*R. C. I. - M. E. N. Direction des Examens et Concours * Direction des Examens et Concours * R. C. I. - M. E. N.*

BACCALAURÉAT **Coefficient : 4**
SESSION 2011 **Durée : 4 h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE 1

On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \dfrac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}$.

1- *a*) Démontrer que la suite (v_n) est convergente et donner sa limite.
b) Démontrer que la suite (v_n) est croissante.
c) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{3}{4} \leq v_n < 1$.

2- On pose pour tout entier naturel non nul n : $a_n = v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$.
a) Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.
b) En déduire la limite de la suite (a_n).

3- On pose pour tout entier naturel non nul n : $b_n = ln(v_1) + ln(v_2) + \ldots + ln(v_n)$.
a) Démontrer que (b_n) est une suite à termes négatifs.
b) Calculer la limite de la suite (b_n).

EXERCICE 2

La société « Gnamienlait » de Gnamien produit des sachets de lait caillé.
Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque sachet de lait caillé produit, sa masse en gramme (*g*). La loi de probabilité de X est définie par le tableau ci-dessous.

x_i (en g)	220	230	240	250	260	270	280
P_i	0,08	0,10	a	b	0,16	0,15	0,04

a et b sont deux nombres réels.
x_i représente la masse du sachet de lait caillé ;
P_i la probabilité qu'un sachet de ce lait ait la masse x_i.

1- *a*) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X en fonction de a et b.
b) Sachant que E(X) = 250, justifier que : $a = 0{,}14$ et $b = 0{,}33$.
Dans la suite de l'exercice on conservera les valeurs de a et de b trouvées à la question 1.b).

2- Gnamien prend au hasard un sachet de lait caillé de sa société.
Calculer la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins de 250 *g*.

Tournez la page S.V.P.

3- Tiéplé, la fille de Gnamien, prend au hasard et de façon indépendante cinq sachets de lait caillé.
Calculer la probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220 *g*. *On prendra l'arrondi d'ordre 3 du résultat.*

4- Les sachets de lait caillé sont contrôlés par une machine. Cette machine est réglée pour éliminer en principe les sachets de lait de masse strictement inférieure à 250 *g*.
- Si un sachet de lait caillé a 240 g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,7.
- Si un sachet de lait caillé a 230 *g*, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,8.
- Si un sachet de lait caillé a 220 *g*, il est systématiquement éliminé.
- Si un sachet de lait caillé a une masse supérieure ou égale à 250 g, il est systématiquement accepté.

a) Justifier que la probabilité qu'un sachet de lait caillé de 240 *g* soit éliminé est de 0,098.
b) Calculer la probabilité pour qu'un sachet de lait caillé de cette société soit éliminé.

PROBLÈME

Partie A

Soit la fonction numérique dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par :

$$g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x.$$

1- *a*) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$.

2- *a*) Démontrer que : $\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$.
b) En déduire le sens de variation de g.
c) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3- *a*) Démontrer que l'équation : $x \in]\,0\,;+\infty[,\ g(x) = 0$ admet une solution unique α.
b) Justifier que $2{,}55 < \alpha < 2{,}56$.
c) Démontrer que :

$$\forall\, x \in]0\,;\alpha[,\ g(x) < 0\,;$$
$$\forall\, x \in]\alpha\,;+\infty[,\ g(x) > 0\,.$$

Partie B

On considère la fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par : $f(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) e^{-x}$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
Unités graphiques : OI = 2 cm et OJ = 10 cm.

1- *a*) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$, puis donner une interprétation graphique du résultat.
b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis donner une interprétation graphique du résultat.

2- Démontrer que : $f(\alpha) = -\dfrac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha}$.

3- *a*) Démontrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = e^{-x}g(x)$.
b) En utilisant la partie A, déterminer les variations de f.
c) Dresser le tableau de variation de f.

4- Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1 est :
$y = -\dfrac{3}{e}x + \dfrac{4}{e}$.

5- Construire (T) et $(\mathcal{C})$ dans le plan muni du repère (O, I, J).
On prendra $\alpha = 2,6$.

Partie C

1- Soit h la fonction dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et définie par : $h(x) = e^{-x}\ln x$.
Démontrer que h est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

2- Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 3$.
a) Calculer, en cm² et en fonction de λ, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre $(\mathcal{C})$, (OI) et les droites d'équations $x = 3$ et $x = \lambda$.
b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.