BACCALAURÉAT
SESSION 2024

Durée : 3
Coefficient :

MATHÉMATIQUES

SÉRIE A1

Cette épreuve comporte 2 pages numérotées 1/2 et 2/2.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.
Chaque candidat recevra une feuille de papier millimétré.

EXERCICE 1 **(2 points)**

Écris le numéro de chaque proposition, suivi de VRAI si la proposition est vraie ou de FAUX si la proposition est fausse.

1. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la représentation graphique de f en $+\infty$.

2. Si A et B sont deux évènements contraires d'un univers Ω et P une probabilité sur Ω, alors $P(B) = 1 - P(A)$.

3. Si $(u_n)_{n \in N}$ est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors $u_n = u_0 + q^n$.

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2) = -\infty$.

EXERCICE 2 **(2 points)**

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des colonnes A, B, C et D permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie. Écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la colonne qui donne l'affirmation vraie.

N°	Énoncés	A	B	C	D
1.	La dérivée sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x-4}$ est …	$x \longmapsto \dfrac{1}{(x-4)^2}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{x-4}$	$x \longmapsto \dfrac{-1}{x-4}$	$x \longmapsto \dfrac{-1}{(x-4)^2}$
2.	La suite arithmétique $(v_n)_{n \in N}$ de raison 2 et de premier terme 5 a pour formule explicite …	$2n + 5$	5×2^n	$2n - 5$	$5n + 2$
3.	La fonction $x \longmapsto e^x$ a pour ensemble de définition …	$]0 ; +\infty[$	$\mathbb{R}$	$]-\infty ; 0]$	$[1 ; +\infty[$
4.	Soient A et B deux évènements d'un univers Ω et P une probabilité sur Ω. Si $P(A) = 0,35$; $P(B) = 0,4$ et $P(A \cup B) = 0,5$, alors $P(A \cap B)$ est égale à …	0,35	0,4	0,25	0,6

EXERCICE 3 **(5 points)**

On considère le système d'équations (S) d'inconnue le couple $(x\ ;y)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ suivant :

$$(S)\begin{cases} 3x+y=5 \\ x-2y=-3 \end{cases}.$$

1. Justifie que le couple (1 ; 2) est la solution du système (S).

2. Déduis-en la solution dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ du système : $\begin{cases} 3e^{x}+e^{y}=5 \\ e^{x}-2e^{y}=-3 \end{cases}$.

EXERCICE 4 **(6 points)**

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x)=5-x+\ln x$.
On note $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) d'unités graphiques : OI = 1 cm et OJ = 2 cm.

1. *a*) Justifie que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$.
   b) Donne une interprétation graphique du résultat précédent.

2. On suppose que pour tout nombre réel x strictement positif, $f(x)=x\left(\frac{5}{x}-1+\frac{\ln x}{x}\right)$.
   Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. *a*) On suppose que f est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.
   Justifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;+\infty[$, $f'(x)=\frac{1-x}{x}$.
   b) Justifie que f est croissante sur l'intervalle $]0\ ;1]$ et décroissante sur $]1\ ;+\infty[$.
   c) Dresse le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

4. Justifie que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]6{,}93\ ;6{,}94[$.

5. On admet le tableau de valeurs ci-dessous :

x	0,1	0,5	0,7	1	3	6	7	8
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	2,6	3,8	3,9	4	3,1	0,8	−0,05	−0,9

Construis $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $[0{,}1\ ;8]$.

6. On considère la fonction F définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $F(x)=4x-\frac{x^2}{2}+x\ln x$.
   On suppose que F est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$.
   a) Justifie que F est une primitive de f sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.
   b) Calcule l'aire $\mathscr{A}$, en cm², de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$ de f, l'axe des abscisses (OI) et les droites d'équations : $x=1$ et $x=4$.

EXERCICE 5 **(5 points)**

Dans le programme d'activités du bureau de la promotion Terminale d'un établissement, est mentionnée : « motivation des candidats pour 100% de réussite au BAC, session 2024 ».
Pour cela, le bureau rencontre le proviseur pour connaître les pourcentages des admis au baccalauréat des six dernières années. Les pourcentages sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Année	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Rang de l'année X	1	2	3	4	5	6
Pourcentage Y	78,8	79,7	81,1	82,9	83,6	92,7

Le président de la promotion soutient que le taux de réussite au BAC de la session 2024 sera d'au moins 90%.
À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, donne ton avis sur l'affirmation du président.

