

T.D N° 8 DE MATHÉMATIQUESActivité GéométriqueNiveau : PREMIEREChap. VI : TRIGONOMETRIESérie : S**Exercice 1 :**

- Définir le cercle trigonométrique.
- Quelle est la longueur du cercle trigonométrique ?
- Placer sur un cercle trigonométrique (C) de centre O les points images des nombres réels suivants :
a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{19\pi}{4}$ c) $-\frac{23\pi}{6}$ d) 3π e) $-\frac{101\pi}{9}$ et f) $\frac{2\pi}{3}$.
- Dans chaque cas, dire si les deux nombres réels ont le même point image sur le cercle trigonométrique :
a) $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{13\pi}{6}$ b) $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{11\pi}{4}$
d) $-\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{13\pi}{3}$ d) π et $-\pi$.

Exercice 2 :On donne $\alpha = \frac{104\pi}{4}$ et $\beta = -\frac{1999\pi}{6}$.

- Placer sur un cercle trigonométrique les lignes trigonométriques des angles remarquables et associés.
- Calculer le cosinus, le sinus et la tangente des nombres α et β .

Exercice 3 :Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .On donne les points $A\left(2; \frac{5\pi}{6}\right)$, $B\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$, $C\left(1; -\frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $E(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

- Placer ces points dans le repère.
- Déterminer les coordonnées rectangulaires des points A, B et C .
- Donner les coordonnées polaires des points D et E .

Exercice 4 :Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .On donne les points $A\left(2; \frac{2\pi}{3}\right)$ et $B\left(2; \frac{5\pi}{6}\right)$. Soit S unpoint du plan tel que $\vec{OS} = \vec{OA} + \vec{OB}$.

- Placer ces points dans le repère.
- Donner les coordonnées du point S .
- On donne les points $K(4; 0)$, $L(0; 4)$ et $S(4; 4)$.
Quelles sont leurs coordonnées polaires ?

Exercice 5 :

- Ecrire le plus simplement possible :

$$A = \sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$B = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$D = \cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) + \cos(-x)$$

$$E = \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin(-x).$$

- Démontrer que, pour tout nombre réel α , on a :

a) $\cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$;

b) $\sin \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$.

- On considère un nombre réel α tel que :

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ et } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2}{3}.$$

Calculer $\cos \alpha$, $\cos 2\alpha$ et $\tan 2\alpha$.**Exercice 6 :**Déterminer la mesure de l'angle θ en radian dans chacun des cas suivants :

a)
$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \cos \theta = 0 \\ \sin \theta = 1 \end{cases}$$

Exercice 7 :

- En remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, calculer :

a) $\cos \frac{5\pi}{12}$, $\sin \frac{5\pi}{12}$ et $\tan \frac{5\pi}{12}$.

b) $\cos \frac{7\pi}{12}$, $\sin \frac{7\pi}{12}$ et $\tan \frac{7\pi}{12}$.

- Exprimer $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice 8 :

- Démontrer que pour tous nombres réels a et b ; on a : $2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$.
- En déduire que :

$$2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \right) = \sin \frac{6\pi}{7}.$$

3) Démontrer que : $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Exercice 9 :

1. x et y deux nombres réels de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que :

$$\cos x = \frac{3}{5} \text{ et } \sin y = \frac{1}{3}.$$

Calculer $\sin(2x - y)$.

2. x est un nombre réel. Démontrer que :

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8};$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}.$$

Exercice 10 :

I- x est un nombre réel non multiple entier de $\frac{\pi}{2}$.

1. Démontrer que : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$.

2. Exprimer en fonction de $\cos 2x$:

a) $\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x}$ b) $\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x}$

II- x est un nombre réel tel que : $\cos x \neq 0$.

1. Démontrer que : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

2. Calculer $\sin x$ et $\cos x$ dans chacun des cas suivants :

a) $\tan x = \frac{1}{3}$ et $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$;

b) $\tan x = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$.

III- Sachant que $\sin x = -0,3$ calculer la valeur numérique de l'expression :

$$(\sin^3 x + \cos^2 x \sin x) \cos \left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Exercice 11 :

I- a) Exprimer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$

b) Exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$.

II- Sachant que $\cos a = \frac{1}{3}$, calculer $\cos 2a$.

