Barème et correction – Sur 20 points

DEVOIR DE NIVEAU 1ERE D DE MATHEMATIQUE No1

Exercice 1 (QCM) — 2 / 2 pts

1 – C — **0,5 pt**
2 – C — **0,5 pt**
3 – B — **0,5 pt**
4 – C — **0,5 pt**

Exercice 2 (Vrai / Faux) — 2/ 2 pts

1 – Faux — **0,75 pt**
2 – Vrai — **0,75 pt**
3 – Faux — **0,75 pt**
4 – Faux — **0,75 pt**

Exercice 3 — 4 / 4 pts

Soit le polynôme P défini sur R par $P(x) = x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6}$

1- Discriminant (0.75 / 0.75pt)

$\Delta = b^2 - 4ac$ ..... **0,25 pt**

$= [-(\sqrt{3} + \sqrt{2})]^2 - 4(1)(\sqrt{6})$

$= (\sqrt{3})^2 + 2\times(\sqrt{3})\times(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{6}$

$= 3 + 2\sqrt{6} + 2 - 4\sqrt{6}$

$\Delta = 5 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet 2 racines..... **0,50 pt**

2- Déterminons les racines x_1 et x_2 ..... (1/1 pt)

$x_1 = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$, donc $\mathbf{x_1 = \sqrt{2}}$ ..... **0,5 pt**

$\mathbf{x_2 = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}}$, **donc $x_2 = \sqrt{3}$**..... **0,5 pt**

3- P(x) sous forme de produit de facteurs..... (0,5 /0,5 pt)

$P(x) = (x - \sqrt{3})(x - \sqrt{2})$..... **0,5 pt**

4- Tableau de signe ..... 1 pt

Pour P(x) = 0 ; on a, $(x - \sqrt{3})(x - \sqrt{2}) = 0$ *équivaut* à $\boldsymbol{x_1 = \sqrt{2}}$ ***et*** $\boldsymbol{x_2 = \sqrt{3}}$ (Les racines sont $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$)

X	$-\infty$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
P(x)		+	0	−	0	+	

5- Solution de P(x) < 0 ..... **0.75 pt**

$$S_{\mathbb{R}}: P(x) < 0 \text{ si } x \in]\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\,[$$

Exercice 4 — 7 / 7 pts

Partie A .....**4/4 Pts**

Équation (E) : $2x^4 - 10x^2 + 12 = 0$.....**2 / 2 Pts**

Posons $X = x^2$, on a : $2X^2 - 10X + 12 = 0$..... **0,25 pt**

$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times (2) \times (12) = 100 - 96$, **donc Δ = 4** .... **..0,25 pt**

Δ > 0 donc elle admet 2 racines.

$X_1 = (10 - \sqrt{4})/4 = 8/4$, donc $X_1 = 2$ et $X_2 = (10 + 2)/4 = 12/4$, donc $X_2 = 3$.....**0,50 pt**

Or $X = x^2$, donc : $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ et $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$ ....**0,05 pt**

$S_R = \{-\sqrt{3}\,; -\sqrt{2}\,; \sqrt{2}\,; \sqrt{3}\}$..... **0.5 Pt**

B) Inéquation (I) : $\sqrt{-x^2 + 3x - 2} < x - 1$ **2 / 2 Pts**

Condition de (I) $\begin{cases} -x^2 + 3x - 2 \geq 0 & (S1) \\ x - 1 \geq 0 & (S2) \\ -x^2 + 3x - 2 \leq (x-1)^2 & (S3) \end{cases}$ ..... **0.25 pt**

Déterminons S_1 :

Δ = 3² − 4×(−1)×(−2) = 9 − 8 = 1 **; alors** $x_1 = (-3 - 1)/(-2) = 2$; $x_2 = (-3 + 1)/(-2) = 1$

Tableau de signe :

X	$-\infty$		1		2		$+\infty$
P(x)		−	0	+	0	−	

$S_1 = [1\,;\,2]$ **0,50pt**

Déterminons S_2 : $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, donc

S_2 = [1 ; +∞ [..... **0,25 pt**

EV = $S_1 \cap S_2$ = [1 ; 2] ....**0,25 pt**

Déterminons S_3 :

$$-x^2 + 3x - 2 \leq (x-1)^2$$
$$\Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 \leq x^2 - 2x + 1$$
$$\Leftrightarrow -2x^2 + 5x - 3 \leq 0$$
$$\Delta = 25 - 4 \times (-2) \times (-3) = 25 - 24 = 1\,;$$

$$x_1 = (-5 - 1)/(-4) = 3/2 \; et \; x_2 = (-5 + 1)/(-4) = 1$$

Tableau de signe :

