



T.D N° 5 DE MATHEMATIQUES

Activité Géométrique

Niveau : PREMIERE **Thème :** LIGNES ET SURFACES DE NIVEAUX **Série :** S

Exercice 1 :

On donne le segment $[AB]$ tel que $AB = 3$.

Déterminer et tracer dans chacun des cas suivants l'ensemble des points M tels que :

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$, où k est un nombre réel.

(1) $k = 6$; (2) $k = 0$; (3) $k = -2$.

Exercice 2 :

ABC est un triangle.

1. Que peut-on dire de $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$?

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $:\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$.

3. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que :

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$$

Exercice 3 :

I. On donne le segment $[AB]$ tel que $AB = 2$.

Déterminer et tracer dans chacun des cas suivants l'ensemble des points M tels que :

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$, où k est un nombre réel.

(1) $k = 3$; (2) $k = 0$; (3) $k = -1$.

II. On donne le segment $[AB]$ tel que $AB = 12$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer et tracer l'ensemble des points M tels que :

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$, où k est un nombre réel.

(1) $k = 13$; (2) $k = -27$; (3) $k = -36$; (4) $k = -40$.

Exercice 4 :

A et B étant deux points du plan tels que : $AB = 3$.

Déterminer et tracer dans chacun des cas suivants l'ensemble des points M tels que :

$MA^2 + MB^2 = k$, où k est un nombre réel.

(1) $k = 5$; (2) $k = 4,5$.

Exercice 5 :

ABC est un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueur 6.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 72.$$

2. a) Faire une figure.

b) Que remarque-t-on ? Justifier cette réponse.

Exercice 6 :

A et B étant deux points du plan tels que : $AB = 8$.

Déterminer dans chacun des cas suivants l'ensemble des points M tels que :

1. $MA^2 + MB^2 = 50$.

2. $MA^2 + MB^2 = 24$.

Exercice 7 :

On donne le segment $[AB]$ tel que $AB = 12$.

1. Déterminer l'ensemble des points M tel que :

$$3(\overrightarrow{MA})^2 + 2(\overrightarrow{MB})^2 = 60.$$

2. Déterminer l'ensemble des points M tel que :

$$2(\overrightarrow{MA})^2 - (\overrightarrow{MB})^2 = 0.$$

Exercice 8 :

On donne le segment $[AB]$ tel que $AB = 12$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer et tracer l'ensemble des points M tels que :

$\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = k$, où k est un nombre réel.

(1) $k = \frac{4}{3}$; (2) $k = \frac{3}{4}$; (3) $k = 0,5$; (4) $k = 3$.

Exercice 9 :

On considère deux points distincts A et B du plan.

1. Soit G_1 le barycentre des points pondérés $(A; 1)$, $(B; 2)$ et G_2 le barycentre des points pondérés $(A; 1)$, $(B; -2)$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que :

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) = 0.$$

2. Soit $k \in \mathbb{R}$.

a) Discuter suivant les valeurs de k , l'ensemble

(E_k) des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = k$.

b) Déterminer et construire (E_2) .

Exercice 10 :

Soit A et B deux points du plan (P) tel que $AB = 8$.
On considère l'application f de (P) dans \mathbb{R} définie par : $f(M) = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

1. a) Construire G l'isobarycentre du système $\{(A; 1), (B; 1)\}$.
b) Démontrer que $f(M) = 2MG^2 - 32$.
2. Déterminer puis construire l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $f(M) = 18$.

Exercice 11 :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AB = 4$, $AC = 6$. Pour tout point M du plan, on pose :
 $f(M) = MA^2 - 2MB^2$.

1. Exprimer $f(M)$ en fonction de MG^2 où $G = \text{bar}\{(A; 1), (B; -2)\}$.
2. Déterminer k pour que la ligne de niveau k passe par C . Construire cette ligne de niveau.
3. On pose pour tout point M du plan :
 $g(M) = MA^2 - 2MB^2 + MC^2$.
- a) Calculer $g(A), g(B), g(C), g(I)$; I étant le milieu de $[BC]$.
- b) Montrer que $g(M) = 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC} + \alpha$; où α est un réel que l'on déterminera.
- c) Reconnaître une ligne de niveau de l'application g
- d) Construire alors l'ensemble (Δ) des points M tels que : $g(M) = 0$.

Exercice 12 :

Soit ABC un triangle tels que : $AB = 6, AC = 3, BC = 7$. On désigne par G le barycentre des points $(A; 2)$ et $(B; -1)$.

1. Placer le point G .
2. Simplifier l'écriture du vecteur $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
4. Soit D le point tel que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
 - a) Placer le point D .
 - b) Déterminer puis construire l'ensemble (C) des points M du plan tel que :
 $(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) = 24$.

