(1)

DRENA ABIDJAN 4 — UP 13

COMPOSITION GENERALE — MATHEMATIQUES — DUREE : 3H

SESSION 2024-2025 — NIVEAU : TleA1 — COEFFICIENT : 4

Exercice 1 (2/2)

1 - Vrai → Exemple
2 - Faux → 0,5 pts
3 - Vrai → 0,5 pts
4 - Vrai → 0,5 pts
5 - Faux → 0,5 pts

→ 2 pts

Exercice 2 (2/2)

1 - C → Exemple
2 - B → 0,5 pts
3 - A → 0,5 pts
4 - A → 0,5 pts
5 - B → 0,5 pts

→ 2 pts

Exercice 3 (4/4)

I/ Calcul de limites. → 2/2

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^2 + x - 10) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x^2) = +\infty$ → 1 pt

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 3x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2) = +\infty$ → 1 pt

→ 2 pts

2

II - Détermination d'une primitive. → 2 pts

1) La fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$ est
0,25 Continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine, donc il existe une primitive définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{F(x) = 2 \times \frac{x^2}{2} + x = x^2 + x}$ 0,25

2) La fonction f définie par $f(x) = 10x^4 + 6x^3 - 1$
est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction
0,25 polynôme, donc il existe une primitive définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 10 \times \frac{x^5}{5} + 6 \times \frac{x^4}{4} - x$

$$\boxed{F(x) = 2x^5 + \frac{3}{2}x^4 - x}$$ 0,25

3) La fonction f définie par $f(x) = (x-1)(x+3)$
$= x^2 + 2x - 3$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que
0,25 fonction polynôme, donc il existe une primitive définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2 \times \frac{x^2}{2} - 3x$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x}$$ 0,25

4) La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$ est
Continue sur $\mathbb{R}^* \setminus \{0\}$
0,25 Soit $u(x) = x \longrightarrow u'(x) = 1$
Donc $f = \frac{u'}{u} - u^2$
Une primitive de f sur $\mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ est $\boxed{F(x) = \ln x - \frac{1}{3}x^3}$
0,25

Exercice 4 — 5/5

1 -
a - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x) = +\infty$ 0,5

b - $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left[(x^2 - x - 6) \times \frac{1}{x-1}\right] = -\infty$ Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - x - 6) = -6 \\ \lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1}\right) = +\infty \end{cases}$
0,5

③ 2-

a)- $\forall x \in]1;+\infty[$, f est dérivable dont continue /0,25

et $f'(x) = \left(\dfrac{x^2-x-6}{x-1}\right)'$ /0,25

$$f'(x) = \frac{(x^2-x-6)'(x-1)-(x-1)'(x^2-x-6)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x-6)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x+6}{(x-1)^2}$$

0,5

$$f'(x) = \frac{x^2-2x+7}{(x-1)^2}$$

b) $\forall x \in]1;+\infty[$, $(x-1)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ dépend de x^2-2x+7.

Posons $x^2-2x+7=0$

On a: $x^2-2x+7=0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 7$

$\Delta = 4-28$

$\Delta = -24 < 0$, donc pas de solutions 0,25

$\forall x \in]1;+\infty[$, $x > 0$ et $x^2 > 0$ Donc $x^2-2x+7 > 0$

De plus $(x-1)^2 > 0$ et $x^2-2x+7 > 0$

Donc $\dfrac{x^2-2x+7}{(x-1)^2} > 0$ 0,25

Alors $f'(x) > 0$

c) Sens de variation

$\forall x \in]1;+\infty[$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$. /0,5

Tableau de variation

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

/0,5

Scanné avec CamScanner

④

3 -

a) - On a : $x - \frac{6}{x-1} = \frac{x(x-1) - 6}{x-1}$

$$x - \frac{6}{x-1} = \frac{x^2 - x - 6}{x-1}$$

Or $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 1}$

Alors $\forall x \in]1 ; +\infty[$, $f(x) = x - \frac{6}{x-1}$ 0,25

b) On a : $[f(x) - y] = (x - \frac{6}{x-1} - x) = \frac{-6}{x-1}$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-6}{x-1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-6}{x}\right) = 0$$ 0,25

Comme $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = 0$, alors la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la Courbe (C) en $+\infty$. 0,25

c) On a : $[f(x) - y] = \frac{-6}{x-1}$ Or $\forall x \in]1 ; +\infty[$, $x - 1 > 0$

Donc $\frac{1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{6}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-6}{x-1} > 0$. 0,25

$\forall x \in]1 ; +\infty[$, $[f(x) - y] > 0$, alors (C) est au dessus de la droite (D) sur $]1 ; +\infty[$.

4 -

a) - $f(3) = 3 - \frac{6}{3-1} = 3 - \frac{6}{2} = 3 - 3 = 0$ 0,25

b) - (T) : $y = f'(3)(x - 3) + f(x)$

avec $\begin{cases} f'(3) = \frac{3^2 - 2 \times 3 + 7}{(3-1)^2} = \frac{5}{2} \\ f(3) = 0 \end{cases}$ 0,25

Donc (T) : $y = \frac{5}{2}(x - 3)$

(T) : $y = \frac{5}{2}x - \frac{15}{2}$.

5

Exercice 5 7/7

Partie A → 3pts

1-

a)- Justifions que $P(A) = \frac{2}{35}$.

On a : $P(A) = \frac{C_2^1}{C_7^4}$ → 0,5 pts

$P(A) = \frac{2}{35}$.

b) Justifions que $P(B) = \frac{8}{35}$.