X	$-\infty$		1		$3/2$		$+\infty$
P(x)		−	0	+	0	−	

$S_3 =]-\infty ; 1] \cup [3/2 ; +\infty[$..... **0,25 pt**

$S_{\mathbb{R}} = EV \cap S_3$

$S_{\mathbb{R}}$ = [3/2 ; 2]..... **0,50 pt**

Parie B.....**3/3 Pts**

$$\boldsymbol{P(x) = (m-2)x^2 + 2(m-2)x - 2}$$

1- <u>Valeur de m pour laquelle P n'est pas du second degré</u>

P n'est pas un polynôme du second degré si $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.....0,50 pt

2- <u>Valeurs de m pour lesquelles P admet deux zéros distincts (m ≠ 2)</u>

$\Delta = b^2 - 4ac = (2(m-2))^2 - 4(m-2)(-2)$

$= 4(m-2)^2 + 8(m-2) = 4(m^2 - 4m + 4) + 8m - 16$

$= 4m^2 - 8m = 4m(m-2)$ ..... **0,50 Pt**

P admet deux zéros distincts $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 8m > 0$. Racines de Δ : $m_1 = 0$ et $m_2 = 2$

m	**$-\infty$**		**0**		**2**		**$+\infty$**
Δ	**+**		**0**	**−**	**0**		**+**

P admet deux zéros distincts si $\boldsymbol{m \in]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[}$..... **1 Pt**

3- <u>Somme des zéros</u>

Si $m \in]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[$, P admet deux zéros x_1 et x_2 avec : $x_1 + x_2 = -b/a$

$= -2(m-2) / (m-2)$

$= -2$

Donc la somme des zéros est égale à − 2.....**1 Pt**

Situation complexe : 5 /5 pts

CRITERES		Points
CM1	- Titre de la leçon - Inéquations - Résolution - Tableau de signe - conclusion	**1/5 →0,25** **2/5 → 0,5** **3/5 →0,75**
CM2	- Calcul du discriminant - Calcul des racines - Tableau de signe - Utilisation correcte des formules	**1/4 → 1.5** **2/4 → 2** **3/4→ 2.**
CM3	- Le résultat produit est conforme au résultat attendu - Le résultat produit est adéquat avec la demande - La qualité des enchaînements de la démarche	**1/4 →0,75** **2/4 → 1** **3/4 → 1,25**
CP	Conclusion conforme	**1/3 →0,25** **2/3 → 0,5**

. Resolution

- Coût de production (en milliers de F CFA) : $c(q) = 0{,}1q^2 + 10q + 1500$
- Prix de vente unitaire : 87 000 F = 87 (en milliers de F CFA)
- Recette pour q objets vendus : $R(q) = 87q$
- Bénéfice souhaité : au moins 12 832 500 F = 12 832,5 (en milliers de F CFA)

2. Expression du bénéfice

Le bénéfice B(q) est la différence entre la recette et le coût de production :

$$B(q) = R(q) - c(q) = 87q - (0{,}1q^2 + 10q + 1500)$$

$$B(q) = -0{,}1q^2 + 77q - 150$$

L'agent affirme que le bénéfice reste supérieur ou égal à 12 832,5 (milliers de F) lorsque q est compris entre 310 et 460. Il faut donc résoudre :

$$B(q) \geq 12\,832{,}5$$

$-0{,}1q^2 + 77q - 1500 \geq 12\,832{,}5$

$-0{,}1q^2 + 77q - 14\,332{,}5 \geq 0$

4. Résolution de l'équation du second degré associée

$-0{,}1q^2 + 77q - 14\,332{,}5 = 0$

Discriminant : $\Delta = (-770)^2 - 4 \times 1 \times 143\,325 = 592\,900 - 573\,300 = 19\,600$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{19\,600} = 140$$

Racines :

$q_1 = (770 - 140) / 2 = 630 / 2 = 315$ et $q_2 = (770 + 140) / 2 = 910 / 2 = 455$

Tableau de signe

x	$-\infty$		315		455		$+\infty$
B(x)	-		0	+	0		-

Donc : $B(q) \geq 12\,832{,}5 \iff q \in [315 ; 455]$

Conclusion : l'agent a-t-il raison ?

L'agent affirme que q doit être compris entre 310 et 460, mais le calcul montre que l'intervalle exact est [315 ; 455].

L'agent a tort

Le nombre d'objets à produire doit être compris entre 315 et 455 (inclus), et non entre 310 et 460, pour garantir un bénéfice supérieur ou égal à 12 832 500 F CFA.