

Pays : Côte d'Ivoire
Série : BAC, série D

Année : 2015
Durée : 4 h

Session : normale
Coefficient : 4

Exercice 1

Partie I

On considère la fonction P définie sur \mathbb{C} par : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$.

1. a) Calculer $P(i)$.
- b) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que : $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$.
2. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation : $z^2 - (3+i)z + 2 + 2i = 0$.
3. En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation (E) : $P(z) = 0$.

Partie II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 5 cm.

On pose : $z_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$.

On note A_n le point du plan d'affixe z_n .

1. a) Calculer z_1 et z_2 .
- b) Placer les points A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.
2. On considère la suite U définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$.

b) Démontrer que U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$.

c) Exprimer U_n en fonction de n .

3. On désigne par $A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$ la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$.)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$.

- a) Calculer l_n .
- b) En déduire la limite de l_n .

Exercice 2

Mariam, une jeune diplômée sans emploi, a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constate que :

- Pour un jour donné, la probabilité qu'il ait une affluence de clients est 0,6 ;
- Lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,7 ;
- Lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,4 ;

On désigne par A l'évènement « il y a affluence de clients » et B l'évènement « Mariam réalise un bénéfice ».

1. On choisit un jour au hasard.

- a) Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ».
- b) Démontrer que la probabilité $p(B)$ de l'évènement B est 0,58.
- c) Mariam réalise un bénéfice.

Calculer la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là.

On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

2. Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les 3 jours successifs.

- Déterminer les valeurs prises par X .
- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .

3. Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note P_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.

- Justifier que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $P_n = 1 - (0,42)^n$.
- Déterminer la valeur minimale de n pour qu'on ait $P_n \geq 0,9999$.

Problème

Partie A

Soit r la fonction définie sur \mathbb{R} par : $r(x) = xe^{-x}$.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = r$.

Soit g la fonction dérivable et définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$.

- Démontrer que g est solution de l'équation (E).
- Soit l'équation différentielle (F) : $y' + y = 0$.
 - Démontrer qu'une fonction ζ est solution de (E) si et seulement si $\zeta - g$ est solution de (F).
 - Résoudre l'équation différentielle (F).
 - En déduire la solution ζ de (E) qui vérifie $\zeta(0) = -\frac{3}{2}$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable et définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2}e^{-x}$.

On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), d'unités graphiques $OI = 2$ cm et $OJ = 4$ cm.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - Démontrer que la courbe (\mathcal{C}) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).
- Calculer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
- soit f' la fonction dérivée de f .

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3 + 2x - x^2}{2}e^{-x}$.

- Étudier les variations de f .
 - Dresser le tableau de variations de f .
4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}) au point d'abscisse 0 est :

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}.$$

- Étudier les positions relatives de (\mathcal{C}) par rapport à l'axe des abscisses.

6. Représenter graphiquement (T) et (\mathcal{C}).

Partie C

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^1 xe^{-x} dx$.

2. a) Vérifier que f est solution de l'équation différentielle (E) de la partie A).

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f'(x) + xe^{-x}$.

c) En utilisant la question précédente, calculer en cm^2 , l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}), la droite(OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.