BACCALAURÉAT
SESSION 2024

Durée : 4 h
Coefficient : 4

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE 1 (2 points)

Écris, le numéro de chacun des énoncés ci-dessous suivi de VRAI si l'énoncé est vrai ou de FAUX si l'énoncé est faux.

1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K et F une primitive de f sur K. Les fonctions $x \mapsto F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ sont les primitives de f sur K.
2. Le coefficient de corrélation linéaire r d'une série statistique double (X, Y) est tel que : $-1 < r < -0{,}87$. La corrélation linéaire entre les variables X et Y est forte.
3. La fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto a^x$, $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, est la fonction : $x \longmapsto a^x$.
4. Soit f une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ et ℓ un nombre réel tel que : $\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ |f(x) - \ell| < \frac{1}{x}$. On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés ci-dessous, les informations a, b, c et d permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie.
Écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de l'information qui donne l'affirmation vraie.

1. z est un nombre complexe tel que $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Le module de z est égal à…
   $a)$ $a^2 + b^2$; $b)$ $\sqrt{a^2 + b^2}$; $c)$ $a^2 - b^2$; $d)$ $|a + b|$.
2. Une primitive sur $]0\,;\frac{\pi}{2}[$ de la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$ est la fonction F définie par :…
   $a)$ $F(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$; $b)$ $F(x) = -\ln(\sin x)$; $c)$ $F(x) = \ln(\sin x)$; $d)$ $F(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin x)^2}$.
3. Soit Ω un point du plan. L'homothétie de centre Ω et de rapport -3 est une similitude directe de centre Ω, de …
   $a)$ rapport -3 *et* d'angle 0 ; $b)$ rapport -3 *et* d'angle π ;
   $c)$ rapport 3 *et* d'angle π ; $d)$ rapport 3 *et* d'angle 0.
4. Si A, B et C sont des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B et z_C telles que : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i\sqrt{3}$, alors…
   $a)$ ABC est un triangle rectangle en A ; $b)$ ABC est un triangle isocèle en A
   $c)$ ABC est un triangle rectangle isocèle en A ; $d)$ les points A, B et C sont alignés.

EXERCICE 3 (3 points)

Dans le cadre du programme jeunesse d'un gouvernement, une enquête a été menée en 2023 sur l'ensemble des élèves issus d'un centre de formation professionnelle.
Cette enquête a révélé que 40% de ces élèves sont des bacheliers. Parmi ces bacheliers, 90% ont obtenu un emploi et parmi les non bacheliers, 70% ont obtenu un emploi.

1. On choisit au hasard un élève issu de ce centre.
   Démontre que la probabilité que cet élève ait obtenu un emploi est 0,78.

2. On admet que le centre a formé suffisamment d'élèves.
   On choisit au hasard 5 élèves issus du centre et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves ayant obtenu un emploi.
   a) On admet que X suit une loi binomiale de paramètres 5 et 0,78.
   Calcule l'espérance mathématique E(X) de X et interprète le résultat.
   b) Calcule la probabilité qu'au moins 3 de ces élèves aient obtenu un emploi.

EXERCICE 4 (3 points)

On se propose de chercher la fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = -4x - 4$ telle que $f(0) = 1$, puis de déterminer une valeur approchée de l'équation $x \in [0 ; +\infty[$, $f(x) = -1$.

1. Démontre que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2x + 3$ est une solution de (E).

2. Soit l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$.
   Détermine les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E').

3. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Démontre que g est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est une solution de (E').
   b) Déduis des questions précédentes les solutions de (E).
   c) Justifie que la fonction f cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2e^{2x} + 2x + 3$.

4. *a)* Justifie que f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.
   b) Démontrer que l'équation $x \in [0 ; +\infty[, f(x) = -1$, admet une solution unique α telle que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

EXERCICE 5 (5 points)

Le but de cet exercice est de démontrer qu'une fonction est bijective et d'effectuer un calcul d'aire.
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.
On considère la fonction numérique h, continue sur $]1 ; +\infty[$ et définie par : $h(x) = \frac{x+1}{x\ln x}$.
On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le repère (O, I, J).

1. Démontre que : $\forall x \in]1 ; +\infty[$, $1 + x + \ln x > 0$.

2. *a)* Calcule la limite de h à droite en 1, puis interprète graphiquement le résultat.
   b) Démontre que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ de h en $+\infty$.

3. *a)* Démontre que : $\forall x \in]1 ; +\infty[, h'(x) = -\frac{1+x+\ln x}{(x\ln x)^2}$.
   b) Justifie que : $\forall x \in]1 ; +\infty[, h'(x) < 0$.

4. Démontre que h est une bijection de $]1; +\infty[$ dans un intervalle K à préciser.

5. Soit (Γ) la courbe représentative de la fonction g définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{\ln x}$.
Démontre que $(\mathscr{C})$ est au-dessus de (Γ) sur $]1\,;+\infty[$.

