



**T.D N° 4 DE MATHÉMATIQUES**

**Activité Géométrique**

**Niveau :** PREMIERE

**Chap. IV :** APP. DU PRODUIT SCALAIRE

**Série :** S

**Exercice 1 :**

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de normes respectives 2 et 3 et tels que :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ .

Calculer :

- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ ;
- $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ ;
- $-2\vec{u}(\vec{u} + \vec{v})$ .

**Exercice 2 :**

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs. On pose :  $\alpha = \text{mes}(\vec{u}, \vec{v})$ .

1. Dans le cas où :  $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$ ;  $\|\vec{v}\| = 3$  et  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ .

Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , puis  $\|\vec{u} - 2\vec{v}\|$ .

2. Dans le cas où :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2}$ ;  $\alpha = \frac{4\pi}{3}$  et  $\|\vec{u}\| = 2$ .

Calculer  $\|\vec{v}\|$ .

3. Exprimer  $\vec{v}$  en fonction de  $\vec{u}$  dans le cas où  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et sachant que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -8$  et  $\|\vec{u}\| = 2$ .

**Exercice 3 :**

$ABCD$  est un carré de centre  $O$  et de côté  $4\text{cm}$ .

On appelle  $H$  le projeté orthogonal de  $O$  sur la droite  $(CD)$  et  $H'$  le projeté orthogonal de  $O$  sur la droite  $(AB)$ .

1) Calculer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{DC}, \text{ et } \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

2) Calculer  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ . Que peut-on dire des droites  $(AC)$  et  $(DB)$  ?

3) Soit le vecteur  $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}$ . Calculer  $\|\vec{v}\|$ .

4) On désigne par  $I$  le milieu du segment  $[BC]$ .

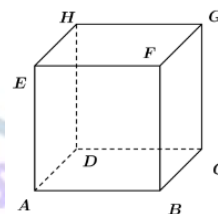
a) Exprimer les vecteurs  $\overrightarrow{AI}$  et  $\overrightarrow{BH}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$ .

b) Démontrer que les droites  $(AI)$  et  $(BH)$  sont perpendiculaires.

**Exercice 4 :**

On considère le cube  $ABCDEFGH$ , ci-dessous d'arête  $a(a>0)$ .

Calculer :  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH}$ ,  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DE}$ ,  $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$  et  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DH}$ .



**Exercice 5 :**

Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  dans chacun des cas suivants :

(1) Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, on donne les points :  $A(2; 2; 4)$ ,  $B(2; \frac{7}{2}; \frac{5}{2})$  et

$C(4; 3; 5)$ .

(2)  $ABC$  est un triangle tel que :  $AB = 8$ ,  $BC = 7$  et  $AC = 5$ , puis en déduire  $\cos \widehat{BAC}$  et la mesure en degré de  $\widehat{BAC}$ .

(3)  $ABC$  est un triangle isocèle en  $B$ ,  $\widehat{ABC} = 120^\circ$ ,  $BI = 2\sqrt{3}$ ,  $[BI]$  étant une hauteur de  $ABC$ .

(4)  $ABDC$  est un carré et  $CD = \sqrt{6}$ .

(5)  $ABDC$  est un rectangle.

(6)  $ABC$  est un triangle rectangle en  $B$ ,  $AB = 6$  et  $BC=8$ .

**Exercice 6 :**

Soit  $ABCD$  un carré de centre  $O$ . On désigne par  $I$  et  $J$  les milieux des segments  $[AB]$  et  $[BC]$ .

1. Calculer les produits scalaires suivants :  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ ,  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{OJ} \cdot \overrightarrow{IC}$ ,  $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{DI}$ ,  $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{IJ}$ .

2. En calculant de deux manières différentes le produit scalaire  $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AC}$ , calculer l'angle  $\alpha = \widehat{JAC}$ .

**Exercice 7 :**

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan.

1. a) Calculer  $S$  tel que :

$$S = 2(2\vec{u} + \vec{v})^2 + (\vec{u} - 2\vec{v})^2 - (3\vec{u} + \vec{v})^2 - 5\vec{v}^2$$

b) En déduire que  $S = 0$  si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

2. a) Calculer  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ .

b) En déduire que :

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$  si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

3. Soit  $ABC$  un triangle tel que :  $\vec{BA} = \vec{u}$  et  $\vec{AC} = \vec{v}$ .  
En utilisant l'égalité précédente, déduire la nature du théorème obtenu.
4. On donne  $AB = 6$  et  $AC = 8$ . Calculer la distance  $BC$ .
5. Soit  $ABCD$  un losange tel que  $ABC$  soit un triangle équilatéral de côté  $a$ .
  - a) Faire une figure.
  - b) Montrer que pour tout point  $M$  du plan, on a :
$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MB^2 + \vec{MB} \cdot \vec{BD} + \frac{1}{2}a^2.$$

### Exercice 8 :

Soit  $ABCDEFGH$  un parallélépipède rectangle tel que  $AB = AE = 2\text{cm}$  et  $AD = 3\text{cm}$ . Soit  $J$  le milieu du segment  $[EH]$  et  $I$  le centre de la face  $ABFE$ .

