Fomesoutra.com
ça soutra!

DEVOIR-MAISON N°7

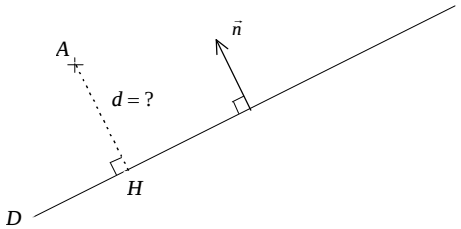
Problème *Calcul de la distance entre un point et une droite (dans le plan)*

Soit $A(x_A ; y_A)$ un point du plan.

Soit D une droite d'équation $ax + by + c = 0$. (Avec a et b non tous deux nuls)

Le but du problème est de calculer la distance entre le point A et la droite D.

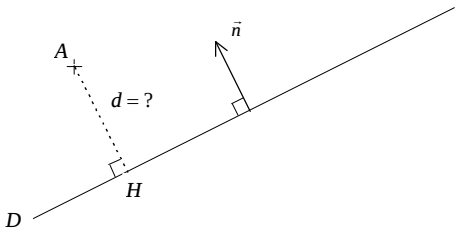
Dans tout ce qui suit, nous noterons $H(x_H ; y_H)$ le projeté orthogonal de A sur D.



1. Soit $\vec{n}$ $(a ; b)$. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à la droite D. (On pourra utiliser qu'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite D est $\vec{u}$ $(-b ; a)$). En déduire que $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et que :
$$|\overrightarrow{AH} . \vec{n}| = AH . \|\vec{n}\|$$
2. Démontrer que : $\overrightarrow{AH} . \vec{n} = a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A)$. Puis, en utilisant le fait que H est un point de la droite D, en déduire : $\overrightarrow{AH} . \vec{n} = -(ax_A + by_A + c)$.
3. Déduire des questions précédentes que : $AH = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
4. <u>Applications</u> :
   a) Soient $A(2 ; 7)$ et D la droite d'équation $3x - y + 2 = 0$.
      Calculer la distance entre le point A et la droite D.
   b) Déterminer l'équation du cercle de centre $\Omega(5 ; 1)$ et tangent à la droite D d'équation $x + y - 4 = 0$.

DEVOIR-MAISON N°7 : CORRIGÉ

Problème *Calcul de la distance entre un point et une droite (dans le plan)*



1. On a : $\vec{n} \cdot \vec{u} = -ab + ab = 0$

   Donc : le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ donc à la droite D

   Comme $\vec{AH}$ est aussi orthogonal à D, on en déduit que $\vec{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

   L'angle $(\vec{AH}, \vec{n})$ est donc nul ou plat, donc $\cos(\vec{AH}, \vec{n}) = \pm 1$.

   D'où : $\vec{AH} \cdot \vec{n} = AH \cdot \| \vec{n} \| \cos(\vec{AH}, \vec{n}) = \pm AH \cdot \| \vec{n} \|$.

   En passant aux valeurs absolues, on obtient : $|\vec{AH} \cdot \vec{n}| = AH \cdot \| \vec{n} \|$

2. Comme $\vec{AH}(x_H - x_A ; y_H - y_A)$ et $\vec{n}(a ; b)$, on obtient :

   $$\vec{AH} \cdot \vec{n} = a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) = ax_H + by_H - ax_A - by_A$$

   Comme H est un point de la droite D, on a : $ax_H + by_H + c = 0$, c'est-à-dire $-c = ax_H + by_H$

   On en déduit : $\vec{AH} \cdot \vec{n} = -(ax_A + by_A + c)$

3. D'après la question 2 en passant aux valeurs absolues : $|\vec{AH} \cdot \vec{n}| = |ax_A + by_A + c|$

   D'après la question 1 en explicitant $\| \vec{n} \|$: $|\vec{AH} \cdot \vec{n}| = AH \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$

   D'où : $$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

4. <u>Applications</u> :

   a) Avec $A(2 ; 7)$ et la droite D d'équation $3x - y + 2 = 0$, on obtient :

   $$\text{dist}(A, D) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \times 2 - 7 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

   b) La distance entre le centre $\Omega(5 ; 1)$ et la droite D d'équation $x + y - 4 = 0$ correspond donc au rayon du cercle :

   $$R = \text{dist}(\Omega, D) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5 + 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

   D'où l'équation du cercle : $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 2$