BAC 2023

Serie C

1/3

exercice 1

1- Vrai ; 2- Faux ; 3- Faux ; 4- Vrai

0,5 0,5 0,5 0,5

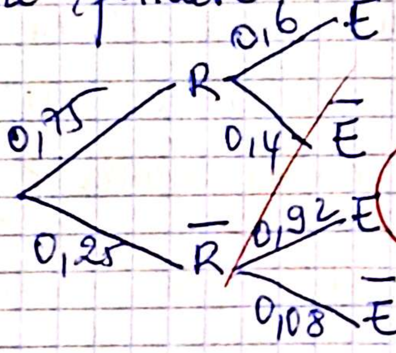
exercice 2

1- C ; 2- D ; 3- A ; 4- A

0,5 0,5 0,5 0,5

exercice 3

1-a) Arbre pondéré



0,5

1-b) Donnons $P(R)$; $P_{\overline{R}}(\overline{E})$; $P_R(E)$

on a : $P(R) = 0,75$; $P_{\overline{R}}(\overline{E}) = 0,08$; $P_R(E) = 0,6$ 0,75

2 a) Calculons $P_R(\overline{E})$

$$P_R(\overline{E}) = \frac{P(\overline{E} \cap R)}{P(R)} = \frac{0,4 \times 0,75}{0,75}$$ 0,25

$P_R(\overline{E}) = 0,4$ $\quad$ $P_R(\overline{E}) = 1 - P_R(E) = 0,4$

b) justifions que $P(\overline{R} \cap E) = 0,23$

$$P(\overline{R} \cap E) = P_{\overline{R}}(E) \times P(\overline{R})$$
$$= 0,92 \times 0,25$$

$$\boxed{P(\overline{R} \cap E) = 0,23}$$ 0,25

3.a) justifions que la probabilité qu'un scientifique interrogé soit un écologiste est : 0,68

$$P(E) = P(R \cap E) + P(\overline{R} \cap E)$$
$$= P_R(E) \times P(R) + P(\overline{R} \cap E)$$
$$= 0,6 \times 0,75 + 0,23$$

$$\boxed{P(E) = 0,68}$$

0,5

3.b) Un scientifique interrogé est un écologiste. Calculons la probabilité qu'il ne croit pas au réchauffement climatique. Il s'agit de calculer $P_E(\overline{R})$ 0,25

$$P_E(\overline{R}) = \frac{P(\overline{R} \cap E)}{P(E)}$$ 0,25

$$= \frac{0,23}{0,68}$$

$$\boxed{P_E(\overline{R}) = 0,34}$$

0,25

Exercice 4

Soit $m \in \mathbb{R}$, et $f_m \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \longmapsto f_m(x) = x + \ln(1 - me^{-x})$

1) justifions que

a) si $m \leq 0$, $D_m = \mathbb{R}$

Si $m \leq 0$, alors $-m \geq 0 \Rightarrow 1 - me^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$,
Ainsi $D_m = \mathbb{R}$.

0,25

1.b) Si $m>0$, alors $D_m =]\ln(m);+\infty[$

Soit $m>0$, $x \in D_m \iff 1-me^{-x}>0, \forall x \in \mathbb{R}$

~~Ainsi $D_m=\mathbb{R}$~~ $\iff e^{-x} < \frac{1}{m}$

0,25

$\iff -x < -\ln(m)$

$\iff x > \ln(m)$

$\iff x \in]\ln(m);+\infty[$

Donc si $m>0$, alors $D_m =]\ln(m);+\infty[$

2) On suppose que f_m est dérivable sur D_m $\forall m \in \mathbb{R}$

a) Justifions que $\forall x \in D_m$, $f_m'(x) = \dfrac{e^x}{e^x - m}$

$\forall x \in D_m$ $f_m'(x) = \left(x+\ln(1-me^{-x})\right)'$

0,5

$$= 1 + \frac{me^{-x}}{1-me^{-x}}.$$

$$= \frac{1-me^{-x}+me^{-x}}{1-me^{-x}}$$

$$= \frac{1}{1-me^{-x}}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{m}{e^x}}$$

$$= \frac{1}{\frac{e^x-m}{e^x}}$$

Scanné avec CamScanner

BAC 2023

Serie C

exercice 4

2/3

3.b) Etablissons que $\forall m \in \mathbb{R}$, et $\forall x \in D_m$, on a :