6. *a*) Justifie que : $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln 2$.
b) Détermine l'aire $\mathscr{A}$ en cm² de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C})$, (Γ) et les droites d'équations $x = e$ et $x = e^2$.

EXERCICE 6 (5 points)

Monsieur Zahui, un entrepreneur, vient d'acquérir avec la mairie de sa ville natale un terrain qu'il doit mettre en valeur. Il souhaite construire sur ce terrain un marché de produits vivriers pour aider les femmes à écouler facilement leurs marchandises. Il dispose de 20 000 000 F CFA et voudrait doubler cette somme avant de commencer à réaliser son projet. Il sollicite une institution financière qui lui propose d'épargner cette somme à un taux d'intérêt annuel de 6,9%.

Monsieur Zahui voudrait savoir le nombre minimum d'années qu'il lui faut pour commencer le projet. Ne sachant pas comment s'y prendre, il te sollicite.

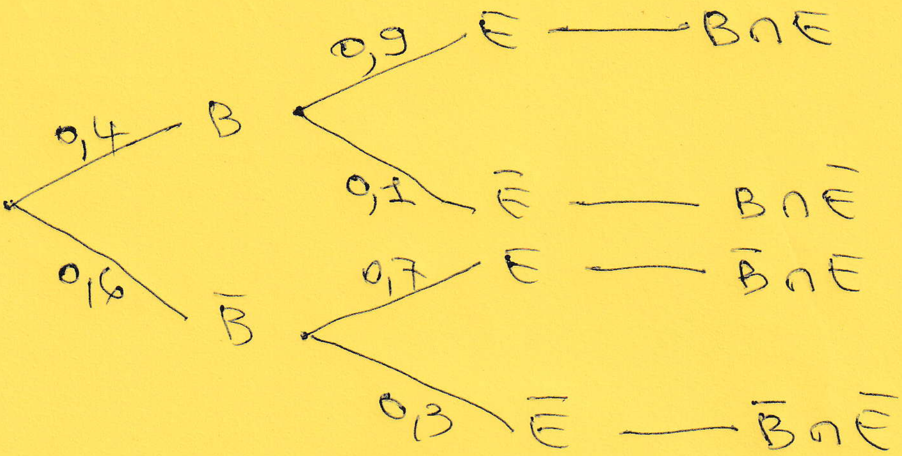
À l'aide d'une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de Monsieur Zahui.

CORRIGÉ ET BARÈME (Bac D - 2024)

1 CORRIGÉ	BARÈME
Exercice 1	
1 - Vrai ; 2 - Faux ; 3 - Faux ; 4 - Vrai	
Exercice 2	
1 - b ; 2 - c ; 3 - b ; 4 - a	
Exercice 3	
1) <u>Démontrons que la probabilité que cet élève ait obtenu un emploi est 0,78 :</u>	
Notons les évènements suivants :	
• B : « l'élève choisi est bachelier »	
• E : « l'élève choisi a obtenu un emploi »	
On a : $P(B) = 0,4$; $P_B(E) = 0,9$ et $P_{\overline{B}}(E) = 0,7$	

(2) CORRIGÉ	BARÈME

Donc :



D'où : $P(E) = P(B \cap E) + P(\bar{B} \cap E)$

$P(E) = 0,4 \times 0,9 + 0,6 \times 0,7$

$\boxed{P(E) = 0,78}$

2. a) <u>Calculons $E(X)$ et interprétons le résultat</u> :

On a : $E(X) = 5 \times 0,8 = 3,9$

On voit que : $E(X) \simeq 4$

Donc 4 élèves sur les 5 choisis peuvent espérer obtenir un emploi.

b) <u>Calculons la probabilité qu'au moins 3 de ces élèves aient obtenu un emploi</u> :

Puisque X suit une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0,78$; alors la loi de probabilité de X est :

$P(X=k)=C_5^k\times(0,78)^k\times(0,22)^{5-k}$ avec $k\in[\![0;5]\!]$

D'où : $P(X\geq 3)=1-P(X<3)$

$=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$

Or : $\begin{cases} P(X=0)=C_5^0\times(0,78)^0\times(0,22)^5=0,0005153632 \\ P(X=1)=C_5^1\times(0,78)\times(0,22)^4=0,009135984 \\ P(X=2)=C_5^2\times(0,78)^2\times(0,22)^3=0,064782432 \end{cases}$

Donc : $P(X\geq 3)=1-0,0005153632-0,009135984-0,064782432$

$\boxed{P(X\geq 3)\simeq 0,926}$

Exercice 4

1) **Démontrons que la fonction h est une solution de (E) :**

On a : $\forall x\in\mathbb{R},\ h'(x)=2$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R},\ h'(x)-2h(x)=2-2(2x+3)=2-4x-6$

$=-4x-4$

D'où la fonction h est une solution de (E)

CORRIGÉ | BARÈME

2) Déterminons les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E').

