Fomesoutra.com
ça soutra!

DEVOIR-MAISON N°17

Rappel : un entier naturel n est dit premier lorsqu'il possède exactement deux diviseurs (1 et lui même). Les "premiers" nombres premiers sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 etc ...
Un entier naturel non premier est dit "composé". Par exemple : 15 est un nombre composé. (Il possède 4 diviseurs qui sont 1 ; 3 ; 5 et 15). Tout nombre composé m peut s'écrire sous la forme $m = ab$ où a et b sont des entiers différents de 1. Par exemple : $15 = 3 \times 5$.

Le but de problème est d'étudier si les nombres suivants sont premiers ou non. (n étant un entier naturel)

$A(n) = n^4 - 20\,n^2 + 4$ (pour $n \geqslant 5$)

$B(n) = n^4 + 64$

Partie *A* Où l'on montre que tout nombre de la forme $n^4 - 20\,n^2 + 4$ (pour $n \geqslant 5$) est composé.

1. Calculer $A(n)$ pour $n = 5$; 6 ; 7 et 8. Obtient-on des nombres premiers ?
2. On considère la fonction polynôme A, définie pour $x \in \mathbb{R}$, par : $A(x) = x^4 - 20\,x^2 + 4$.

   Vérifier que : $A(x) = (x^2 - 2)^2 - 16\,x^2$.
3. En déduire que $A(x) = P(x) \times Q(x)$ où P et Q sont des fonctions polynômes de degré 2.
4. Démontrer que les équations $P(x) = 1$ et $Q(x) = 1$ n'ont pas de solutions entières.
5. Conclure.

Partie *B* Où l'on montre que tout nombre de la forme $n^4 + 64$ est composé.

1. Calculer $B(n)$ pour $n = 0$; 1 ; 2 et 3. Obtient-on des nombres premiers ?
2. On considère la fonction polynôme B, définie pour $x \in \mathbb{R}$, par : $B(x) = x^4 + 64$.

   Vérifier que : $B(x) = (x^2 + 4x + 8)(x^2 - 4x + 8)$
3. En vous inspirant de la démarche de la partie A, prouver le résultat annoncé.

DEVOIR-MAISON N°17 : CORRIGÉ

Partie *A* Où l'on montre que tout nombre de la forme $n^4 - 20n^2 + 4$ (pour $n \geqslant 5$) est composé.

1. $A(5) = 129 = 3 \times 43$

   $A(6) = 580 = 2^2 \times 5 \times 29$

   $A(7) = 1425 = 3 \times 5^2 \times 19$

   $A(8) = 2820 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 47$

   Pour n compris entre 5 et 8, on constate que $n^4 - 20n^2 + 4$ est composé.

2. En développant : $(x^2 - 2)^2 - 16x^2 = x^4 - 4x^2 + 4 - 16x^2 = x^4 - 20x^2 + 4 = A(x)$.

3. Utilisons l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a = x^2 - 2$ et $b = 4x$. Nous obtenons :

   $$(x^2 - 2)^2 - 16x^2 = (x^2 - 2 - 4x)(x^2 - 2 + 4x) = (x^2 - 4x - 2)(x^2 + 4x - 2).$$

   En posant $P(x) = (x^2 - 4x - 2)$ et $Q(x) = (x^2 + 4x - 2)$, on a bien : $A(x) = P(x) \times Q(x)$.

4. L'équation $P(x) = 1$ est équivalente à $x^2 - 4x - 3 = 0$. Ses solutions sont $2 + \sqrt{7}$ et $2 - \sqrt{7}$ qui ne sont pas des entiers. En d'autres termes :

   Si $P(x) = 1$, alors $x \notin \mathbb{Z}$

   Par contraposition, on a donc :

   Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $P(x) \neq 1$

   Principe de contraposition :
   $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non } B \Rightarrow \text{non } A)$

   De même, l'équation $Q(x) = 1$ est équivalente à $x^2 + 4x - 3 = 0$. Ses solutions sont $-2 + \sqrt{7}$ et $-2 - \sqrt{7}$ qui ne sont pas des entiers. Comme précédemment, on a :

   Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $Q(x) \neq 1$

5. Pour tout entier $n \geqslant 5$, le nombre $A(n)$ est le produit des deux nombres $P(n)$ et $Q(n)$. (D'après la question 3). Or, $P(n)$ et $Q(n)$ sont des entiers (car d'une part, n est entier et, d'autre part, P et Q sont des polynômes à coefficients entiers). Donc, d'après la question 4, $P(n)$ et $Q(n)$ sont des entiers différents de 1. Donc, pour tout entier $n \geqslant 5$, $A(n)$ est composé.

Partie *B* Où l'on montre que tout nombre de la forme $n^4 + 64$ est composé.

1. $B(0) = 64 = 2^6$

   $B(1) = 65 = 5 \times 13$

   $B(2) = 80 = 2^4 \times 5$

   $B(3) = 145 = 5 \times 29$

   Pour $n \leqslant 3$, on constate que $n^4 + 64$ est composé.

2. En développant : $(x^2 + 4x + 8)(x^2 - 4x + 8) = (x^2 + 8)^2 - (4x)^2 = x^4 + 16x^2 + 64 - 16x^2 = x^4 + 64 = B(x)$.

3. Posons $P(x) = x^2 + 4x + 8$ et $Q(x) = x^2 - 4x + 8$. Ainsi, $B(x) = P(x) \times Q(x)$.

   L'équation $P(x) = 1$ est équivalente à $x^2 + 4x + 7 = 0$. Son discriminant Δ est égal à -12. L'équation $P(x) = 1$ n'a donc pas de solutions.

De même, l'équation $Q(x) = 1$ est équivalente à $x^2 - 4x + 7 = 0$. Son discriminant Δ est égal à -12. L'équation $Q(x) = 1$ n'a donc pas de solutions.

Pour tout entier n, le nombre $B(n)$ est le produit de deux nombres $P(n)$ et $Q(n)$ différents de 1. Donc, pour tout entier n, $B(n)$ est composé.