III- Calculer $\cos x$ et $\tan x$, sachant que : $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ et

$$x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[.$$

IV- Calculer $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$, sachant que :

$$\cos(5\pi - x) = \frac{4}{5} \text{ et } x \in]0; \pi[.$$

V- Calculer $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$, sachant que :

$$\sin(-x) = \frac{2}{\sqrt{13}} \text{ et } x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \pi\right[.$$

VI- En remarquant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, démontrer que :

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

VII- En remarquant que $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$, calculer $\cos \frac{3\pi}{8}$ et

$$\sin \frac{3\pi}{8}.$$

Exercice 12 :

x est un nombre réel tel que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et

$$\sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

1) Calculer $\cos 2x$ et $\sin 2x$.

2) Calculer $\cos 4x$.

3) Que peut-on dire de $\cos 4x$ et $\sin x$?

4) En déduire la valeur exacte de x .

Exercice 13 :

Démontrer que pour tout nombre réel, on a :

a) $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4 \cos x \sin x$;

b) $(1 + \cos x + \sin x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$;

c) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$;

d) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$;

e) $(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) = \sin^3 x - \cos^3 x$;

f) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - \cos^2 x$;

g) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$;

h) $\sin^4 x + \sin^2 x = \cos^4 x - 3\cos^2 x + 2$;

i) Pour $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{2 + \sin 2x - 2 \cos 2x}{1 + 3\sin^2 x - \cos 2x} = \frac{2}{5} \left(2 + \frac{1}{\tan x} \right) ;$$

j) Pour $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{1 + \cos x - \sin x}{1 - \cos x - \sin x} = -\frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Exercice 14 :

I-1) Pour tout nombre réel x , démontrer que :

$$(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2.$$

2) Calculer $\cos x$ et $\sin x$, dans chacun des cas suivants :

a) $\cos x - \sin x = -1$;

b) $\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$.

II- Démontrer que, pour tout nombre réel x :

$$\sin x = \sin \left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) ;$$

$$\cos x = \cos \left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} - x\right).$$

III- Démontrer que pour tout élément x de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on

$$a : \sqrt{1 + \sin 4x} = |\sin 2x + \cos 2x|.$$

VI- Calculer $\cos x$ et $\sin x$ dans chacun des cas :

a) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ et $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$;

b) $\cos 2x = \frac{7}{25}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$;

c) $\cos 2x = -\frac{7}{9}$ et $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$;

d) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

VII- Calculer $\sin 2x$ et $\cos 2x$ dans chacun des cas :

- a) $\sin x = \frac{1}{3}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
 b) $\cos x = -\frac{3}{5}$ et $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$;
 c) $\tan x = -3$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Exercice 15 :

I- On donne les réels X et Y tels que :

$$X = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} ;$$

$$Y = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}.$$

1. Calculer $X + Y$ et $X - Y$.

2. En déduire X et Y .

II- 1) Vérifier que $\frac{7\pi}{24} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{24}$ et $\frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{24}$.

2) Démontrer que :

$$16 \sin \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{7\pi}{24} \cdot \sin \frac{11\pi}{24} = 1.$$

Exercice 16 :

1. Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$.

2. Montrer que $\cos \frac{\pi}{8}$ est solution d'une équation du 4^{ième} ordre.

3. Résoudre cette équation et donner la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$.

Exercice 17 :

1. Factoriser :

$$A = \sin x - 2 \cos x + \sin 3x ;$$

$$B = \sin a + \sin 3a + 2 \sin 2a ;$$

$$C = \cos a + \cos 3a + 2 \cos 2a ;$$

$$D = \sin a - \sin 2a ;$$

$$E = \sin^2 3x - \sin^2 5x ;$$

$$F = \cos x + 2 \cos 2x + \cos 3x ;$$

$$G = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x ;$$

$$H = \sin x - \cos 3x$$

2. Linéariser :

$$A = \sin^2 x \cdot \cos^2 x ;$$

$$B = \sin^3 x \cdot \cos x ;$$

$$C = \cos 5a \cos 6a ;$$

$$D = \cos 3a \sin 5a ;$$

$$E = \sin 2a \sin 8a ;$$

$$F = \cos \left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \times \cos \left(-x + \frac{\pi}{4}\right) ;$$

$$G = \sin \left(-x + \frac{\pi}{9}\right) \times \sin \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) ;$$

$$H = \sin \left(-2x + \frac{\pi}{4}\right) \times \cos \left(2x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

3. Démontrer que :

a) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - x\right) ;$

b) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} + x\right).$

4. Transformer :

$$f(x) = \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x ;$$

$$g(x) = \sin x - \cos x.$$

Exercice 18 :

I- Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $\cos x = -2024$ b) $\cos x = 2025$

c) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\cos x = \frac{1}{2}$ e) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\sin x = -4$ g) $\sin x = 2023$ h) $\sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

i) $\tan x = -\sqrt{3}$ j) $\tan x = 1$ k) $\tan 2x = \sqrt{3}$

l) $\cos x = \cos \left(2x + \frac{3\pi}{4}\right)$

m) $\sin \left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

n) $\tan 3x = \tan \left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$

o) $\cot 3x = \cot \left(x - \frac{\pi}{3}\right).$

p) $\cos x = \sin 2x$; q) $\tan 2x = \cot x.$

r) $\cos(3x + \pi) + \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

s) $|\sin 3x| = |\sin 2x|$

t) $\cos x + \sin 2x = 0$

u) $\cos 5x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

v) $\cos \left(x - \frac{5\pi}{4}\right) = -\sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

w) $\sin^2 \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

x) $\cos^2 \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

y) $3 - 4 \cos^2 2x = 0$

z) $\sin x + 2 \cos 3x \times \sin x = 0.$

II- 1) Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$2x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 ;$$

$$2x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

2) En déduire la solution des équations suivantes :

$$2 \cos^2 x - (1 + \sqrt{3}) \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 ;$$

$$2 \sin^2 x - (1 + \sqrt{2}) \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Exercice 19 :

1. Calculer :

$$A = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} ;$$

$$B = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}.$$

2. En déduire que : $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$.

Exercice 20 :

A l'aide de la calculatrice, trouver des valeurs approchées des solutions appartenant à $]-\pi; \pi]$ pour chacune des équations suivantes :

- (1) $\sin x = 0,8$ (4) $\sin x = -0,3$
 (2) $\cos x = -0,4$ (5) $\cos x = 0,9$
 (3) $\tan x = 7$ (6) $\tan x = -0,7$

Exercice 21 :

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

- a) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$;
 b) $\sin 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;
 c) $\sin\left(-x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$;
 d) $\cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos 3x = 0$;
 e) $-2\cos^2 x + \cos x + 6 = 0$;
 f) $\sin^2 2x - \sqrt{3} \sin 2x + \frac{3}{4} = 0$;
 g) $\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$;
 h) $4\cos^2 x + 3\sin^2 2x = 0$;
 i) $2 \cos 2x + 4 \cos x - 1 = 0$;
 j) $\sin 2x - 2 \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$;
 k) $3 \cos x - \sqrt{3} \sin x + \sqrt{6} = 0$;
 l) $\cos 2x - \sin 2x = -1$.

Exercice 22 :

Résoudre dans \mathbb{R} chacune des équations suivantes :

- (1) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}$;
 (2) $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x - 1 = 0$;
 (3) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$;
 (4) $\sqrt{2}(\cos x + \sin x) = -1$;
 (5) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = -1$;
 (6) $\sqrt{3} \sin x + 3 \cos x = 1$;
 (7) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = -\sqrt{2}$;
 (8) $3 \cos 5x - 4 \sin 5x = 3$;
 (9) $-6\sin^2 5x - 4 \sin 5x = 2$;
 (10) $\sin^2 3x - \sin^2 x = 0$;
 (11) $\cos 4x + \sin^2 x - 2 = 0$;
 (12) $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 1$;
 (13) $\tan x - \frac{3}{\tan x} = 2$;
 (14) $-4\cos^2\left(\frac{3x}{2}\right) + 4\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right) - 2 = 0$;
 (15) $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$;
 (16) $2\cos^2 x - (2 + \sqrt{2}) \cos x + \sqrt{2} = 0$;

(17) $2\sin^2 3x - \sqrt{3} \sin 3x = 0$;

(18) $2\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$;

(19) $2 \sin x + \frac{2}{\sin x} + \frac{3}{\sin^2 x} - 7 = 0$;

(20) $\cos 4x - \sqrt{2} \cos 2x = 1$.

(21) $\sin 3x = 2 \sin x$ (Après avoir exprimé $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$).

Exercice 22 :

Résoudre dans D les équations suivantes :

- a) $2 \cos x = \sqrt{2}$, $D = [-2\pi; 2\pi]$;
 b) $\sin x = \frac{1}{2}$, $D = [-\pi; 3\pi]$;
 c) $3\tan^2 x - 1 = 0$, $D = [-\pi; \pi]$;
 d) $\tan^2 x + (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0$, $D = [0; 2\pi[$.