L'espace est rapporté à un repère orthonormé

$$\left(A, \frac{1}{2}\vec{AB}, \frac{1}{3}\vec{AD}, \frac{1}{2}\vec{AE}\right).$$

- 1) Déterminer les coordonnées des points  $A, B, C, D, E, F, G, H, I$  et  $J$ .
- 2) Montrer que  $(BJ) \perp (AI)$ .

### Exercice 9 :

$ABC$  est un triangle tel que :  $AB = 5\text{cm}$ ,  $AC = 6\text{cm}$  et  $BC = 7\text{cm}$ .

Calculer :

- 1) L'aire de ce triangle.
- 2) Le rayon de son cercle inscrit.
- 3) Le rayon de son cercle circonscrit.

### Exercice 10 :

Soit  $ABC$  un triangle tel que :  $AB = 8$ ,  $AC = 9$  et  $BC = 10$ .

1. Calculer en degré la mesure des angles du triangle  $ABC$ .
2. Calculer les longueurs de la médiane et de la hauteur issue de  $A$ .
3. En déduire en  $\text{cm}^2$ , l'aire du triangle  $ABC$ .

### Exercice 11 :

$ABC$  est un triangle tel que :  $AB = 3$ ,  $AC = 6$  et  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 10$ .

1. Développer  $(-\vec{AB} + \vec{AC})^2$ .
2. En déduire  $BC$ .

### Exercice 12 :

Soit  $ABC$  un triangle tel que :  $AB = 4$ ,  $AC = 7$  et  $\text{mes}\hat{A} = 120^\circ$ .

1. Calculer  $BC$ .
2. Calculer  $\text{mes}\hat{B}$  et  $\text{mes}\hat{C}$ .

### Exercice 13 :

Soit  $ABC$  un triangle tel que :  $AB = 2$ ,  $AC = 5$  et  $\hat{A} = 120^\circ$ .

1. Calculer  $BC$ ,  $\cos\hat{B}$ , et  $\cos\hat{C}$ .
2. En déduire en degré les valeurs de  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$ .

### Exercice 14 :

$ABC$  est un triangle tel que :  $a = BC = 7\text{cm}$ ,  $b = AC = 5\text{cm}$  et  $c = AB = 8\text{cm}$ .

On désigne par  $(\Gamma)$  le cercle de centre  $O$ , circonscrit au triangle  $ABC$  et par  $(\mathcal{C})$  le cercle de centre  $\Omega$  inscrit dans le triangle  $ABC$ .

1. Faire la figure.
2. Calculer le produit scalaire  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .
3. Soit  $I$  le milieu du segment  $[BC]$ . Calculer la longueur de la médiane  $[AI]$ .
4. a) En utilisant la formule d'AL-KASHI, calculer  $\cos\hat{BAC}$ .  
b) En déduire en degré la mesure de l'angle  $\hat{BAC}$ .
5. Déterminer successivement le demi-périmètre  $P$  de  $ABC$ , l'aire  $S$  de  $ABC$  et les rayons  $R$  et  $r$  respectifs de  $(\Gamma)$  et  $(\mathcal{C})$ .
6. Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $B$  sur  $(AC)$ .
  - a) En utilisant  $\sin\hat{BAC}$ , calculer la hauteur  $BH$  de  $ABC$ .
  - b) On rappelle que dans tout triangle, le produit de deux côtés consécutifs est égal au produit de la hauteur relative au troisième côté par le diamètre du cercle circonscrit à ce triangle.  
Retrouver la valeur de la hauteur  $BH$  calculée précédemment dans la question 6. a).

### Exercice 15 :

$MAB$  est un triangle et  $I$  est le milieu de  $[AB]$ .

- 1) Démontrer que :
$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2.$$
- 2) Appliquer cette formule lorsque le triangle  $MAB$  est rectangle en  $M$ . Quelle propriété retrouve-t-on ?
- 3) On donne :  $MA = 3$ ,  $MB = 5$  et  $AB = 7$ .  
Calculer le produit scalaire  $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ . En déduire la longueur de la médiane  $[MI]$ .

