COMPOSITIONS GENERALES SESSION 2024

NIVEAU : TLE
SERIE : D
DUREE : 04 Heures

MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte 3 page numérotées 1 sur 3 ; 2 sur 3 et 3 sur 3.
Toutes calculatrices scientifique non graphique est autorisée.

EXERCICE 1 (2 points)
Pour chacune des affirmations suivantes, recopie le numéro de la ligne suivi de vrai si l'affirmation est vraie de faux si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	La fonction : $x \to 2 + cos^5 x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \to -5\sin x cos^4 x$
2	Si B et $\bar{B}$ sont deux évènements contraires alors $P(\bar{B}) = -P(B) + 1$
3	Soit f une fonction dérivable sur [0 ; 5] et bijective de [0 ; 5] sur [−1 ; 3] telle que : $f(4) = 2$. Si $f'(4) = 0$, alors f^{-1} est dérivable en 2.
4	f *et* g sont deux fonctions telles que : $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[, f(x) \leq g(x)$ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

EXERCICE 2(2 points)
Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, une seule des affirmations est vraie. Écris sur ta copie le numéro de chaque ligne et la lettre de la colonne permettant d'avoir l'affirmation vraie.

N°	Affirmations	A	B	C
1	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$, on a :	$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$	$f'(x) = \frac{-x}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$	$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$
2	f *et* g sont deux fonctions ; u *et* v et l sont des réels, soit $-\infty$. Si $\lim\limits_{x\to u} f(x) = v$ et $\lim\limits_{x\to v} g(x) = l$, alors	$\lim\limits_{x\to v}(fog)(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to u}(gof)(x) = l$	$\lim\limits_{x\to u}(gof)(x) = v$
3	Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$, alors	(C_f) admet une demi-tangente horizontale	(C_f) admet une asymptote en $+\infty$.	(C_f) admet une demi-tangente verticale
4	Soient A et B deux événements indépendants de probabilités non nulles, alors	$P(A \cup B) = P(A) \times P(B)$	$A \cap B = \emptyset$	$P_A(B) = P(B)$

EXERCICE 3(3 points)
Soit la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x-1)^2}$.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. Détermine les réels a, b *et* c tels que pour $x \in D_f, f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$.

3. Détermine les primitives de f sur $]1\ ;\ +\infty[$.
4. Détermine la primitive de f sur $]1\ ;\ +\infty[$ qui s'annule en 3.

EXERCICE 4(3 points)

Mariam, une jeune diplômée sans emploi, a reçu un fond et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constate que :

- Pour un jour donné, la probabilité qu'il y ait une affluence de clients est 0,6 ;
- Lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,7 ;
- Lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,4.

On désigne par A l'événement « il y a affluence de clients » et B l'événement « Mariam réalise un bénéfice ».

1. On choisit un jour au hasard.
   a) Calcule la probabilité de l'événement E suivant : « il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ».
   b) Démontre que la probabilité P(B) de l'événement B est 0,58.
   c) Mariam a réalisé un bénéfice. Calculer la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là. On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat.
2. Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs données. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les 3 jours.
   a) Détermine les valeurs prises par X.
   b) Détermine la loi de probabilité de X.
   c) Calcule l'espérance mathématiques E(X) de X.
3. Soit *n* un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note P_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.
   a) Justifie que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $P_n = 1 - (0{,}42)^n$.
   b) Détermine la valeur minimale de *n* pour qu'on ait $P_n \geq 0{,}9999$.

EXERCICE 5(4 points)

Partie A

On considère la fonction g dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et définie par : $g(x) = 4x^2 - \ln x + 1$.

1. Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. a) Montre que : $\forall x \in\ ]0\ ;\ +\infty[, g'(x) = \frac{8x^2-1}{x}$.
   b) Étudie le signe de $g'(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Étudie le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

4. Démontre que : $\forall x \in]0\,;\,+\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 4x - 2$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) unité graphique : 2 cm

1. a) Calcule $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$, puis interprète graphiquement le résultat obtenu.

   b) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 4x - 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

   b) Étudie la position relative de (C) par rapport à (D).

3. a) Justifie que : $\forall x \in]0\,;\,+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

   b) En déduis les variations de f, puis dresse son tableau de variation.

4. a) Démontre que l'équation $\forall x \in]0\,;\,+\infty[, f(x) = 0$ admet une unique solution α.

   b) Justifie que : $0{,}65 < \alpha < 0{,}66$.

5. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

6. trace (D), (T) et (C).

EXERCICE 6(4 points)

Une entreprise fabrique et vend des téléphones portables. Sa capacité journalière de production est comprise entre 0 net 18 portables. On suppose que toute la production est vendue. Le coût de production en milliers de francs de x téléphones portables est donné par :

$C(x) = x^3 - 25x^2 + 280x + 400$.

La recette de la vente de x téléphones portables est $R(x) = 480x - 20x^2$. L'entreprise veut réaliser un bénéfice maximal.

En tant que stagiaire dans cette entreprise, le directeur te demande de déterminer le nombre de téléphones portables à produire par jour pour que le bénéfice soit maximal.

À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, propose une solution au directeur.