Exercice 13 :

ABC est un triangle équilatéral de côté 4 et de sens direct.

1. Construire les points I, J, K et D définis par : I milieu de $[AC]$, J le barycentre des points pondérés $(B; 1)$ et $(C; 3)$, K le barycentre des points pondérés $(A; 1), (B; \frac{1}{4})$ et $(C; \frac{3}{4})$ et

le point D tel que : $3\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

2. Montrer que D est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients que l'on précisera.
3. Démontrer que D est barycentre des points B et I affectés des coefficients que l'on déterminera. En déduire que D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$.
4. Calculer AD, BD et CD .
5. Déterminer l'ensemble (φ) des points M du plan tel que : $2MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 16$.
6. Vérifier que le centre de gravité G du triangle appartient à (φ) puis construire (φ).

Exercice 14 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que :

$$AB = 5, BC = 4 \text{ et } \widehat{CBA} = 60^\circ.$$

1. Faire la figure.
2. Soit f une application de (P) dans \mathbb{R} définie par :
 $f(M) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BM}$.
 - a) Calculer $f(A), f(B)$ et $f(C)$.
 - b) Déterminer et construire les lignes de niveau 26 et -8 de f .

Exercice 15 :

Dans le plan P , on donne les points A, B et C tels que : $AB = AC = 5$ et $BC = 6$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux manières différentes.
2. Soit G le barycentre des points pondérés $\{(A; 2), (B; 3), (C; 3)\}$. Construire G et calculer la distance GA .
3. Soit l'application du plan dans \mathbb{R} qui, à tout point M du plan fait correspondre le réel :

$$f(M) = 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}.$$

- a) Démontrer que $f(M) = f(G) + 4MG^2$.
- b) Calculer $f(A)$ et $f(G)$.
- c) Déterminer et construire l'ensemble des points M tel que : $f(M) = f(A)$.

Exercice 16 :

Soit $ABCD$ un carré de côté a , I le milieu de $[AB]$, J le milieu du segment $[CD]$ et O le centre du carré.

1. Montrer que $\forall M \in P$:
 $MA^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2 = 8\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OJ}$.
2. Déterminer l'ensemble E_k des points M du plan tels que :
 $MA^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2 = k$.
3. Déterminer k_0 en fonction de a pour que E_{k_0} passe par C .

Exercice 16 :

On considère le triangle ABC tel que $AB = 7$, $BC = 4$ et $AC = 5$. Soit I milieu du segment $[BC]$.

1. Démontrer que $AI = \sqrt{33}$.
2. a) Soit M un point du plan. Pour quelle valeur du nombre réel m le vecteur :
 $m\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est-il égal à un vecteur \vec{u} en fonction de \overrightarrow{AI} .
b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :

$$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = -58.$$

3. Soit D le barycentre du système $\{(A; -1); (B; 1); (C; 1)\}$.
 - a) Exprimer le vecteur \overrightarrow{AD} en fonction du vecteur \overrightarrow{AI} .
 - b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
 - c) Déterminer et construire l'ensemble (Γ') des points M du plan tels que :
 $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25$.

Exercice 17 :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 2$ et $AC = 4$.

1. Pour quelles valeurs de m le système $\{(A; m); (B; m + 3); (C; 4 - m)\}$ admet un barycentre G .
On pose $m = 1$. G est le barycentre de $\{(A; 1); (B; 4); (C; 3)\}$.
2. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :
 $7\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$. Montrer que G appartient à la droite (MM') .
3. a) Montrer que $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{8}(4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC})$.
b) Soit I le barycentre du système $\{(A; 1); (C; 3)\}$. Montrer que G est le milieu de $[BI]$.
c) Montrer que pour tout point M du plan,
 $MA^2 + 4MB^2 + 3MC^2 = 8MG^2 + AG^2 + 4BG^2 + 3CG^2$
4. a) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + 4MB^2 + 3MC^2 = 49,5$.
b) Montrer que cet ensemble est le cercle de diamètre $[BI]$. La construire.

Exercice 18 :

Soit A et B deux points du plan P . Soit l'application f de P dans \mathbb{R} , définie par : $f(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

1. Démontrer que pour tout point M de P ,
 $f(M) = IM^2 - \frac{AB^2}{4}$ où I désigne le milieu du segment $[AB]$.

2. En déduire la nature de la ligne de niveau correspondant à la valeur k . On discutera suivant les valeurs de k .
3. Déterminer les ensembles (E_1) , (E_2) et (E_3) des points M du plan P tels que :
 $(E_1) = \{M \in P / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = AB^2\}$
 $(E_2) = \{M \in P / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0\}$
 $(E_3) = \left\{M \in P / f(M) = -\frac{AB^2}{4}\right\}$.

