MATHEMATIQUE

Cette épreuve comporte trois pages (03) pages numérotées 1/3 et 2/3 3/3.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE : 1

Ecris le numéro de chaque affirmation suivie de ***VRAI*** *si l'affirmation est vraie ou de* ***FAUX*** *si l'affirmation est fausse.*

	Affirmations
1	L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est une loi binomiale de paramètres n et p est E(x) = np (1-p)
2	La fonction $\lvert x \rvert$ est dérivable en 0
3	L'équation $x^3 + x - 7 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une seule solution
4	La fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définis par : $h(x) = \frac{8-2x}{\sqrt{x}-2}$ admet un prolongement par continuité en 4

EXERCICE : 2

Pour chacune des propositions suivantes, indique le numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse

	Propositions	***Réponse A***	***Réponse B***	***Réponse C***
1	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$, on a :	$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$	$f'(x) = \frac{-x}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$	$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$
2	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x} =$	0	2	$\frac{1}{2}$
3	Soit g une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et g^{-1} sa bijection réciproque. Si $g(-2) = 3$ et $g'(-2) = \frac{1}{4}$, alors $(g^{-1})'(3)$ est égale à :	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	4
4	Soit la fonction définie sur R $f(x) = (3x+2)(3x^2+4x+7)^3$, la primitive de f qui s'annule en 0 est : $F(x) =$	$\frac{1}{8}(3x^2+4x+7)^4 - \frac{2401}{8}$	$\frac{1}{8}(3x^2+4x+7)^4$	$\frac{1}{2}(3x^2+4x+7)^2$

EXERCICE : 3

On considère la fonction g définie sur $[0 ;\frac{\pi}{4}]$ par $g(x) = tanx$.

g étant dérivable sur $]0 ;\frac{\pi}{4}[$

1- Calcule $g(0)$ puis $g(\frac{\pi}{4})$.
2- Détermine les dérivées première et seconde de g.
3- Justifie que pour tout x élément de $[0 ;\frac{\pi}{4}]$, on a : $1 \leq 1 + tan^2x \leq 2$.
4- En appliquant l'Inégalité des accroissement finis pour tout x élément de $[0 ;\frac{\pi}{4}]$ déduis que :$x \leq tanx \leq 2x$.

EXERCICE : 4

1) Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, dont quatre portent le chiffre 1 et six portent les chiffres 5. On tire simultanément deux boules de l'urne.

   Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A : « tirer deux boules portant chacune le chiffre 1 »
   B : « tirer deux boules portant chacune le chiffre 5 »
   C : « tirer deux boules portant des chiffres différents »

2) On suppose maintenant que l'urne contient a boules portant le chiffre 1 et b boules portant le chiffre 5 avec $a + b = 10$ $(1 \leq a \leq 9)$ et $(1 \leq b \leq 9)$.

Soit X la variable aléatoire égale au total des points marqués sur les deux boules tirées simultanément.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X
b) Détermine l'espérance mathématique E(X) en fonction de a
c) Pour quelles valeurs de a, a-t-on $1 \leq E(X) \leq 9$?

EXERCICE : 5

Partie A

On considère la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = 1 - \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

1- *Calculer les limites de h en 0 et en $+\infty$ puis interpréter les résultats*
2- *a) justifier que* $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
b) Etudier la dérivabilité de h en 1 (on pourra s'aider de l'expression conjuguée du numérateur)

c) Déterminer h '(x) la fonction dérivée de h puis étudier ses variations
d) Dresser le tableau variation et démontrer que l'équation h(x)=0 admet une solution unique $\propto$ sur]0 ; + ∞[

Partie B

On considère une autre fonction définie sur]0 ; + ∞[par : $f(x) = \frac{2x-1}{2} + \frac{1}{3x\sqrt{x}}$

1- *calculer la limite de f en 0 puis interpréter le résultat*
2- *calculer la limite de f en + ∞*
3- *Montrer que* $f'(x) = \frac{1}{2}h(x)$ *et dresser le tableau de variation de f*

EXERCICE : 6

Un entraineur doit sélectionner des joueurs parmi ceux mis à sa disposition. Pour ce faire, il soumet d'abord chaque joueur à un test qui consiste à faire trois tirs au but successif à partir de penalty. Le joueur retenu est celui qui réussit au moins deux de ses trois tirs.

