COMPOSITIONS GÉNÉRALES

SESSION : DÉCEMBRE 2023

UP -13

MATHÉMATIQUES

Année Scolaire : 2023-2024
Durée : 4 H
Coefficient : 4
CE. MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte trois (3) pages numérotées 1/3 ,2/3 et 3/3
Chaque candidat recevra une (1) feuille de papier millimétré.
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées

EXERCICE 1 (2 points)

Écris, sur ta feuille de copie , le numéro de chaque proposition du tableau suivi de **Vrai** si la proposition est vrai ou **Faux** si la proposition est fausse .

Nº	Propositions
1.	La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
2.	Soit f une fonction numérique définie et deux fois(2) dérivables sur un intervalle contenant un nombre réel x_o. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O,I,J})$. a et b sont deux nombres réels ,tels que : $a < b$. On note f' et f'' les dérivées première et seconde respectives de f Si $f''(x_0) = 0$, alors (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse x_o.
3.	Toute fonction continue sur un intervalle k admet des primitives sur l'intervalle k .
4.	Si $\forall x \in [a\,;b],\, \lvert f'(x)\rvert \leq \mathrm{m}$, alors $\lvert f(\mathrm{a}) - f(\mathrm{b})\rvert \leq \mathrm{m(b-a)}$, $(\mathrm{m} \in \mathbb{R})$

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chaque énoncé du tableau ci -dessous, les informations des colonnes A, B et C permettent d'obtenir trois affirmations dont une seule est vraie.
Ecris, sur ta feuille d**e** copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la colonne qui donne l'affirmation vraie.

Nº	Énonces	A	B	C
1.	$\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(2x^2 + \frac{\pi}{3}\right)$ est égale à.....	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$
2.	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos x - x\sin x$ est la fonction...	$x \mapsto x\cos x$	$x \mapsto \sin x - \cos x$	$x \mapsto -x\cos x$
3.	Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle k telle que : $\forall x \in k, f'(x) > 0$. f est une bijection de k vers $f(k)$. $\forall a \in (f^{-1})'(a)$ est égal …….	$\frac{1}{f'(a)}$	$\frac{1}{f'[f^{-1}(a)]}$	$\frac{-1}{f^{-1}(a)}$
4.	L 'ensemble des solutions de l'inéquation : $x \in \mathbb{R}, \ln(1-x) < 3$ est :	$]e^3 - 1\,;+\infty[$	$]-e^3 + 1\,;\,1[$	$]-\infty\,;\,e^3 - 1[$

BONNE FÊTE DE NOEL ET NOUVEL AN

EXERCICE 3 **(3 points)**

Soit la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que : $h(x) = x\sqrt{1-2x}$

1- Détermine l'ensemble de définition D_h de h

2- Justifie que la fonction H définie par : $H(x) = \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{15}x - \frac{1}{15}\right)\sqrt{1-2x}$ est une primitive de h sur son en ensemble de définition

3- Déduis-en la primitive de h qui prend la valeur 1 en 0

EXERCICE 4 **(4 points)**

Les deux parties I et II de cet exercice sont indépendantes.

I. En vue de sélectionner des joueurs pour la Coupe d'Afrique des Nation (CAN) 2024, la fédération nationale met à la disposition de l'entraîneur un certain nombre de joueurs évoluant au pays et hors du pays .

Parmi eux , il y a des joueurs professionnels et des joueurs non professionnels.

Ces joueurs se répartissent comme suit :

- 65% des joueurs évoluent au pays ;
- 56% des joueurs évoluant au pays sont professionnels ;
- 80% des joueurs évoluant hors du pays sont professionnels .

On choisit au hasard un joueur pour subir un test antidopage .

On désigne par l'événement **A** « le joueur choisi évolue au pays »

On désigne par l'événement **B** « le joueur choisi est professionnel »

On désigne par l'événement **C** « le joueur choisi évolue au pays et est professionnels »

1. a- Traduis l'énonce par un arbre de probabilité

b- Donne $P_A(B)$, la probabilité de de B sachant A

c- Démontre que la probabilité de C est égale à $0{,}364$

2. Calcule la probabilité de B .

II. Un entraîneur doit sélectionner des joueurs parmi ceux mis à sa disposition. Pour ce faire, il soumet d'abord chaque joueur à un test qui consiste à faire trois (3) tirs au but successifs à partir du point de penalty.

