LYCEE DE BOROMO — ANNEE SCOLAIRE : 2024-2025

PROF : M KABRE — DATE : 03/04/2025

CLASSE : 2^{nde} C — DUREE : 3h

EVALUATION N° 5 de MATHEMATIQUES

Questions indépendantes (11pts)

1) Ecrire $K = \frac{10^2\times 3^2}{8\times 5^2} \div \sqrt{\frac{2^5\times 3^9}{6}}$ à l'aide de puissances entières de nombres premiers ***(1pt)***
2) Représenter sur une droite graduée l'ensemble des nombres réels x vérifiant : $|2x-1| > 2$ ***(1pt)***
3) Comparer les nombres réels suivants : $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ ***(1pt)***
4) Soient $2\vec{u} = -\vec{a} + \vec{b}$ et $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b}$. Écrire $\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ***(1pt)***
5) Soit le polynôme h definit par : $h(x) = x^3 - 7x + 6$ vérifier que 1 est un zéro de h puis le factoriser. ***(0,5+1=1,5pt)***
6) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $1 - \sqrt{2}\ cos(-x + \frac{\pi}{3}) = 0$ ***(1pt)***
7) Montrer que pour tous réels $\alpha\ et\ \beta\ on\ a$: $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$ ***(1pt)***
8) Soit $|2x-1| < 2\ et\ |-3y+2| < 3$. Encadrer $x - y$ ***(1pt)***
9) Calculer $A = (2\sqrt{7} - 3\sqrt{3})^{24} \times (3\sqrt{3} + 2\sqrt{7})^{23}$***(0,5pt)***
10) On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction g sur $I = [-5,5]$. Construire sur I la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1cm. ***(2pts)***

x	-5	-2	1	3	5
$g(x)$	3	-2	2	2	-1

Exercice 1 (3pts)

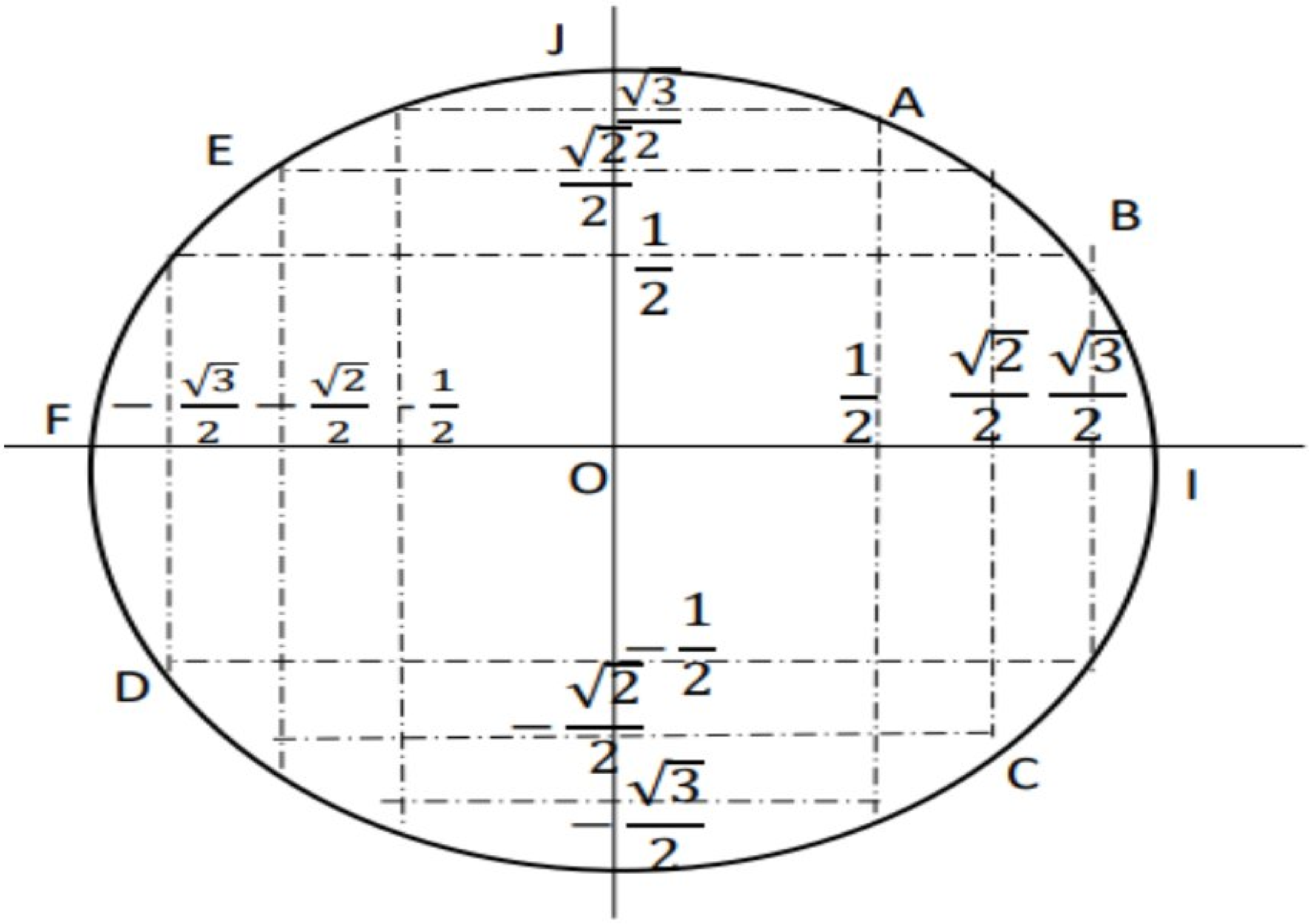
Dans le plan muni d'un repère orthonormée $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points :