On a : * choisir un jeton jaune parmi les 2 ; 2 façons

* Choisir 3 jetons marqués 2000f parmi les 4 jetons ; $C_4^3 = 4$ façons.

Donc le nombre de possibité est : $2 \times 4 = 8$.

Soit Ω : l'univers. → 0,5pts

Donc $card(\Omega) = C_7^4 = 35$

Ainsi $P(B) = \frac{8}{35}$.

2- Demontrons que $P(C) + P(D) + P(E) = 1$.

les événements C, D et E couvrent tous les cas possibles où un joueur tire 4 jetons

Il est certain qu'un tirage de 4 jetons doit appartenir à l'un de ces trois événements.

0,5pts ←

Alors la somme des probabilités de ces trois (3) événements est égale à 1.

Par conséquent, $P(C) + P(D) + P(E) = 1$.

3-

3-a) Il s'agit de calculer $P(C)$.

Pour les 4 jetons de 2000f, le nombre total de manières d'obtenir 4 jetons de même montant est 1.

⑥ Ainsi $P(C) = \frac{1}{C_8^4} = \frac{1}{70}$

Donc $P(C) = \frac{1}{70}$. → 0,5 pt

b) Il s'agit de calculer $P(D)$

L'événement D consiste à obtenir 4 jetons de 3 montants par les montants disponible (1000f ; 2000f et -5000f)

0,5 pt ← Or il est impossible d'obtenir 4 jetons avec 3 montants distincts car on a seulement 3 montants et on tire 4 jetons.

Donc $P(D) = 0$

c). Il s'agit de calculer $P(E)$.

* choisir 2 jetons marqués 2000f parmi les 4 disponibles : $C_4^2 = 6$ façons

0,5pts ← * Choisir 2 jetons parmi les 3 disponibles : $C_3^2 = 3$.

Donc le nombre total de façons d'obtenir cette combinaison : $6 \times 3 = 18$.

Ainsi le nombre total de façons d'obtenir l'événement E est donc : $12 + 18 = 30$

Alors $P(E) = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$.

Partie B → 4 pts

1. les valeurs prises par X en fonction des

* Le total des 4 jetons marqués 2000f est :

2000f + 2000f + 2000f + 2000f = 8000f

Donc $X = 8000 - S$ } 0,12

* le total des montants marqués sur les jetons dans l'urne est : $1000 + 2000 + 2000 + 2000 + 2000 + 2000 - 5000 - 5000$
$= 2000$

Donc $X = 2000 - S$

* Il y a un jeton marqué 1000 f

Donc $X = 1000 - S$ } 0,12

* le total des montants marqués -5000 ; 1000 et 2000 est : $-5000f - 5000f + 1000f + 2000f = -7000f$.

Donc $X = -7000 - S$ 0,12

Ainsi les valeurs prises par X en fonction de S :

$\Omega = \{-7000 - S ; 1000 - S ; 2000 - S ; 8000 - S\}$ 0,15

2 - a) Justifions que $P(X = 8000 - S) = \frac{1}{14}$

On a : $P(X = 8000 - S) = \frac{C_5^4}{C_8^4} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$ → 0,5

Alors $P(X = 8000 - S) = \frac{1}{14}$.

b) Justifions que $P(X = 1000 - S) = \frac{2}{7}$

0,5 ← On a : $P(X = 1000 - S) = \frac{C_5^1 \times C_4^3}{C_8^4} = \frac{5 \times 4}{70} = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}$

D'où $P(X = 1000 - S) = \frac{2}{7}$.

c) Justifions que $P(X = -7000 - S) = \frac{1}{14}$

On a : $P(X = -7000 - S) = \frac{C_5^4}{C_8^4} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$ → 0,5

D'où $P(X = -7000 - S) = \frac{1}{14}$.

8

3- Déterminons la loi de probabilité de x

On a : $P(x = 8000 - S) = \frac{1}{14}$

$P(x = 1000 - S) = \frac{2}{7}$

$P(x) = -7000 - S) = \frac{1}{14}$

Donc $P(x = 2000 - S) = 1 - \left(\frac{1}{14} + \frac{2}{7} + \frac{1}{14}\right)$

$P(x = 2000 - S) = 1 - \frac{3}{7}$

$P(x = 2000 - S) = \frac{4}{7}$.

0,25

D'où la loi de probabilité de x suivante :

x_i	$-7000-S$	$1000-S$	$2000-S$	$8000-S$
$P(x=x_i)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{14}$

0,25

4- a) Vérifions que $E(x) = 500 - S$

On a : $E(x) = (-7000 - S) \times \frac{1}{14} + (1000 - S) \times \frac{2}{7} + (2000 - S) \times \frac{4}{7}$ 0,25

$+ (8000 - S) \times \frac{1}{14}$

$E(x) = -\frac{7000}{14} - \frac{1}{14}S + \frac{2000}{7} - \frac{2}{7}S + \frac{8000}{7} - \frac{4}{7}S$

$+ \frac{8000}{14} - \frac{1}{14}S$

$E(x) = -\frac{7000}{14} + \frac{2000}{7} + \frac{8000}{7} + \frac{8000}{14} + \left(-\frac{1}{14} - \frac{2}{7} - \frac{4}{7} - \frac{1}{14}\right)S$

$E(x) = \frac{1000}{14} + \frac{10000}{7} + \left(-\frac{2}{14} - \frac{6}{7}\right)S$

$E(x) = 500 - S$. 0,25

D'où $E(x) = 500 - S$.