BACCALAURÉAT
SESSION 2023

Durée : 4 h
Coefficient : 4

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.
Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.

EXERCICE 1 (2 points)

Soit f une fonction numérique définie et deux (2) fois dérivable sur un intervalle contenant un nombre réel x_0. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). a et b sont deux nombres réels tels que : $a < b$.
On note f' et f'' les dérivées première et seconde respectives de f.
Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque proposition suivi de **Vrai** si la proposition est vraie ou de **Faux** si la proposition est fausse.

N°	Propositions
1.	Si $f''(x_0) \neq 0$, alors (C) admet un point d'inflexion au point d'abscisse x_0.
2.	Si f est négative sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, alors l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par (C), la droite (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est : $-\int_a^b f(t)dt$.
3.	Si $\forall\, x \in [a\,;\,b]$, $\lvert f'(x)\rvert \leq m$, alors $\lvert f(a) - f(b)\rvert \leq m(a - b)$, ($m \in \mathbb{R}$)
4.	Les solutions de l'équation différentielle $f'' + \omega^2 f = 0$ ($\omega \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme : $x \mapsto Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ ($A\in\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{R}$).

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des lignes A, B, C et D permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie.
Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la ligne qui donne l'affirmation vraie.

N°	Énoncés	Informations	
1.	Soient $(X\,;\,Y)$ une série statistique double et $\mathrm{Cov}(X\,;\,Y)$ sa covariance. On note respectivement $V(X)$ et $V(Y)$ les variances de X et Y. On admet que $V(X) \neq 0$ et $V(Y) \neq 0$. On appelle coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double $(X\,;\,Y)$, le nombre réel noté r tel que …	A	$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$.
		B	$r = -\frac{Cov(X,Y)}{V(X)V(Y)}$.
		C	$r = -\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$.
		D	$r = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)V(Y)}$.

2.	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto cosx - xsinx$ est la fonction …	A	$x \longmapsto cosx - sinx$.
		B	$x \longmapsto xcosx$.
		C	$x \longmapsto sinx - cosx$.
		D	$x \longmapsto -xcosx$.
3.	Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 2, alors la somme des n premiers termes consécutifs de cette suite est égale à …	A	$(n+1)(n+3)$.
		B	$n(n+2)$.
		C	$\frac{(n+1)(n+3)}{2}$.
		D	$\frac{(n+2)(n+3)}{2}$.
4.	L'ensemble des solutions de l'inéquation : $x \in \mathbb{R}$, $\ln(1-x) < 2$ est …	A	$]1\,;e^2-1[$.
		B	$]-\infty\,;1-e^2[$.
		C	$]1-e^2\,;1[$.
		D	$]e^2-1\,;+\infty[$.

EXERCICE 3 **(3 points)**

Un sondage effectué auprès d'anciens élèves d'un lycée révèle que :
- 55% d'entre eux poursuivent uniquement leurs études dans une université ;
- 10% poursuivent uniquement leurs études dans une grande école ;
- les autres sont sur le marché du travail.

Ce sondage révèle aussi que certains de ces anciens élèves ont fait le choix de vivre en colocation. Il s'agit de :
- 45% des anciens élèves qui poursuivent leurs études dans une université ;
- 30% des anciens élèves qui poursuivent leurs études dans une grande école ;
- 15% des anciens élèves qui sont sur le marché du travail.

On interroge au hasard un ancien élève du lycée.
On considère les évènements suivants :
U : « L'ancien élève poursuit ses études dans une université » ;
G : « L'ancien élève poursuit ses études dans une grande école » ;
T : « L'ancien élève est sur le marché du travail » ;
C : « L'ancien élève vit en colocation ».

1. Construis un arbre pondéré traduisant la situation.
2. Calcule la probabilité pour que l'ancien élève poursuive ses études dans une université et ait choisi de vivre en colocation.
3. Justifie que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,33.
4. Un ancien élève vit en colocation.
Calcule la probabilité qu'il poursuive ses études dans une université.

EXERCICE 4 **(3 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). On désigne par Ω, A et B les points d'affixes respectives z_Ω, z_A et z_B telles que : $z_\Omega = 1 + i$, $z_A = 1$ et $z_B = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.

1. On note S la similitude directe de centre Ω qui transforme A en B.
   a) Justifie que : $\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.
   b) Déduis de 1.*a)* que S a pour rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et pour angle $\frac{\pi}{4}$.
   c) Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1$.

2. *a)* Justifie que l'affixe du point K, image du point J par la similitude directe S est : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.
   b) Démontre que les points O, K et Ω sont alignés.

EXERCICE 5 **(5 points)**

Soit *f* la fonction numérique définie sur [0 ; +∞[par : $f(x) = xe^{-x}$.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est : 2 cm.

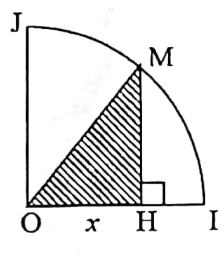
1. *a)* Détermine la limite de *f* en +∞.
   b) On admet que *f* est dérivable sur [0 ; +∞[.
   Justifie que : $\forall x \in [0\,; +\infty[, f'(x) = (1 - x)e^{-x}$.
   c) Démontre que *f* est strictement croissante sur]0 ; 1[et strictement décroissante sur]1 ; +∞[.
   d) Dresse le tableau de variation de *f*.
   e) Construis (C) dans le repère (O, I, J).

2. Démontre que l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ admet une unique solution α dans]0 ; 1[.

3. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$.
   a) Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $u_n > 0$.
   b) Démontre que la suite (u_n) est décroissante.
   c) Justifie que la suite (u_n) est convergente.
   d) Détermine la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 6 **(5 points)**

Une coopérative agricole possède un terrain qui a la forme d'un quart de disque de rayon 1 km représenté par la figure ci-contre qui n'est pas en grandeurs réelles. Elle veut partager son terrain en trois parcelles pour y cultiver respectivement des tomates, des aubergines et des patates.
La parcelle hachurée est réservée à la culture des tomates. La coopérative souhaite que l'aire de cette parcelle soit maximale.



L'agent de l'agriculture chargé de la mise en valeur de ces trois parcelles informe la coopérative que l'aire de la partie réservée à la culture des tomates est égale à $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$, où $x = \text{OH}$ et $x \in [0\,;1]$.
Le gérant de la coopérative ne sachant comment déterminer l'aire maximale, te sollicite.
À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation du gérant de la coopérative.