$A(1,1)$; $B(2,-1)$; $C(3,2)$.

1) Placer les points A, B et C dans le repère. ***(1pt)***
2) Calculer les mesures des angles $\hat{A}$ $\hat{B}$ et $\hat{C}$ ***(1,5pt)***
   (Indication : on pourra utiliser le théorème d'Al Khasi)
3) En déduire la nature exacte du triangle ABC. ***(0,5pt)***

Exercice 2 (2pts)

Observez le cercle trigonométrique ci-dessous puis donner la mesure principale en radian des angles suivants : $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}})$ $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}})$ $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}})$ $(\widehat{\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OJ}})$. ***(2pts)***

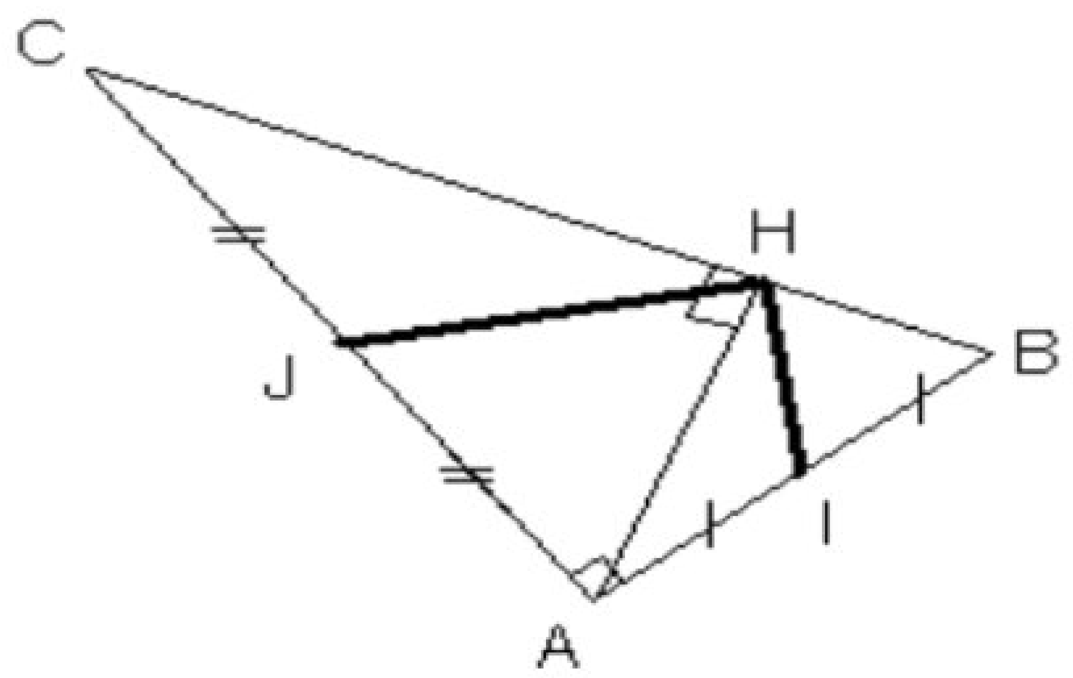


Situation d'integration (4pts)

