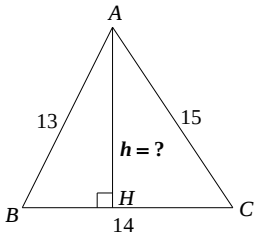
Fomesoutra.com
ça soutra!

DEVOIR-MAISON N°3

Partie *A*

Soit ABC un triangle. On note H le pied de la hauteur issue de A.

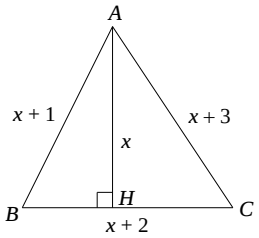
On donne $AB = 13$, $BC = 14$ et $AC = 15$. Calculer AH.



Partie *B*

Trouver tous les entiers naturels x non nuls tels que le triangle ABC ait les caractéristiques ci-dessous :

$AH = x$, $AB = x + 1$, $BC = x + 2$ et $AC = x + 3$



DEVOIR-MAISON N°3 : CORRIGÉ

Partie *A*

Notons $h = AH$, $b = BH$ et $c = CH$. D'après le théorème de Pythagore : $13^2 = b^2 + h^2$ et $15^2 = c^2 + h^2$

Les données du problème se traduisent donc par le système suivant :

$$\begin{cases} 13^2 = b^2 + h^2 & (E_1) \\ 15^2 = c^2 + h^2 & (E_2) \\ c + b = 14 & (E_3) \end{cases}$$

En effectuant $(E_2) - (E_1)$, on obtient : $c^2 - b^2 = 15^2 - 13^2 = 56$. D'où le nouveau système :

$$\begin{cases} c^2 - b^2 = 56 & (E_4) \\ c + b = 14 & (E_5) \end{cases} \text{ qui s'écrit encore : } \begin{cases} (c-b)(c+b) = 56 & (E_4) \\ c + b = 14 & (E_5) \end{cases}$$

En remplaçant $(c + b)$ par 14 dans (E_4), on obtient :

$$\begin{cases} c - b = 4 \\ c + b = 14 \end{cases}$$

Ce dernier système ne pose aucune difficulté, on trouve : $c = 9$ et $b = 5$.

On en déduit finalement (à l'aide de (E_1) ou (E_2)) : $h = 12$.

Partie *B*

Conservons les notations $b = BH$ et $c = CH$. Les données du problème se traduisent ici par le système suivant :

$$\begin{cases} (x+1)^2 = b^2 + x^2 & (E_1) \\ (x+3)^2 = c^2 + x^2 & (E_2) \\ c + b = x + 2 & (E_3) \end{cases} \text{ ce qui s'écrit plus simplement : } \begin{cases} 2x + 1 = b^2 & (E_1) \\ 6x + 9 = c^2 & (E_2) \\ c + b = x + 2 & (E_3) \end{cases}$$

En effectuant $(E_2) - (E_1)$, on obtient : $c^2 - b^2 = (6x + 9) - (2x + 1) = 4x + 8 = 4(x + 2)$

D'où le nouveau système :

$$\begin{cases} c^2 - b^2 = 4(x+2) & (E_4) \\ c + b = x + 2 & (E_5) \end{cases} \text{ qui s'écrit encore : } \begin{cases} (c-b)(c+b) = 4(x+2) & (E_4) \\ c + b = x + 2 & (E_5) \end{cases}$$

En remplaçant $(c + b)$ par $x + 2$ dans (E_4), puis en simplifiant par $x + 2$ (qui est non nul car $x > 0$) on obtient :

$$\begin{cases} c - b = 4 \\ c + b = x + 2 \end{cases}$$

Ce dernier système ne pose aucune difficulté, on trouve : $c = \dfrac{x+6}{2}$ et $b = \dfrac{x-2}{2}$.

En remplaçant, par exemple, dans la relation $b^2 = 2x + 1$, on obtient :

$\left(\dfrac{x-2}{2}\right)^2 = 2x + 1$, d'où $x^2 - 4x + 4 = 8x + 4$, d'où $x^2 - 12x = 0$.

On trouve immédiatement (en factorisant par x) : $x = 0$ ou $x = 12$.

Or, nous cherchons des entiers naturels non nuls. Donc $x = 12$.

En conclusion, le seul triangle ayant les caractéristiques données est celui de la partie *A*.