$$f_m^{-1}(x) = f_{-m}(x)$$

soit $y \in D_m$, $x \in f(D_m)$

on a : $f_m(x) = y \Leftrightarrow x + \ln(1 - me^{-x}) = y$

$$\Leftrightarrow \ln(1 - me^{-x}) = y - x$$

$$\Leftrightarrow 1 - me^{-x} = e^{y} \times e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow (m + e^{y})e^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{m + e^{y}}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = m + e^{y}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(m + e^{y})$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(e^{y}(1 + me^{-y}))$$

$$\Leftrightarrow x = y + \ln(1 + me^{-y})$$

0,1

donc $f_m^{-1}(x) = x + \ln(1 + me^{-x})$

or $f_{-m}(x) = x + \ln(1 - (-m)e^{-x})$

$$= x + \ln(1 + me^{-x})$$

on a alors $\underline{f_m^{-1}(x) = f_{-m}(x)}$

3-c) Déduisons de la question précédente, une méthode de construction de (C_{-m})

On sait que $(C_{f_m^{-1}})$ et (C_m) sont symétriques par rapport à (Δ). Comme $f_m^{-1}(x) = f_{-m}(x)$ alors (C_m) et (C_{-m}) sont symétriques par rapport à (Δ).

0,25

4.) On suppose que m et p sont dans $\mathbb{R}_+^*$

a) justifions que (C_p) est l'image de (C_1) par la translation T de vecteur $\vec{u}(\ln p, \ln p)$

on a: $D_p =]\ln p ; +\infty[$ et $D_m =]\ln(m) ; +\infty[$

~~on a~~ : $f_1(x-\ln p) + \ln p = x - \ln p + \ln(1 - e^{-(x-\ln p)}) + \ln p$

$= x - \ln p + \ln p + \ln(1 - e^{-x} \cdot e^{\ln p})$

$= x + \ln(1 - pe^{-x})$ car $e^{\ln p} = p$

$= f_p(x)$

Donc (C_p) est l'image de (C_1) par la translation T de vecteur $\vec{u}(\ln p, \ln p)$

0,5

4.b) Déterminons la translation T' qui transforme (C_p) en (C_m)

Soit $\vec{v}\binom{a}{b}$ le vecteur de T' tel que

$T_{\vec{v}}(C_p) = (C_m)$

Ainsi $f_p(x-a) + b = f_m(x)$

$\Rightarrow x - a + \ln(1 - pe^{-(x-a)}) + b = x + \ln(1 - me^{-x})$

$\Rightarrow b-a+\ln\left(1-pe^{a}e^{-x}\right)=\ln\left(1-me^{-x}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} b-a=0 \\ pe^{a}=m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=a \\ e^{a}=\dfrac{m}{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=a \\ a=\ln\left(\dfrac{m}{p}\right) \end{cases}$

donc $a=b=\ln\left(\dfrac{m}{p}\right)$

$=\ln(m)-\ln p$

T' a pour vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}\ln(m)-\ln p \\ \ln(m)-\ln p\end{pmatrix}$

0,5

exercice 5

(E): $4x-y=2$ où $x,y\in\mathbb{Z}$

1a) Démontrons que si (x_0,y_0) est une solution de (E) alors y_0 est pair

soit (x_0,y_0) une solution de (E)

alors $4x_0-y_0=2 \Rightarrow y_0=4x_0-2$

0,5

$\Rightarrow y_0=2(2x_0-1)$

$\Rightarrow y_0=2k$ avec $k=2x_0-1$

Ainsi y_0 est pair

1-b) Valeur de $PGCD(x_0,y_0)$

- si x_0 est impair alors $PGCD(x_0,y_0)=d=1$
- si x_0 est pair alors

- si $x_0 \mid y_0 ; x_0 \mid 4x_0 - y_0$ donc $x_0 / 2$ car $4x_0 - y_0 = 2$

Ainsi $PGCD(x_0, y_0) = 1$ ou $PGCD(x_0, y_0) = 2$.

- Si y_0 / x_0, on a aussi $PGCD(x_0, y_0) = 1$ ou $PGCD(x_0, y_0) = 2$

Finalement, $PGCD(x_0, y_0) \in \{1 ; 2\}$. 0,25

2.a) Vérifions que $(1,2)$ est une solution de (E)

on a : $4 \times 1 - 2 = 4 - 2$
$= 2$ d'où le résultat 0,25

2b) Résolvons (E)

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ solution de (E)

Alors on a : $4x - y = 2$.

Comme $(1,2)$ est une solution de (E) on a : le système

$$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 4 \times 1 - 2 = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow 4(x-1) - (y-2) = 0$

$\Rightarrow 4(x-1) = y-2$

on a : $4 / \cancel{x-1}$ et $PGCD(4,1) = 1$ donc d'après le

Théorème de Gauss, 4 divise $y-2$, Alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $y-2 = 4k$

Ainsi $y = 4k+2$.

