Fomesoutra.com
ça soutra!

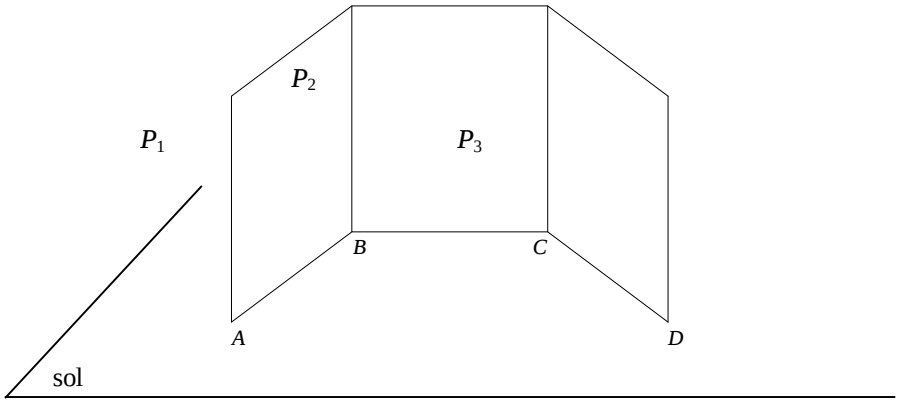
DEVOIR-MAISON N°14

Exercice (d'échauffement)

Résoudre l'inéquation : $-2X^2 - X + 1 \geqslant 0$

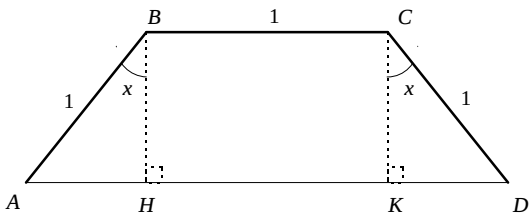
Problème : le paravent

Un paravent est constitué de trois panneaux verticaux P_1, P_2 et P_3 (de formes rectangulaires) articulés en B et C



On suppose que les panneaux ont une largeur de 1 m ($AB = BC = CD = 1$) et que l'angle d'ouverture de P_1 et P_3 est le même. Le but du problème est de rechercher l'ouverture qu'il faut donner aux panneaux pour que la stabilité du paravent soit maximale. On admet (propriété physique) que la stabilité du paravent est maximale lorsque l'aire du "polygone de sustentation" (dans notre cas, il s'agit du trapèze isocèle $ABCD$) est maximale.

Représentation du polygone de sustentation en vue de dessus :



On note H et K les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur $[AD]$ et x l'angle $\widehat{ABH} = \widehat{KCD}$.

On suppose que : $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$.

1. Calculer l'aire $S(x)$ du trapèze $ABCD$. [Réponse : $S(x) = (1 + \sin x)\cos x$]
2. Calculer la dérivée S' de la fonction S puis démontrer que $S'(x) = -2\sin^2 x - \sin x + 1$.
3. Étudier le signe de S' pour $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$. (On pourra poser $X = \sin x$ et utiliser l'exercice d'échauffement)
4. Dresser le tableau de variations de la fonction S sur l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.
5. Tracer la représentation graphique de la fonction S.
6. Pour quel angle x la stabilité du paravent est-elle maximale ?

DEVOIR-MAISON N°14 : CORRIGÉ

Exercice (d'échauffement)

Le trinôme $-2X^2 - X + 1$ possède une racine évidente $X_1 = -1$. L'autre racine X_2 est telle que : $X_1X_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$

D'où $X_2 = \frac{1}{2}$. Le signe du trinôme étant du signe de $a = -2$ sauf entre les racines, on en déduit :

$$S = [-1 ; \frac{1}{2}]$$

(Remarque : on peut également obtenir ce résultat avec un tableau de signes)

Problème : le paravent

1. L'aire d'un trapèze est donnée par : $S = \frac{(b+B)h}{2}$ où b et B désignent respectivement la petite base et la grande base. Dans notre cas, on a :

   $$S(x) = \frac{(BC + AD)BH}{2}$$

   Or, $BC = 1$, $AD = AH + HK + KD = 1 + 2\sin x$ et $BH = \cos x$.

