CORRIGE ET BAREME

CORRIGE	BAREME

Exercice 1 *2 points*

1. VRAI ; 2. FAUX ; 3. FAUX ; 4. VRAI $\longrightarrow$ — *0,5pts × 4*

Exercice 2 *2 points*

1. B 2. B 3. C 4. C $\longrightarrow$ — *0,5pts × 4*

Exercice 5 *5 points*

__Partie A__ : *g dérivable sur $]1;+\infty[$ et définie par* $g(x)=4x\sqrt{x-1}-1$

1. ***Démontrons que g est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.*** $\longrightarrow$ — *0,5pts*

   g est dérivable sur $]1;+\infty[$ et, pour tout $x\in]1;+\infty[$, $g'(x)=4\left(\sqrt{x-1}+\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}\right)>0$.

   __*Conclusion*__ : $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur }]1;+\infty[.}$

2. ***Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans $]1,05;1,06[$.*** $\longrightarrow$ — *0,5pts*

   $g(1,05)=-0,06$ et $g(1,06)=0,04$. La fonction g est continue et strictement croissante sur $]1;+\infty[$, en particulier sur $[1,05;1,06]$. De plus, $g(1,05)\times g(1,06)<0$.

   __*Conclusion*__ : $\boxed{\text{l'équation } g(x)=0 \text{ admet une unique solution dans }]1,05;1,06[.}$

3. ***Justifions que : $\forall x\in]1;\alpha[$, $g(x)<0$ et $\forall x\in]\alpha;+\infty[$, $g(x)>0$.*** $\longrightarrow$ — *0,5pts*

   g est continue et strictement croissante sur $]1;+\infty[$, et $g(\alpha)=0$, donc :
   - Pour tout $x\in]1;\alpha[$, on a $x<\alpha$, donc $g(x)<g(\alpha)$; c'est-à-dire $g(x)<0$.
   - Pour tout $x\in]\alpha;+\infty[$, on a $x>\alpha$, donc $g(x)>g(\alpha)$; c'est-à-dire $g(x)>0$.

   __*Conclusion*__ : $\boxed{\forall x\in]1;\alpha[,\ g(x)<0 \text{ et } \forall x\in]\alpha;+\infty[,\ g(x)>0.}$

__Partie B__ : *Etude de la fonction f défini sur $[1;+\infty[$ par* $f(x)=x^2-\sqrt{x-1}$.

1. ***Calculons la limite de f en $+\infty$ et celle $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.*** $\longrightarrow$ — *0,25pts × 2*

   Pour tout $x\geq 1$:
   - $f(x)=x^2\left(1-\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2}\right)=x^2\left(1-\sqrt{\dfrac{x-1}{x^4}}\right)=x^2\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}}\right)$, donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$
   - $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x^2-\sqrt{x-1}}{x}=x-\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}=x-\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2}}=x-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty}$

   __*Inter-Graph*__ $\boxed{(\mathscr{C}_f) \text{ admet une branche parabolique de direction celle de } (OJ) \text{ en } +\infty}$ — *0,25pts*

2. ***Etude de la dérivabilité de f en 1*** $\longrightarrow$ — *0,5pts*

   Pour tout $x\geq 1$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=4x\times\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{x-1}$, donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty}$

   __*Conclusion*__ : $\boxed{f \text{ n'est dérivable en } 1}$

   __*Inter-Graph*__ $\boxed{(\mathscr{C}_f) \text{ admet une tangente verticale au point d'abscisse } 1}$ — *0,25pts*

3. *On admet que f est dérivable sur $]1;+\infty[$.*

a) *Justifions que pour tout x élément de $]1;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2\sqrt{x-1}}$.* ————→ **0,25pts**

Pour tout $x>1$, $f'(x)=2x-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{4x\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}}$, donc $\boxed{f'(x)=\dfrac{g(x)}{2\sqrt{x-1}}}$

b) *Etudions les variations de f* ————→ **0,5pts**

Pour tout $x>1$, on a $2\sqrt{x-1}>0$, donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

Ainsi : $\forall x\in]1;\alpha[$, $f'(x)<0$ *et* $\forall x\in]\alpha;+\infty[$, $f'(x)>0$.

Conclusion : ***f est strictement décroissante sur $]1;\alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$***

Tableau de variation de f. ————→ **0,25pts**

x	1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. ***Démontrons que $f(\alpha)=\dfrac{4\alpha^3-1}{4\alpha}$.*** ————→ **0,25pts**

On a : $f(x)=x^2-\sqrt{x-1}$, donc naturellement $f(\alpha)=\alpha^2-\sqrt{\alpha-1}$.

