LYCÉE DE KINTÉLÉ
DIRECTION DES ÉTUDES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

République du Congo

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES EN PREMIÈRE

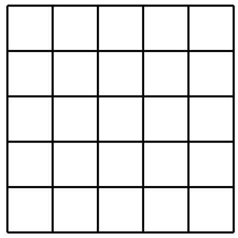
Niveau : Première D — Durée : 03 heures — Date : 12 Mai 2026

Exercice 1. " 3 Points "

❶ Montrer par récurrence l'égalité, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

❷ Déterminer le nombre de carrés de ce carré :



Exercice 2. " 3 Points "

Soit h une fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-1

❶ Déterminer l'ensemble de définition E_h de h.

❷ Déterminer les limites de h aux bornes de E_h.

❸ Déterminer le signe de $h(2)$ et de $h'(9)$.

❹ Déterminer le sens de variation de h sur $\mathbb{R}$.

❺ Déterminer le signe de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

❻ Tracer la courbe $(\mathcal{C}_h)$ dans un $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ unité graphique $2cm$.

Exercice 3. " 3 Points "

Soit E et F deux ensembles définies par : $E = \{1; 2; 3; 5; 7\}$ et $F = \{1; 3; 4; 5; 6; 8\}$

❶ Déterminer le cardinal des ensembles E et F.

❷ Déterminer les ensembles A et B tels que :
$A = E \cup F$ et $B = E \cap F$.

❸ Déterminer $Card(E \backslash F)$ et $Card(F \backslash E)$.

❹ Déterminer le cardinal des ensembles A et B.

❺ Déterminer les ensembles $G = A \cup B$ et
$H = A \cap B$.

❻ Déterminer le cardinal des ensembles G et H.

Exercice 4. " 4 Points "

Les questions sont indépendantes.

❶ Combien y a-t-il de carrés dans un quadrillage de 9 cases sur 9.

❷ Dans une compétition sportive groupant 10 équipes, chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?

❸ Une personne dispose de deux pantalons P_1, P_2 de trois chemises C_1, C_2, C_3 et de deux vestes V_1, V_2. De combien de manières peut-elle s'habiller ?

❹ L'anagramme d'un mot est un mot obtenu en permutant ses lettres. Les anagrammes du mot BAC sont : **BAC, BCA , ABC, ACB , CBA et CAB**.

(a) Combien d'anagrammes admet les mots : **CONGO ; BRAZZAVILLE ; KINTELE .**

(b) Soient $a; b \in \mathbb{R}$ et $k; n \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$. Combien d'anagrammes admet le mot : $\underbrace{aa\cdots a}_{k}\underbrace{bb\cdots b}_{n-k}$

❺ A la fin de l'année scolaire, tous les élèves se serrent la main. S'il y a 35 élèves, combien de poignées de mains sont échangées ?

❻ Trente voyageurs prennent le même bus qui va s'arrêter dans dix stations. De combien de façon peut-on envisager les descentes des voyageurs ?

❼ Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $n! = (n-1)! + 4(n-1) + 6.$

❽ Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + (n-1) \times (n-1)! = 2^n - 1.$

Exercice 5. " 4 Points "

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{x}\cos x}{x+1} & ;\ \text{si } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{x^2}{2(\sqrt{x^2+1}-1)} & ;\ \text{si } x < 0 \end{cases}$$

❶ (a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\dfrac{1-\sqrt{x}}{x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1+\sqrt{x}}{x+1}$.

(b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

❷ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) + \dfrac{1}{2}x\right)$. Interpréter graphiquement ces résultats.

❸ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ puis déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ f(x)$.

Exercice 6. " 3 Points "

Soit Γ un cercle de centre O et A un point de Γ.

❶ Placer le point B de Γ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

❷ Pour tout entier naturel n; on considère les points M_n tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM_n}}) \equiv \dfrac{n\pi}{4}[2\pi]$.

(a) Placer les points M_0; M_1; M_2 et M_7.

(b) Pour quelles valeurs de n, les vecteurs $\overrightarrow{OM_n}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont-ils colinéaires ?

(c) Pour quelles valeurs de n, les vecteurs $\overrightarrow{OM_n}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont-ils orthogonaux ?