calculée dans la première question et l'oscillographe étant toujours branché réglé de la même manière, donner l'allure de la courbe observée sur l'écran en la justifiant.

Solution

1. a) La bobine est située dans une région de champ magnétique uniforme $\vec{B}$. Orientons la arbitrairement de A vers C ce qui définit le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à la surface.

Le flux magnétique $\Phi = NSB\cos\theta$; $\theta = \left(\vec{B}, \vec{n}\right)$.

Lorsque la bobine tourne θ varie, donc le flux magnétique varie : il apparaît une f.é.m induite.

La bobine en rotation dans le champ magnétique est un générateur.

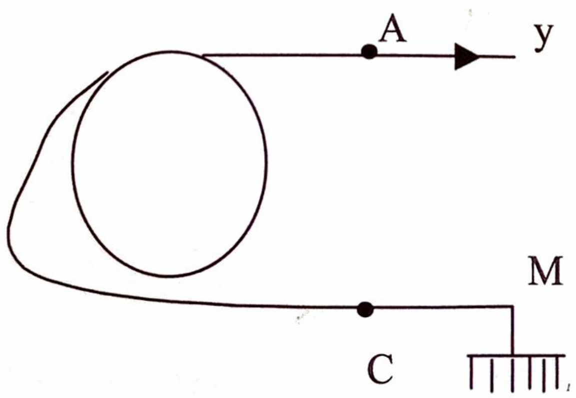
b) Détermination de la valeur ω_1.

La f.é.m induite $e = \dfrac{-d\Phi}{dt}$

$\Phi = NSB\cos\omega_1 t$ $\quad\Phi = \omega_1 t$ $\quad e = -\dfrac{d\Phi}{dt}\omega_1 NSB\sin\omega_1 t$

Circuit ouvert $i = 0 \Rightarrow U_{AC} = -e$ $\quad U_{AC} = \omega_1 NSB\sin\omega_2 t$

U_{AC} est une tension sinusoïdale de pulsation ω_1



$\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1}$ $\quad T_1 = 40ms$ *donc* $\omega_1 = 1,6.40^2 rad\ s^{-1}$

c) Déterminons la valeur du champ magnétique.

$$U_{max} = \omega_1 NSB \quad \Rightarrow \quad B = \frac{U_{max}}{\omega_1 NS}$$

Sensibilité verticale : $1V / div \quad \Rightarrow \quad U_{max} = 3V$

$$B = \frac{3}{500.10010^{-4}.1,6.10^2} \qquad \text{B=3,8.10}^{-3}T$$

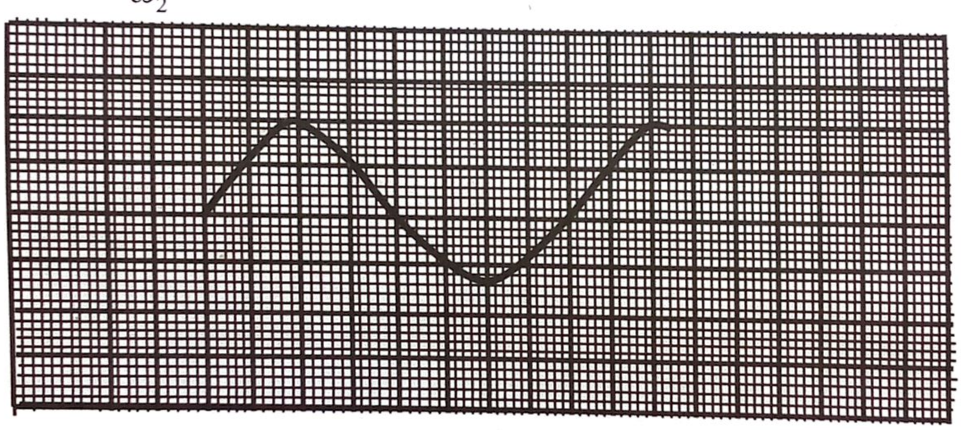
2. Donnons l'allure de la courbe pour $\omega_2 = \frac{\omega_1}{2}$

Par rapport à la première question seule la question angulaire change : $\omega_2 = \frac{\omega_1}{2}$.

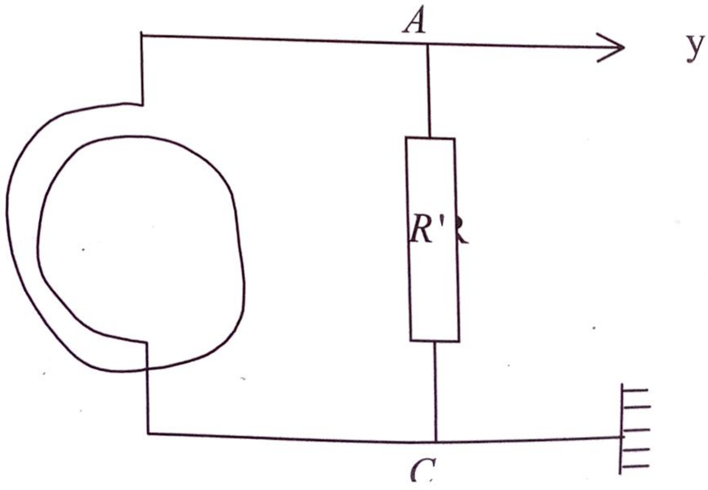
$$U_{AC} = \omega_2 NBS \sin \omega_2 t$$

$$U_{max} = NB\omega_2 = \frac{U_{max}}{2} \qquad U'_{max} = 1,5V$$

Sa période est $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$ $\qquad T_2 = 2T_2 \qquad T_2 = 80ms$



3. Donnons l'allure de la courbe.
Le circuit est fermé.
La bobine est un générateur de f.e.m.
Il circule un courant induit d'intensité i.
Loi d'ohm.



- Aux bornes de la bobine $U_{AC} = Ri - e$

- Au bornes du conducteur ohmique $U_{AC} = Ri - e$

Donc $e = (R + R') + i$ avec $e = NSB\,\omega_1 \sin \omega_1 T$

$$i = \frac{NSB\omega_1 \sin \omega_1 t}{R + R'} \qquad I_{\max} = \frac{NSB\omega_1}{R + R'} = \frac{U_{\max}}{R + R}$$

or $U''_{\max} = R' I_{\max} \Rightarrow \boxed{U''_{\max} = \frac{R'}{R + R'} U_{\max}}$

$$U''_{\max} = 3 \times \frac{200}{100 + 200} \qquad \boxed{U'_{\max} = 2{,}0V}$$

La période T" = T = 40 ms

Exercice N° 4

1. Une bobine de section circulaire est constituée par un fil en cuivre de longueur ℓ bobiné régulièrement, on suppose que les spires sont pratiquement situées dans un plan perpendiculaire à l'axe du solénoïde. La longueur de la bobine vaut $l = 1000$ mm, son inductance a pour valeur $L = 85$ mH.
Calculer la longueur ℓ du fil.
2. Cette bobine est montée en série avec un conducteur ohmique aux bornes d'un générateur de tension continue. Lorsque l'on ferme le circuit par l'intermédiaire d'un interrupteur K l'intensité du courant passe de 0 à sa valeur maximale. $I_m = 2A$ en une durée $t_1 = 50\ ms$
Calculer la valeur moyenne de la force électromotrice d'auto – induction.
3. On ouvre maintenant l'interrupteur.
   a) Que peut – on observer ?
   b) Comment annuler cet inconvénient en utilisant une diode et un conducteur ohmique ?
   c) Quel est le rôle du conducteur ohmique dans cette modification ? Pourquoi ne peut – on le remplacer par un simple fil de cuivre.
   d) Montrer que la dérivation introduite ne modifie pas le fonctionnement du régime permanent.
4. Calculer l'énergie électromagnétique libérée dans le circuit lors de l'ouverture de l'interrupteur.

<u>Solution</u>

1.Calculons la longueur ℓ du fil.

$L = \mu 0 \frac{N^2}{l} S$ or $\ell = NC$

N: nombre de spires

C : longueur d'une spire

$L = N 2\pi R. \Rightarrow R = \frac{L}{2\pi N}$

R : rayon du solénoïde

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi L}{4\pi^2 N^2} = \frac{L}{4\pi N^2} \qquad L = \frac{\mu_0 N^2 L^{\ 2}}{l 4\pi N^2} \Rightarrow L = \frac{\mu_0 L^{\ 2}}{4\pi 1}$$

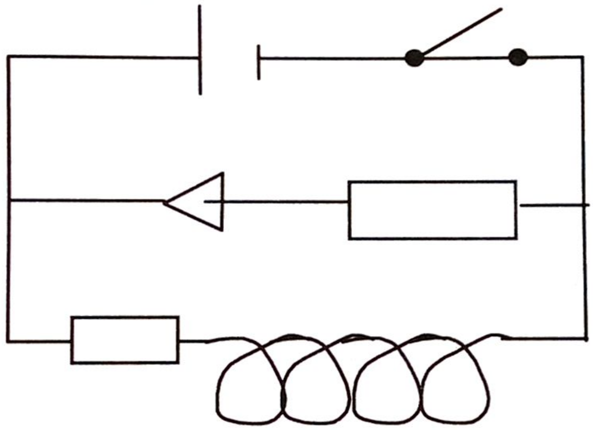
$$L = \sqrt{\frac{4\pi L 1}{\mu_0}} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{4\pi \times 1 \times 85.10^{-3}}{4\pi \ 10^{-7}}} \qquad L = 922m$$

2. Calculons la force électromotrice d' auto-indiction

$$e = -L\frac{\Delta i}{\Delta t} \qquad e = \frac{-85.10^{-3} \times 2}{50.10^{-3}} \qquad e = -3{,}4V$$

3. a) On observe une étincelle.

b) En plaçant une diode et un conducteur ohmique associés en série, en dérivation aux bornes du dipôle constitué par la bobine et le conducteur ohmique.



c) Le rôle du conducteur ohmique est de protéger la diode lorsqu'elle est parcourue par le courant de rupture. Si on le remplace par un fil de cuivre comme la tension est élevée il risque de fondre.

d) En régime permanent la diode est non passante.

4. L'énergie électromagnétique libérée.

$$E_M = \frac{1}{2}LI_m^2 \qquad E_M = \frac{1}{2}\times 85.10^{-3} \times 2^2 \qquad E_M = 0{,}17\text{J}$$

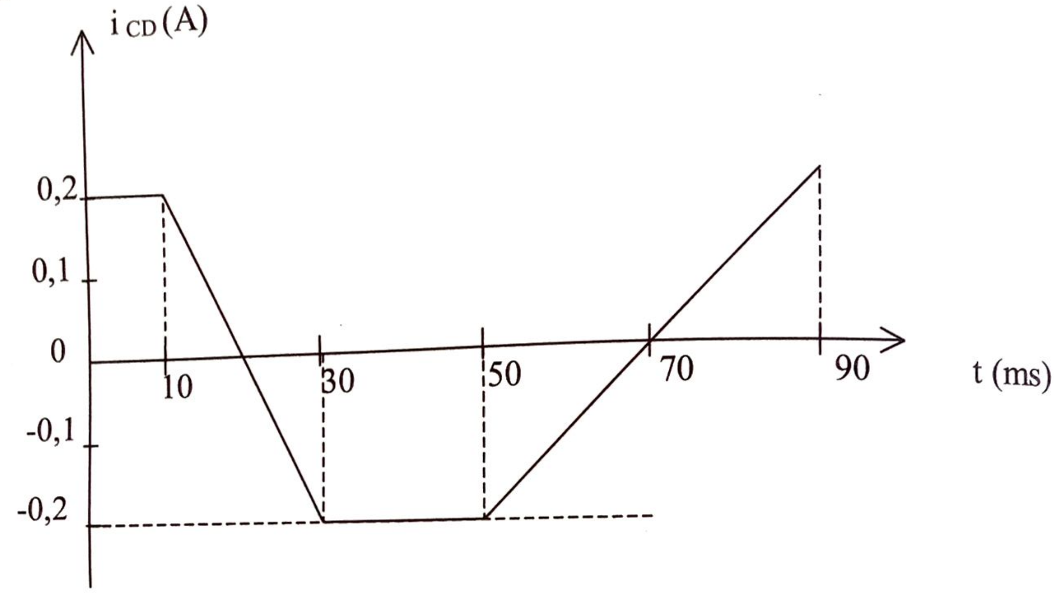
Exercice N° 5

Une bobine de borne C et D est assimilable à un solénoïde théorique. Ses caractéristiques sont : rayon moyen des spires $r = 2{,}5$cm ; nombre de spires $N = 400$; longueur totale $l = 40$cm et résistance $R = 2\Omega$.