Or $g(\alpha)=4\alpha\sqrt{\alpha-1}-1=0$, d'où : $\sqrt{\alpha-1}=\dfrac{1}{4\alpha}$. Ainsi : $\boxed{f(\alpha)=\alpha^2-\dfrac{1}{4\alpha}=\dfrac{4\alpha^3-1}{4\alpha}}$

5. **a) *Justifions que h est une bijection*** ————→ **0,25pts**

h est continue et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$, avec $h([\alpha;+\infty[)=[f(\alpha);+\infty[$

Conclusion : ***h est une bijection de $[\alpha;+\infty[$ sur $K=[f(\alpha);+\infty[$***

b) *Calculons $h(2)$.* ————→ **0,25pts**

$h(2)=f(2)=2^2-\sqrt{2-1}=4-1=3$; $\boxed{h(2)=3}$

c) *Justifions que h^{-1} est dérivable en 3 puis calcule $\left(h^{-1}\right)'(3)$.* ————→ **0,5pts**

h est dérivable en $h(2)$ et $h'(2)=\dfrac{g(2)}{2}=7\neq 0$, donc h^{-1} est dérivable en $h(2)$,

donc en 3. Et on a : $\left(h^{-1}\right)'(3)=\dfrac{1}{h'\left[h^{-1}(3)\right]}=\dfrac{1}{h'(2)}=\dfrac{1}{7}$; $\boxed{\left(h^{-1}\right)'(3)=\dfrac{1}{7}}$

Exercice 4 — 4 points

Dans l'association :

- $1/4$ des femmes adhèrent à la section handball, donc $p_F(B)=1/4$
- $1/3$ des hommes adhèrent à la section handball, donc $p_{\overline{F}}(B)=1/3$
- 30% des membres adhèrent à la section handball, soit $p(B)=3/10$

Partie A

1. *a)* ***Démontrons que*** $p(F)=\frac{2}{5}$. ⟶ **0,5pts**

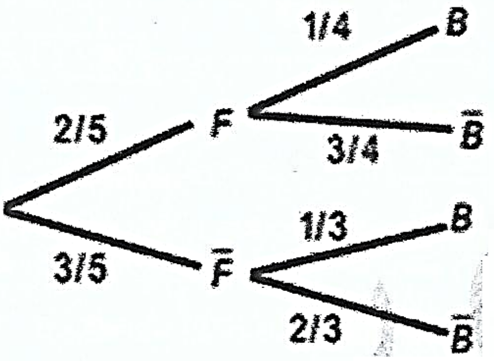
On a : $p(B)=p(F\cap B)+p(\overline{F}\cap B)$

$p(B)=p(F)\times p_F(B)+p(\overline{F})\times p_{\overline{F}}(B)$.

Soit $p(F)=x$, on a : $p(\overline{F})=1-x$; D'où l'égalité : $\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}(1-x)=\frac{3}{10}$,

soit $x=\frac{12}{30}=\frac{6\times2}{6\times5}$; ainsi $\boxed{x=p(F)=\frac{2}{5}}$

b) ***Déduisons-en l'arbre de probabilité traduisant cette situation.*** ⟶ **0,5pts**



2. Il s'agit de calculer $p_B(F)$

On a : $\boxed{p_B(F)=\frac{p(F\cap B)}{p(B)}}$ ⟶ **0,5pts**

Soit : $p_B(F)=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{10}}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{10}{3}=\frac{1}{3}$; donc $\boxed{p_B(F)=\frac{1}{3}}$ ⟶ **0,5pts**

Partie B

1. ***Justifie que la probabilité de l'évènement*** G ***est*** $\frac{2}{33}$.

Soit Ω, l'univers associé ; $Card(\Omega)=C_{100}^{2}=4950$.