Est retenu à l'issue de ce premier test, tout joueur qui réussit au moins de deux ses trois tirs.

On suppose que les tirs sont indépendants les uns des autres et que la probabilité qu'un joueur donné réussisse un tir est égale à $\frac{3}{4}$

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs réussis par un joueur donné à l'issue de l'épreuve de trois (3) tirs au but successifs.
   a. Détermine les valeurs prises par X .
   b. Détermine la loi de probabilité de X .
2. Calcule l'espérance mathématique de X .
3. Démontre que la probabilité qu'un joueur donné soit retenu est égale à $\frac{27}{32}$

BONNE FÊTE DE NOEL ET NOUVEL AN

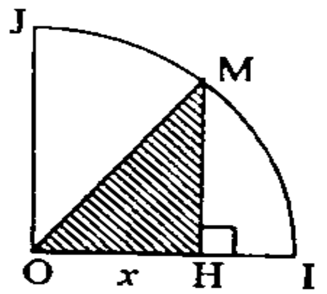
EXERCICE 5 **(4 points)**

Soit la fonction numérique f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = 1 + x - x\ln x \ ,si\ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .
L'unité graphique est 2cm

1. a) Justifie que f est continue en 0.
   b) Justifie que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$
   c) Interprète graphiquement le résultat de 1.b).
2. On admet que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$
   Interprète graphiquement ces résultats.
3. On suppose que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
   a) Justifie que : $\forall x \in\ ]0\,;\,+\infty[\,, f'(x) = -\ln x$
   b) Etudie les variations de f .
   c) Dresse le tableau de variation de f
4. a) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0;\,+\infty[$
   b) Justifie que : $3{,}5 < \alpha < 3{,}6$
5. a) Démontre que la fonction $G\colon \mapsto \frac{x^2}{2}\left(lnx - \frac{1}{2}\right)$ est une primitive de la fonction $g\colon \mapsto xlnx$ sur $]\,0;\,+\infty[$
   b) En déduire une primitive F de f sur $]\,0;\,+\infty[$
6. Trace $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère (O, I, J). (**On prendra : $\boldsymbol{\alpha = 3{,}5}$**)

EXERCICE 6 **(5 points)**



Une coopérative agricole possède un terrain qui forme d'un quart de disque de rayon 1Km représenté par la figure ci-contre qui n'est en grandeurs réelles . Elle veut partager son terrain en trois parcelles pour y cultiver respectivement des tomates, des aubergines et des patates. La parcelle hachurée est réservée à la culture des tomates.

La coopérative souhaite que l'aire de cette parcelle soit maximale.

L'agent de l'agriculture chargé de la mise en valeur de ces trois parcelles informe la coopérative que l'aire de la partie réservée à la culture des tomates est égale $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$, où $x = OH$ et $x \in [0\,;1]$.

Le gérant de la coopérative ne sachant comment déterminer l'aire maximale, te sollicite.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de la coopérative

BONNE FÊTE DE NOEL ET NOUVEL AN

CORRIGE	BAREME

EXERCICE 1 **(2 points)**

1-Vrai ; 2-Faux ; 3-Vrai ; 4-Faux ------------→ $\boldsymbol{4 \times 0,5\ pts}$

EXERCICE 2 **(2 points)**

1-C ; 2-A ; 3-B , 4-B ------------→ $\boldsymbol{4 \times 0,5\ pts}$

EXERCICE 3 **(3 points)**

1-Déterminons l'ensemble de définition D_h de h

$D_h = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right]$ ------------→ $\boldsymbol{0,5\ pt}$

2-Justification correcte ------------→ $\boldsymbol{1\ pt}$

$\forall x \in \left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right]$, $H'(x) = h(x)$

