

Pays : Côte d'Ivoire
Série : E

Année : 2016
Durée : 4 h

Session : Mathématiques
Coefficient : 5

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique, un centimètre.

Soit ABC un triangle direct dont le point O est le centre de son cercle circonscrit. On désigne par M, N et P les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

Les affixes respectives des points M, N et P sont notées m , n et p .

- 1- Construire les triangles MNP et ABC sachant que : $m = -1 - 3i$ et $n = 2$.
- 2- On considère la transformation f du plan dans lui-même, qui à chaque point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ telle que :

$$z' = -\frac{1}{2}(1 + i)[2 - (m + n + p)].$$
 Quelle est la nature de f ? Préciser ses éléments caractéristiques.
- 3- Soit α , β et γ les affixes respectives des points A, B et C.
 Démontrer que :
 - a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$. En déduire que : $\alpha = n + p - m$.
 - b) $\beta = m - n + p$.
 - c) $\gamma = n - p + m$.
- 4- On pose : $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.
 On désigne par α' , β' et γ' les affixes respectives des points A', B' et C'.
 - a) Démontrer que : $\alpha' = (1 + i)m$;
 $\beta' = (1 + i)n$;
 $\gamma' = (1 + i)p$.
 - b) En déduire que $\overrightarrow{MA'}$ et \overrightarrow{OM} sont orthogonaux et que le point A' appartient à la droite (BC).
 - c) Calculer $\frac{\beta' - n}{n}$ et $\frac{\gamma' - p}{p}$.
 En déduire que les points B' et C' appartiennent respectivement aux droites (AC) et (AB).
- 5- Démontrer que les triangles A'B'C' et MNP sont semblables.

EXERCICE 2

Soit (u_n) , la suite définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{7}{u_n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

et f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{7}{x} \right)$.

- 1- Démontrer que : $\forall n \in]0 ; +\infty[, f(x) \geq \sqrt{7}$.
- 2- a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
b) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{7}$.
- 3- a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$.
b) En déduire la convergence de la suite (u_n) .
- 4- Soit ℓ la limite de la suite (u_n) .
a) Démontrer que : $\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{7}{\ell} \right)$.
b) Déterminer la valeur de ℓ .
- 5- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n}$.
- 6- On définit la suite (d_n) par : $\begin{cases} d_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n^2 \end{cases}$.
Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$.

PROBLÈME

Partie A

Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g_n(x) = nx + (n+1)\ln x$.

- 1- Déterminer les limites de g_n en 0 et en $+\infty$.
- 2- a) Calculer $g_n'(x)$ pour x élément de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, où g_n' est la dérivée de g_n .
b) En déduire le sens de variation de g_n .
- 3- Démontrer que l'équation $x \in]0 ; +\infty[$, $g_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $]0 ; 1[$.
- 4- Démontrer que : $g_n(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [\alpha_n ; +\infty[$.

Partie B

On considère la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ définie dans la partie A et h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = x + \ln x$.

- 1- Démontrer que l'équation $x \in]0 ; +\infty[$, $h(x) = 0$ admet une unique solution α telle que : $\alpha \in]0 ; +\infty[$.
- 2- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0 ; +\infty[$, $g_{n+1}(x) = g_n(x) + x + \ln x$.
- 3- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g_{n+1}(\alpha_{n+1}) - g_{n+1}(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n}{n+1}$.
- 4- a) Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
b) En déduire la convergence de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$.
- 5- Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha$.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul différent de 1, f_n la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f_n(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)$ et (\mathcal{E}_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . (Unités graphiques : 2 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée).

- 1- Selon la parité de n , déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$, puis interpréter graphiquement les résultats.
- 2- a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \forall x \in]0 ; +\infty[$, $f_n'(x) = \frac{1-\ln x}{x^3} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n-1} g_n(x)$.
b) En déduire, selon la parité de n , le sens de variation de f_n puis dresser son tableau de variation.
- 3- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, f_n(\alpha_n) = (-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.
- 4- Construire (\mathcal{E}_2) . On prendra : $\alpha_2 \approx 0,6$.