On prendra $\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7} SI$; $\pi^2 = 10$

1. Déterminer littéralement, puis numériquement l'inductance de la bobine.

2. Cette bobine est parcourue par un courant dont l'intensité i_{CD} varie avec le temps comme l'indique la figure ci-dessous.



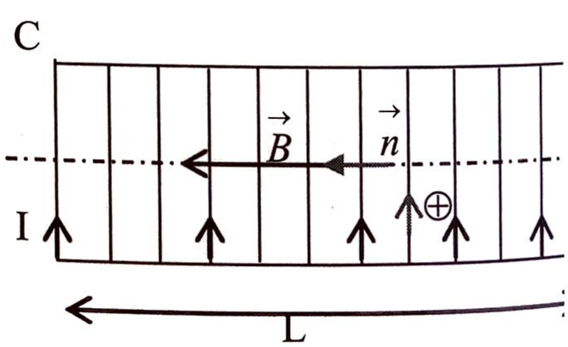
a) Représenter la force électromotrice induite e en fonction du temps.
Echelle : 1cm pour 10ms et 1cm pour 10mv.

b) Donner l'expression littérale de la tension U_{CD} aux bornes de la bobine, en fonction du temps.

3. On dispose de cette bobine, de résistors, d'un générateur (G.B.F) de courant, de fils de connexion et d'un oscillographe.
Quel montage faudrait – il réaliser pour vérifier expérimentalement ces résultats ? Quel est le rôle de chaque dipôle ?

Solution

1. Expression de l'inductance L de la bobine.



$$B = \mu_0 ni = \mu_0 \frac{N}{l} i$$

$$\phi = NBS = \pi r^2 N \mu_0 \frac{N}{l} i \quad \text{or} \quad \phi = Li$$

D'où $$L = \frac{\pi r^2 N^2 \mu_0}{l} \qquad L = \frac{4\pi^2 N^2 r^2}{l} \times 10^{-7}$$

AN : $L = 10^{-3}$H

2. a) Représentation de e = f(t).

$$e = -L\frac{di_{CD}}{dt}$$

$0 \leq t \leq 10$ms $\qquad i_{CD} = 0{,}2A = cte$

$\frac{di_{CD}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \; e = 0mV$

$.10ms \leq t \leq 30ms \qquad i_{CD} = at + b$

$t = 10.10^{-3}s \quad \rightarrow \; i_{CD} = 0{,}2A$

$t = 30.10^{-3}s \quad \rightarrow \; i_{CD} = -0{,}2A$

$$\begin{cases} 0{,}2 = 10^{-2}a + b \\ -0{,}2 = 310^{-2}a + b \end{cases} \Rightarrow \quad a = -20As^{-1}$$

$$b = 0{,}4A$$

$i_{CD} = -20t + 0{,}4 \qquad \Rightarrow \; e = -L(-20) = 20L$

$e = 20mv$

$.30ms \leq t \leq 50ms \qquad i_{CD} = -0{,}2A = cte$

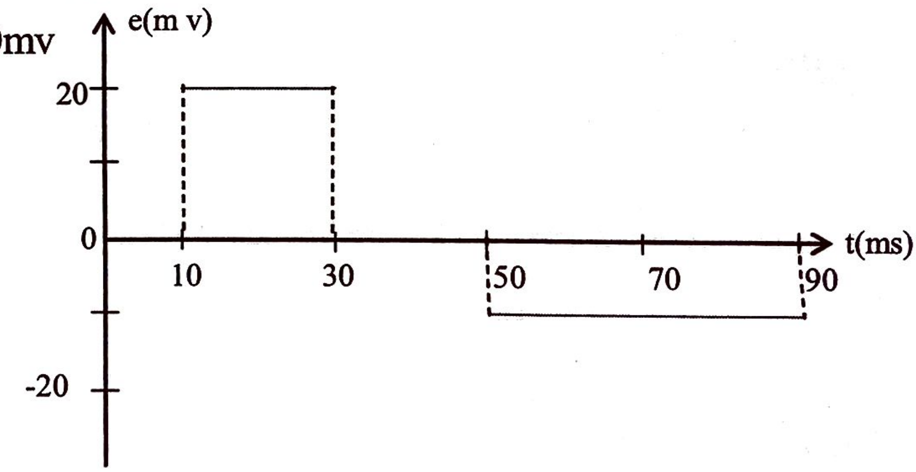
$e = 0mv$

$.50ms \leq t \leq 90ms \qquad i_{CD} = a't + b'$

$a' = 10As\text{-}1 \qquad b = -0{,}7A$

$i_{CD} = 10t - 0{,}7 \qquad \Rightarrow \; e = -10L$

$e = -10mv$



b) Expression littérale de U_{CD}

$U_{CD} = Ri - e$

$0 \leq t \leq 10ms \qquad e = 0v \qquad i_{CD} = 0{,}2A$

$U_{CD} = 0{,}4V$

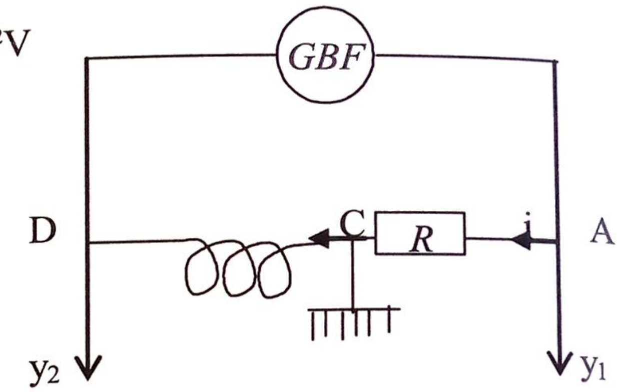
. 10ms $\leq t \leq$ 30ms i_{CD} =-20t + 0,4; e = 2.10^{-2}V

$U_{CD} = 2(-20t+0,4) - 2.10^{-2} \Rightarrow U_{CD} = -40t + 0,78$

.30ms $\leq t \leq$ 50ms i_{CD} = -0,2A ; e = 0V

.50ms $\leq t \leq$90ms i_{CD} = 10t – 0,7 ; e= -10^{-2}V

U_{CD} = 20t – 1,39.



3. Schéma du Montage

Le GBF délivre des intensités variables.

. La résistance servira de protection car sans elle le GBF sera court-circuité (e=0V) à certaines dates.

. L'oscillographe permet de visualiser la tension aux bornes de la bobine.

Voie 1 : $U_{AC} = Ri \Rightarrow i = \dfrac{U_{AC}}{R}$ $\qquad i = i_{AC}$.

Voie 2 $U_{DC} = -U_{CD}$ = - ($Ri - e$) = $-Ri + e$

Si $R = 0$ $\quad U_{AC} = e$.

Exercice N° 6

On branche en série aux bornes d'un générateur, une bobine d'inductance L et de résistance r ; deux résistors de résistance $R = 100\Omega$; un résistor de résistance réglable R_0 (voir figure 1).

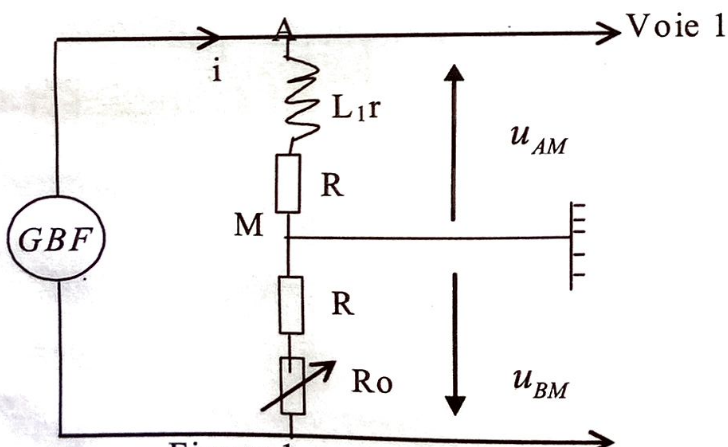
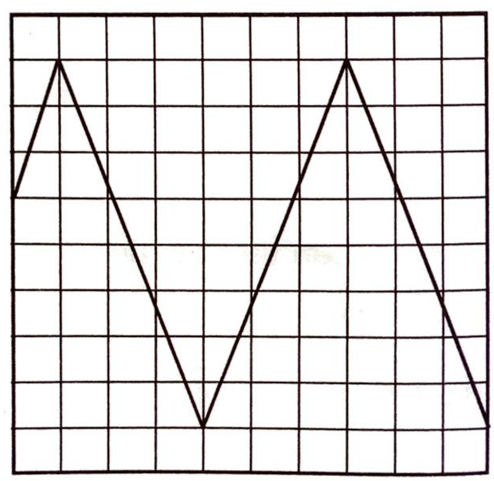


Figure 1



$u_{BM}(t)$ Figure 2

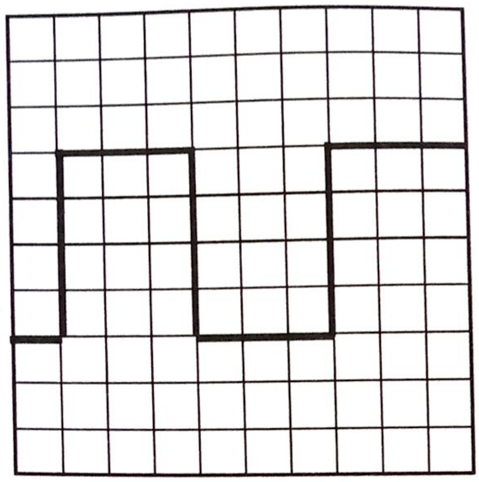


Figure 3

L'oscillographe bicourbe utilisé comporte une touche permettant, lorsqu'elle est actionnée, d'observer sur l'écran la tension notée u_0 , somme des tensions reçues sur les voies 1 et 2 : $u_0 = u_{AM} + u_{BM}$

Données : - Sensibilité sur les deux voies : 1V/division

- Base de temps :0,2ms/division
- En l'absence de tension, les traces horizontales sont au centre de l'écran.

1. Etablir les expressions de u_{AM} *et* u_{BM} en fonction de i et de $\frac{di}{dt}$.
2. En déduire l'expression de u_0 en fonction de i et de $\frac{di}{dt}$.
3. La touche étant actionnée, montrer qu'il existe une valeur R_0 pour laquelle la courbe observée sur l'écran est la représentation de la fonction $L = \frac{di}{dt}$.
4. La condition du 3) étant réalisée, on mesure R_0 avec un ohmmètre et on trouve $R_0 = 9\Omega$.

Les figures 2 et 3 représentant respectivement $u_{MD}(t)$ et $u_0(t)$ sont observées successivement sur l'écran de l'oscillographe.

a) Pourquoi $u_0(t)$ est-elle carrée ?

b) Calculer la période et la fréquence du courant que fait circuler le générateur.

c) Montrer que $u_0 = -\frac{L}{R+R_0}\frac{du_{BM}}{dt}$. Calculer L.

