

-----  
DREN ABIDJAN4

# MATHÉMATIQUES

Fomesoutra.com  
sa soutra!

NIVEAU : TERMINALE D

*Ce devoir comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3  
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées*

**EXERCICE 1** (2 points)

Ecris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de Vrai (V) si l'affirmation est vraie ou de faux (F) si l'affirmation est fausse

1. Soit  $f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ . S'il existe un nombre réel  $M$  tel que pour tout  $x$  élément de  $I$ ,  $|f'(x)| \leq M$ , alors pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  de  $I$ ,  $|f(a) - f(b)| \leq M|a - b|$ .
2. Si une variable aléatoire  $X$  suit la loi binomiale de paramètre  $n = 3$  et  $p = \frac{4}{7}$  alors la variance de  $X$  est égale à  $\frac{36}{49}$
3. Une primitive sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  de la fonction  $x \mapsto \tan^2 x$  est la fonction  $x \mapsto -x + \tan x$
4. Pour tout  $x$  élément de  $]0; +\infty[$ ,  $\ln x > 0$

**EXERCICE 2** (2 points)

Pour chaque affirmation, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule est vraie. Ecris sur ta copie, le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondante à la réponse juste.

1-  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}$  est égale à

- A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ; B)  $\frac{1}{2}$  ; C)  $\frac{-1}{2}$  ; D)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2- Soit la fonction  $f$  définie par  $\begin{cases} f(x) = \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = m, \text{ (} m \in \mathbb{R} \text{)} \end{cases}$  la valeur de  $m$  pour que  $f$  soit

continue en 0 est :

- A)  $m = -1$  ; B)  $m = 0$  ; C)  $m = \frac{1}{2}$  ; D)  $m = -\frac{1}{2}$

3- La fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ , définie par  $f(x) = \ln(-x + 1)$  a pour ensemble de définition

- A)  $] -\infty; 1[$  ; B)  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  ; C)  $]1; +\infty[$  ; D)  $]0; 1[$

4- Soit  $g$  une fonction définie et dérivable en  $-1$  tels que  $g(-1) = 1$  et  $g'(-1) = -2$ , alors une équation cartésienne de la tangente à la représentation graphique de  $g$  au point d'abscisse  $-1$  est

- A)  $y = -2x + 1$  ; B)  $y = 2x - 1$  ; C)  $y = -2x - 1$  ; D)  $y = -2x + 3$

### EXERCICE 3 (2 points)

Soit  $h$  la fonction définie sur  $]-2; +\infty[$  par  $h(x) = \frac{3x^2+12x-1}{(x+2)^2}$

1- Justifie que  $\forall x \in ]-2; +\infty[, h(x) = 3 - \frac{13}{(x+2)^2}$

2- a) Déduis-en une primitive  $H$  de  $h$  sur  $]-2; +\infty[$

b) Déduis-en la primitive  $G$  de  $h$  sur  $]-2; +\infty[$  qui s'annule en  $-4$

### EXERCICE 4 (3 points)

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules d'un sac contenant une boule blanche et boules vertes indiscernables au toucher puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6,

- Si la boule blanche est tirée, pour gagner il faut obtenir un nombre pair avec le dé :
- Si la boule blanche n'est pas tirée, pour gagner il faut obtenir le numéro 6 avec le dé.

On considère les évènements suivants :

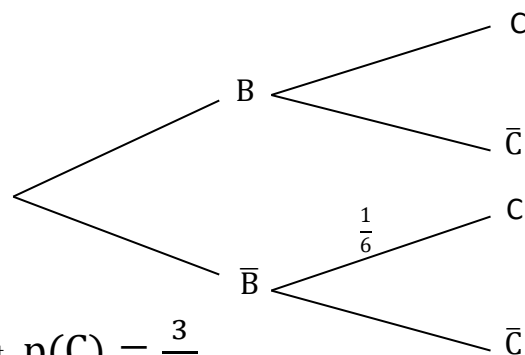
B : « la boule blanche figure parmi les 4 boules tirées »

C : « le joueur gagne »

*Tout calcul de probabilité sera donné sous forme de fraction irréductible*

1- a) Justifie que  $P(B) = \frac{2}{5}$  et  $P_B(C) = \frac{1}{2}$

b) Reproduis et complète l'arbre de probabilité ci-dessous par les probabilités manquantes



c) Déduis-en que  $p(B \cap C) = \frac{1}{5}$

2- Démontre que la probabilité de C est  $p(C) = \frac{3}{10}$

3- Le joueur ne gagne pas, quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule blanche ?

