

**BACCALAUREAT  
SESSION 2018**

**Coefficient : 5  
Durée : 4 h**

# MATHÉMATIQUES

## SERIE E

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.  
Chaque candidat recevra deux feuilles de papier millimétré.  
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.*

### EXERCICE 1

On pose  $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \, dx$  et pour tout nombre entier naturel non nul  $n$ ,  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin 3x \, dx$ .

- 1-
  - a) Calculer  $I_0$ .
  - b) En utilisant une intégration par parties, calculer  $I_1$ .
  
- 2-
  - a) En effectuant deux intégrations par parties successives, déterminer, lorsque  $n \geq 1$ ,  $I_{n+2}$  en fonction de  $I_n$ .
  - b) Vérifier que :  $I_3 = \frac{\pi^2}{108} - \frac{2}{27}$ .
  
- 3-
  - a) Démontrer que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
  - b) Justifier que, pour tout nombre entier naturel  $n$  non nul,  $I_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \, dx$ .
  - c) Déterminer la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### EXERCICE 2

Le but de cet exercice est de déterminer la position du centre d'inertie  $G$  d'une plaque homogène  $P$  d'épaisseur négligeable.

Soit  $f$  la fonction numérique à variable réelle définie sur  $[0 ; \pi]$  par  $f(x) = 2x + \sin 2x$  et  $(Cf)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$  d'unité graphique 2cm.

La plaque  $P$  représente la portion du plan délimitée par la courbe  $(Cf)$ , l'axe  $(OI)$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \pi$ .

- 1-
  - a) Etudier le sens de variation de  $f$  sur  $[0 ; \pi]$ .
  - b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
  - c) Tracer la courbe  $(Cf)$  et ses tangentes aux points d'abscisses respectives  $0$ ,  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi$ .

- 2- Démontrer que, l'aire exprimée en  $\text{cm}^2$ , de la plaque est égale à  $4\pi^2$ .
- 3- On admettra que les coordonnées du centre d'inertie G de la plaque sont données par :
- $$x_G = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi x f(x) dx \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi (f(x))^2 dx.$$
- On pose  $I = \int_0^\pi \sin^2(2x) dx$  et  $J = \int_0^\pi x \sin(2x) dx$ .
- a) Vérifier que:  $x_G = \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{2}{3} \pi^3 + J \right)$  et  $y_G = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{4}{3} \pi^3 + 4J + I \right)$
- b) Calculer I. (on pourra utiliser la formule  $\sin^2(t) = \frac{1 - \cos 2t}{2}$ )
- c) En utilisant une intégration par parties, calculer J.
- d) Déduire des questions 3.a), b) et c) les coordonnées du point G.

### PROBLEME

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est 1 cm. On considère les points A, B, C et  $\Omega$  d'affixes respectives  $2$  ;  $-1+i\sqrt{3}$  ;  $-1-i\sqrt{3}$  et  $-1$ .

#### Partie A

Soit  $(\Gamma)$  l'ellipse de centre  $\Omega$  passant par les points A et B et dont l'axe focal est l'axe (OI).

- 1- Construire les points A, B, C et  $\Omega$ .
- 2-
  - a) Déterminer les foyers, les directrices et l'excentricité de  $(\Gamma)$ .
  - b) Déterminer une équation cartésienne de  $(\Gamma)$  dans le repère (O, I, J).
  - c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $(\Gamma)$  avec l'axe (OJ).
- 3- Tracer  $(\Gamma)$  dans le repère (O, I, J).

#### Partie B

On désigne par s la similitude de centre A, de rapport 2 et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  et par h l'homothétie de centre A et de rapport  $-\frac{1}{2}$ .

Soit E l'image du point C par h.

- 1-
  - a) Démontrer que le triangle ABC est un triangle équilatéral de sens direct.
  - b) Démontrer que  $s(E) = B$ .
  - c) Construire les points F et K tels que  $s(C) = F$  et  $s(B) = K$ .

- 2- Le cercle circonscrit au triangle BCE recoupe la droite (AB) en un point G et le cercle circonscrit au triangle BFK recoupe la droite (AK) en un point D.
- Construire les points G et D.
  - Démontrer que  $s(G) = D$ .
- 3- Soit  $S_{(OA)}$  la symétrie orthogonale d'axe (OA).
- Démontrer que  $S_{(OA)}(E) = G$
  - Justifier que  $h(B) = G$
  - Démontrer que le triangle ABD est équilatéral de sens indirect.
- 4- Démontrer que le quadrilatère ADBC est un losange.
- 5- Démontrer que l'image du triangle DBA par  $h^{-1}$  est le triangle KAF (où  $h^{-1}$  est la réciproque de  $h$ ).