CORRIGÉ ET BARÈME (Bac A1-2024)

1 CORRIGÉ	BARÈME

Exercice 1

1- Vrai ; 2- Vrai ; 3- Faux ; 4- Vrai

Exercice 2

1 - D ; 2 - A ; 3 - B ; 4 - C

Exercice 3

1) Justifions que le couple $(1;2)$ est la solution du système (S) :

On a : $\begin{cases} 3\times 1 + 2 = 3 + 2 = 5 \\ 1 - 2\times 2 = 1 - 4 = -3 \end{cases}$

Donc le couple $(1;2)$ est la solution du système (S)

2) Déduisons-en la solution dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ du système : $\begin{cases} 3e^x + e^y = 5 \\ e^x - 2e^y = -3 \end{cases}$

Posons : $X = e^x > 0$ et $Y = e^y > 0$

② CORRIGÉ | BARÈME

On a : $\begin{cases} 3e^{x} + e^{y} = 5 \\ e^{x} - 2e^{y} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3X + Y = 5 \\ X - 2Y = -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ Y = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{x} = 1 \\ e^{y} = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \ln(2) \end{cases}$

Donc : $\boxed{S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(0 ; \ln(2))\}}$

Exercice 4

1. a) <u>Justifions que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$</u>

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (5 - x + \ln x) = -\infty$

car $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} 5 - x = 5 - 0 = 5 \\ \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty \end{array} \right.$

b) <u>Donnons une interprétation graphique du résultat précédent :</u>

La droite (OJ) est une asymptote à $(\mathcal{C})$

CORRIGÉ	BARÈME

2) Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{5}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$$

car $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{5}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 0 - 1 + 0 = -1 \end{cases}$

3.a) Justifions que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{1-x}{x}$

$$\forall x \in]0;+\infty[, \; f'(x) = 0 - 1 + \frac{1}{x} = \frac{-x+1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1-x}{x}$$

b) Justifions que f est croissante sur $]0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$

le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$ car : $\forall x \in]0;+\infty[$, $x > 0$.

On a : $1 - x = 0 \iff -x = -1$

$\iff x = 1$

Donc :

x	0		1		$+\infty$
$1-x$	‖	$+$	0	$-$	

D'où f est croissante sur $]0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$

CORRIGÉ | BARÈME

c) Dressons le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$

On a : $f(1) = 5 - 1 + \ln(1) = 4$

Donc :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

4) Justifions que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]6,93;6,94[$:

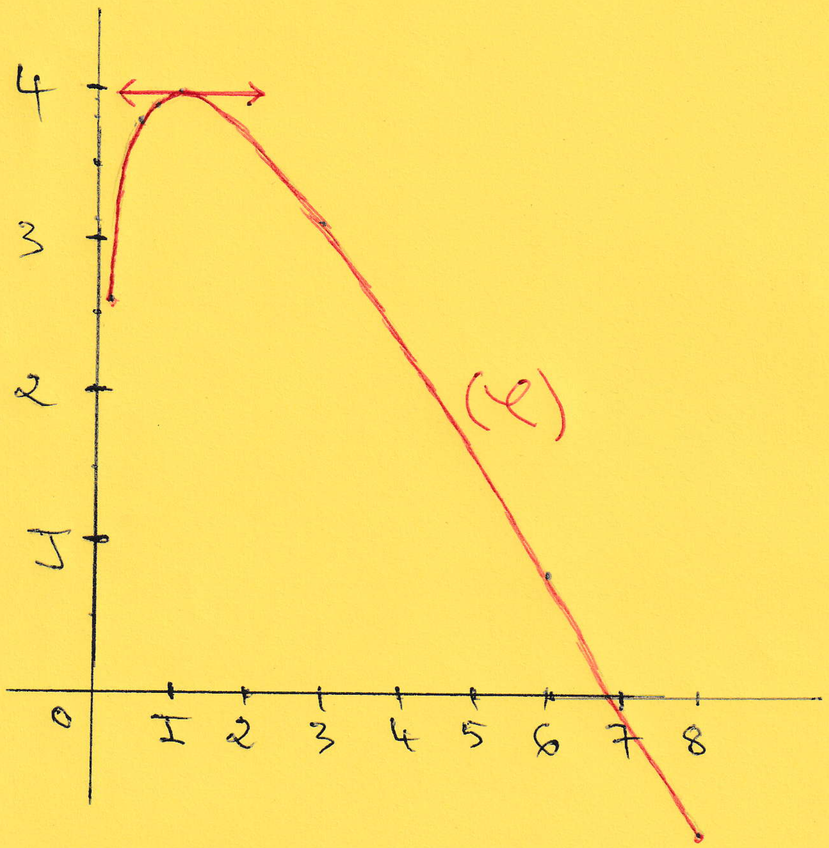
f est dérivable et décroissante sur $[1;+\infty[$, en particulier sur $]6,93;6,94[$.