Solution

1. Expression de u_{AM} *et* u_{BM} en fonction de i et de $\frac{di}{dt}$.

$$u_{AM} = (R+r)\, i + L\frac{di}{dt}$$

$$u_{BM} = (R+R_0)\, i \Rightarrow u_{BM} = -(R+R_0)\, i$$

2. Expression de u_0 en fonction de i et de $\frac{di}{dt}$.

$u_0 = u_{AM} + u_{BM} = (R+r)i + L\frac{di}{dt} - (R+R_0)\,i$

$u_0 = (r - R_0)\,i + L\frac{di}{dt}$

3. Valeur de R_0 pour laquelle $u_0 = L\frac{di}{dt}$

$u_0 = L\frac{di}{dt} \Rightarrow (r - R_0)i = 0 \Rightarrow R_0 = r$

4. a) Montrons que la tension u_0 est carrée.

$u_{BM} = -(r - R_0)\,i$, donc u_{BM} est proportionnelle à i

Selon la figure 2 ; $i = at + b$, $\frac{di}{dt} = a \Rightarrow u_0 = L\,a = \text{cte}$

Si $a > 0$; $u_0 = \text{cte} > 0$

Si $a < 0$; $u_0 = \text{cte} < 0$

Donc la tension u_0 sera représentée par des segments horizontaux égaux. *C*'est une tension en créneaux.

b) La période T et la fréquence N

Sur les figures 2 et 3 , T correspond à 6 divisions.

$T = 6\times0{,}2 = 1{,}2\text{ms}$ $\qquad T = 1{,}210^{-3}$ s

$N = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}210^{-3}}$ $\qquad N = 833{,}3\text{HZ}$

c) Montrons que $u_0 - \frac{L}{R+R_0}\frac{du_{BM}}{dt}$

$u_{BM} = -(R+R_0)\,\text{i} \quad \Rightarrow \quad i = -\frac{u_{BM}}{R+R_0}$

$u_0 = L\frac{di}{dt} \Rightarrow u_0 = +L\left\{-\frac{du_{BM}}{R+R_0}\right\} \Rightarrow u_0 - \frac{L}{R+R_0}\frac{du_{BM}}{dt}$ (1)

Calcul de L

Selon la formule (1) : $L = -(R+R_0)\frac{u_0}{d\frac{u_{BM}}{dt}}$

$u_0 = \pm 2V$ $\qquad u_{BM} = -13333{,}3t + 4$ ou $u_{BM} = 13333{,}3t - 12$

$L = \frac{-(100+9)(-2)}{13333{,}3} = 0{,}016H$ ou $L = \frac{-(100+9).2}{-13333{,}3} = 0{,}016H$; $\qquad L = 1{,}610^{-2}\,H.$

ELECTRICITE

Chapitre 1 — OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES

RAPPEL DU COURS

A - Circuit oscillant (L, C)

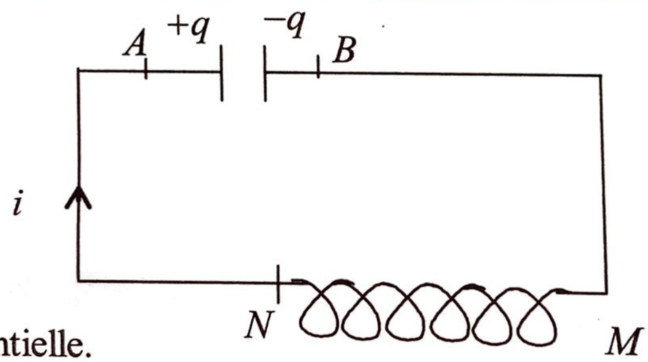
I RAPPELS SUR LE CONDENSATEUR

1. Tension aux bornes d'un condensateur.

$$U = \frac{q}{C}$$

2. Intensité débitée : $i = \frac{dq}{dt}$

II DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR DANS UNE BOBINE NON RÉSISTIVE



1. Equation différentielle.

$$u_{AB} = u_{NM} = -u_{MN} \Rightarrow \frac{q}{C} = -L\frac{di}{dt}$$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad (1)$$

2. Solution de l'équation différentielle.

$q = q_m \cos(\omega t + \varphi)$ solution de (1)

$$i = q' = -q_m\omega\sin(\omega t + \varphi) \quad i = q_m\omega\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Remarque : i est en quadrature avance sur q.

III ETUDE ÉNERGÉTIQUE

1. Energie emmagasinée par le condensateur.

$$E_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}qU$$

2. Energie emmagasinée par la bobine.

$$E_m = \frac{1}{2}Li^2$$

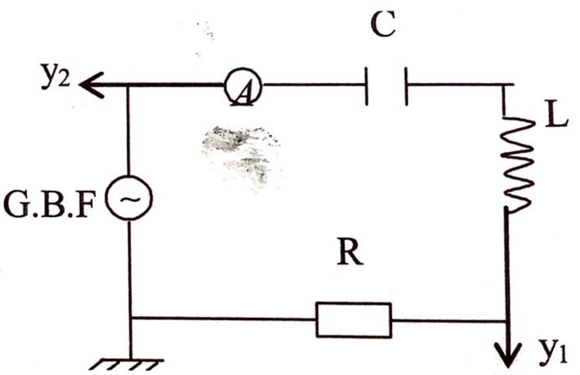
3. Energie totale.

$$E = E_e + E_m$$

$$E = E_{e\max} + E_{m\max} \qquad E = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C} = \frac{1}{2}CU_m^{\ 2} = \frac{1}{2}LI_m^{\ 2}$$

B Circuit en régime sinusoïdal forcé : (R,L,C)

I OSCILLATIONS FORCÉES



Le circuit (R,L,C) est le siège d'oscillations forcées parce que le G.B.F impose la fréquence des oscillations.

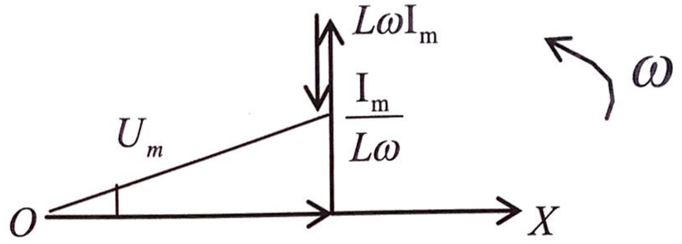
II GRANDEURS EFFICACES : grandeurs lues sur les appareils de mesure.

Tension efficace : $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ $\quad U_m$: tension maximale

Intensité efficace $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ $\quad I_m$: intensité maximale

III IMPÉDANCE D'UN CIRCUIT (R, L, C) $\frac{I(No)}{\sqrt{2}}$

.Impédance $Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m}$ $\quad Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$



IV DÉPHASAGE DE u PAR RAPPORT À i :

$$\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \quad ; \quad \cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

Remarques : $\tan\varphi > 0 \Rightarrow L\omega > \frac{1}{c\omega}$; u est en avance sur i. L'effet inductif l'emporte sur l'effet capacitif.

* $\tan\varphi < 0 \Rightarrow L\omega < \frac{1}{c\omega}$; i est en avance sur u.

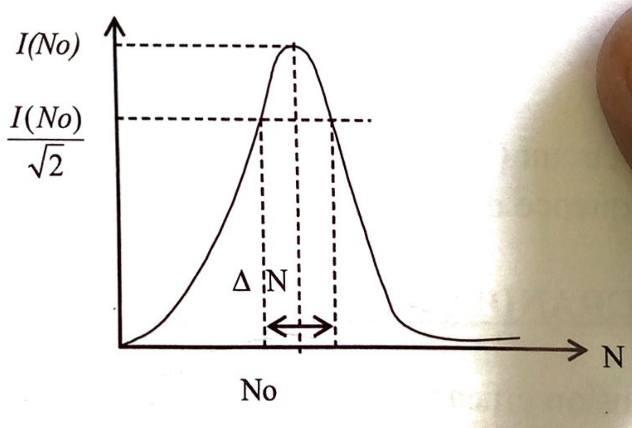
L'effet capacitif l'emporte sur l'inductif

* $\tan\varphi = 0 \Rightarrow L\omega = \frac{1}{c\omega}$; i et u sont en phase ($\varphi = 0$).

On parle de résonance de l'intensité.

V RÉSONANCE DE L'INTENSITÉ

1. Courbe de résonance.



2. Bande passante. C'est le domaine autour de N_0 tel que $I \geq \frac{I(N_0)}{\sqrt{2}}$.

$$\Delta N = \frac{R}{2\pi L}$$

3. Facteur de qualité

$$Q = \frac{N_0}{\Delta N} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

4. Surtension

$U_C = U_L = QU$ U_C : tension aux bornes du condensateur.

U_L : tension aux bornes de la bobine

C Puissance en régime sinusoïdal forcé

I PUISSANCE INSTANTANÉE

$P(t) = u(t).i(t) = UI\,[\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)]$

II PUISSANCE MOYENNE

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = UI\cos\varphi$$

$\cos\varphi$: facteur de puissance UI : puissance apparente.

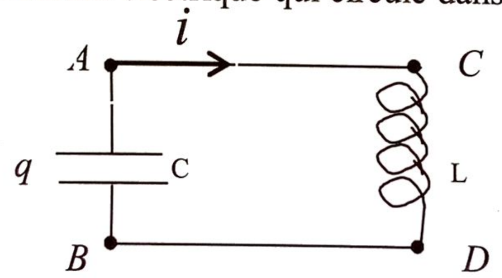
Exercice circuit (L, C)

Exercice N° 1

On suppose que la résistance d'un circuit oscillant LC est négligeable. Le circuit possède une auto-inductance (encore appelée plus simplement inductance) L = 12,7mH et une capacité. $C = 2{,}4\mu F$. On désigne par :

q la charge prise par le plateau (A) du condensateur à l'instant t

i l'intensité du courant électrique qui circule dans le circuit à l'instant t



1. Quelle est l'équation différentielle qui régit l'évolution de la charge q en fonction dutemps ?
2. a) Vérifier qu'à chaque instant la charge q est une fonction sinusoïdale de la forme :

$q = q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

b) Calculer la fréquence propre N_0 du circuit oscillant.

3. a) En supposant qu'à l'instant t = 0 la charge du condensateur était q_m =37 μ C, exprimer q = f(t) et i = g(t).

b) Que dire de ces deux fonctions ?

c) Quelle est l'intensité maximale I_m qui circule dans le circuit LC ?

