Pays : Côte d'Ivoire	**Année :** 2016	**Session :** Mathématiques
Série : D	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 4

EXERCICE 1

1- On considère la fonction h dérivable et définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $h(x) = 2x - x^2$.

a) Démontrer que h est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 1].

b) En déduire que l'image de l'intervalle [0 ; 1] par h est l'intervalle [0 ; 1].

2- Soit u la suite définie par :

$u_0 = \frac{3}{7}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = h(u_n)$.

a) Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$.

b) Démontrer que la suite u est croissante.

c) Justifier que la suite u est convergente.

3- On considère la suite v définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(1 - u_n)$.

a) Démontrer que v est une suite géométrique de raison 2.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite v.

d) En déduire la limite de la suite u.

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$, (unité graphique : 2 cm).
On considère la transformation $\mathcal{S}$ du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

1- *a)* Soit Ω le point d'affixe 2.

Vérifier que : $\mathcal{S}(\Omega) = \Omega$.

b) Justifier que $\mathcal{S}$ est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

2- *a)* Démontrer que : $\forall\, z \neq 2,\ \frac{z'-z}{2-z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) En déduire que le triangle MΩM'est rectangle en M.

c) Donner un programme de construction de l'image M' par $\mathcal{S}$ d'un point M donné.

3- *a)* Placer les points A et B d'affixes respectives $-1 + i$ et $5 - i$

dans le plan muni du repère $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$.

Construire les images respectives A' et B' de A et B par $\mathcal{S}$.

b) On note z_A, z_B, $z_{A'}$ et $z_{B'}$ les affixes respectives des points A, B, A' et B'.

Démontrer que : $z_{A'} - z_A = z_B - z_{B'}$.

c) En déduire la nature du quadrilatère AA'BB'.

PROBLÈME

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -1 + (2 - 2x)e^{-2x+3}$.

1- Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2- *a)* Soit g' la fonction dérivée de g.
Justifier que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (4x - 6)e^{-2x+3}$.
b) Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.
c) Justifier que : $g(\frac{3}{2}) = -2$.
d) Dresser le tableau de variations de g.

3- *a)* Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique notée α.
b) Vérifier que : $0{,}86 < \alpha < 0{,}87$.
c) Justifier que : $\forall\, x \in]-\infty\, ;\, \alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall\, x \in]\alpha\, ;\, +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J), (unité graphique : 2 cm).
On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + (x - \frac{1}{2})e^{-2x+3}$.
On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f.

1- *a)* Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) En déduire que $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $-\infty$.

2- *a)* Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
b) Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = -x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
c) Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$.

3- *a)* Soit f' la fonction dérivée de f.
Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = g(x)$.
b) En déduire les variations de f.
c) Dresser le tableau de variations de f. On ne calculera pas $f(\alpha)$.

4- Construire $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$ sur le même graphique.
On précisera les points de $(\mathscr{C})$ d'abscisses 0 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; 4.
On prendra : $\alpha = 0{,}865$ et *$f(\alpha) = 0{,}4$.*

5- Soit t un nombre réel strictement supérieur à $\frac{3}{2}$. On désigne par $\mathscr{A}(t)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite $(\mathscr{D})$ et les droites d'équations $x = \frac{3}{2}$ et $x = t$.
On pose : $I_t = \displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{t} (x - \frac{1}{2})e^{-2x+3}\, dx$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, justifier que : $I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2}e^{-2t+3}$.
b) En déduire $\mathscr{A}(t)$.
c) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathscr{A}(t)$.