

Pays : Côte d'Ivoire	Année : 2017	Épreuve : Mathématiques
Examen : Bac, Série C	Durée : 4 h	Coefficient : 5

EXERCICE 1

On désigne par Y une variable aléatoire vérifiant les conditions suivantes :

- Y prend les valeurs 1, -1 et 2 avec les probabilités respectives e^a , e^b et e^c où a , b et c sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r tels que : $a = b - r$ et $c = b + r$.
- L'espérance mathématique $E(Y)$ de Y est égale à 1.

1. a) Justifie que le couple (b, r) est solution du système (S) $\begin{cases} e^b e^{-r} + e^b + e^b e^r = 1 \\ e^b e^{-r} - e^b + 2e^b e^r = 1 \end{cases}$.

b) Résous le système (S).

c) Déduis de ce qui précède que : $a = \ln\left(\frac{1}{7}\right)$ et $c = \ln\left(\frac{4}{7}\right)$.

2. Justifie que la variance $V(Y)$ de Y est égale à $\frac{12}{7}$.

3. On marque sur une droite graduée (D) les points A, B et C d'abscisses respectives 1 ; -1 et 2.

On désigne par G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 2) et (C, 4).

On note (Γ) l'ensemble des points M de la droite (D) tels que : $MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2 = 187$ et on

pose : $h(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$.

- Calcule l'abscisse du point G.
- Démontre que : $h(G) = V(Y)$.
- Détermine l'ensemble (Γ) .

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle OIJ tel que : $OI = OJ$ et $Mes(\widehat{OI}; \widehat{OJ}) = \frac{\pi}{2}$.

A, B et C sont les milieux respectifs des segments [IJ], [JO] et [OI].

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{IJ}$. On pose : $F = rot$ et $G = tor$.

1. Fais une figure. (On prendra : $OI = 8$ cm).

2. a) Détermine $F(C)$ et $G(B)$.

b) Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations F et G.

3. On désigne par F^{-1} la réciproque de la transformation F.

a) Détermine la nature de la transformation GoF^{-1} .

b) Détermine $(GoF^{-1})(O)$, puis caractérise la transformation GoF^{-1} .

c) Détermine $(GoF)(I)$ puis déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de la transformation GOF.

4. On munit le plan du repère orthonormé (O, I, J) tel que défini précédemment.

Soit h l'homothétie de centre B et de rapport -2 . On pose : $S = hor$.

- Écris l'affixe de chacun des points A , B et C .
- Détermine l'écriture complexe de h et celle de r .
- Soit g l'application complexe associée à S .

Démontre que : $\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = -2iz - 2 + \frac{3}{2}i$.

d) Dédus de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de S .

PROBLÈME

On considère la suite (t_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $t_n = n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + \ln(n!)$.

Le but de ce problème est d'étudier la convergence de la suite (t_n) et de démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \ln(\sqrt{2\pi})$$

Partie I : Étude de la convergence de la suite (t_n)

Soit n un entier naturel non nul et ψ la fonction définie sur $] -n ; +\infty[$ par : $\psi(t) = \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) - \frac{t}{n}$.

On suppose que ψ est dérivable sur $] -n ; +\infty[$ et on note ψ' sa fonction dérivée.

1. a) Justifie que : $\forall t \in] -n ; +\infty[, \psi'(t) = \frac{-t}{n^2(1+\frac{t}{n})}$.

b) Calcule $\psi(0)$.

c) Dresse le tableau de variation de la fonction ψ (On ne calculera pas les limites).

d) Dédus de ce qui précède que : $\forall t \in] -n ; +\infty[, \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) \leq \frac{t}{n}$.

2. a) En utilisant la question 1. d) et en effectuant un changement de variable, démontre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln x \leq x - 1.$$

b) Dédus de ce qui précède que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{k} - 1\right) dx = 0$.

c) Dédus des questions 2. a) et 2. b) que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{x}{k}\right) dx \leq 0$.

d) Justifie alors que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(k)$.

e) En utilisant la relation de Chasles, démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(n!).$$

3. a) En utilisant une intégration par parties, démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) + \ln(n!) \geq \ln(\sqrt{2}).$$

b) Dédus de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n \geq \ln(\sqrt{2})$.

4. On définit la fonction f sur l'intervalle $]0 ; 1[$ par : $f(x) = \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

On admet que : $\forall x \in]0 ; 1[, f(x) \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* , t_{n+1} - t_n = 1 - f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$.

- Détermine le sens de variation de la suite (t_n) .
- Déduis des questions précédentes la convergence de la suite (t_n) .

Partie II : Calcul de la limite de la suite (t_n)

On définit la suite (w_n) par :

$$w_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* , w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt.$$

1. a) Calcule w_1 .

- Démontre que la suite (w_n) est décroissante et positive.
On admettra que la suite (w_n) est à termes strictement positifs.

c) A l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $\forall n \in \mathbb{N} , w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$.

On remarquera que : $\sin^{n+2}(t) = \sin(t) \times \sin^{n+1}(t)$.

d) En utilisant les questions 1. b) et 1. c) de la partie II, justifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N} , \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1.$$

e) Déduis de ce qui précède $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n}$.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N} , y_n = (n+1)w_{n+1} \times w_n$.

- Démontre que la suite (y_n) est constante.
- Déduis de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N} , y_n = \frac{\pi}{2}$.
- Détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} n w_n^2$.
(On remarquera que : $n w_n^2 = \frac{n}{n+1} \times y_n \times \frac{w_n}{w_{n+1}}$).

d) Déduis de ce qui précède que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} w_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

3. On admet dans toute la suite du problème que, si une suite (a_n) converge vers l , alors la suite (a_{2n}) converge aussi vers l .

a) Déduis de la question 2. c) de la partie II la limite de la suite $(n w_{2n}^2)$.

$$(On remarquera que : $n w_{2n}^2 = \frac{1}{2} (2n w_{2n}^2)$).$$

b) En utilisant la question 1. c) de la partie II, démontre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} , w_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

c) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^* , e^{t_n} = n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$.

d) En admettant que : $\forall n \in \mathbb{N}^* , e^{t_{2n} - 2t_n} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{n w_{2n}^2}$, détermine la limite de la suite (t_n) .