Solution

1. Equation différentielle régissant la charge q.

A l'instant t, la tension U_{AB} aux bornes du condensateur est $U_{AB} = \frac{q}{C}$. A ce même instant, la tension U_{CD} aux bornes de la bobine est :

$$U_{CD} = ri - e \text{ avec } e = \frac{-Ldi}{dt}$$

Par hypothèse r $\simeq o$ d'où $U_{CD} = \frac{-Ldi}{dt}$

* L' additivité des tensions s'écrit :

$$U_{BA} + U_{CD} = 0 \ (1) \text{ ou encore } \frac{q}{c} + \frac{Ldi}{dt} = 0$$

$$\text{par définition } i = \frac{dq}{dt} \text{ d'où } \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$$

L'équation (1) s'écrit $\boxed{\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0}$ (2)

2. Solution de l'équation différentielle.

a) $q = q_m \sin(\omega t + \varphi)$ doit vérifier l'équation (2)

Les dérivées première et seconde s'écrivent :

$$q' = \omega_0 q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$
$$q'' = -\omega_0^2 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 q$$

D'où $\boxed{\ddot{q} + \omega_o^2 q = 0}$ (3) cette équation différentielle est bien de la même forme que l'équation (2)

$q = q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ est bien solution de l'équation (2).

b) Par identification des équations 2 et 3,on obtient :

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC} \text{ avec } \omega_o = 2\pi N_o \qquad \text{D'où } N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$AN: \ N_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{12,7.10^{-3} \times 2,4.10^{-6}}} \qquad N_0 = 912 Hz$$

3. Etude des fonctions $q = f(t)$ et $i = g(t)$.

$t = 0 \qquad q = q_m$

$q_m = q_m \sin\varphi \qquad \sin\varphi = 1 \Rightarrow \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}$ La charge q s'écrit :

$$q = q_m \sin\left\{\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right\} = q_m \cos\omega_0 t$$

$$q = q_m \cos\sqrt{\frac{1}{LC}}t \qquad q = 3,7.10^{-5}\cos(5,73.10^3 t)$$

* $i = q' = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t)$

$AN: \quad i = -0,212\sin\left(5,73.10^3 t\right) = 0,212\cos(5,7310^3 t + \frac{\pi}{2})$

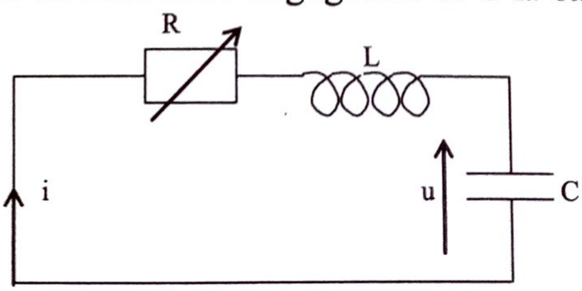
b) Les deux fonctions $q = f(t)$ et $i = g(t)$. sont en quadrature l'une par rapport à l'autre
:

Le déphasage est de $\frac{\pi}{2} rad$.

c) L'intensité maximale dans le circuit est : $\qquad I_m = \frac{1}{\sqrt{LC}} q_m \qquad I_m = 0{,}212A$

Exercice N° 2

Dans le circuit de la figure ci-dessous, R est un conducteur ohmique de résistance variable, L
l'inductance d'une bobine de résistance négligeable et C la capacité d'un condensateur.



On désigne par u la tension aux bornes du condensateur et i l'intensité du courant dans le circuit.

1. En tenant compte des orientations choisies, établir la relation entre i et u.
2. On suppose la résistance R nulle. La tension initiale aux bornes de condensateur est : $U_0 = 10$ V. La capacité du condensateur est $C = 100\ nF$. L'inductance de la bobine est $L = 100\ mH$.

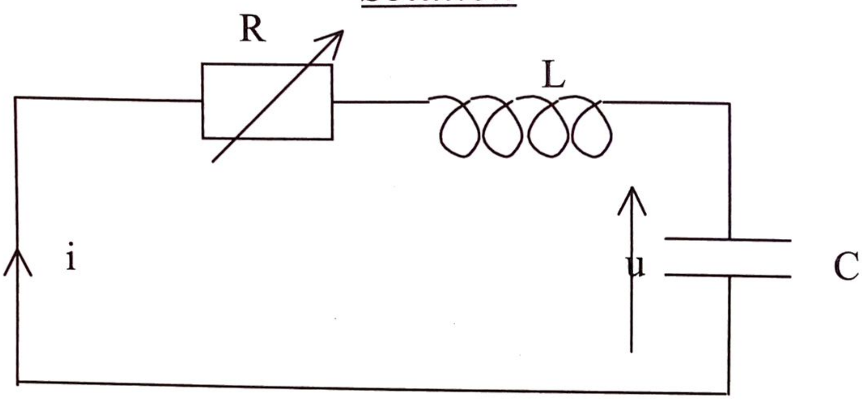
   a) Etablir les expressions de $u(t)$ et $i(t)$. Les constantes seront remplacées par leurs valeurs

3. On fait varier R, la tension initiale étant U_0 :

a) Faire le schéma des oscillogrammes observés pour u(t) dans les cas suivants : R faible ; R très grand. Préciser dans chaque cas le nom du régime obtenu.

b) Quel est le rôle du conducteur ohmique ?

Solution



1. Relation entre i et u.

$$u = \frac{q}{C} \quad et \quad i = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{d(Cu)}{dt} \Rightarrow i = C.\frac{du}{dt}$$

2. $R = 0$

- Expressions de u(t) et i(t)
- Equation différentielle du circuit

$$u_{AE} = u_{AB} + u_{BD} + u_{DE} \Rightarrow u_{AE} = L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + 0 \quad or \quad u_{AE} = 0$$

$$\Rightarrow L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow LC\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{q}{C} \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{LC}u = 0$$

Cette équation différentielle admet une solution de la forme.

$u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$

A $t = 0$ $\quad u = U_o$ $\quad$ et $i = 0$

$i = - CU_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$

$$\begin{cases} U_o = U_m \cos\varphi \\ 0 = - CU_m \omega \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi > 0 \\ \sin\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = 0$$

$U_o = U_m$ $\qquad u(t) = U_o \cos \omega t$ $\quad$ avec $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ $\qquad \omega = 10^4 \text{rads}^{-1}$

$$\boxed{u(t) = 10 \cos 10^4 t}$$

$$\boxed{i(t) = -10^{-2} \sin 10^4 t}$$

La tension est sinusoïdale

b) Expression de T

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{LC}$$

- Calcul de T

$T = 6,28.10^{-4}$s

c) Energie électrique du condensateur.

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\text{Cu}^2 \Rightarrow \mathcal{E}_e = 5.10^{-6}\cos^2 10^4 t$$

- Energie magnétique de la bobine

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow \mathcal{E}_m = 5.10^{-6}\sin^2 10^4 t$$

- Montrons que l'énergie totale est constante

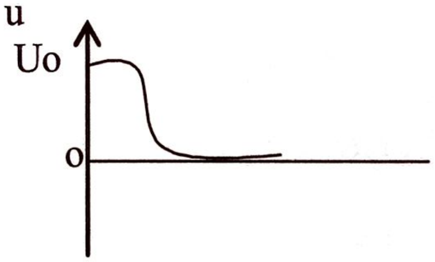
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m = 5.10^{-6}\left(\cos^2 10^4 t + \sin^2 10^4 t\right)$$

$$\mathcal{E} = 5.10^{-6} J \Rightarrow \mathcal{E} = cte$$

3. a) R faible

régime pseudo-périodique

R très grand

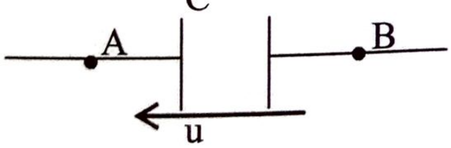


régime apériodique

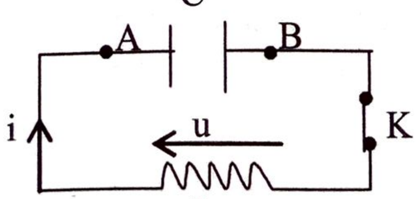
b) Le conducteur ohmique dissipe l'énergie initialement emmagasinée dans le condensateur sous forme de chaleur.

Exercice N° 3

1. Un condensateur de capacité C est chargé sous une tension constante U : figure (a)



(a)



(b)

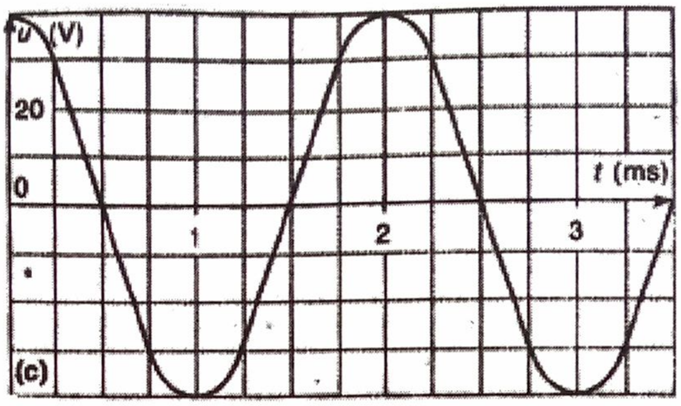


Figure C

Calculer la charge Q portée par l'armature. Ainsi que l'énergie emmagasinée.

$AN : C = 10^{-6}\ F$; $U = 40\ V$

2. Le condensateur C chargé dans les conditions précédentes, est isolé, puis relié à une bobine d'induction L. La résistance du circuit est négligeable (figure b).

On ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$. Un oscillographe permet de visualiser la tension aux bornes de la bobine. On obtient la courbe représentée figure (c).

a) On note $q(t)$ la charge portée par l'armature A à la date t. L'intensité $i(t)$ du courant comptée positivement dans le sens indiqué sur la figure. A partir de la courbe observée, exprimer $u(t)$ en fonction du temps. Préciser la tension maximale et la pulsation.

b) Calculer l'inductance de la bobine.

c) Représenter graphiquement l'intensité $i(t)$ pour $t \in [0,\ 3{,}5\text{ms}]$

d) Déterminer les énergies emmagasinée dans le condensateur et dans la bobine à l'instant $t = 0{,}75$ ms.

Solution

1. Charge Q portée par l'armature.

$$U = \frac{Q}{C} \Rightarrow Q = CU$$

$AN:\ Q = 10^{-6} \times 40 = 4.10^{-5} C$

- Energie emmagasinée.

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} CU^2 \qquad \mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \times 10^{-6} \times 40^2 = 8.10^{-4} J$$

$$\mathcal{E}_e = 8.10^{-4} J$$

2. a) Exprimons $u(t)$ à partir de la courbe.

$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ $\quad t = 0 \quad u = U_m$

$$u(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right)$$

$t = 0 \quad u = U_m \qquad U_m = U_m \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

Période T: $\frac{4div}{1ms} = \frac{8div}{T} \Rightarrow T = \frac{8}{4} = 2ms$ $div: carreau$

$U_m = 40$ V $T = 2.10^{-3}$s

$$u(t) = 40\cos\frac{2\pi}{2.10^{-3}}t = 40\cos(1000\pi t)$$

$$\boxed{u(t) = 40\cos(1000\pi t)}$$

b) Inductance L $\omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega^2 C}$

$$L = \frac{1}{4\pi^2 N^2 C}$$

$$AN: \quad L = \frac{1}{4\times10^{-6}\times500^2\pi^2} = 0,1H$$

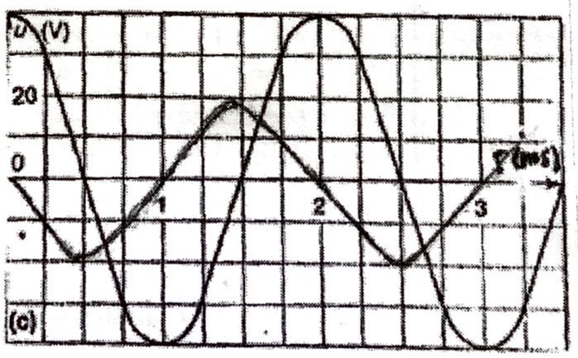
c) Représentation de $i(t)$ entre 0 et 3,5 ms

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt} \qquad i(t) = 10^{-6}\frac{d}{dt}[40\cos(1000\pi t)]$$

$$i = 10^{-6}\text{x}40\text{x}1000\pi\sin(1000\pi t)$$

$$i = 4\pi.10^{-2}\sin(1000\pi t) = 4.10^{-2}\cos\left[1000\pi t + \frac{\pi}{2}\right]$$

$i(t)$ est en quadrature avance de phase sur u.