De plus : $\begin{cases} f(6,93) = 5 - 6,93 + \ln(6,93) = 0,0058 > 0 \\ f(6,94) = 5 - 6,94 + \ln(6,94) = -0,0026 < 0 \end{cases}$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]6,93;6,94[$.

5 CORRIGÉ | BARÈME

5) Construisons $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle $[0,1;8]$



6.a) Justifions que F est une primitive de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

on a : $\forall x \in]0;+\infty[$, $F'(x) = 4 \times 1 - \frac{1}{2} \times 2x + \ln x + 1$

$F'(x) = 4 - x + \ln x + 1$

$F'(x) = 5 - x + \ln x$

$F'(x) = f(x)$

Donc F est une primitive de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$

b) Calculons l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 :

$$\mathcal{A} = \left(\int_1^4 f(x)dx\right) \times u.a \quad \text{avec } u.a = 2\,cm^2$$

$$\mathcal{A} = \left[F(x)\right]_1^4 \times 2\,cm^2 = 2\left(F(4) - F(1)\right)cm^2$$

$$\mathcal{A} = 2\left(4\times4 - \frac{4^2}{2} + 4\ln 4 - 4\times1 + \frac{1^2}{2} - 1\ln(1)\right)cm^2$$

$$\mathcal{A} = \left(8\ln(2) + \frac{9}{2}\right)\times 2\,cm^2$$

$$\boxed{\mathcal{A} = (16\ln(2) + 9)\,cm^2}$$

Exercice 5

Pour ~~ses~~ donner mon avis sur l'affirmation du président, je vais utiliser la série statistique double. Pour cela, je vais :

- Calculer $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $V(X)$, $V(Y)$, $cov(X,Y)$;
- Calculer le coefficient de corrélation r puis interpréter le résultat;
- Déterminer une équation de la droite de regression (D) de Y en X ;
- Calculer le pourcentage de réussite

⑦ CORRIGÉ	BARÈME

au bac en 2024 ;

- Conclure.

Déroulement

~~On a~~ :

• Je calcule $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $V(X)$, $V(Y)$ et $cov(X,Y)$:

$$* \overline{X} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \underline{\underline{3{,}5}}$$

$$* \overline{Y} = \frac{78{,}8+79{,}7+81{,}1+82{,}9+83{,}6+92{,}7}{6} = \underline{\underline{83{,}1}}$$

$$* V(X) = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} - (3{,}5)^2 = \underline{\underline{2{,}92}}$$

$$* V(Y) = \frac{(78{,}8)^2+(79{,}7)^2+(81{,}1)^2+(82{,}9)^2+(83{,}6)^2+(92{,}7)^2}{6} - (83{,}1)^2$$

$$V(Y) = \underline{\underline{26{,}62}}$$

$$* Cov(X,Y) = \frac{1\times78{,}8+2\times79{,}7+3\times81{,}1+4\times82{,}9+5\times83{,}6+6\times92{,}7}{6} - 3{,}5\times83{,}1$$

$$cov(X,Y) = \underline{\underline{07{,}03}}$$

• Je calcule le coefficient de corrélation linéaire r :

On a : $r = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}} = \frac{07{,}03}{\sqrt{2{,}92\times26{,}62}} = 0{,}79$

Donc il y a une faible corrélation entre les caractères X et Y

8

CORRIGÉ | BARÈME

• Je détermine une équation de la droite de regression (D) de Y en X :

On a : $a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{07,03}{02,92} = 2,41$

$b = \overline{Y} - a\overline{X} = 83,1 - 2,41 \times 3,5 = 74,665$

Donc une équation de la droite de regression (D) de Y en X est :

$y = 2,41x + 74,665$.

• Je calcule le taux de réussite au bac en 2024 :

~~L'année 2024 a pour rang~~

Le rang de l'année 2024 est 7.

Or : pour $x = 7$, $y = 2,41 \times 7 + 74,665 = 91,535$

Donc le taux de réussite au bac en 2024 sera 91,54 %.

• Je donne mon avis

L'affirmation du président est juste car le taux de réussite au bac en 2024 est supérieur à 90%