Exercice 23 :

Résoudre dans D les inéquations suivantes :

- a) $\sin x > -\frac{1}{2}$, $D = \mathbb{R}$, $D =]-\pi; \pi]$, $D = [0; 2\pi[$;
 b) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $D = \mathbb{R}$;
 c) $\tan x < 1$, $D =]-\pi; \pi]$;
 d) $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} < 0$, $D = \mathbb{R}$;
 e) $2\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \geq 0$, $D =]-\pi; \pi]$;
 f) $\sqrt{3} \tan x + 1 < 0$, $D = \mathbb{R}$;
 g) $\tan(3x) + 1 \leq 0$, $D = \mathbb{R}$;
 h) $\sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \leq 0$, $D = [0; 2\pi[$;
 i) $\sin x - \cos x \leq 0$, $D = \mathbb{R}$;
 j) $\cos x \leq \frac{1}{2}$, $D = [0; 2\pi]$;
 k) $\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \leq 0$, $D = [0; 2\pi]$;
 l) $\begin{cases} \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \sin x + 1 \geq 0 \end{cases}$, $D = [0; 2\pi[$;
 m) $\begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$, $D = \mathbb{R}$;
 n) $\begin{cases} \sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 2x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$, $D = \mathbb{R}$;
 o) $\frac{1-2 \cos x}{2 \sin x - \sqrt{3}} \geq 0$, $D =]-\pi; \pi]$;
 p) $\frac{2 \cos 2x - 1}{1 + 2 \cos 2x} < 0$, $D = [0; 2\pi[$;
 q) $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x - 1 \leq 0$, $D = [0; 2\pi]$;
 r) $2\cos^2 x - 3 \cos x - 2 \geq 0$, $D = [0; 2\pi]$;
 s) $\sin 3x + \cos x \geq 0$, $D = [-\pi; \pi]$;
 t) $\sin^2 x - \frac{1}{2} \leq 0$, $D =]-\pi; \pi]$;
 u) $\cos x (2 \sin x - 1) \leq 0$, $D =]-\pi; \pi]$;
 v) $2\cos^2 x + \sqrt{3} \cos x \geq 0$, $D = [0; 2\pi]$;

w) $4\sin^2 x + 2(\sqrt{2} - 1)\sin x - \sqrt{2} \leq 0, D = [0; 2\pi[;$

x) $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0, D = \mathbb{R};$

y) $|\tan x| \geq 1, D = \mathbb{R};$

z) $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, D = [0; 2\pi];$

aa) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, D = [-\pi; \pi];$

bb) $-1 \leq \tan x \leq 1, D = [-\pi; \pi].$

Exercice 24 :

Soit p un polynôme défini par :

$$p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2.$$

- Calculer $p(-1)$. Que peut-on en déduire ?
- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $p(x) = 0$.
- On donne $(E) : 2\cos^3(2x) - \cos^2(2x) - 5\cos(2x) - 2 = 0$.
 - Résoudre dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$ l'équation (E) .
 - Placer les images des solutions de (E) sur le cercle trigonométrique.
- Résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ les équations :
 $\tan(2x) = 1$ et $\cot(3x) = \sqrt{3}$.
- Calculer les valeurs exactes des cosinus, sinus et tangentes de nombres suivants :
 $\frac{25\pi}{3}; -\frac{97\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}; -\frac{11\pi}{4}; \frac{109\pi}{3}$ et $\frac{22\pi}{3}$.

Exercice 25 :

Soit l'équation $(E) : -\sqrt{3}\cos x + \sin x = -\sqrt{2}$.

- a) Montrer que : $-\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$.
 b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E) .
- On donne $f(x) = (\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x)$.
 - Montrer que $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$.
 - Montrer que $f(x) = \cos 4x$.
 - Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$2f(x) + 1 = 0 \text{ et } \frac{\sin 4x}{f(x)} = 1.$$

- On pose $\beta = \frac{11\pi}{12}$.
 - Vérifier que $\beta = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$.
 - Calculer $\cos \beta$ et $\sin \beta$.

Exercice 26 :

On considère la variable réelle x telle que :

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - u\right).$$

- a- Montrer que $\sin u + \cos u = x\sqrt{2}$.
 b- Calculer $(\cos u + \sin u)^2$.
 c- En déduire l'expression de $\sin u \cos u$ en fonction de x .
- On donne $f(x) = \frac{\sin u + \cos u}{\sqrt{2} \sin u \cos u}$.
 Exprimer $f(x)$ en fonction de x , puis calculer en dérivée f' de f .

Exercice 27 :

On pose : $K(x) = \cos^2 x - \cos^4 x$.

- Factoriser $K(x)$.
- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $K(x) = 0$.
- On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$g(x) = \frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x}.$$

Donner l'ensemble de définition de la fonction g et simplifier l'écriture de $g(x)$.