d) A t=0,75ms

- Energie emmagasinée dans le condensateur

$$\varepsilon_e = \frac{40}{2}C^2\left[\cos^2(1000\pi t)\right]$$

$$\varepsilon_e = \frac{1600}{2}.10^{-6}\cos^2 1000\pi.\frac{0,75}{1000}800.10^{-6}\cos^2 40,75\pi$$

$$\varepsilon_e = 4010^{-4}J$$

- Energie emmagasinée par la bobine

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2} L i^2$$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2} L \left[4\pi 10^{-2}.\cos\left\langle 1000\pi t + \frac{\pi}{2} \right\rangle \right]^2 = \frac{4^2 \pi 2 10^{-4}}{2} L \cos^2\left(1000\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\varepsilon_m = 8.10^{-4} \pi^2 L \cos^2\left(1000.\frac{0,75}{1000}\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 3,948.10^{-4} J$$

$$\varepsilon_m \simeq 4.10^{-4} J$$

Exercice N° 4

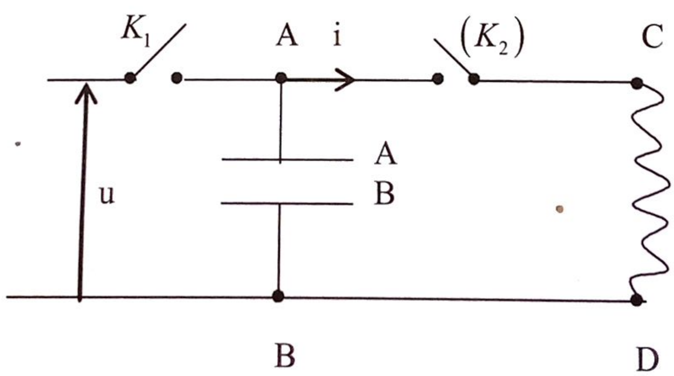
Un circuit oscillant est constitué d'un condensateur de capacité $C = 0,200\ \mu F$ et d'une bobine dont l'auto-inductance est $L = 3,7$ mH. Le tout est maintenu à une température voisine de O°K.

Dans ces conditions, le circuit possède une résistance nulle (supraconductivité).

1. Le circuit étant ouvert, on charge le condensateur sous une tension $u = U_m$ avec $U_m = 12,4$ V,

puis on ouvre l'interrupteur (K_1).

Calculer la charge initiale Q_m prise par le plateau (A) du condensateur.



2. A un instant pris comme origine des temps, on ferme l'interrupteur (K_2). L'intensité i de courant électrique est comptée positivement quand le courant circule dans le sens indiqué sur le schéma. On appelle $q(t)$ la charge de l'armature (A) en fonction du temps.
   a) Etablir l'équation différentielle de ce circuit oscillant.
   b) Calculer la pulsation propre ω_0 du circuit.
3. Donner les expressions des fonctions :
   a) $E_c(t)$, énergie stockée dans le condensateur.
   b) $E_b(t)$, énergie stockée dans la bobine.

Solution

1. Càlculons la charge initiale Q_m du condensateur.

$Q_m = CU_m$

$AN: Q_m = 0{,}210^{-6}.12{,}4$ $\qquad Q_m = 2{,}48.10^{-6}C$

2. a) Equation différentielle régissant la charge q.

$U_{BA} + U_{CD} = 0 \qquad U_{BA} = \frac{q}{C} \qquad U_{CD} = -e = \frac{Ldi}{dt}$

$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$ ou encore $\boxed{\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0}$ (1)

b) Calcul de ω_0.

L'équation différentielle (1) est de la forme : $\ddot{q} + \omega_o^2 q = 0$

D'où $\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

$AN: \ \omega_o = \sqrt{\frac{1}{3{,}7.10^{-3} \times 2.10^{-7}}}$ $\qquad \boxed{\omega_o = 3{,}7.10^4 \, rads^{-1}}$

3. A un instant donné t, la charge prise par le condensateur est une solution de l'équation différentielle (1) soit :

$$q = Q_m \sin(\omega_o t + \varphi)$$

$$t = 0 \qquad q = Q_m$$

$$Q_m = Q_m \sin\varphi, \qquad \sin\varphi = 1 \text{ et } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$q = Q_m \cos(\omega_o t)$$

a) L'énergie stockée par le condensateur en fonction du temps est ;

$$E_c(t) = \boxed{\frac{Q_m^2}{2C}\cos^2(\omega_o t)}$$

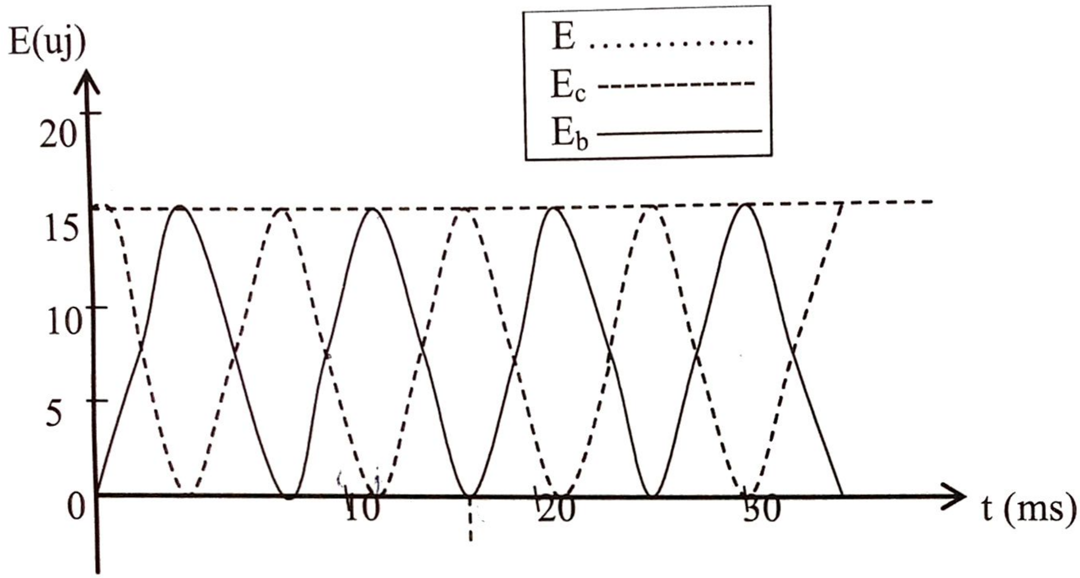
$AN: \ E_c(t) = 15{,}4.10^{-6}\cos^2(3{,}7.10^4 t)$

b) L'énergie stockée dans la bobine en fonction du temps est :

$$E_b(t) = \frac{1}{2}Li^2 \text{ avec } i = \frac{dq}{dt} = -Q_m\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$E_b(t) = \frac{L\omega^2 Q_m^{\ 2}}{2}\sin^2(\omega t) or \omega_0^{\ 2} = \frac{1}{LC} \Rightarrow E_b(t) = \frac{Q_m^{\ 2}}{2C}\sin^2(\omega t)$$

c) Représentation graphique de $E_c(t)$ et $E_b(t)$



4. a) Calculons l'énergie totale.

$$E = E_c(t) + E_b(t)$$

$$E = \frac{Q_m^2}{2C}\cos^2(\omega_o t) + \frac{L\omega_o^2}{2}Q_m^2\sin^2(\omega_o t) \quad \text{or} \quad \omega_o^2 = \frac{1}{LC}$$

$$E = \frac{Q_m^2}{2C}\left(\cos^2\omega_o t + \sin^2\omega_o t\right) \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q_m^2}{2C}$$

$$E = 1,54.10^{-5} J$$

b) Sur la représentation graphique, on vérifie bien qu'a chaque instant $E_c(t) + E_b(t) = E$ avec
$E = 1,54.10^{-5}$ j.

Exercices circuit (R, L ,C)

Exercice N° 1: Bac Niger 2006 Série D 2ème groupe

On constitue un circuit électrique par la mise en série :

* d'un condensateur de capacité C ;

* d'une bobine de resistance $R = 12\ \Omega$ et d'inductance L.

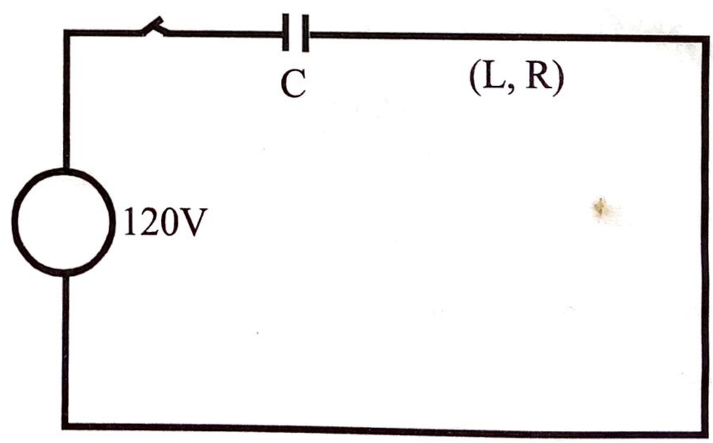
Il est alimenté par une d.d.p. sinusoïdale de valeur efficace 120 V et de fréquence N.

1. On donne L = 0,20H ; N = 60 Hz et C = 25 μ F. Calculer :
   - l'impédance Z ;
   - l'intensité efficace ;
   - le déphasage courant-tension φ.
2. On fixe toujours L = 0,20H ; C = 25 μ F et on fait varier la fréquence N.

   a) Calculer :
   - la fréquence de résonance N_0 du circuit ;
   - le facteur de qualité Q de ce circuit ;
   - le bande passante ΔN de ce circuit ;

   b) La fréquence N devenant très faible $(N \to 0,)$; quelles sont les limites de l'impédance Z du circuit et du déphasage courant-tension φ.

   c) La fréquence N devenant très grande $(N \to +\infty)$; quelles sont les limites de l'impéndance Z du circuit et du déphasage courant-tension.



a) - L'impédance Z : $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \dfrac{1}{C\omega})^2}$

AN: Z = 33 Ω

- L'intensité efficace I : $U = ZI \Rightarrow I = \dfrac{U}{Z}$

AN : I = 3,64 A

AN : $\tan\varphi = -2,55$; d'où $\varphi = -68,7°$

La tension est en retard sur l'intensité

b) On fixe: L = 0,20H ; C = 25 μ F rt on fait varier N

- Calculer de fréquence de raisonance No

A la raisonance on a : $LC\omega_0^2 = 1$

$$\Rightarrow \omega_O = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ; \quad comme \quad N_O = \frac{\omega_O}{2\pi}$$

$$D'où \quad N_O = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad AN : N_O = 71,2Hz$$

c) On fixe L = 0,20H ; C = 25 μ

- Calcul de la fréquence de raisonance N_O

A la raisonance on a $LC\omega_0^2 = 1$

$$\Rightarrow \omega_O = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad or \quad N_O = \frac{\omega_O}{2\pi} \qquad D'où \quad N_O = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$AN : N_O = 71,2Hz$$

- Le facteur de qualité Q du circuit :

$$Q = \frac{L\omega_O}{R}$$

AN : Q = 7,45

- La bande passante ΔN du circuit :

On sait que $Q = \dfrac{N_O}{\Delta N} = \dfrac{\omega_O}{\Delta\omega} \quad D'où \quad \Delta N = \dfrac{N_O}{Q}$

$$AN : \quad \Delta N = 9,55Hz \simeq 10Hz$$

* Les limites de l'impédance Z du circuit et du déphasage courant-tension.