3- Déduisons la primitive de h qui prend la valeur 1 en 0

- Détermination de C

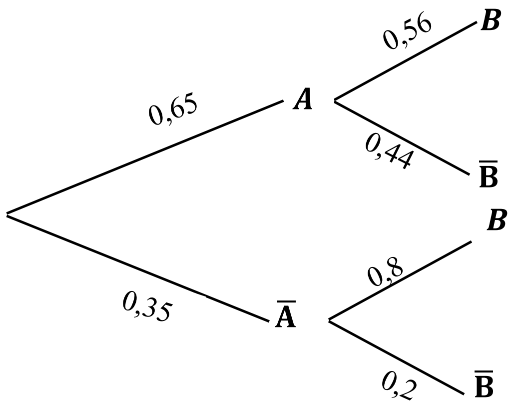
$H(0) = 1 \Leftrightarrow C = \dfrac{1}{15}$ ------------→ $\boldsymbol{0,5\ pt}$

- $H(x) = \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{15}x - \frac{1}{15}\right)\sqrt{1-2x} + \frac{1}{15}$ ------------→ $\boldsymbol{1\ pt}$

EXERCICE 4 **(4 points)**

Partie :I

1- a) Dressons un arbre pondéré qui présente la situation.



------------→ $\boldsymbol{1\ pt}$

b) $P_A(B) = \boldsymbol{0,56}$ ------------→ $\boldsymbol{0,25\ pt}$

c) $P(C) = P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

$P(C) = \boldsymbol{0,364}$ ------------→ $\boldsymbol{0,25\ pt}$

2- Calculons la probabilité de B

$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

$P(C) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$

$P(C) = 0,65 \times 0,56 + 0,35 \times 0,8$

$P(C) = 0,364 + 0,28 = \mathbf{0,644}$ --→ $\mathbf{0,25}\ \boldsymbol{pt}$

<u>Partie</u> :II

1- a) Les valeurs prises par X .

$X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ;\}$ --→ $\mathbf{0,25}\ \boldsymbol{pt}$

b) Déterminons la loi de probabilité de X.

k	0	1	2	3	Total
$P(X = k)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	1

------------------------→ $\mathbf{1}\ \boldsymbol{pt}$

2- Calculons l'espérance mathématique

$E(X) = \frac{9}{4}$ Justification correcte --→ $\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt}$

3- Démontrons que la probabilité qu'un joueur donné soit retenu est égale à $\frac{27}{32}$

$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3)$

$P(X \geq 2) = \frac{27}{64} + \frac{27}{64} = \frac{27}{32}$ --→ $\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt}$

EXERCICE 5 **(4 points)**

1.a) Justifions que f est continue en 0.

On a : $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 1$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x \ln x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} (1 + x) = 1 \end{cases}$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0. $\dashrightarrow$ $\mathbf{0,25\ pt}$

b) Justification correcte $\dashrightarrow$ $\mathbf{0,25\ pt}$

c) Interprétons graphiquement le résultat de 1.b).

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ donc la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente au point d'abscisse 0. $\dashrightarrow$ $\mathbf{0,25\ pt}$

2. <u>Interprétation graphique des résultats.</u>

la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ) $\dashrightarrow$ $\mathbf{0,25\ pt}$

3. a) Justification correcte $\dashrightarrow$ $\mathbf{0,25\ pt}$

b) Etudions les variations de f .

- f est strictement croissante sur $]0\,;1[$
- f est strictement décroissante sur $]\,1\,;+\infty\,[$

$\dashrightarrow$ $\mathbf{0,25\ pt}$

c) Dressons le tableau de variation de f

$f(1) = 1 + 1 - 1 \times \ln 1 = 2$

x	**0**		**1**		$+\infty$
$f'(x)$		+		1	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\boxed{2}$	$\searrow$	$-\infty$

$\dashrightarrow$ $\mathbf{0,5\ pt}$

4-a) Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0;\ +\infty[$

- f est continue et strictement croissante sur $[0;\ 1[$.De plus $f([0;\ 1[) = [1; 2[$ et $0 \notin [1; 2[$.
  Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution n'admet pas de solution dans$[0;\ 1[$.
- f est continue et strictement décroissante sur$]1; +\infty\ [$.
  De plus $f(]1; +\infty\ [) =]-\infty; 2\ [$ et $0 \in]-\infty; 2\ [$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution admet une solution unique dans$]1; +\infty$ [.

