

Activité

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$; on donne.

$$\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v} = -\vec{i} - 5\vec{j}$$

Détermine :

- a 1) la valeur du $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- 2) la valeur de l'angle $\alpha = (\vec{u}; \vec{v})$

Résolution

$$\bullet \vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} \Rightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\bullet \vec{v} = -\vec{i} - 5\vec{j} \Rightarrow \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Déterminons :

$$1) \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(-1) + (-3)(-5)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 + 15$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 13}$$

$$2) \text{ l'angle } \alpha = (\vec{u}; \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u \times v \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

$$\text{or } u = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$v = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

$$\text{Ainsi : } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{u \times v}$$

$$\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{13}{\sqrt{13} \times \sqrt{26}}$$

$$\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{13}{13\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Conclusion : la valeur de l'angle $\alpha = 45^\circ$ ou $\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$