$Q \ pour \ N \to O_+$

Comme $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \dfrac{1}{C\omega})^2} \quad et \quad \tan\varphi = \dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}$

$$\frac{1}{C\omega} \to \infty \qquad D'où \quad \tan\varphi - \infty ; \varphi \to \frac{\pi}{2}$$

* Les limites de l'impédance Z et du déphasage courant-tension. φ pour $N \to +\infty$

$$Z \to +\infty$$

$$\tan\varphi \to +\infty ; \varphi \to +\frac{\pi}{2}$$

Exercice N° 2

Une portion de circuit MP est constituée d'un conducteur ohmique de résistance $R = 10\Omega$ en série avec un bobine d'inductance L et de résistance r. On branche entre M et P une source de tension sinusoïdale. La tension délivée entre P et M est de la forme $u = U_m \cos \omega t$.

L'intensité dans le circuit est $i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$. On branche comme indiqué sur la figure 1, un

oscillographe bicourbe. On observe alors sur l'écran la figure 2.

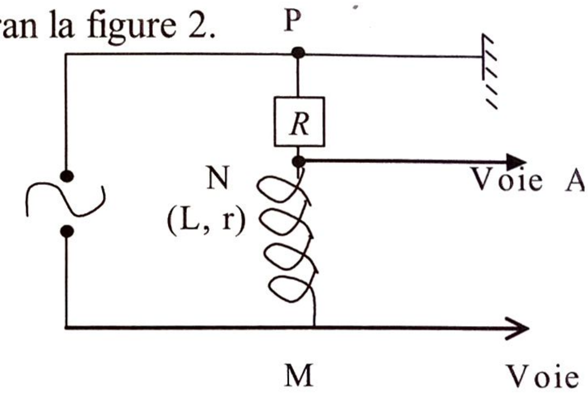


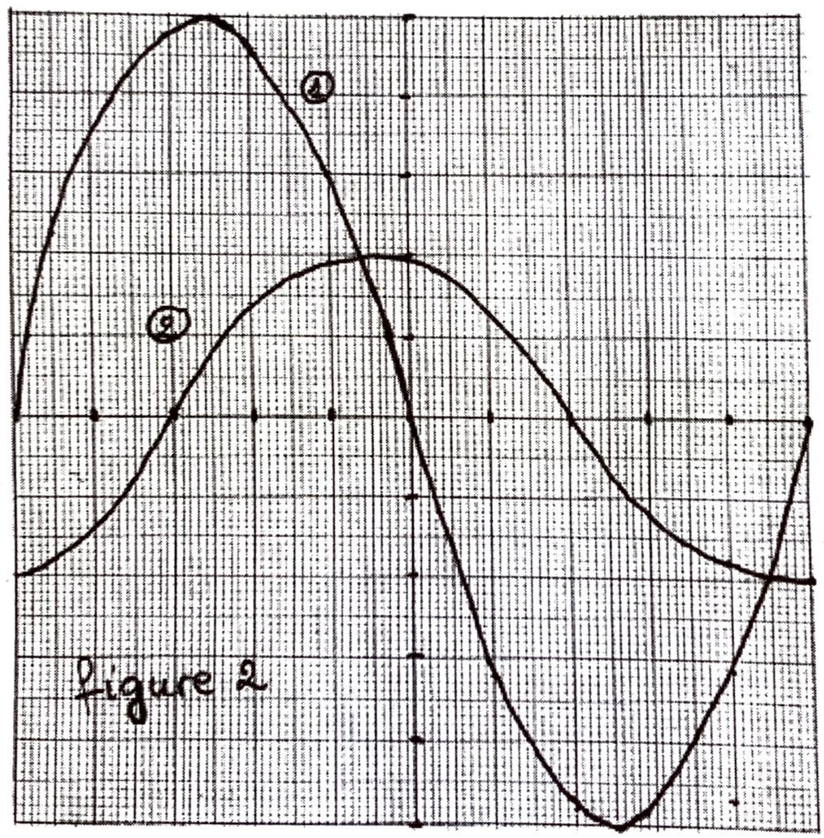
Figure 1

Sensibilité verticale:

Voie A : 1v/div

Voie B : 2 v/div.

Sensibilité horizontale : 1 ms/div.



1. Justifier que la courbe (1) représente la tension u_{MP} et la courbe (2) représente la tension u_{NP} .
2. Déduire des courbes (1) et (2) :
   a) La pulsation ω ; les valeurs U_m et I_m ; la phase φ.
   b) L'impédance Z de la portion MP.
   c) Déterminer r et L.

3. On ajoute maintenant entre M et N un condensateur de capacité C, en série avec la bobine.
Déterminer la valeur de C pour qu'il y ait résonance.
Que vaut alors l'impédance Zo de la portion MP ? En déduire Iom (intensité maximale à la résonance). Comparer I_{om} et I_m.
En prenant maintenant 2V/div comme sensibilité pour la voie A (on ne change pas la sensibilité de
la voie B) représenter ce que l'on voit sur l'écran de l'oscillographe.
Calculer le facteur de qualité du circuit.

Solution

1 Justification

$$U_{MPm} = U_m = \sqrt{(R+r)^2 + L^2\omega^2}.I_m$$

$$U_{NPm} = RI_m$$

$U_{MPm} > U_{NPm} \Rightarrow$ la courbe (1) représente la tension u_{MP} et la courbe (2) la tension u_{NP}.

2. Déduisons des courbes :

La pulsation ω $\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} \qquad T \longrightarrow 10div; \qquad T = 10\times 10ms$

$$\omega = \frac{2\pi}{10.10^{-3}} \Rightarrow \omega = 628rads^{-1}$$

Les valeurs de Um, Im et φ.

$$U_m \longrightarrow 5div(courbe(1)) \Rightarrow U_m = 5\times 2 = 10V \qquad \boxed{U_m = 10V}$$

$$U_{NPm} \longrightarrow 2div \Rightarrow U_{NPm} = 2\times 1 = 2V$$

or $U_{NPm} = I_m.R \Rightarrow I_m = \dfrac{U_{NPm}}{R} \qquad \boxed{I_m = 0,2A}$

Le décalage horaire ϑ entre les deux courbes correspond à 2 divisions

$$\vartheta = 2\times 1 = 2ms, \quad or \quad \vartheta = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\varphi.T}{2\pi} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi\vartheta}{T} \Rightarrow \varphi = \boxed{0,4\pi rad}$$

L'impédance Z de la portion PM

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{10}{0,2} \Rightarrow \boxed{Z = 50\Omega}$$

Calcul de r et L.

$$\cos\varphi = \frac{R+r}{Z} \quad \Rightarrow \quad r = Z\cos\varphi - R \qquad \boxed{r = 5{,}45\Omega}$$

$$tg\varphi = \frac{L\omega}{R+r} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{(R+r)tg\varphi}{\omega} \qquad \boxed{L = 7{,}6.10^{-2}\,H}$$

$$\text{ou} \qquad L = \frac{\sqrt{Z^2(R+r)^2}}{\omega}$$

3. a) Valeur de C à la résonance

$$LC\omega^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{L\omega^2} \qquad \boxed{C = 33{,}5.10^{-6}\,F}$$

b) Impédance Zo.

$$\cos\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad z_o = R + r \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_o = 15{,}45\Omega}$$

$$I_{om} = \frac{U_m}{R+r} \qquad \boxed{I_{om} = 0{,}65A}$$

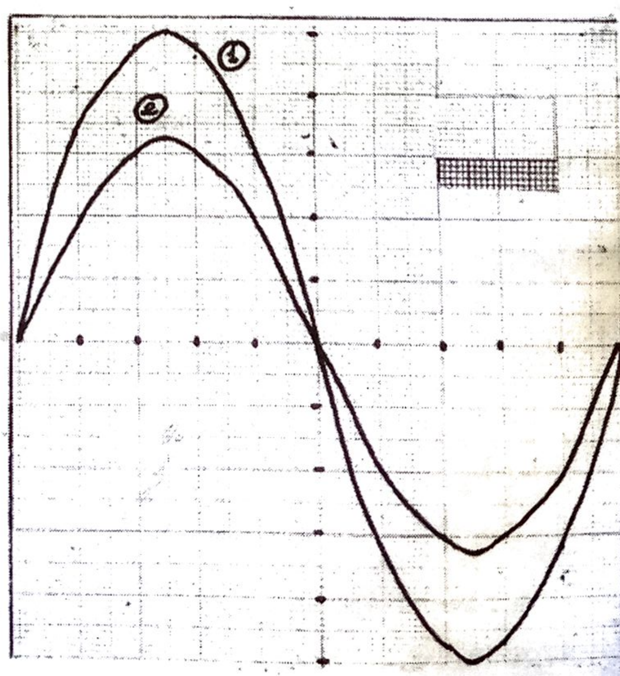
Comparaison : $\mathrm{I}_{om} > \mathrm{I}_m$

c) Représentation des courbes.

$$U_{NPm} = RI_{om} = 10 \times 0{,}65 = 6{,}5\text{v}$$

$$U_{NPm} \longrightarrow 3{,}25div$$

$$U_{MPm} = U_m \longrightarrow 5div(inchangé)$$

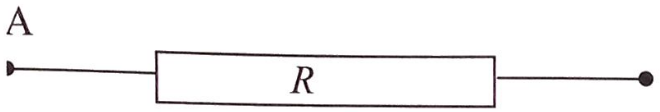


d) Calcul du facteur de qualité.

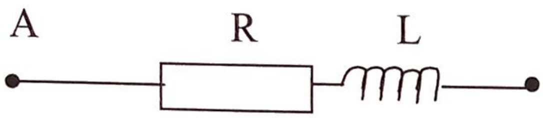
$$Q = \frac{L\omega}{R+r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = 3{,}1} \quad \text{ou} \quad Q = \frac{1}{(R+r)C\omega}$$

Exercice N° 3

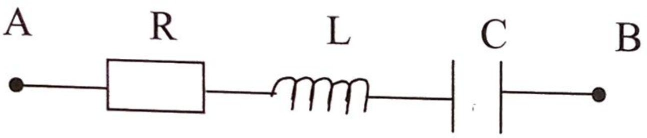
A l'aide d'une résistance pure R, d'une bobine de résistance négligeable et d'inductance L, d'un condensateur de capacité C, on réalise l'un des montages suivants :



$Montage(1)$



$Montage(2)$



$Montage(3)$

1. On établit une différence de potentiel continue entre A et B : On observe le passage d'un courant permanent. Quelle conclusion peut-on faire ?

2. On établit entre A et B une différence de potentiel sinusoïdale : $u = 14,14 \sin 100\,\pi t$. On observe les résultats suivants : passage d'une intensité efficace $I = 2A$ et une puissance moyenne P = 12 W
   a) Quel est, parmi les trois montages proposés, celui qui a été utilisé ?
   b) Calculer les caractéristiques des appareil constituant ce montage.

<u>**Solution**</u>

1. Un courant permanent s'établit entre A et B en courant continu.
Donc le montage ne contient pas de condensateur. On exclut le montage (3)

2. a) Recherche du montage utilisé
- Considérons le montage (1)

$$P_1 = RI^2 = ZI^2 \quad or \quad Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m}{\sqrt{2}I} \;; \qquad P_1 = \frac{U_m}{\sqrt{2}I} I^2 = \frac{U_m}{\sqrt{2}} . I$$

$$P_1 = \frac{14,14}{\sqrt{2}} \times 2 \qquad \Rightarrow \qquad P_1 = 20W$$

Or la puissance consommée est P =12W $\neq P_1$ Donc le montage (1) ne convient pas.
- Le montage utilisé est le montage (2)

b) Calcul des caractéristiques du montage.

