KOSYAM JESUIT SCHOOL OF SCIENCE (KoJ2S)
Classe : **2nde C**
Matière : **Mathématiques**
Professeur : **M. SAVADOGO**

Année Scolaire : **2024-2025**
Durée : **03h**

Devoir n°1 de Mathématiques – Deuxième trimestre

EXERCICE N°1 (10pts)

1) Mettre sous forme canonique $h(x) = 2x(x-3)$. ***(1pt)***

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E_1) : $3x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 = 0$ ***(1pt)***

3) On considère l'équation (E_2) : $x^2 + (1-\sqrt{2})x - 2\sqrt{2} - 4 = 0$:

a) Démontrer que le discrimant $\Delta = \left(1 + 3\sqrt{2}\right)^2$ ***(0,5pt)***

b) Résoudre l'équation (E_2). ***(0,5pt)***

4) On cherche à résoudre l'équation(E_3) : $x - \sqrt{x} - 2 = 0$, avec $x \in [0\,;\,+\infty[$.

a) Pour tout réel positif x, on pose $t = \sqrt{x}$. Réécrire l'équation précédente avec l'inconnu $t \in [0\,;\,+\infty[$. ***(0,5pt)***

b) Résoudre l'équation obtenue. ***(0,5pt)***

c) En déduire les solutions de l'équation de départ. ***(0,5pt)***

5) Démontrer que $u(x) = 36x^4 + 12x^3 - 11x^2 - 2x + 1$ est le carré d'un autre polynôme que l'on déterminera. ***(1pt)***

6) Soit $P(x) = ex^2 + fx + g$ $(avec\ e < 0)$, un polynôme du 2^{nd} degré admettant comme zéros η et θ avec $\eta < \theta$. Déterminer le signe de $P(x)$ si $x \in]-\infty\,;\eta[\ \cup\ ]\theta\,;+\infty[$. ***(0,5pt)***

7) On donne $m(x) = \dfrac{-2 + x^2 - x}{-2x^2 + x - 1}$. Etudier le signe de la fonction m sur $]0\,;\,+\infty[$. ***(1pt)***

8) **a)** Démontrer que pour tout réel y, $y^3 = \left(\dfrac{y^2+y}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{y^2-y}{2}\right)^2$ ***(0,75pt)***

b) Soit P le polynôme défini par $P(y) = \left(\dfrac{y^2-y}{2}\right)^2$

i) Démontrer que $P(y+1) - P(y) = y^3$ ***(1pt)***

ii) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a : ***(0,75pt)***

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + n^3 = P(n+1) - P(1)$$

iii) En déduire que : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ***(0,5pt)***

EXERCICE N°2 (6,5pt)

On considère le polynôme S défini par : $S(y) = -y^4 + 4y^3 + y^2 - 16y + 12$

1) Montrer que 2 et -2 sont des racines de S. ***(2×0,25pt)***

2) En déduire qu'il existe un polynôme C tel que $S(y) = (y^2 - y - 6)C(y)$ avec $C(y)$ un polynôme à déterminer. ***(1pt)***

3) Résoudre dans $[-2\,;2]$, dans $\mathbb{Z}^-$ et dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_2) : $-y^4 + 4y^3 + y^2 - 16y + 12 = 0$ ***(2pts)***

4) En déduire, dans $\mathbb{R}$ les solutions de l'équation :

$$(E_3) : -\left(\frac{y-1}{y}\right)^4 + 4\left(\frac{y-1}{y}\right)^3 + \left(\frac{y-1}{y}\right)^2 - 16\left(\frac{y-1}{y}\right) + 12 = 0$$ ***(1pt)***

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0\,;\,+\infty[$ l'inéquation (I) : $-y^4 + 4y^3 + y^2 - 16y + 12 < 0$ ***(1,5pts)***

6) Quel est le signe de $S\left(\dfrac{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{2}\right)$? ***(0,5pt)***

EXERCICE N°3 (3pt)

On considère l'expression $h(y) = \left(y + \sqrt{1+y^2}\right)^3 + \left(y - \sqrt{1+y^2}\right)^3$

1) Vérifier que pour tous réels p et q on a : $(p+q)^3 + (p-q)^3 = 2p^3 + 6pq^2$. ***(1pt)***

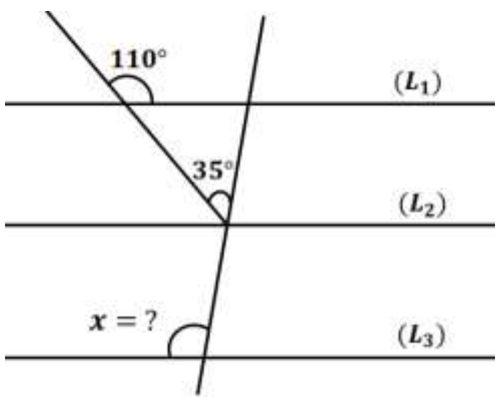
2) En déduire que $h(y)$ est un polynôme dont on précisera le degré. ***(1pt)***

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{R}$ $h(y) = 0$ ***(1pt)***

EXERCICE N°4 (0,5pt)

On donne la représentation ci-contre où les droites (L_1), (L_2) et (L_3) sont parallèles.

Calculer en degré la valeur de x. ***(0,5pt)***



Fin