BAC 2023

Serie C

3 | 3

exercice 5

2b) on a : $4(x-1) = 4k \Rightarrow x-1 = k$.

$\Rightarrow x = k+1$.

Réciproquement si $(x,y) = (1+k, 4k+2)$ on a :

$4(1+k) - (4k+2) = 4 + 4k - 4k - 2$
$= 2$

0,5

Conclusion : $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{k+1 ; 4k+2, k \in \mathbb{Z}\}$

3) l'ensemble des (x, y) solution de (E) telque $PGCD(x,y) = 1$

0,25

x et y sont étrangers si x est impair.. x et y sont premiers entre eux

Ainsi $x = 2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$ alors $k+1 = 2n+1$

d'où $4k+2 = 4\times 2n + 2$
$= 8n+2$

0,25

Donc l'ensemble des solutions est $\{(2n+1 ; 8n+2)\}$

4/ $\overline{ac2}^{3}$ et $\overline{baa}^{4}$ sont deux écritures dep dans la base 3 et dans la base 4

a) justifions que $3c+2$ est multiple de 4

$= a\times 3^2 + c\times 3^1 + 2\times 3^0$

$= 9a + 3c + 2$ 0,25

$P = \overline{baa}^4$

$= b\times 4^2 + a\times 4^1 + a\times 4^0$

$= 16b + 4a + a$

$= 16b + 5a$ 0,25

Donc $9a + 3c + 2 = 16b + 5a$

$3c + 2 = 16b - 4a$

$= 4(4b - a)$ 0,25

$= 4q$ avec $q = 4b - a \in \mathbb{Z}$

Donc $3c+2$ est multiple de 4

4.b) Déduisons que $c = 2$

On a : $3c + 2 = 4q \Rightarrow 4q - 3c = 2$

$\Rightarrow 4q - r = 2$ avec $r = 3c$

est de la forme $4x - y = 2$ 0,5

or $c \in \{0, 1, 2\}$

- si $c = 0$, $r = 3\times 0 = 0$ impossible
- si $c = 1$, $r = 3$ impossible car 3 n'est pas pair
- si $c = 2$ $r = 6$ (vérifiée) donc $c = 2$

4-c) Valeur de a et b.

Comme $c=2$, on a : $9a+6+2=16b+5a$

soit $16b-4a=8$

$4b-a=2$

0,5

or $4b-a=2$ est de la forme $4x-y=2$

alors $a=4k+2$ et $b=1+k$, $k\in\mathbb{Z}$ (d'après 2b)

Comme a et b sont des éléments en base 3 et 4

alors $k=0$, d'où $a=2$ et $b=1$

4-d) on a : $P=\overline{222}^{3}$

$=2\times3^2+2\times3^1+2\times3^0$

$=18+6+2$

0,25

$$\boxed{P=26}$$

exercice 6

Pour répondre à la préoccupation de l'étudiante je vais utiliser les équations différentielles

Pour cela je vais

- Traduire la situation sous forme d'une équation diff d'inconnue P.

- Résoudre cette équation diff.

- Trouver la valeur de l'âge de l'os afin de répondre à la préoccupation de l'étudiante.

Scanné avec CamScanner

Résolution

on a : $P'(t) = -\lambda P(t)$

$t \in \mathbb{R}_+^*$

$$\Rightarrow \frac{P'(t)}{P(t)} = -\lambda$$

$$\Rightarrow \int \frac{P'(t)}{P(t)} = -\lambda \int dt$$

$$\ln|P(t)| = -\lambda t + k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$P(t) = e^{k} e^{-\lambda t} = k e^{-\lambda t}, \; k = e^{k} \in \mathbb{R}$$

on a : $P(t) = k e^{-\lambda t}, \; k \in \mathbb{R}$

$$P_0 = P(0) = k e^{-\lambda \times 0}$$

$$= k \Rightarrow k = P_0$$

donc $P(t) = P_0 e^{-\lambda t}$

$$\Rightarrow \frac{P(t)}{P_0} = e^{-\lambda t}$$

or $\dfrac{P(t)}{P_0} = 0{,}7$

$$\Rightarrow e^{-\lambda t} = 0{,}7$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{\lambda} \ln(0{,}7)$$

$$= \frac{1}{1{,}2444 \times 10^{-4}} \times \ln(0{,}7)$$

$t = 2866{,}24$ années

Soit exactement 2866 années 2 mois 3 semaines 3 jours 10 heures 21 minutes et 36 secondes.