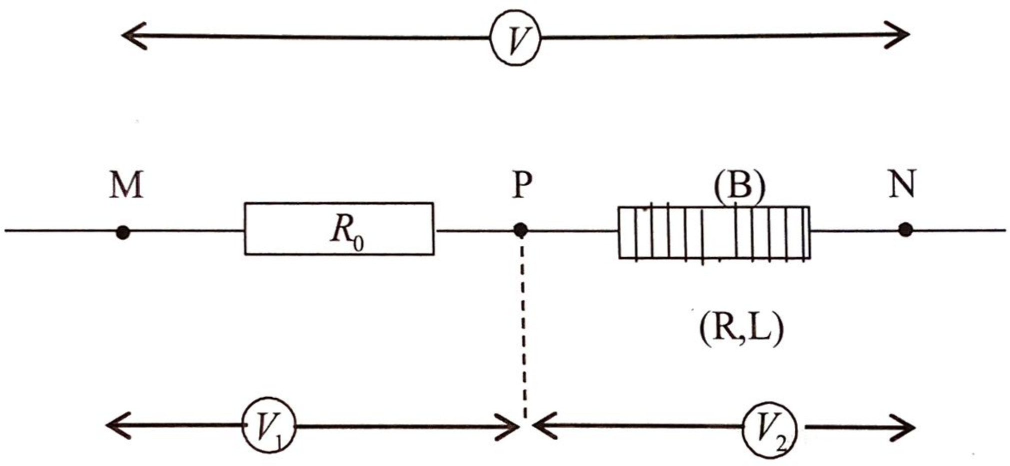
$$P = RI^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{P}{I^2} \qquad AN: \quad R = \frac{12}{2^2} \qquad \boxed{R = 3\Omega}$$

$$Z^2 = R^2 + L^2\omega^2 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{\omega} \quad \text{avec} \quad Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{14,14}{2\sqrt{2}} = 5\Omega$$

$$\boxed{L = 12,7mH}$$

Exercice N° 4 : Partie BAC Niger 1987 série C, E

Un tube T_1 d'éclairage fluorescent peut être représenté par un dipôle électrique MN dont le schéma équivalent est le suivant :



- Une bobine B de résistance R et d'inductance L.
- Une réglette lumineuse dont l'impédance est assimilé pendant le fonctionnement à une résistance Ro.

Cet tube est alimenté par le secteur sous tension alternative sinusoïdale de fréquence f = 50 Hz et de valeur efficace U= 220 V. Les voltmètres V, V_1, V_2 mesurent des tensions efficaces. Le voltmètre V_1 indique 124V. La puissance absorbée est P = 40W. L'intensité efficace est I = 0,31 A.

1. Calculer l'impédance de ce dipôle MN, ainsi que son facteur de puissance.
2. Calculer la résistance R de la bobine B. Calculer son inductance en fonction de U, f, P, I.
3. Déterminer la tension mesurée par le voltmètre V_2, puis comparer les indications données par les trois voltmètres.

Solution

1. Impédance du dipôle MN ;

$$Z_{MN} = \frac{U}{I_1} = \frac{220}{0,31} = 709,67\Omega$$

Facteur de puissance $Cos\varphi = \frac{P}{UI_1} = \frac{40}{220 \times 0,31} = 0,586$

$$Cos\varphi \simeq 0,59$$

2. Résistance de la bobine B.

$$R_o = \frac{U_1}{I_1} \qquad R_o = \frac{124}{0,31} = 400\Omega$$

or $\quad P = (R + R_o) I_1^2 \quad \Rightarrow \quad R + R_o = \frac{P}{I_1^2} - R_o \Rightarrow R = \frac{P}{I_1^2} - R_0$

$$R = \frac{40}{1,31^2} - 400 = 16,23\Omega$$

$$R = 16,23\Omega$$

Inductance de la bobine B.

$$Z_{MN}{}^2 = (R_0 + R)^2 + L^2\omega^2 \qquad L^2\omega^2 = Z_{MN}{}^2 - (R_0 + R)^2 \qquad (1)$$

or $\quad Z_{MN} = \frac{U}{I_1} \quad et \quad \cos\varphi = \frac{R + R_o}{Z_{MN}} \quad$ d'où $\quad R + R_o = Z_{MN} \cos\varphi$

En remplaçant Z_{MN} et $R + R_o$ dans (1)

$$L^2\omega^2 = \frac{U^2}{I_1^2}\left(1 - \cos^2\varphi\right) \text{ or } \quad \cos\varphi = \frac{P}{UI_1}$$

$$L^2\omega^2 = \frac{U^2}{I_1^2}\left(1 - \frac{P^2}{U^2 I_1^2}\right) = \frac{1}{I_1^2}\left(U^2 - \frac{P^2}{I_1^2}\right)$$

$$L = \frac{1}{2\pi f I_1}\sqrt{U^2 - \frac{P^2}{I_1^2}}$$

AN: $\quad L = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 0,31}\sqrt{220^2 - \frac{40^2}{0,312}} = 1,83H$

$$L = 1,83H$$

3. Tension U_2

$$U_2 = Z_{PN} I_1 = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}.I_1$$

$$U_2 = \sqrt{16,2^2 + (1,83 \times 100\pi)^2} \times 0,31$$

$$U_2 = 178,2V$$

On constate qu'il n'y a pas addivité des tensions $U = 220\ V$; $U_1 = 124\ V$; $U_2 = 178,2\ V$

Exercice N° 5 : Bac 2003 Niger, Série D

Soit un condensateur de capacité $C_1 = 6,28\ \mu F$

1. Donner l'expression de la charge q prise par ses armatures quand on établit entre elles une tension constante U_0. Calculer q pour $U_0 = 50V$.

2. Le condensateur étant chargé, on isole ses armatures et on le décharge dans une bobine d'inductance $L_1 = 0,318$ H et de résistance négligeable. Etablir l'équation différentielle des oscillations électriques qui apparaissent dans le circuit et calculer leur fréquence.

3. Entre deux bornes M et N on monte en série une résistance pure $R_1 = 300\Omega$, le condensateur C_1 et la bobine L_1. On maintient entre M et N une différence de potentiel sinusoïdale de valeur efficace $U = 220\ V$ et de fréquence $N = 50$ Hz.

a) Construire le diagramme de Fresnel représentant les valeurs instantanées des tensions aux bornes de chaque dipôle.

b) Calculer l'impédance Z_1 du circuit et l'intensité efficace I_1 du courant qui traverse le circuit.

c) Déterminer le déphasage φ_1 existant entre l'intensité i_1 et la tension u aux bornes du circuit.

4. On remplace le circuit précédent par un circuit analogue avec $R_2 = 50\Omega$, $L_2 = 0,314$ H et $C_2 = 63,7\mu F$. On fait varier la fréquence tout en gardant la différence de potentiel inchangée.

a) Donner l'expression de la pulsation ω_2 pour laquelle l'intensité efficace est maximale. Calculer cette intensité.

b) On appelle coefficient de surtension Q_2 du circuit le rapport entre la tension efficace aux bornes du condensateur et la tension U à la résonance.

- Exprimer Q_2 en fonction de r_2, C_2 et ω_2 d'une part et en fonction de R_2, L_2 et ω_2 d'autre part.
- Calculer Q_2

Solution

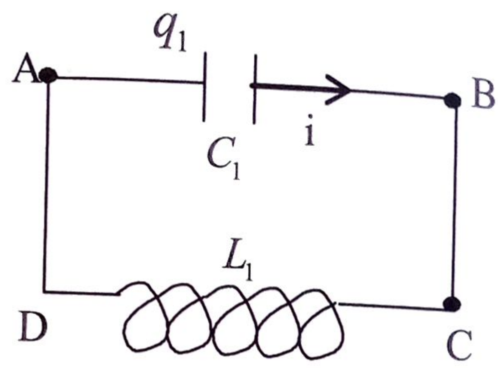
1. Donnons l'expressions de la charge q.

$$q = C_1 U_o$$

AN: $q = 6,28.10^{-6} \times 50$ $\boxed{q = 3,14.10^{-4} C}$

2. Etablissons l'équation différentielle.

$$U_{BA} + U_{CD} = 0 \qquad \frac{q_1}{C} + L_1\frac{di}{dt} = 0$$



or $\quad i = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad L_1\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q_1}{C_1} = 0$

Soit $\quad \ddot{q} + \frac{q}{L_1C_1} = 0 \quad (1)$

Cette équation admet pour solution des équations de la forme $q = q_m\cos(\omega t + \varphi)$

$$\dot{q} = -q_m\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{q} = -q_m\omega^2\cos(\omega t + \varphi) \qquad \ddot{q} = -\omega^2 q$$

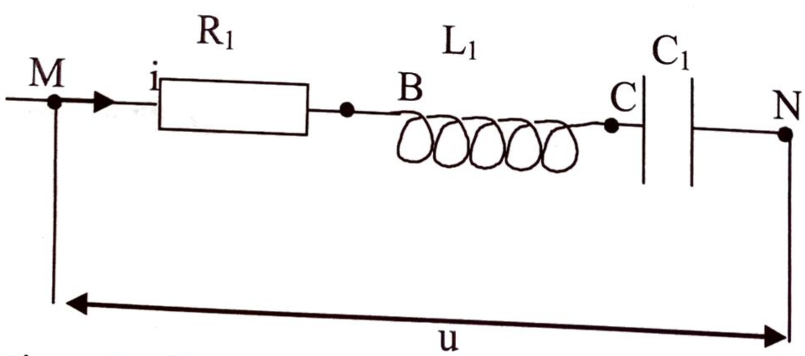
$$\ddot{q} + \frac{1}{L_1C_1}q = 0 \qquad \text{d'où} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$$

$$N = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \boxed{N = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_1}}}$$

AN $\quad L_1 = 0{,}318H \qquad C = 6{,}28.10^{-6}F$

$$\boxed{N = 112{,}62Hz}$$

3.



a) Construisons le diagramme de Fresnel

$$u = u_{MB} + u_{BC} + u_{CN}$$

$$u = R_1 i + L_1\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \qquad or \quad dq = idt \ d'où \ q = \int idt$$

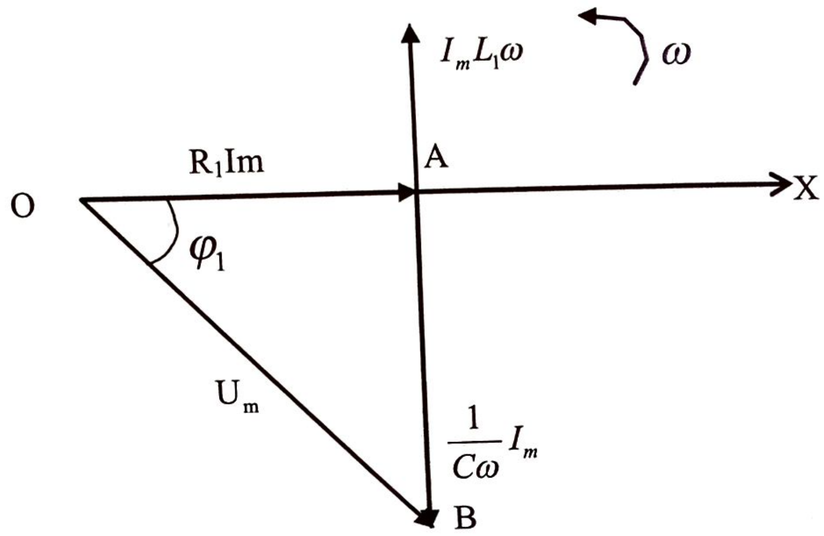
On a donc $\quad u = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt$

Comme $i = I_m \cos \omega t$ *et* $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$

$$U_m \cos(\omega t + \varphi) = RI_m \cos \omega t + L\omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_m}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$R_1 = 300\Omega; \qquad L_1\omega = 99{,}9\Omega; \qquad \frac{1}{C_1\omega_1} = 506{,}7\Omega$$

$$\frac{1}{C_1\omega_1} > L_1\omega$$



b) Calcul de l'impédance Z_1 et de l'intensité efficace I_1

Dans le triangle rectangle (OKJ), on a la relation suivante

$$U_m = \sqrt{R_1^2 + \left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right)^2}\, I_m \quad avec \quad U_m = Z_1 I_m$$