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une solution admet une solution unique dans $[0;\ +\infty[$. $\mathbf{0,25\ pt}$

b) Justifions que : $3,5 < \alpha < 3,6$

f est continue et strictement décroissante sur$]1; +\infty$ [en particulier sur $]3{,}5; 3{,}6\ [$

$f(3{,}5) = 0{,}115$ et $f(3{,}6) = -0{,}011$

Comme $f(3{,}5) \times g(3{,}6) < 0$ donc **: $3,5 < \alpha < 3,6$** $\dashrightarrow$ $\mathbf{0,25\ pt}$

BONNE FÊTE DE NOEL ET NOUVEL AN

5- a) Démontrons que la fonction H : $\mapsto \frac{x^2}{2}\left(\boldsymbol{lnx}-\frac{1}{2}\right)$ **est une primitive de la fonction h :** $\mapsto \boldsymbol{xlnx}$ **sur** $]\,\mathbf{0}\,;\,+\infty[$

$\forall x \in]\,0\,;\,+\infty[$, $G'(x) = g(x)$

Donc G est une primitive de g sur $]\,0\,;\,+\infty[$ --> $\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt}$

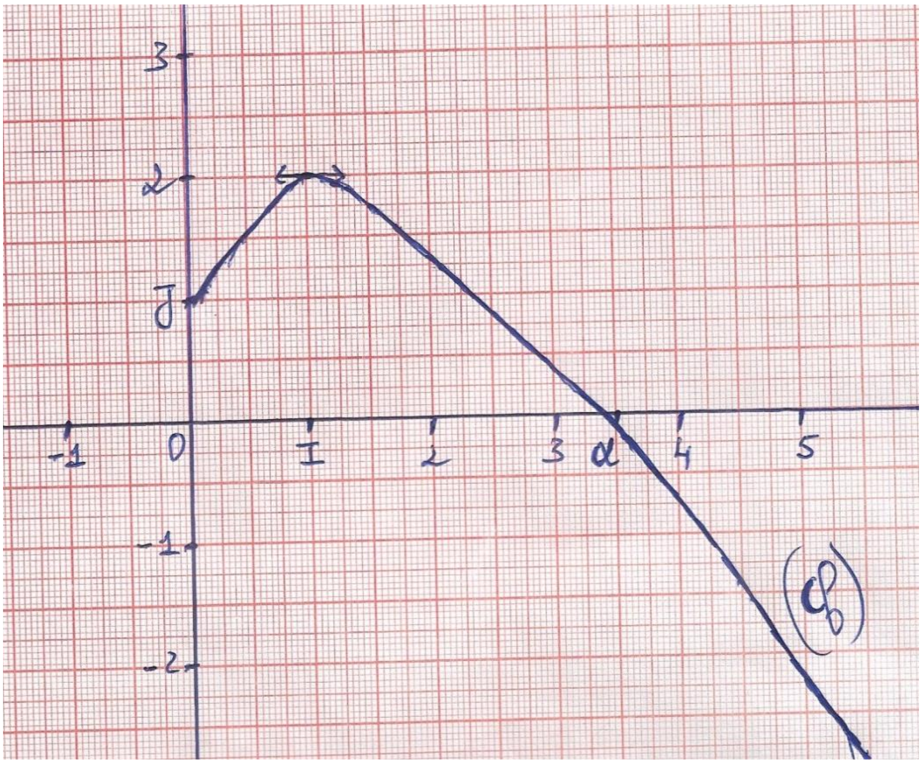
b) Déduisons une primitive F de f sur $]\,\mathbf{0};\,+\infty[$

On a : $f(x) = 1 + x - h(x)$

Donc une primitive de F de f sur $]\,0;\,+\infty[$ est de la forme : $F(x) = x + \frac{3}{4}x^2 - H(x)$

donc : $\boldsymbol{F(x) = x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{x^2}{2}lnx}$ --> $\mathbf{0,25}\ \boldsymbol{pt}$

6- Traçons la courbe $(\mathcal{C}_f)$ --> $\mathbf{0,75}\ \boldsymbol{pt}$



BONNE FÊTE DE NOEL ET NOUVEL AN

<table>
<tr><th>CORRIGE</th><th>Exercice 6 (5 points)</th><th>BAREME</th></tr>
<tr><th>Critères</th><th>Indicateurs</th><th></th></tr>
<tr><td>CM1