On suppose que les tirs sont indépendants les uns des autres et que la probabilité qu'un joueur donné réussisse un tir est égale a $\frac{3}{4}$

Etant spectateur lors du déroulement de cette épreuve, Bilé et Zady se dispute en disant l'un et l'autre :

- *Bilé : (il y a 84 % de chance qu'un joueur soit retenu à l'issue de ce test)*
- *Zady : (il y a plutôt 75% de chance qu'un joueur soit retenu à l'issue de ce test)*
  Tu es solliciter pour donner la réponse exacte, à l'aide de tes connaissances en mathématiques dis entre Bilé et Zady celui qui a la réponse exacte.

CORRECTION ET BAREME

EXERCICE : 1

1-F ….. , 2-F…… , 3-V….. ,4-V………………………………………………………………………

O, 5 pts / réponses

EXERCICE : 2

1-B ….. , 2-C…… , 3-C….. ,4-A………………………………………………………………………

O, 5 pts / réponses

EXERCICE : 3

1) $g(0) = \tan(0) = 0$ (0,375pts)
$g(\frac{\pi}{4}) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ (0,375pts) } 0,75pts

2) * Dérivées première

$\forall x \in [0;\frac{\pi}{4}]$; $g'(x) = (\tan x)'$

$\boxed{g'(x) = 1 + \tan^2 x}$ (0,375pts)

* Dérivées seconde

$\forall x \in [0;\frac{\pi}{4}]$; $g''(x) = (1+\tan^2 x)'$
$= (1)' + (\tan^2 x)'$
$= 0 + 2(\tan x)'(\tan x)^{2-1}$
$= 2(1+\tan^2 x)\tan x$
$= 2 + 2\tan^2 x \times \tan x$ (0,375pts)

$\boxed{g''(x) = 2 + 2\tan^3 x}$

3) Justifions que $\forall x \in [0;\frac{\pi}{4}]$; $1 \leq 1+\tan^2 x \leq 2$

$\forall x \in [0;\frac{\pi}{4}] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$
$\Leftrightarrow \tan^2(0) \leq \tan^2 x \leq \tan^2(\frac{\pi}{4})$
$\Leftrightarrow 0 \leq \tan^2 x \leq 1$ car $\begin{cases} \tan(0) = 0 \\ \tan(\frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases}$
$\Leftrightarrow 1+0 \leq 1+\tan^2 x \leq 1+1$ (0,75pts)

$\boxed{\forall x \in [0;\frac{\pi}{4}] \Leftrightarrow 1 \leq 1+\tan^2 x \leq 2}$

3 pts

4) on sait que :
$\forall x \in [0;\frac{\pi}{4}]$; $1 \leq 1+\tan^2 x \leq 2$. or $g'(x) = 1+\tan^2 x$
donc $\forall x \in [0;\frac{\pi}{4}]$; $1 \leq g'(x) \leq 2$

• D'après l'inégalité des accroissements finis pour tout élément de $[0;\frac{\pi}{4}]$ on a :

$1(x-0) \leq g(x) - g(0) \leq 2(x-0)$. avec $x > 0$

$x \leq g(x) \leq 2x$ or $g(x) = \tan x$

donc $\boxed{\forall x \in [0;\frac{\pi}{4}];\ x \leq \tan x \leq 2x}$

O, 75 pts

EXERCICE : 4

1	$Card(\Omega) = C_{10}^2 = 45$ $Card(A) = C_4^2 = 6 \quad P(A) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$. $Card(B) = C_6^2 = 15 \quad P(B) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$. $Card(C) = C_6^1 \times C_4^1 = 24 \quad P(C) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$.	0 ,25pts X 3
	a) $a + b = 10$ $(1 \leq a \leq 9)$ et $(1 \leq b \leq 9)$. Loi de probabilité de X Les valeurs prises par X sont : 2 ; 6 et 10. $X = \{2; 6; 10\}$ avec $b = 10 - a$	0 ,25 pts