D'où $$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + \left(\frac{1}{C_1\omega} - L_1\omega\right)^2}$$

$AN:$ $\boxed{Z_1 = 505{,}58\Omega}$

$$U_m = Z_1 I_m \quad \Rightarrow \quad \frac{U_m}{\sqrt{2}} = Z_1 \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Soit $U = Z_1 I$ *d'où* $I = \dfrac{U}{Z_1}$

AN : I = 0,435 A

c) Le déphasage φ_1

La tension est en retard par rapport à i_1 : Le déphase est de 53,6°

4. a) Expression de la pulsation ω_2 pour laquelle I_2 est maximale

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + \left(L_2\omega - \frac{1}{C_2\omega}\right)^2}}$$

I_2 maximale si $L_2\omega - \frac{1}{C_2\omega} = 0$ soit $L_2C_2\omega_2{}^2 = 1$

On dit que le circuit est à la résonance

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}} \qquad \boxed{\omega_2 = 223,6 rads^{-1}}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{220}{50} \qquad \boxed{I_2 = 4,4A}$$

b) Le coefficient Q_2 de surtension du circuit

En fonction de C_2 ; ω_2 ; R_2

$$Q_2 = \frac{U_C}{U} = \frac{\frac{I_2}{C_2\omega_2}}{R_2I_2} = \frac{1}{C_2\omega_2R_2}$$

$$Q_2 = \frac{1}{C_2\omega_2R_2}$$

Q_2 en fonction de R_2 ; L_2 ; ω_2

$$C_2L_2\omega^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C_2\omega_2} = L_2C_2 \Rightarrow \frac{1}{C_2\omega_2R_2} = \frac{L_2C_2}{R_2}$$

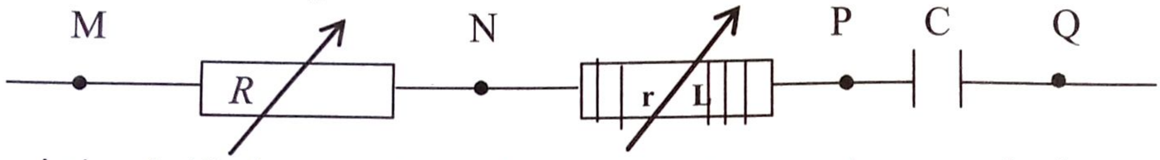
$$Q_2 = \frac{L_2\omega_2}{R_2}$$

Calcul de Q_2

$$Q_2 = \frac{L_2\omega_2}{R_2} \qquad \boxed{Q_2 = 1,4}$$

Exercice N° 6 : (Partie Bac Niger 1983 série C)

Une portion de circuit MQ comporte en série, un conducteur ohmique de résistance variable R, une bobine de résistance r et d'inductance variable L et un condensateur de capacité C. Une tension sinusoïdale $u = U_m \sin 100\pi t$ est appliquée entre les bornes M et Q (schéma ci-après)



1. La variation de l'inductance L est obtenue en enfonçant plus ou moins le noyau de fer doux dans la bobine. Pour une certaine position de ce noyau, l'intensité efficace est I_1. Soient U_{MP} la tension efficace aux bornes de la portion MP et U_{PQ} la tension efficace aux bornes de la portion PQ. La portion du circuit MQ a une résistance ohmique totale R'.

a) Calculer l'inductance L_1 de la bobine, la capacité C du condensateur et la tension efficace U_{MQ} aux bornes de la portion MQ.

AN : $I_1 = \dfrac{1}{2\pi} A$ $\quad U_{MP} = 10\sqrt{14} V$ $\quad U_{PQ} = 40 V$ $\quad R' = 200\Omega$

b) Calculer le déphasage φ entre l'intensité *i* et la tension *u* aux bornes de la portion MQ.

2. On fait varier l'inductance L de la bobine.

a) Calculer la valeur L_0 de l'inductance pour laquelle l'intensité i est en phase avec la tension u.

b) Calculer les valeurs efficaces de cette intensité pour $R'_1 = 200\Omega$ et $R'_2 = 10\Omega$.

3. La portion de circuit MQ a une résistance ohmique totale R' = 200Ω. L'intensité du courant reprend la valeur I_1 pour une nouvelle valeur L_2 de l'inductance.

a) Montrer que : $L_1 + L_2 = \dfrac{2}{C\omega^2}$

b) En déduire L_2 pour $L_1 = 0{,}4$ H

4. La résistance ohmique totale est maintenant R' = 10Ω

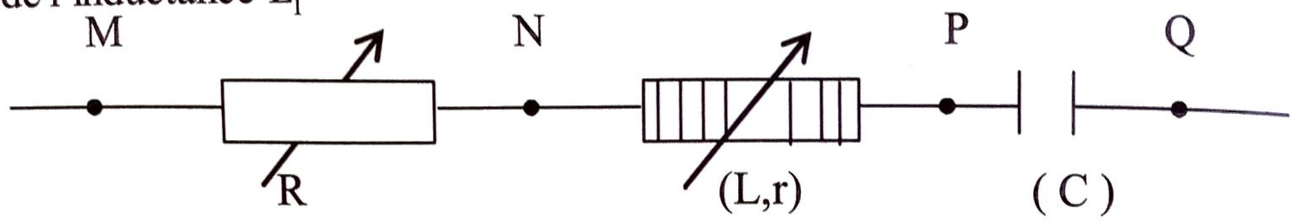
a) Calculer l'intensité efficace pour L = 0,4 H on prendra $\dfrac{1}{L\omega} = 255\Omega$

b) Compléter, sans calcul, le tableau suivant et tracer la courbe I = f(L) avec pour échelle : 1 cm pour 0,1 H et 1 cm pour 0,2 A

$L(H)$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
$I(A)$		0,38	0,56	1,02					

Solution

1. a) Calcul de l'inductance L_1



Aux bornes de MP $\quad Z_{MP} = \dfrac{U_{MP}}{I_1} \qquad Z_{MP}^2 = R'^2 + L_1^2\omega^2$

$$L_1^{\;2}\omega_2 = \frac{U_{MP}^{\;\;2}}{I_1^{\;2}} - R'^2 \qquad L_1 = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{U_{MP}^{\;\;2}}{I_1^{\;2}} - R'^2}$$

$AN: \quad L_1 = \dfrac{1}{100\pi}\sqrt{100.14.4\pi - 4.10^4} = 0,4H$

$L_1 = 0,4H$

Calcul de C

Entre P et Q $\quad Z_{PQ} = \dfrac{U_{PQ}}{I_1} = \dfrac{1}{C\omega} \Rightarrow C = \dfrac{I_1}{\omega U_{PQ}}$

$AN: \quad C = \dfrac{1}{2\pi.40.100} = 12,510^{-6}F$

$C = 12,5\mu F$

Calcul de U_{MQ} : $\quad U_{MQ} = Z_{MQ}I_1 = \dfrac{237,66}{2\pi} = 37,84V$

b) Déphasage entre i et u.

$$\tan\varphi = \frac{L_1\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R'} \; or \; L_1\omega = 40\pi \; et \; \frac{1}{C\omega} = \frac{U_{PQ}}{I_1} = 80\pi$$

D'où $\quad \tan\varphi = \dfrac{40\pi - 80\pi}{200} = \dfrac{-\pi}{5} = -0,628 \Rightarrow \varphi = -32°\,8'$

2. a) Si i est en phase avec u, $\tan\varphi = 0$ et $L_o\omega = \dfrac{1}{C\omega}$ (résonance)

Donc : $\quad L_o = \dfrac{1}{C\omega^2} = \dfrac{1}{C\omega}.\dfrac{1}{\omega} = \dfrac{80\pi}{100\pi} = 0,8H$

b) Calcul de l'intensité.

A la résonance Z = R'. Donc $U_{MQ} = R'I_0$

$$I_o = \frac{U_{MQ}}{R'}$$

AN : Si $R_1^{'} = 200\Omega$ $\quad I_o = \frac{37,84}{200} = 0,198A$

Si $R_2^{'} = 10\Omega$ $\quad I_o = \frac{37,84}{10} = 3,784A$

3. $R' = 200\Omega$ $\quad I_1 = \frac{1}{2\pi}A$

a) Pour un circuit R', L, C : $Z^2 = R'^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$

$$Z^2 - R'^2 = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

Equation admettant deux solutions

$$\begin{cases} L_1\omega - \dfrac{1}{C\omega} = +\sqrt{Z^2 - R'^2} \\ L_2\omega - \dfrac{1}{C\omega} = -\sqrt{Z^2 - R'^2} \end{cases} \Rightarrow \quad (L_1 + L_2)\omega - \frac{2}{C\omega} = 0$$

D'où $\quad L_1 + L_2 = \frac{2}{C\omega^2} \quad$ avec $\quad L_1 + L_2 = 2L_o$

b) Calcul de L_2 pour $L_1 = 0,4$ H

$$L_2 = \frac{2}{C\omega^2} - L_1 = \frac{2\times 80\pi}{100\pi} - 0,4 = 1,2H \qquad L_2 = 1,2H$$

4. $R' = 10\Omega$

a) L'impédance du circuit est $Z = \sqrt{R'^2 + \left(L_1\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

$$Z = \sqrt{100 + (40\pi - 225)^2} = 129,72\Omega$$

$$Z \simeq 130\Omega$$

b) Calcul de l'intensité.

A la résonance Z = R'. Donc $U_{MQ} = R'I_0$

$$I_o = \frac{U_{MQ}}{R'}$$

AN : Si $R_1' = 200\Omega$ $\qquad I_o = \frac{37,84}{200} = 0,198A$

Si $R_2' = 10\Omega$ $\qquad I_o = \frac{37,84}{10} = 3,784A$

3. $R' = 200\Omega$ $\qquad I_1 = \frac{1}{2\pi}A$

a) Pour un circuit R', L, C : $Z^2 = R'^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$

$$Z^2 - R'^2 = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

Equation admettant deux solutions

$$\begin{cases} L_1\omega - \dfrac{1}{C\omega} = +\sqrt{Z^2 - R'^2} \\ L_2\omega - \dfrac{1}{C\omega} = -\sqrt{Z^2 - R'^2} \end{cases} \Rightarrow \left(L_1 + L_2\right)\omega - \frac{2}{C\omega} = 0$$

D'où $L_1 + L_2 = \frac{2}{C\omega^2}$ avec $L_1 + L_2 = 2L_o$

b) Calcul de L_2 pour L_1 = 0,4 H

$$L_2 = \frac{2}{C\omega^2} - L_1 = \frac{2 \times 80\pi}{100\pi} - 0,4 = 1,2H \qquad L_2 = 1,2H$$

4. $R' = 10\Omega$

a) L'impédance du circuit est $Z = \sqrt{R'^2 + \left(L_1\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

$$Z = \sqrt{100 + \left(40\pi - 225\right)^2} = 129,72\Omega$$

$$Z \simeq 130\Omega$$

$$U_{MQ} = ZI \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U_{MQ}}{Z} \qquad I = \frac{37,84}{130} = 0,29A$$

b) Pour compléter le tableau on utilise la relation.

$L_1 + L_2 = 2L_o \quad \Rightarrow \quad L = 1,6 - L_1$ ainsi que $I(L_1) = I(L_2)$

L (H)	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
I (A)	0,29	0,38	0,56	1,02	3,78	1,02	0,56	0,38	0,29

Tracé de $I = f(L)$ (Voir papier millimétré : figure à la page suivante)