$Card(G)=C_{25}^{2}=3000$, donc : $\boxed{p(G)=\frac{card(G)}{card(\Omega)}=\frac{300}{4950}=\frac{2}{33}}$ ⟶ **0,5pts**

2. ***Déterminons la loi de probabilité de*** X.
   - Les valeurs prises par X sont : -500 ; 1500 et 3500 ⟶ **0,25 pts**
     - $p(X=-500)=\frac{C_{75}^{2}}{C_{100}^{2}}=\frac{2775}{4950}=\frac{37}{66}$; $\boxed{p(X=-500)=\frac{37}{66}}$
     - $p(X=1500)=\frac{C_{25}^{1}\times C_{75}^{1}}{C_{100}^{2}}=\frac{1875}{4950}=\frac{25}{66}$; $\boxed{p(X=1500)=\frac{25}{66}}$ ⟶ **0,5pts**
     - $p(X=3500)=\frac{C_{25}^{2}}{C_{100}^{2}}=\frac{300}{4950}=\frac{2}{33}=\frac{4}{66}$; $\boxed{p(X=3500)=\frac{2}{33}}$

- La loi de probabilité de X : ---→

$X = x_i$	-500	1500	3500
$p(X = x_i)$	$37/66$	$25/66$	$2/33$

3. Justifions qu'en moyenne, chaque joueur gagne 500 francs.

Il s'agit de montrer que $E(X) = 500$.

$$\boxed{E(X) = \sum_i x_i p(X = x_i)}$$

$$E(X) = -500 \times \frac{37}{66} + 1500 \times \frac{25}{66} + 3500 \times \frac{4}{66} \ ;$$

$$E(X) = \frac{-500 \times 37 + 1500 \times 25 + 3500 \times 4}{66} = \frac{33000}{66}$$

$\boxed{E(X) = 500}$ ——————————————————————————→ ***0,5pts***

EXERCICE3 **3 points**

1. Déterminons Df

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

2- Justifions que (C) admet deux asymptotes

* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$, donc (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$ en $-\infty$

* $\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = -\infty$, donc (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

3- Démontrons que (C) admet une branche parabolique dont on précisera

0,5pts x 4

on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ donc (C) admet une branche parabolique de direction (OI) en $+\infty$.

4- Déterminons les images des intervalles suivants

$f(]-\infty ; 1]) =]-2 ; -1]$; $f([1 ; 2[) =]-\infty ; -1]$

$f(]2 ; +\infty[) =]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$.

5-

Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

f est continue et strictement croissante sur $]2;+\infty[$ et $f(]2;+\infty[) = \mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution α dans $]2;+\infty[$

6- Demontrons que $\forall x \in]-\infty;2[\cup]2;\alpha[$, $f(x)<0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[$, $f(x)>0$

on a $\forall x \in]-\infty;2[\cup]2;\alpha[$, $x<\alpha \Leftrightarrow f(x)<f(\alpha)$
or $f(\alpha)=0$ donc $f(x)<0$

$\forall x \in]\alpha;+\infty[$; $x>\alpha \Leftrightarrow f(x)>f(\alpha)$ or $f(\alpha)=0$
donc $f(x)>0$

EXERCICE 6 **5 pts**

Solution :

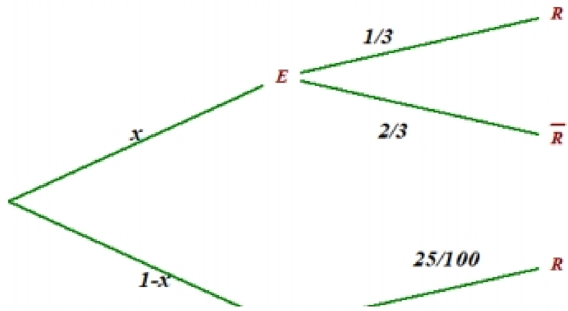
- ✓ Pour répondre à la préoccupation de Dago, je vais utiliser les probabilités.
- ✓ J'utilise les probabilités conditionnelles et la formule des probabilités totales

Modélisation du problème :

- E l'événement « l'élève choisi est en classe de terminale D » ;
- R l'événement « l'élève choisi aime jouer au damier » ;
- P(E) la probabilité de l'événement E.

*Je traduis cette situation par un arbre de probabilités ;
*Je détermine p(E).

Pour ce faire, posons $x = P(E)$



On a les probabilités suivantes :
$P(\bar{E})$=1-x ; P_E(R)= $\frac{1}{3}$; $P_E(\bar{R})$= $\frac{2}{3}$; $P_{\bar{E}}$(R)= $\frac{25}{100}$ et $P_{\bar{E}}(\bar{R})$= $\frac{75}{100}$.
En utilisant la formule des probabilités totales, on a :
$P(R) = P(R \cap E) + P(R \cap \bar{E})$; comme $(R) = \frac{3}{10}$,
alors $\frac{3}{10} = \frac{1}{3}x + \frac{25}{100}(1-x)$ d'où $x= \frac{3}{5}$.
Donc finalement p(E)= $\frac{3}{5}$
Je réponds à la préoccupation de Dago
la proportion des élèves de la de terminale D est 60 %.