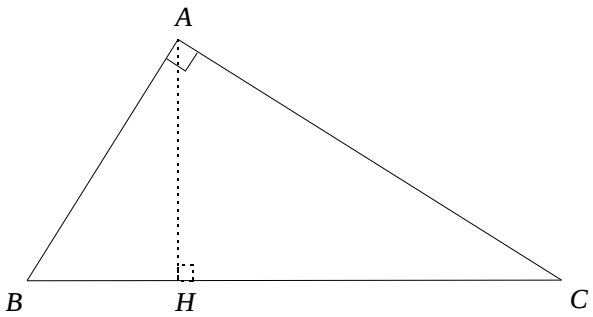
Fomesoutra.com
ça soutra!

DEVOIR-MAISON N°15

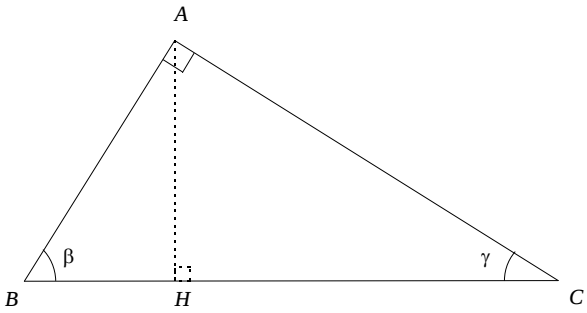
ABC est un triangle rectangle en *A* et *H* est le pied de la hauteur issue de *A*.



Démontrer les relations suivantes :

$$BA^2 = BH \times BC \quad \text{et} \quad AH^2 = HB \times HC$$

DEVOIR-MAISON N°15 : CORRIGÉ



Méthode 1 : utilisation d'un raisonnement géométrique.

Comme ABC est rectangle en A, on a : $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Comme ABH est rectangle en H, on a : $(\vec{AB}; \vec{AH}) + \beta = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit : $\gamma = (\vec{AB}; \vec{AH})$.

Les triangles ABC et ABH sont donc **semblables**. (Les angles de l'un correspondent aux angles de l'autre)

Leurs côtés homologues sont donc **proportionnels**. (C'est une propriété des triangles semblables)

On a donc l'égalité des rapports suivants :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{HB}{AB} = \frac{AH}{AC}$$

De la première égalité, on déduit : $AB^2 = BH \times BC$

Les triangles ABH et ACH sont également semblables. D'où :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{HA}{HB} = \frac{HC}{AH}$$

De la seconde égalité, on déduit : $AH^2 = HB \times HC$

(Ce raisonnement, à l'aide de triangles semblables, est celui qui est en vigueur en seconde depuis l'avènement des nouveaux programmes !)

Méthode 2 : utilisation du produit scalaire

$BA^2 = \vec{BA} \cdot \vec{BA}$

$= \vec{BA} \cdot \vec{BC}$ (car $\vec{BA}$ est le projeté orthogonal de $\vec{BC}$ sur la droite dirigée par $\vec{BA}$)

$= (\vec{BH} + \vec{HA}) \cdot \vec{BC}$ (relation de Chasles)

$= \vec{BH} \cdot \vec{BC} + \vec{HA} \cdot \vec{BC}$ (linéarité du produit scalaire)

$= \vec{BH} \cdot \vec{BC}$ (car $\vec{HA} \cdot \vec{BC} = 0$ puisque $(HA) \perp (BC)$)

$= BH \times BC$ (car $\cos(\vec{BH}; \vec{BC}) = 0$ puisque B, H et C sont alignés dans cet ordre)

$AH^2 = (\vec{AB} + \vec{BH}) \cdot (\vec{AC} + \vec{CH})$

$= \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{CH} + \vec{BH} \cdot \vec{AC} + \vec{BH} \cdot \vec{CH}$

$= 0 + \vec{HB} \cdot \vec{CH} + \vec{BH} \cdot \vec{HC} + \vec{BH} \cdot \vec{CH}$ (car H est le projeté orthogonal de A)

$= \vec{HB} \cdot \vec{CH}$ (car $\vec{BH} \cdot \vec{HC} + \vec{BH} \cdot \vec{CH} = \vec{BH} \cdot \vec{0} = 0$)

$= HB \times CH$ (car B, H et C sont alignés dans cet ordre)