Noaga, fonctionnaire et agent d'une administration est candidat à un concours professionnel. Dans sa préparation au concours, une question dans le sujet de la session précédente retient son attention. Cette question est la suivante :

<< Soit ABC un triangle rectangle en A, H le projeté orthogonal de A sur (BC) et I, J les milieux respectifs des segments $[AB], [AC]$ (voir figure). Montrer que les droites (HI) et (HJ) sont perpendiculaires >>

Après des heures de recherche infructueuse, il te sollicite pour l'aider. En tant qu'élève de la seconde C, propose la solution de la question à Noaga.



F I N

Questions indépendantes

① $K = \dfrac{(5\times2)^2\times3^2}{2^3\times5^2} \div \sqrt{\dfrac{2^5\cdot3^9}{2\times3}} = \dfrac{5^2\cdot2^2\cdot3^2}{2^3\cdot5^2} \div \sqrt{2^5\cdot3^9\,2^{-1}\cdot3^{-1}}$

$= \left(5^2\cdot2^2\cdot3^2\cdot2^{-3}\cdot5^{-2}\right) \div \sqrt{2^4\cdot3^8}$

$= 2^{-1}\cdot3^2 \div \left(2^2\,3^4\right)$..

$= 2^{-1}\cdot3^2\cdot2^{-2}\cdot3^{-4}$

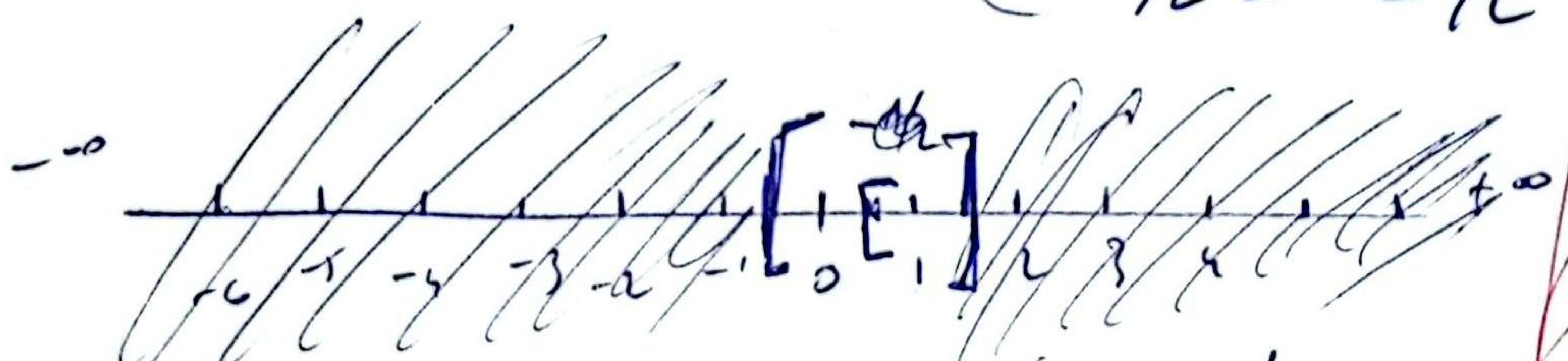
$\boxed{K = 2^{-3}\;3^{-2}}$

1pt

② $|2x-1| > 2$ || $|2x-1| \leq 2 \iff -2 \leq 2x-1 \leq 2$

$\iff -1 \leq 2x \leq 3$

$\iff -1/2 \leq x \leq 3/2$



1pt

L'ensemble des réels x vérifiant $|2x-1| > 2$ est la partie hachurée sur la droite graduée.