Exercice 19 :

Dans le plan euclidien P , on considère le triangle ABC rectangle et isocèle A tel que : $AB = AC = a$ avec $a \in \mathbb{R}^+$.

1. Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés $(A; 2)$, $(B; 1)$ et $(C; 1)$.
2. Pour tout point M du plan P , on pose
 $\vec{V} = -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
 - a) Démontrer que le vecteur \vec{V} est un vecteur constant indépendant de M .
 - b) Construire le point A' tel que : $\overrightarrow{AA'} = \vec{V}$.
 - c) Calculer $\|\overrightarrow{AA'}\|$ et $\|\overrightarrow{AG}\|$ en fonction de a .
3. $\vec{U} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
 - a) Montrer que le vecteur $\vec{U} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est égal à $4\overrightarrow{MG}$.
 - b) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\|$.
4. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M du plan tel que :
 $-2\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 + \|\overrightarrow{MC}\|^2 = a^2$.
5. a) Construire les barycentres G_1 et G_2 des systèmes massifs : $\{(A; 2); (B; 1)\}$ et $\{(B; 2); (C; 3)\}$.
b) Déterminer l'ensemble (λ) des points M du plan tel que : $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|3\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MB}\|$.

Exercice 20 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Une unité de longueur étant choisie, faire une figure. Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3; B' est le milieu de $[AC]$ et D le point défini par :
 $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$.

1. Démontrer que D est le barycentre de : $(A; 3)$, $(B; -2)$; $(C; 3)$.
En déduire que D appartient à la médiatrice de $[AC]$.

- Démontrer que $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$.
- Calculer DA^2 et DB^2 .
- Déterminer l'ensemble (E) des points M vérifiant :
$$3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12.$$

Exercice 21 :

$ABCD$ est un rectangle tel que : $AB = 4$ et $AD = 3$.

- Déterminer le barycentre de $(A; 1)$; $(B; -1)$ et $(C; 1)$.
- Déterminer l'ensemble E des points M du plan tel que :
$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 5.$$
- Quel est l'ensemble F des points M du plan tels que :

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = \frac{25}{4}.$$

- Quel est l'ensemble H des points M du plan tels que :
$$MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2 = 61.$$

Faire une figure. Tracer E, F et H .

Exercice 22 :

$ABCD$ est un carré de côté a .

- Construire le barycentre G du système $\{(A; 2); (B; -1); (C; 1)\}$.
- Déterminer et représenter l'ensemble (E_1) des points M du plan vérifiant : $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = a$.
- Déterminer et représenter l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que : $MB^2 - 2MC^2 + MD^2 = 2a^2$.
- Déterminer les réels α, β et γ tels que A soit le barycentre du système : $\{(A; \alpha); (B; \beta); (C; \gamma)\}$.
- Déterminer et représenter l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que : $MB^2 - MC^2 + MD^2 = a^2$.
- Déterminer et construire l'ensemble (E_4) des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} - MC^2 = 0.$$

Exercice 23 :

Soit A et B deux points distincts du plan. On appelle ligne de niveau $k(k > 0)$, de la fonction $f \mapsto \frac{MA}{MB}$ l'ensemble des points M du plan tels que

$$f(M) = \frac{MA}{MB} = k.$$

- Si $k = 1$, quelle est la ligne de niveau 1 de la fonction f ?
- On suppose que $k \neq 1$. Montrer que pour tout point M du plan, $\frac{MA}{MB} = k$ si et seulement si
$$(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0.$$
- On désigne de I et J respectivement les barycentres des systèmes $\{(A; 1); (B; k)\}$ et $\{(A; 1); (B; -k)\}$.

- Déterminer les lignes de niveau k de la fonction.
 - En déduire la ligne pour $k = 2$.
4. On pose : $AB = 3$ et on désigne par G le barycentre des points $(A; 1)$ et $(B; 2)$.
- Démontrer que $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + 6$.
 - Déterminer puis construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que :
$$MA^2 + 2MB^2 = 9.$$
5. On choisit un repère orthonormal de manière que A soit l'origine du repère et B est pour coordonnées $(3; 0)$.
Retrouver analytiquement l'ensemble (C) .

Exercice 24 :

Dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les points $A(-2; 2)$ et $B(2; 2)$.

- Calculer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.
- Démontrer que pour tout point M du plan on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.
- Démontrer que l'ensemble (C) des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = 40$ est le cercle de centre I et de rayon 4.
- Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) .
- Soit a un réel négatif. Comment choisir a pour que le point $C(\sqrt{7}; a)$ soit sur le cercle (C) .
- Déterminer les coordonnées des points d'intersections de (C) avec l'axe des abscisses.



<<L'ignorant affirme, le savant doute et le sage réfléchit.>>

ARISTOTE

GÉNIE = 1% D'INSPIRATION + 99% DE
TRANSPARATION