Exercice 28 :

On considère l'équation :

$$(E) : 8x^3 - 4\sqrt{3}x^2 - 2x + \sqrt{3} = 0.$$

- Vérifier que $\frac{1}{2}$ est une solution de (E) .
- Trouver toutes les solutions de (E) .
- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$8\sin^3 x - 4\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x + \sqrt{3} = 0.$$

Exercice 29 :

- Calculer $B = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$.
- On donne l'équation $(E) : 4x^2 + 2x(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \sqrt{6} = 0$.
 - Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E) .
 - En déduire les solutions dans $[0; 2\pi]$ de l'équation
 $(E') : 4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{6} - 4 = 0$.
 - Placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette équation.

Exercice 30 :

- En utilisant une autre écriture de $\sin(4x + x)$, démontrer l'égalité suivante :
 $\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$.
- Démontrer que $\frac{\pi}{5}$ est solution de l'équation :
 $16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x = 0$.
- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :
 $16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x = 0$.
- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :
 $16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$.
- En remarquant que : $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$, déduire des questions précédentes la valeur $\sin \frac{\pi}{5}$.

Exercice 31 :

On considère le système (S) d'équation :

$$(S) : \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3} + 1}{4} \\ \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3} - 1}{4} \end{cases}$$

- Démontrer que le système (S) est équivalent au système (S') suivant :

$$(S') : \begin{cases} \cos(x+y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

2. Résoudre le système (S).

Exercice 32 :

On considère le système (S) d'équation :

$$(S) : \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{6} \\ \sin x \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

1. Démontrer que :

a) $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \times \sin y$;

b) le système (S) est équivalent au système (S')

suivant :

$$(S') : \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{6} \\ \cos(x-y) = 0 \end{cases}$$

2. Résoudre le système (S).

Exercice 33 :

(1) x et y étant deux nombres réels quelconques, factoriser : $\cos(x+y) + \cos(x-y)$.

(2) Trouver les couples solutions du système (S)

suivant :

$$(S) : \begin{cases} x-y = \frac{\pi}{4} \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Exercice 34 :

1. Résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :

a) $2y^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})y + \frac{\sqrt{6}}{2} = 0$;

b) $2y^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})y + \frac{\sqrt{6}}{2} \leq 0$.

2. Résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :

a) $2\cos^2 x + (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \sin x - \frac{\sqrt{6}}{2} - 2 = 0$;

b) $2\cos^2 x + (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \sin x - \frac{\sqrt{6}}{2} - 2 \geq 0$.

Exercice 35 :

1. a) Vérifier que $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$.

b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$2X^2 + (1 - \sqrt{2})X - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

c) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation :

$$2X^2 + (1 - \sqrt{2})X - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$

2. Dédire de la question 1.b) la résolution dans \mathbb{R} de l'équation :

$$2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2}) \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette équation.

3. Dédire de la question 1.c) la résolution dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ et $]0; 2\pi]$ de l'inéquation :

$$2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2}) \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$

Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette inéquation.

Exercice 36 :

A, B, C sont les mesures des angles d'un triangle.

Démontrer que :

a) $\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}$ (2) $\tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$.

Exercice 37 :

1. Vérifier que $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

2. Soit x et y deux nombres réels de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que :

$$\sin x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

a) Calculer $\cos x$.

b) Calculer $\sin y$. En déduire la valeur de y .

3. Calculer :

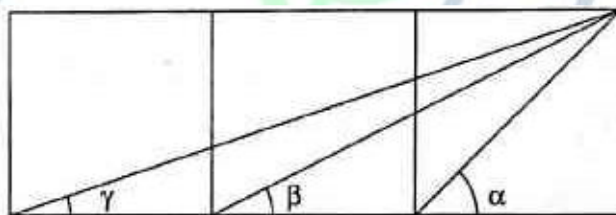
a) $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$.

b) $\cos(x-y)$ et $\sin(x-y)$.

4. En déduire la valeur de x .

Exercice 38 :

On considère trois carrés disposés comme dans la figure ci-dessous :



Calculer $\cos(\beta + \gamma)$; en déduire que : $\alpha = \beta + \gamma$.

Aristote

<<L'ignorant affirme, le savant doute et le sage réfléchit.>>

Einstein

<<La connaissance s'acquiert par l'expérience, tout le reste n'est que de l'information.>>

Hardy

<<Il n'y a pas de place durable dans le monde pour les mathématiques laides.>>

GÉNIE = 1% D'INSPIRATION

+99% DE TRANSPIRATION

Nul n'entre ici s'il n'est géomètre