③ Comparaison $\dfrac{1}{\sqrt5-\sqrt2}$ et $\dfrac{1}{2-\sqrt3}$

$(\sqrt5-\sqrt2)^2 = 5 - 2\sqrt{10} + 2 = 7 - 2\sqrt{10}$

$(2-\sqrt3)^2 = 4 - 4\sqrt3 + 3 = 7 - 4\sqrt3$

N°1

Comparons $2\sqrt{10}$ et $4\sqrt{3}$

$(2\sqrt{10})^2 = 4\times10 = 40$

$(4\sqrt{3})^2 = 16\times3 = 48$

$2\sqrt{10} < 4\sqrt{3}$

$\Rightarrow -2\sqrt{10} > -4\sqrt{3}$

$\Rightarrow 7-2\sqrt{10} > 7-4\sqrt{3}$

$\Rightarrow (\sqrt{5}-\sqrt{2})^2 > (2-\sqrt{3})^2$

$\Rightarrow \sqrt{5}-\sqrt{2} > 2-\sqrt{3}$

c/c : $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} < \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}}$ 1pt

4

$\begin{cases} -\vec{a}+\vec{b} = 2\vec{u} \\ \vec{a} - 2\vec{b} = \vec{v} \end{cases}$

$-\vec{b} = 2\vec{u} + \vec{v}$

$\boxed{\vec{b} = -2\vec{u} - \vec{v}}$ 0,5pt

$-\vec{a} = 4\vec{u} + \vec{v}$

$\boxed{\vec{a} = -4\vec{u} - \vec{v}}$ 0,5pt

5

$h(1) = 1^3 - 7\times1+6$

$= 1-7+6 = 0$ 0,5pt

$h(x) = (x-1)(x^2+x-6)$

$\Delta = 1 - 4\times1\times(-6)$

$= 25$

$x_1 = \dfrac{-1-5}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$

$x_2 = \dfrac{-1+5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

$\boxed{h(x) = (x-1)(x-2)(x+3)}$ 1pt

6

$1-\sqrt{2}\cos\left(-x+\frac{\pi}{3}\right) = 0$

$-\sqrt{2}\cos\left(-x+\frac{\pi}{3}\right) = -1$

$\cos\left(-x+\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{-1}{-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$-x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ou $-x+\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ $(k\in$

$-x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi$ ou $-x = \dfrac{-7\pi}{12} + k2\pi$

$x = \dfrac{\pi}{12} - k2\pi$ ou $x = \dfrac{7\pi}{12} - k2\pi$ 1pt

N°2

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\dfrac{\pi}{12} - k2\pi ; \dfrac{7\pi}{12} - k2\pi , k\in\mathbb{Z}\right\}$

(7)

$\alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2) =$

$= -\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2 + \alpha\beta$

$= -\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)$

$= -\frac{1}{2}(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)$

$= -\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2 \leq 0$

d'où $\alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2) \leq 0$

1pt

$\Rightarrow \alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$

(8) $|2x-1|<2 \Rightarrow -2<2x-1<2$

$\Rightarrow -1<2x<3$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$

$|-3y+2|<3 \Rightarrow -3<-3y+2<3$

$\Rightarrow -5<-3y<1$

$\Rightarrow -\frac{5}{3}<-y<\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{2}-\frac{5}{3}<x-y<\frac{3}{2}+\frac{1}{3}$

$\boxed{-\frac{13}{6}<x-y<\frac{11}{3}}$

1pt

(9)