4- Pour participer à ce jeu, le joueur mise d'abord une somme  $m$  francs où  $m$  est multiple de 5 supérieur ou égal à 50,

- Le joueur reçoit 400 francs s'il gagne au jeu
- Le joueur récupère sa mise s'il tire la boule blanche et ne gagne pas le jeu
- Le joueur perd sa mise s'il ne tire pas la boule blanche et ne gagne pas au jeu

On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur (la différence entre somme reçue et la mise).

a) Justifie que les valeurs prises par  $X$  en francs sont :  $-m$  ;  $0$  ;  $400 - m$

b) Détermine la loi de probabilité de  $X$

- c) Démontre que l'espérance mathématique de  $X$  en fonction de  $m$  est  $E(X) = 120 - \frac{4}{5}m$
- d) Le jeu est favorable au joueur lorsque  $E(X) > 0$ , Détermine la valeur maximale de  $m$  pour que le jeu soit favorable au joueur.

### **EXERCICE 5** (6 points)

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $[-1; +\infty[$  par  $f(x) = x^2 - \sqrt{x+1}$  et ( $\mathcal{G}$ ) sa représentation graphique dans un repère orthogonal  $(O, I, J)$ .

1- Soit  $g$  la fonction définie sur  $[-1; +\infty[$  par  $g(x) = 4x\sqrt{x+1} - 1$

a) Calcule la limite de  $g$  en  $+\infty$

b) On admet que  $g$  est strictement décroissante sur  $]-1; -\frac{2}{3}[$  et strictement croissante sur  $]-\frac{2}{3}; +\infty[$  de plus  $g\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-8\sqrt{3}}{9} - 1$ . Dresse le tableau de variation de  $g$

c) Justifie que l'équation  $x \in ]-\frac{2}{3}; +\infty[$   $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  et que  $0,2 < \alpha < 0,3$

d) Démontre que : 
$$\begin{cases} \forall x \in ]-1; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$$

2- Démontre que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  puis interprète graphiquement les résultats

3- Justifie que  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = -\infty$  puis interprète graphiquement le résultat

4- On admet que  $f$  est dérivable sur  $]-1; +\infty[$

a) Démontre que  $\forall x \in ]-1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{x+1}}$

b) En utilisant 1-d), étudie le sens de variation de  $f$  puis dresse son tableau de variation.

5- Soit  $h$  la restriction de  $f$  à  $[3; +\infty[$ .

a) Justifie que  $h$  est une bijection de  $[3; +\infty[$  sur  $[7; +\infty[$ .

b) Justifie que la bijection réciproque  $h^{-1}$  de  $h$  est dérivable en 7 et calcule  $(h^{-1})'(7)$ .

### **EXERCICE 6** (5 points)

Dans le cadre de ses activités, le club MATHS d'un lycée d'ABOBO organise un jeu dénommé « LES CRACK » pour les élèves de terminale. Chaque classe compose une équipe et paye 1000 FCFA comme frais de participation.

Le jeu comprend 4 questions et prend fin lorsque l'équipe répond à toutes questions. On suppose que les réponses aux questions indépendantes. Si l'équipe répond correctement à une question, le club lui offre 2 bourses d'étude. Sinon elle ne reçoit rien.

On admet que l'équipe a 45% de chance de répondre correctement à une question. A la fin du jeu, le club MATHS récompense à hauteur 120000 FCFA l'équipe qui possède au moins 4 bourses d'étude. Un élève affirme qu'une équipe a moins de 35% de chance de gagner les 120000 FCFA.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, vérifie l'affirmation de cet élève.