Fomesoutra.com
ça soutra!

DEVOIR-MAISON N°4

Partie *A*

1. Dans une boîte il y a 4 craies : une bleue, une rouge, une jaune et une verte. De combien de façons peut-on choisir 2 craies parmi les 4 ?
2. Soit n un entier naturel (supérieur ou égal à 2). En généralisant le raisonnement précédent, déterminer le nombre de façons de choisir 2 objets parmi n.
3. Application : dans une classe de 20 élèves, de combien de façons peut-on choisir 2 délégués ?

Partie *B*

On suppose désormais que n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1. Quel est le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés ? (Remarque : lorsqu'on relie deux sommets, on obtient soit une diagonale, soit un côté du polygone)
2. Quels sont les polygones qui ont autant de diagonales que de côtés ?
3. Quel polygone a 1325 diagonales ?

DEVOIR-MAISON N°4 : CORRIGÉ

Partie *A*

1. Pour choisir une craie dans la boîte, nous avons 4 choix possibles. Cette première craie étant choisie, il reste maintenant 3 craies dans la boîte. Pour choisir la deuxième craie, nous n'avons donc plus que 3 choix possibles. Au total, 12 choix. Mais l'ordre dans lequel on choisit les deux craies n'a pas d'importance (si on choisit la bleue puis la verte cela revient au même que si on choisit la verte puis la bleue). On a donc finalement 6 possibilités de choisir 2 craies parmi 4 (B-R, B-J, B-V, R-J, R-V et J-V)
2. Soit n un entier naturel (supérieur ou égal à 2). En généralisant le raisonnement précédent, on a n choix pour le premier objet, puis $n-1$ choix pour le second. En divisant par deux (puisque l'ordre n'importe pas), cela donne finalement :

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ façons de choisir 2 objets parmi } n$$

3. Application : dans une classe de 20 élèves, le nombre de façons de choisir 2 délégués est d'après la formule ci-dessus appliquée avec $n = 20$: $\frac{20\times 19}{2} = 190$.

Partie *B*

On suppose désormais que n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1. Il y a, d'après la partie *A* (question 2), $\frac{n(n-1)}{2}$ façons de choisir 2 sommets parmi les n sommets du polygone. Or, lorsqu'on relie 2 sommets, on obtient soit une diagonale, soit un côté. Comme le polygone possède n côtés, le nombre de diagonales est donc : $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)-2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$.
2. On recherche les entiers n tels que : $n = \frac{n(n-3)}{2}$. Cette équation peut se mettre sous la forme : $n^2 - 5n = 0$. Donc $n = 0$ ou $n = 5$. Comme n est un entier supérieur ou égal à 3, on en déduit : **le seul polygone ayant autant de diagonales que de côtés est le pentagone**.
3. Pour déterminer le polygone qui a 1325 diagonales, on résout l'équation $\frac{n(n-3)}{2} = 1325$. Cette équation peut se mettre sous la forme : $n^2 - 3n - 2650 = 0$. On trouve $n = 53$ ou $n = -50$. Or, n doit être un entier naturel supérieur ou égal à 3, donc on en déduit que c'est **le polygone à 53 côtés qui possède 1325 diagonales**.