Pertinence</td><td>Pour répondre à cette préoccupation nous allons utiliser les notions de dérivabilité et étude de fonction.
Pour ce faire nous allons :
• Définir la fonction f associée à l'aire ;
• Calculer la dérivée de la fonction f ;
- déterminer le signe de la dérivée de la fonction f ;
- étudier le sens de variation de la fonction f ;
- dresser le tableau de variation de la fonction
• déterminer le maximum de la fonction f puis conclure</td><td>$(\mathbf{0,75}\ \boldsymbol{pt})$

$\mathbf{1}\boldsymbol{ind}/\ \mathbf{3} \to \mathbf{0,5}$

$\mathbf{2}\boldsymbol{ind}/\ \mathbf{3} \to \mathbf{0,55}$</td></tr>
<tr><td>CM2
Utilisation correcte des outils mathématique</td><td>• <u>Définissons la fonction f associée à l'aire</u>
$\forall\, x \in [0\,;1]$, $f(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$
• <u>Calculons la dérivée de f</u>
- $\forall\, x \in [0\,;1]$, $f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$
• <u>Etudions le signe de la dérivée</u>
- $\forall\, x \in [0\,;1]$, $2\sqrt{1-x^2} \geq 0$ donc le signe $f'(x)$ de est celui de $1-2x$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-2x = 0 \Leftrightarrow$ $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
Or $-\frac{\sqrt{2}}{2} \notin [0\,;1]$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \in [0\,;1]$
<u>Tableau de signe de $f'(x)$sur</u> $[0\,;1]$
$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & 6 \\ \hline f'(x) & & + & \vert & - & \end{array}$
Ainsi : $\forall\, x \in \left]0\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, $f'(x) > 0$ et
$\forall\ x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;1\right[$, $f'(x) < 0$

• <u>Etudions le sens de variations de f</u>
- f est strictement croissante sur$\left]0\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$
• f est strictement décroissante sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;1\right[$
• <u>Dressons le tableau de variation de f.</u>
-
$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & \frac{\sqrt{2}}{2} & & 1 \\ \hline f'(x) & & - & \vert & + & \\ \hline f\,(x) & & & \frac{1}{4} & & \\ & & \nearrow & & \nwarrow & \\ & 0 & & & & 0 \end{array}$
• Déterminons le maximum de f
f ademet $\frac{1}{4}$ comme maximum de f sur $[0\,;1]$ donc 'aire maximale est $\frac{1}{4}$ km^2</td><td>$(\mathbf{2,5}\boldsymbol{pts})$

$\mathbf{1}\boldsymbol{ind}/\ \mathbf{9} \to \mathbf{1}$
$\mathbf{2}\boldsymbol{ind}/\ \mathbf{9} \to \mathbf{1,5}$
$\mathbf{3}\boldsymbol{ind}/\ \mathbf{9} \to \mathbf{1,75}$
$\mathbf{4}\ \boldsymbol{ind}/\ \mathbf{8} \to \mathbf{2}$
$\mathbf{5}\boldsymbol{ind}/\mathbf{9} \to \mathbf{2,25}$

à partir de
$\mathbf{6}\ \boldsymbol{ind} \to\ \mathbf{2,5}\ \boldsymbol{pts}$</td></tr>
<tr><td>CM3
Cohérence de la réponse</td><td>- La réponse , les résultats des calculs sont conformes à ce qui est attendu
- La réponse, les résultats sont adéquats avec la démarche, les opérations, les calculs
- la qualité des enchainements de la démarche</td><td>$(\mathbf{1,25}\boldsymbol{pt})$
$\mathbf{1}\boldsymbol{ind}/\ \mathbf{3} \to \mathbf{1}$
$\mathbf{2}\boldsymbol{ind}/\ \mathbf{3} \to \mathbf{1,25}$</td></tr>
<tr><td>CP
Critère de perfection-nement</td><td>- Production juste en peu de mots (esprit de synthèse)
- Présence d'une démarche correcte non classique au-delà de la production attendue
- Présence des titres des étapes, d'espacement , absence de rature , de surcharge , de blanco , absence de tâche</td><td>$(\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt})$
$\mathbf{1}\boldsymbol{ind}/\ \mathbf{3} \to \mathbf{0,25}$
$\mathbf{2}\boldsymbol{ind}/\ \mathbf{3} \to \mathbf{0,5}$</td></tr>
</table>

BONNE FËTE DE NOEL ET NOUVEL AN