$$P(X = 2) = \frac{C_a^2}{45} = \frac{a(a-1)}{90}$$

$$P(X = 6) = \frac{C_a^1 \times C_b^1}{45} = \frac{a(10-a)}{45}$$

$$P(X = 10) = \frac{C_b^2}{45} = \frac{(10-a)(9-a)}{90}$$

1pts

x_i	2	6	10
$P(X = x_i)$	$\frac{a(a-1)}{90}$	$\frac{a(10-a)}{45}$	$\frac{(10-a)(9-a)}{90}$

3pts

2 b) Calculons l'espérance mathématique $E(X)$

$$E(X) = \frac{2(a^2 - a) + 6(20a - 2a^2) + 10(90 - 19a + a^2)}{90}$$

0 ,5 pts

$$E(X) = 10 - \frac{4}{5}a.$$

c) $6 < E(X) < 8 \Leftrightarrow 6 < 10 - \frac{4}{5}a < 8 \Leftrightarrow \frac{10}{4} < a < \frac{20}{4}$

$a \in]2{,}5\,;5[$ donc $a \in \{3\,;4\}$. 0 ,5 pts

EXERCICE : 5

5 pts

Partie A.

1/. * $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} (1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} -\frac{1}{x^2\sqrt{x}} = -\infty \end{cases}$ 0,25

*Interprétation

la Courbe de la fonction h admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ en $-\infty$ 0,25

* $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x^2\sqrt{x}} = 0 \end{cases}$ 0,25

*Interprétation

la Courbe de la fonction h admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ 0,25

2/ a/ Justifier $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ 0,25

b/ h est dérivable en 1. 0,5

c) * $h'(x) = \frac{5\sqrt{x}}{2x^4}$ 0,5

* $\forall x \in]0; +\infty[$; $h'(x) > 0$

* h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ 0,25

d) • Tableau de variation

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	$-\infty \nearrow 1$

0,5

• l'équation $h(x) = 0$ 0,25

Partie B

1/ * $\lim_{x \to 0^{>}} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \to 0^{>}} \left(\frac{2x-1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \\ \lim_{x \to 0^{>}} \left(\frac{1}{3x\sqrt{x}}\right) = +\infty \end{cases}$ (0,25)

* Interprétation
la courbe de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ en $+\infty$ (0,25)

2/ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x-1}{2}\right) = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3x\sqrt{x}}\right) = 0 \end{cases}$ (0,25)

3/ - Montrer que $f'(x) = \frac{1}{2} h(x)$ (0,5)

* Tableau de variation

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

(0,5)

Remarque
Se servir du signe de $h(x)$ partie A

EXERCICE : 6

Pour résoudre ce problème, je vais utiliser les probabilités. J'utilise la notion de variable aléatoire et loi binomiale de la manière suivante:

- Modéliser le problème
- J'identifie les paramètres de la loi binomiale liés au problème
- Je détermine la probabilité qu'un joueur donné soit retenu. **1pts**
- Je dis enfin qui de Bilé ou Zady a la réponse exacte.

• Modélisation du problème.
* Soit $P(R)$, la probabilité qu'un joueur donné soit retenu.
* Soit $P(A)$, la probabilité qu'un joueur donné réussisse un tir. **1pts**
* Soit X, la variable aléatoire définie par le nombre de tirs réussit.

• J'identifie les paramètres de la loi binomiale.
Cette situation est un schéma de bernoulli, la variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 3$ et $P = P(A) = \frac{3}{4}$. **1pts**

• Je détermine la probabilité $P(R)$.

$P(R) = P(X \geq 2)$

$\boxed{P(R) = P(X=2) + P(X=3)}$

$$\begin{cases} P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{3-2} = \frac{27}{64} \\ P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{3-3} = \frac{27}{64} \end{cases}$$ **1pts**

donc $P(R) = \frac{27}{32} = 0,84$

• On a donc $P(R) = 0,84$ soit 84% qu'un joueur soit retenu à l'issue de ce test. Bilé a la réponse exacte. **1pts**