DEVOIR-MAISON N°12

Dans ce problème, on s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^2}{1+x^2}$$

L'objectif de la partie *A* est d'établir quelques propriétés de la fonction f. L'objectif de la partie *B* est l'étude du comportement de f au voisinage de l'abscisse $x_0 = 1$ et son approximation par des fonctions plus simples au voisinage de ce point.

Partie *A*

1. Étudier la parité de la fonction f. Quelle propriété graphique peut-on en déduire pour sa courbe C_f ?
2. Calculer la dérivée f'. Factoriser f' puis étudier son signe. En déduire la tableau de variations de f.
3. Tracer soigneusement C_f.
4. Résoudre, par calcul, l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$.

Partie *B*

On cherche à approximer la fonction f par des fonctions "plus simples" au voisinage du point d'abscisse $x_0 = 1$.
La mathématicien anglais Taylor (1685 - 1731) a mis en place une formule permettant une approximation polynômiale de fonctions (lorsque celles-ci sont suffisamment dérivables) au voisinage d'une abscisse x_0 :
Lorsque x est proche de x_0, on a :

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{6} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

(Si, si ! Le membre de droite est un polynôme en x de degré n...)

Dans cette formule, l'entier n s'appelle "l'ordre du développement de Taylor" et $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f.

1. Utiliser la formule de Taylor à l'ordre $n = 1$ pour obtenir une approximation affine P_1 de f en $x_0 = 1$.
2. Utiliser la formule de Taylor à l'ordre $n = 2$ pour obtenir une approximation polynomiale de degré 2 (que l'on notera P_2) de f en $x_0 = 1$. (Vous devrez, au préalable, calculer la dérivée seconde f'' de f)
3. Tracer les représentations graphiques de P_1 et P_2 sur le graphique.

INFO : P_1 est représentée par la tangente à C_f au point d'abscisse $x_0 = 1$. P_2 est représentée par la "meilleure" parabole approchant C_f au voisinage de $x_0 = 1$. Si on n'est pas satisfait par la qualité de l'approximation, on peut toujours augmenter l'ordre de développement n.

DEVOIR-MAISON N°12 : CORRIGÉ

Partie *A*

1. Pour l'étude de la parité d'une fonction, deux conditions sont à vérifier :
   - La fonction f est définie sur un ensemble symétrique par rapport à 0. (Ici, c'est bien le cas puisque f est définie sur $\mathbb{R}$)
   - Pour tout réel x, on a :

$$f(-x) = \frac{\left(1-(-x)^2\right)^2}{1+(-x)^2} = \frac{\left(1-x^2\right)^2}{1+x^2} = f(x)$$

   On en déduit : la fonction f est paire. (Les abscisses opposées ont même image)

   Graphiquement, cela signifie que la représentation graphique C_f de la fonction f, en repère orthonormal, sera symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy).

2. La fonction f est de la forme $f = \frac{u}{v}$ avec u et v qui sont les fonctions définies par : $\begin{cases} u(x) = \left(1-x^2\right)^2 \\ v(x) = 1+x^2 \end{cases}$

   Comme v ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée f' est de la forme :

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

   Ce qui donne : (puisque $u'(x) = 2 \times (-2x) \times (1-x^2) = -4x(1-x^2)$ et $v'(x) = 2x$)

$$f'(x) = \frac{-4x(1-x^2)(1+x^2) - 2x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}$$

   En factorisant par $-2x(1-x^2)$, on obtient :

$$f'(x) = \frac{-2x(1-x^2)[2(1+x^2)+(1-x^2)]}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x(1-x^2)(x^2+3)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x(x^2-1)(x^2+3)}{(1+x^2)^2}$$

   Étudions le signe de f' à l'aide d'un tableau :

   Le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de $2x$ et $x^2 - 1$ puisque $x^2 + 3$ et $(1+x^2)^2$ sont des quantités strictement positives. Le signe de $2x$ est le même que celui que x.

   Et : $x^2 - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$

   (Le signe de $ax^2 + bx + c$ est celui de a sauf entre les éventuelles racines)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Signe de f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Étude des limites de f en $+\infty$ et $-\infty$:

Écrivons : $$f(x) = \frac{1-2x^2+x^4}{1+x^2} = \frac{x^4\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^2}+1\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = x^2\,\frac{\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^2}+1\right)}{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^2}+1\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)=1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}=0$

Donc, par quotient : $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^2}+1\right)}{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}=1$$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, donc par produit :

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\,\frac{\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^2}+1\right)}{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}=+\infty$$

Comme la fonction f est paire, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Le calcul de $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$ est immédiat : $f(1)=f(-1)=0$ et $f(0)=1$

3. Représentation graphique : voir à la fin du corrigé.

4. Résolution de l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$. Les équations suivantes sont équivalentes :

$$\frac{\left(1-x^2\right)^2}{1+x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1-2x^2+x^4}{1+x^2}=\frac{1}{2}$$

$$2-4x^2+2x^4=1+x^2$$

$$2x^4-5x^2+1=0$$

On obtient une équation du quatrième degré du type "bicarrée" que l'on résout en posant $X=x^2$. Ainsi :

$$2X^2-5X+1=0$$

On calcule : $\Delta=17$ puis $X_1=\frac{5+\sqrt{17}}{4}$ et $X_2=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$ qui sont tous deux des réels positifs.

Comme $X=x^2$, l'équation $2x^4-5x^2+1=0$ possède quatre solutions qui sont :

$$x_1=-\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}\ ;\ x_2=\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}\ ;\ x_3=-\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}\ ;\ x_4=\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}$$

Partie *B*

1. La formule de Taylor à l'ordre $n = 1$ s'écrit : $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ pour x voisin de x_0.

