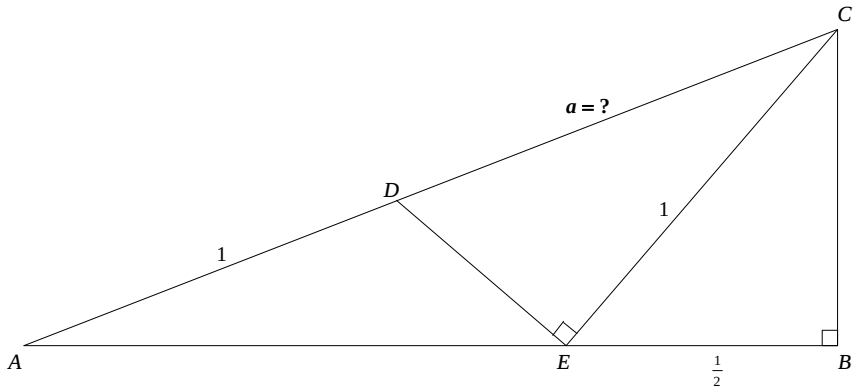
DEVOIR-MAISON N°13



Données :

ABC, *EBC* sont des triangles rectangles en *B*.

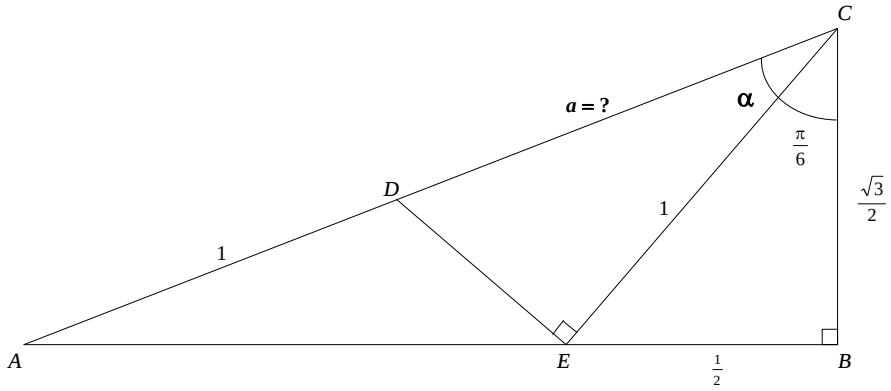
CED est un triangle rectangle en *E*.

$AD = CE = 1$ et $EB = \frac{1}{2}$.

But :

Calculer la longueur $a = DC$.

DEVOIR-MAISON N°13 : CORRIGÉ



En étudiant le triangle *BEC*, rectangle en *B*, on obtient facilement :

$$(\overrightarrow{CE}\,;\,\overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad CB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Notons α l'angle $(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CE})$ et évaluons la quantité $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6})$:

$$\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \cos\alpha \cos\frac{\pi}{6} - \sin\alpha \sin\frac{\pi}{6} \quad (\ast)$$

Or :

- Le triangle *DEC* est rectangle en *E*, donc :

  $\cos\alpha = \dfrac{1}{a}$

  $\sin\alpha = \dfrac{DE}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$

- D'autre part : $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \cos(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CB}) = \cos(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}) = \dfrac{CB}{CA} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2(1+a)}$

  Car *ABC* est rectangle en *B*

La relation (∗) devient : $\dfrac{\sqrt{3}}{2(1+a)} = \dfrac{1}{a} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a} \times \dfrac{1}{2}$

Multiplions les deux membres par $2a(1 + a)$:

$$\sqrt{3}\,a = \sqrt{3}\,(1+a) - \sqrt{a^2-1}\,(1+a)$$

On peut simplifier les termes $\sqrt{3}\,a$: $\sqrt{3} = \sqrt{a^2-1}\,(1+a)$

En élevant les deux membres au carré : $3 = (a^2-1)(1+a)^2$

Développons : $3 = (a^2-1)(1+2a+a^2) = a^4 + 2a^3 - 2a - 1$

Regroupons : $a^4 + 2a^3 - 2a - 4 = 0$

Factorisons : $a^3(a+2) - 2(a+2) = 0$

$$(a+2)(a^3-2) = 0$$

$$a = -2 \text{ ou } a = \sqrt[3]{2}$$

Or, le réel *a* recherché est une distance donc *a* est positif :

$$a = \sqrt[3]{2}$$

Autre solution utilisant le produit scalaire :

Évaluons le produit scalaire $\vec{CA}.\vec{CE}$ de deux manières différentes :

D'une part :

$$\vec{CA}.\vec{CE} = CA \times CE \times \cos(\vec{CA};\vec{CE}) = (1+a) \times 1 \times \cos\alpha = \frac{1+a}{a} \text{ (puisque } \cos\alpha = \frac{1}{a})$$

D'autre part, en décomposant les vecteurs $\vec{CA}$ et $\vec{CE}$ suivant des directions orthogonales :

$$\vec{CA}.\vec{CE} = (\vec{CB}+\vec{BA}).(\vec{CB}+\vec{BE}) = \vec{CB}.\vec{CB} + \vec{CB}.\vec{BE} + \vec{BA}.\vec{CB} + \vec{BA}.\vec{BE}$$

Or,

$\vec{CB}.\vec{CB} = CB^2 = \frac{3}{4}$

$\vec{CB}.\vec{BE} = 0$ et $\vec{BA}.\vec{CB} = 0$ (vecteurs orthogonaux)

$\vec{BA}.\vec{BE} = BA \times BE$ (vecteurs colinéaires de même sens) avec $BA^2 = (1+a)^2 - \frac{3}{4}$ et $BE = \frac{1}{2}$.

$$\vec{CA}.\vec{CE} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{(1+a)^2 - \frac{3}{4}}$$

On en déduit :

$$\frac{1+a}{a} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{(1+a)^2 - \frac{3}{4}}$$

$$\frac{1+a}{a} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{(1+a)^2 - \frac{3}{4}}$$

Multiplions par $4a$: $$4(1+a) - 3a = 2a\sqrt{(1+a)^2 - \frac{3}{4}}$$

$$a + 4 = 2a\sqrt{(1+a)^2 - \frac{3}{4}}$$

Élevons au carré : $$a^2 + 8a + 16 = 4a^2[(1+a)^2 - \frac{3}{4}]$$

$$a^2 + 8a + 16 = 4a^2[\frac{1}{4} + 2a + a^2]$$

$$a^2 + 8a + 16 = a^2 + 8a^3 + 4a^4$$

$$4a^4 + 8a^3 - 8a - 16 = 0$$

$$a^4 + 2a^3 - 2a - 4 = 0$$

On retrouve la même équation que précédemment :

Factorisons : $$a^3(a+2) - 2(a+2) = 0$$

$$(a+2)(a^3 - 2) = 0$$

$$a = -2 \text{ ou } a = \sqrt[3]{2}$$

Or, le réel a recherché est une distance donc a est positif :

$$a = \sqrt[3]{2}$$