$A = (2\sqrt{7}-3\sqrt{3})^{24} \times (2\sqrt{7}+3\sqrt{3})^{23}$

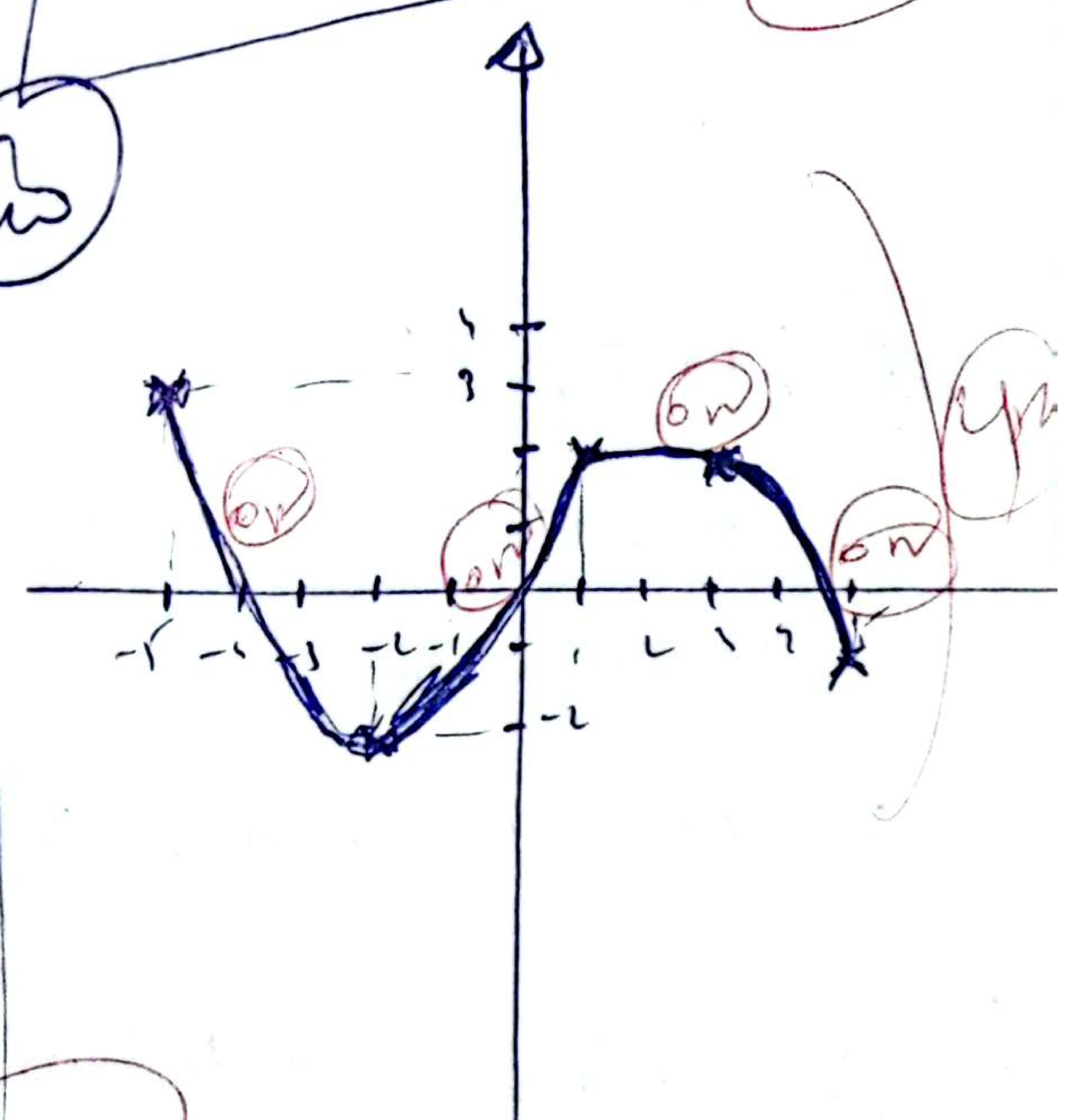
$= \left[(2\sqrt{7}-3\sqrt{3})(2\sqrt{7}+3\sqrt{3})\right]^{23}(2\sqrt{7}-3\sqrt{3})$