   On constate que $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ correspond à la tangente à C_f au point d'abscisse x_0.

   Avec $x_0 = 1$, cela donne : $P_1(x) = f(1) + f'(1)(x - 1)$

   Or, $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$ d'où : $P_1(x) = 0$.

   La fonction affine approchant au mieux la fonction f au voisinage de $x_0 = 1$ est la fonction nulle (représentée par l'axe des abscisses).

2. La formule de Taylor à l'ordre $n = 2$ s'écrit : $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\dfrac{(x - x_0)^2}{2}$ pour $x \simeq x_0$.

   Avec $x_0 = 1$, cela donne : $P_2(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + f''(1)\dfrac{(x-1)^2}{2} = f''(1)\dfrac{(x-1)^2}{2}$ car $f(1) = f'(1) = 0$

   Calculons la dérivée seconde f'' de f. Pour cela, on dérive la dérivée f' :

   Nous avions : $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-1)(x^2+3)}{(1+x^2)^2}$, qui est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x(x^2-1)(x^2+3) \\ v(x) = (1+x^2)^2 \end{cases}$

   Armons-nous d'un peu de courage et lançons-nous dans ce calcul !

   Déjà, on remarque que :

   $$u(x) = (2x^3 - 2x)(x^2 + 3), \text{ d'où } u'(x) = (6x^2 - 2)(x^2 + 3) + (2x^3 - 2x)(2x) = 10x^4 + 12x^2 - 6$$

   Donc :

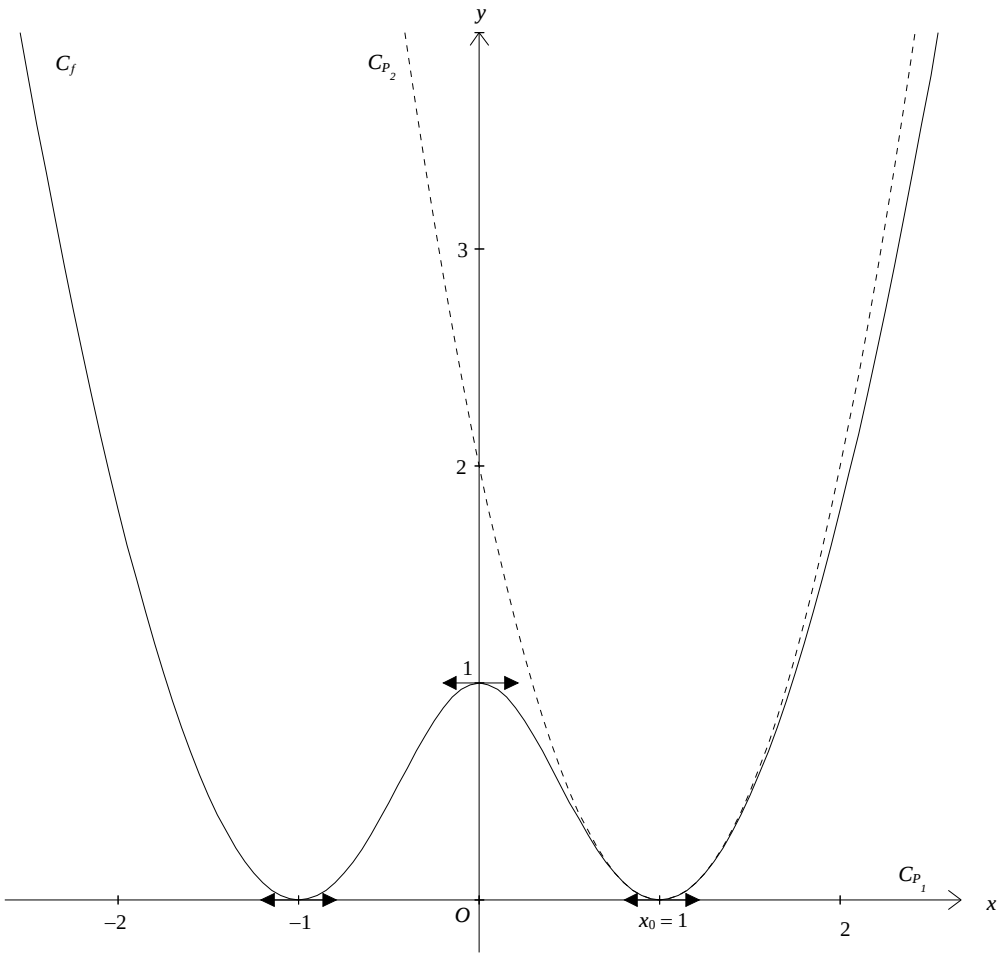
   $$f''(x) = \frac{(10x^4 + 12x^2 - 6)(1+x^2)^2 - 2x(x^2-1)(x^2-3) \times 2 \times 2x(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$$

   Inutile de simplifier cette expression ; on veut juste calculer $f''(1)$:

   $$f''(1) = \frac{(10 + 12 - 6)(1+1)^2 - 2(1-1)(1-3) \times 2 \times 2(1+1)}{(1+1)^4} = 4$$

   D'où : $$P_2(x) = f''(1)\frac{(x-1)^2}{2} = 2(x-1)^2$$

   La fonction polynôme de degré 2 approximant au mieux la fonction f au voisinage de $x_0 = 1$ est la fonction P_2 définie par $P_2(x) = 2(x - 1)^2$. Cette fonction P_2 est représentée par une parabole et on constate, sur le graphique, que c'est la parabole qui épouse au mieux la courbe C_f au voisinage de $x_0 = 1$.


y
C_f
C_{P_2}
3
2
1
C_{P_1}
x
–2
–1
O
$x_0 = 1$
2