

**EXERCICE 1**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\ln(n+1) + \ln(n+2) + \dots + \ln(n+n) - n \ln(n)}{n}$$

1- Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$u_n = \frac{1}{n} \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left( 1 + \frac{2}{n} \right) + \dots + \ln \left( 1 + \frac{n}{n} \right) \right].$$

2- a) Démontrer que pour tout entier naturel  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n-1$ ,

$$\frac{1}{n} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln \left( 1 + \frac{k+1}{n} \right).$$

(On pourra utiliser un encadrement de  $\ln(x)$  sur l'intervalle  $\left[ 1 + \frac{k}{n}, 1 + \frac{k+1}{n} \right]$ .)

b) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $u_n - \frac{1}{n} \ln 2 \leq \int_1^2 \ln x dx \leq u_n$ .

3- Sachant que  $\int_1^2 \ln x dx = 2 \ln(2) - 1$ , déduire de ce qui précède la limite de la suite  $(u_n)$ .

**EXERCICE 2**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . L'unité graphique est 2 cm.

1- On note  $(\mathcal{E})$  l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  ( $z = x + iy$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ) tels que :  $14z\bar{z} + 16i(z - \bar{z}) = z^2 + \bar{z}^2$ .

Démontrer que  $M$  appartient à  $(\mathcal{E})$  si et seulement si :  $3x^2 + 4y^2 - 8y = 0$ .

2- a) Justifier que  $(\mathcal{E})$  est une ellipse. On note  $\Omega$  son centre.

b) Préciser les coordonnées de  $\Omega$ .

c) Déterminer une équation de l'axe focal de  $(\mathcal{E})$ .

d) On note  $A, A', F$  et  $F'$  les points d'affixes respectives

$$\frac{-2\sqrt{3}}{3} + i, \frac{2\sqrt{3}}{3} + i, -\frac{\sqrt{3}}{3} + i \text{ et } \frac{\sqrt{3}}{3} + i.$$

Justifier que  $A$  et  $A'$  sont les sommets de  $(\mathcal{E})$  situés sur son axe focal.

Justifier que  $F$  et  $F'$  sont les foyers de  $(\mathcal{E})$ .

3- Construire l'ellipse  $(\mathcal{E})$ .

4- On considère l'hyperbole  $(H)$  de foyers  $A$  et  $A'$  et de sommets  $F$  et  $F'$ .

a) Démontrer qu'une équation cartésienne de  $(H)$  dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est :

$$3x^2 - y^2 = 1.$$

b) Tracer les asymptotes de  $(H)$ .

c) Construire  $(H)$ .

## PROBLÈME

### Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  tel que :  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$ .

On considère la fonction dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et définie par :

$$f(x) = x - 4 + \frac{1}{4} \ln|x|.$$

- 1-
  - a) Calculer la limite de  $f$  en 0.
  - b) Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
  - c) Démontrer que  $f$  est strictement croissante sur chacun des intervalles  $] -\infty ; -\frac{1}{4}[$  et  $]0 ; +\infty[$ , et strictement décroissante sur l'intervalle  $] -\frac{1}{4} ; 0[$ .
  - d) Dresser le tableau de variations de  $f$ .
- 2- Démontrer que l'équation  $x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  telle que :  $3 < \alpha < 4$ .
- 3- Démontrer que :  
 $\forall x \in ]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; \alpha[ , f(x) < 0 ;$   
 $\forall x \in ]\alpha ; +\infty[ , f(x) > 0.$

### Partie B

On considère la fonction  $h$  dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) = x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2 \ln|x| \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

- 1-
  - a) Démontrer que  $h$  est dérivable en 0.
  - b) Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, h'(x) = xf(\frac{1}{x})$ .
  - c) Démontrer en utilisant A-3) que :  
 $\forall x \in ]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; \frac{1}{\alpha}[ , h'(x) > 0 ;$   
 $\forall x \in ]\frac{1}{\alpha} ; +\infty[ , h'(x) < 0.$
- 2- On note  $(\Gamma)$  la courbe représentative de la restriction de  $h$  à l'intervalle  $[-1 ; \frac{3}{2}]$  dans le plan muni du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
  - a) Tracer la tangente à  $(\Gamma)$  en son point d'abscisse 0.
  - b) Construire la courbe  $(\Gamma)$ . (On prendra :  $\alpha = 3,6$ ).

3-  $\lambda$  est un nombre réel appartenant à l'intervalle  $]0 ; 1[$ .

a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_{\lambda}^1 x^2 \ln(x) dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln \lambda.$$

b) On note  $\mathcal{A}(\lambda)$  l'aire en centimètre carré de la partie du plan limitée par la courbe  $(\Gamma)$ , la droite de repère  $(O, \vec{i})$  et les droites d'équations  $x = \lambda$  et  $x = 1$ .

Déduire de la question précédente que :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left( \frac{125}{36} - 4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3 \ln(\lambda) \right) \text{ cm}^2.$$

c) Calculer la limite de  $\mathcal{A}(\lambda)$  quand  $\lambda$  tend vers 0 par valeurs supérieures.

### Partie C

On se propose de calculer une valeur approchée de  $\alpha$  à 0,01 près.

1- Soit  $g$  la fonction dérivable sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  et définie par :  $g(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln(x)$ .

a) Étudier les variations de  $g$ .

b) Démontrer que l'image de l'intervalle  $[3 ; 4]$  par  $g$  est contenue dans l'intervalle  $[3 ; 4]$ .

c) Démontrer que  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation :  $x \in ]0 ; +\infty[$ ,  $g(x) = x$ .

2- On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $3 \leq u_n \leq 4$ .

b) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $(u_n - \alpha)$  et  $(u_{n+1} - \alpha)$  sont de signes contraires.

c) Démontrer que, pour tout  $x$  élément de  $[3 ; 4]$ , on a :  $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$ .

En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{12} |u_{n+1} - u_n|, \text{ puis que } |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{12^n}.$$

d) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$ .

En déduire une valeur approchée de  $\alpha$  à 0,01 près.