### Exercice 16 :

$ABCD$  est un carré de côté  $a$  et  $DCE$  est un triangle équilatéral et  $H$  le projeté orthogonal de  $E$  sur la droite  $(AB)$ . On s'intéresse au triangle  $BDE$ . Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

- Faire une figure.
- a) Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}$  en fonction de  $a$ .  
b) Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE}$  en fonction de  $a$ .  
c) En déduire  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DE} = -\frac{a^2}{2}(1 - \sqrt{3})$ .  
d) Utiliser ce résultat pour calculer  $BE^2$ . On pourra décomposer  $\overrightarrow{BE}$  en  $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}$ .  
e) Démontrer que :  $BE = \frac{a}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ .
- Calculer en fonction de  $a$ , l'aire exacte des triangles :  
a)  $ECD$ .  
b)  $ECB$ . (On pourra appliquer la formule des sinus).
- Calculer en fonction de  $a$ , l'aire du quadrilatère  $DBCE$
- Montrer que l'aire exacte du triangle  $EDB$  est égale à  $\frac{a^2}{4}(1 + \sqrt{3})$ .

### Exercice 17 :

Soit  $ABC$  un triangle isocèle de sommet  $A$ .

On donne :  $AB = 4\text{cm}$  et  $\widehat{ABC} = 50^\circ$ .

Calculer en  $\text{cm}^2$ , l'aire  $S$  du triangle  $ABC$ .

### Exercice 18 :

Soit  $ABC$  un triangle quelconque.

On désigne par  $BC = a$ ,  $AC = b$  et  $AB = c$ .

On appelle  $p$  son demi-périmètre et  $S$  son aire. On se propose de calculer  $S$  en fonction de  $a, b$  et  $c$ .

- a) Faire une figure que l'on complétera.  
b) Démontrer que :  $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ .  
c) En déduire  $\sin^2 \hat{A}$  en fonction de  $a, b$  et  $c$ .
- Démontrer que :  
$$\sin \hat{A} = \frac{1}{2bc} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)}$$
- Démontrer que :  
$$\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)}{16} = p(p-a)(p-b)(p-c)$$
- En déduire que :  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ .
- On appelle  $r$  le rayon du cercle  $(C)$  inscrit dans le triangle  $ABC$ .  
a) Démontrer que :  $S = pr$ .  
b) En déduire que :  $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ .
- On appelle  $R$  le rayon du cercle  $(C')$  circonscrit au le triangle  $ABC$ . Déterminer  $R$  en fonction de  $a, b$  et  $c$ .

### Exercice 19 :

Soit  $ABC$  un triangle quelconque tel que  $BC = a$ ,  $AC = b$  et  $AB = c$ . On désigne par  $S$  son aire,  $R$  le rayon du cercle  $(C)$  circonscrit au le triangle  $ABC$ .

- Montrer que :  
a)  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ .  
b)  $S = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B}$ .  
c)  $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$ .  
d)  $S = \frac{abc}{4R}$ .
- On note  $r$  le rayon du cercle inscrit dans le triangle  $ABC$  et  $p$  le demi-périmètre de ce triangle :  $2p = a + b + c$ .  
a) Démontrer que  $S = pr$ .  
b) En déduire que, lorsque le triangle  $ABC$  est équilatéral, alors  $R = 2r$ .

### Exercice 20 :

Soit  $ABC$  un triangle. On pose  $BC = a$ ,  $AC = b$  et  $AB = c$ . Les longueurs sont calculées au millimètre près et les angles au degré près.

- Calculer  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$  sachant que  $a = 5\text{cm}$ ,  $b = 3\text{cm}$  et  $c = 4,1\text{cm}$ .
- On donne :  $\hat{A} = 42^\circ$ ;  $b = 4\text{cm}$  et  $c = 2,5\text{cm}$ .  
Calculer  $a$ ,  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$ .
- On donne :  $\hat{A} = 18^\circ$ ;  $\hat{B} = 130^\circ$  et  $c = 6,2\text{cm}$ .  
Calculer  $a$ ,  $b$  et  $\hat{C}$ .

### Exercice 21 :

Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$  tel que  $AB = 5$  et  $BC = 6$ . Le point  $O$  milieu de  $[BC]$  se projette orthogonalement sur  $(AC)$  en  $H$ . Soit  $I$  le milieu de  $[OH]$  et  $J$  celui de  $[HC]$ .

- Faire une figure.
- Calculer les produits scalaires  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ .
- Calculer l'aire  $S$  du triangle  $ABC$ .
- Dans cette partie, on veut démontrer, en utilisant un repère orthonormé ; que les droites  $(AI)$  et  $(BH)$  sont perpendiculaires.  
a) Calculer  $AO$  puis justifier que  $(O; \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}; \frac{1}{4}\overrightarrow{OA})$  est un repère orthonormé.  
b) Déterminer dans ce repère les coordonnées des points  $A, B$  et  $C$ .  
c) Déterminer les équations des droites  $(AC)$  et  $(OH)$ .  
d) En déduire les coordonnées du point  $H$  puis calculer  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BH}$ . Conclure.