$= (28-27)^{23}(2\sqrt{7}-3\sqrt{3})$

$\boxed{A = 2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}$

0,5pt

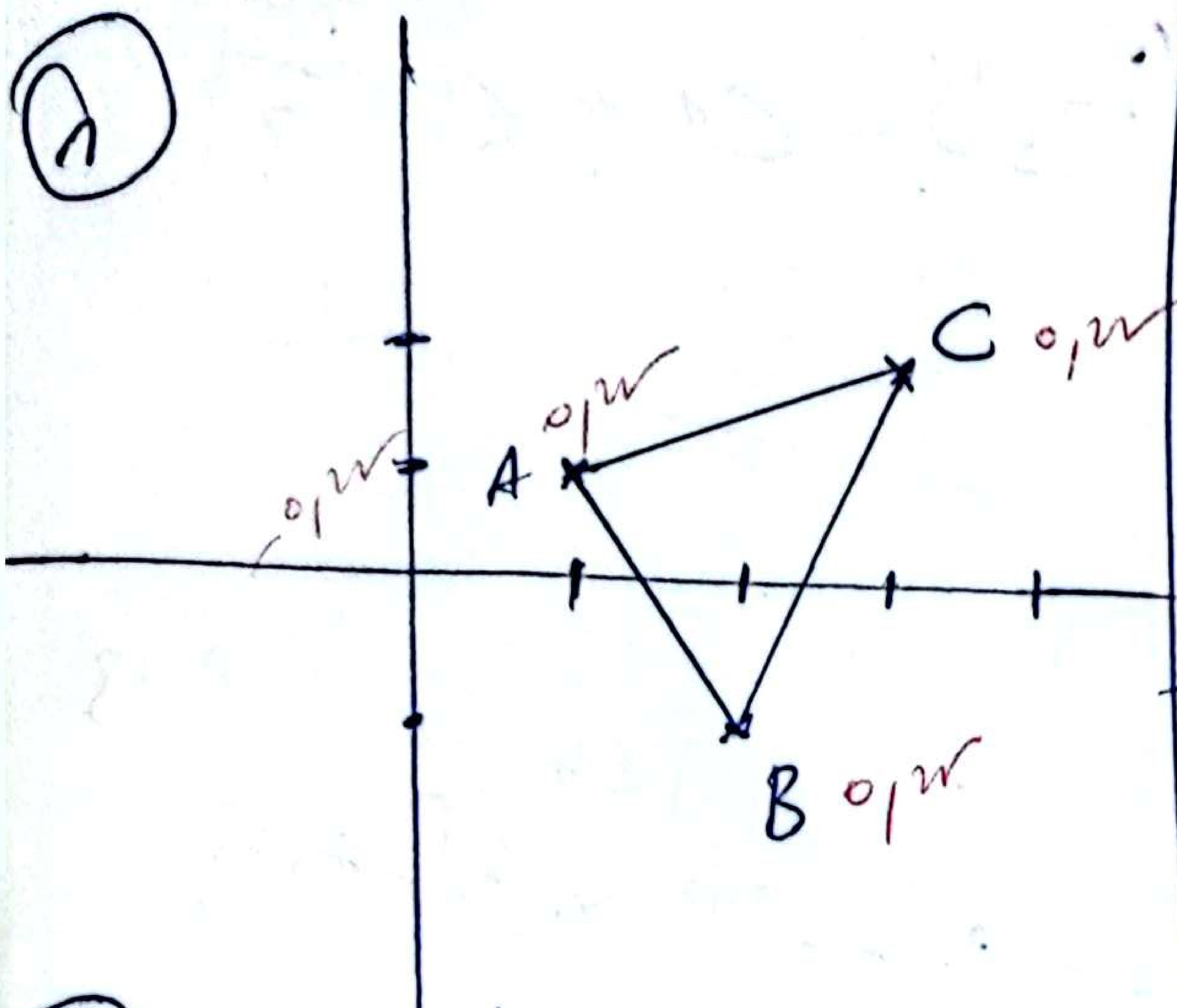
(10)



No3

Exo 1

1)



2) $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow AB = \sqrt{5}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow AC = \sqrt{5}$

$\vec{BC}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \Rightarrow BC = \sqrt{10}$.

$\hat{A}$: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\,AC\cos\hat{A}$

$10 = 5+5-2.5\cos\hat{A}$

$10 = 10 - 10\cos\hat{A}$ 0,5

$\Rightarrow \cos\hat{A} = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{A} = 90°}$

$\hat{B}$: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos\hat{B}$

$5 = 5 + 10 - 2\sqrt{50}\cos\hat{B}$ No4

$5 - 15 = -2\sqrt{50}\cos\hat{B}$

$-10 = -2\sqrt{50}\cos\hat{B}$

$\cos\hat{B} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\boxed{\hat{B} = 45°}$ 0,5

$\hat{C}$: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\,BC\cos\hat{C}$

$5 = 5 + 10 - 2\sqrt{50}\cos\hat{C}$

$-10 = 2\sqrt{50}\cos\hat{C}$

$\cos\hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\hat{C} = 45°}$

0,5

3)

* $\hat{C} = \hat{B} = 45° \Rightarrow ABC$ est isocèle en A.
* $\hat{A} = 90° \Rightarrow ABC$ est rectangle en $\hat{A}$.

C/C : ABC est isocèle et rectangle en A 0,5

Exo 2

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{3}$ ok

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{6}$. ok

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) = -\frac{\pi}{4}$. ok

$(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OJ}) = -\frac{\pi}{2}$. ok

Situation

$\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} = (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AI}) \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AJ})$

$= \overrightarrow{HA}^2 + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{HA} + \underline{\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}}$

$= HA^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB} \quad 0$

$= HA^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}$

$= HA^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH}$

$= HA^2 - \frac{1}{2}AH^2 - \frac{1}{2}AH^2$

$= AH^2 - \frac{2AH^2}{2}$

$= 0$

N°5

donc $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{HJ}$ sont orthogonaux par suite les droites (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.