   D'où : $$S(x) = \frac{(2 + 2\sin x)\cos x}{2} = (1 + \sin x)\cos x$$

2. La fonction S est du type uv où $u(x) = 1 + \sin x$ et $v(x) = \cos x$.

   Sa dérivée S' est donc égale à $u'v + uv'$ ce qui donne :

   $S'(x) = \cos^2 x + (1 + \sin x)(-\sin x) = \cos^2 x - \sin x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin x - \sin^2 x = -2\sin^2 x - \sin x + 1$

3. Résolvons l'inéquation $S'(x) \geqslant 0$: $-2\sin^2 x - \sin x + 1 \geqslant 0$

   En posant $X = \sin x$: $-2X^2 - X + 1 \geqslant 0$

   D'après l'exercice ci-dessus : $X \in [-1 ; \frac{1}{2}]$

   C'est-à-dire : $-1 \leqslant \sin x \leqslant \frac{1}{2}$

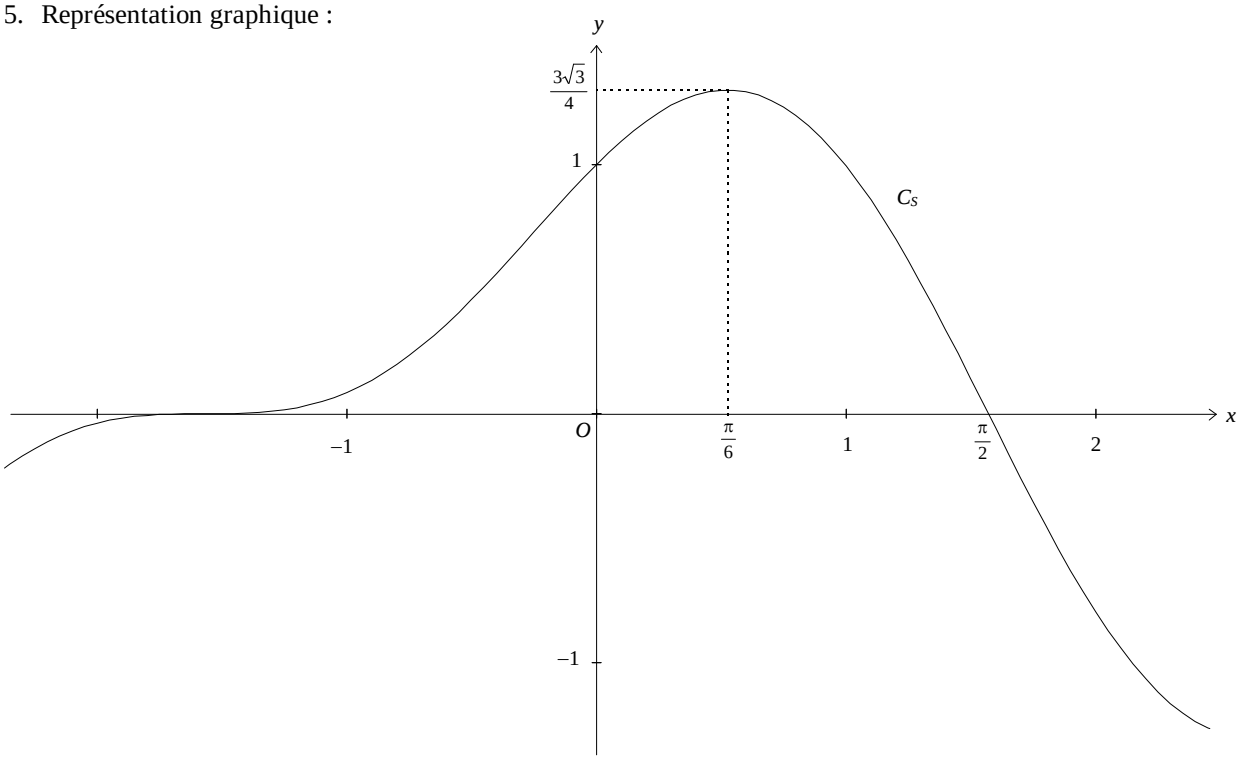
   Par lecture du cercle trigonométrique et en tenant compte que $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$, on obtient : $x \in [0 ; \frac{\pi}{6}]$

   Bilan : $S'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [0 ; \frac{\pi}{6}]$

4. Tableau de variations de S :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
Signe de la dérivée S'		$+$	0	$-$	
Variations de la fonction S	1	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

5. Représentation graphique :



6. D'après ce qui précède, la fonction S atteint son maximum sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ pour $x = \frac{\pi}{6}$.

   Or, la stabilité du paravent est maximale lorsque l'aire S est maximale.

   La stabilité du paravent est donc maximale pour une ouverture $x = \frac{\pi}{6}$.