On a : $(E') \iff y' = 2y$

On voit que (E') est de la forme $y' = ay$ avec $a = 2$.

Donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E') sont les fonctions $x \mapsto Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

3. a) Démontrons que g est solution de (E) si et seulement si $g-h$ est une solution de (E') :

• Supposons que g est solution de (E)

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) - 2g(x) = -4x - 4$ ①

Or : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) - 2h(x) = -4x - 4$ ②

D'où : ① − ② $\iff \forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) - h'(x) - 2(g(x) - h(x)) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(g-h)'(x) - 2(g-h)(x) = 0$

Donc $g-h$ est une solution de (E')

• Supposons que $g-h$ est une solution de (E')

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(g-h)'(x) - 2(g-h)(x) = 0$

$g'(x) - h'(x) - 2g(x) + 2h(x) = 0$

$g'(x) - 2g(x) = h'(x) - 2h(x)$

Or : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) - 2h(x) = -4x - 4$

(5) CORRIGÉ	BARÈME
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) - 2g(x) = -4x - 4$	
D'où g est une solution de (E)	
Par conséquent, g est solution de (E) si et seulement si $g-h$ est une solution de (E').	
b) <u>Déduisons-en les solutions de (E) :</u>	
On sait que $g-h$ est solution de (E'), donc $g-h$ est de la forme $x \mapsto Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$	
D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(g-h)(x) = Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$	
$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = h(x) + Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$	
$\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = Ce^{2x} + 2x + 3$, $C \in \mathbb{R}$	
Par conséquent, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto Ce^{2x} + 2x + 3$ avec $C \in \mathbb{R}$	
c) <u>Justifions que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -2e^{2x} + 2x + 3$</u>	
f étant solution de (E), alors elle est de la forme : $f(x) = Ce^{2x} + 2x + 3$, $C \in \mathbb{R}$	
or : $f(0) = 1 \iff Ce^{2\times 0} + 2\times 0 + 3 = 1$	
$\iff C + 3 = 1$	
$\iff C = -2$	
Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -2e^{2x} + 2x + 3}$	

4.a) <u>Justifions que f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$</u> :

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4e^{2x} + 2$

Or : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0 \iff -4e^{2x} + 2 < 0$

$$\iff -4e^{2x} < -2$$

$$\iff e^{2x} > \frac{1}{2}$$

$$\iff 2x > -\ln 2$$

$$\iff x > -\frac{\ln 2}{2}$$

$$\iff x \in \left]-\frac{\ln 2}{2};+\infty\right[$$

Donc f est strictement décroissante sur $\left]-\frac{\ln 2}{2};+\infty\right[$, en particulier sur $[0;+\infty[$.

b) <u>Démontrons que l'équation : $x \in [0;+\infty[$, $f(x) = -1$, admet une solution unique α telle que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$</u>

f est continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ et $-1 \in f([0;+\infty[) =]-\infty;1]$

avec $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -2e^{2x} + 2x + 3 = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}\left(-2 + \frac{2x}{e^{2x}} + \frac{3}{e^{2x}}\right) = -\infty \\ f(0) = -2e^{2\times 0} + 2\times 0 + 3 = -2 + 3 = 1 \end{cases}$

Donc l'équation : $x \in [0;+\infty[$, $f(x) = -1$ admet une solution unique α.

De plus : $\begin{cases} f(0,4) = -2e^{2\times 0,4} + 2\times 0,4 + 3 = -0,65 > -1 \\ f(0,5) = -2e^{2\times 0,5} + 2\times 0,5 + 3 = -1,43 < -1 \end{cases}$

Donc : $\boxed{0,4 < \alpha < 0,5.}$

Exercice 5

1) Démontrons que : $\forall x \in]1;+\infty[$, $1 + x + \ln x > 0$

On sait que : $\forall x \in]1;+\infty[$, $\ln x > 0$ et $1 + x > 2 > 0$

Donc : $\forall x \in]1;+\infty[$, $1 + x + \ln x > 0$.

2. a) Calculons la limite de h à droite en 1, puis interprétons graphiquement le résultat :

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{\ln x} = +\infty$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x+1}{x} = \frac{1+1}{1} = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{\ln x} = +\infty \end{cases}$

Donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$

 | BARÈME

b) Démontrons que l'axe des abscisses est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$:

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} \times \frac{x+1}{x} = 0 \times 1 = 0$

Donc l'axe des abscisses est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

3-a) Démontrons que : $\forall x \in]1; +\infty[$, $h'(x) = -\frac{1+x+\ln x}{(x\ln x)^2}$:

$\forall x \in]1; +\infty[$, $h'(x) = \frac{1 \times x\ln x - (x+1)(\ln x + 1)}{(x\ln x)^2}$

$h'(x) = \frac{x\ln x - x\ln x - x - \ln x - 1}{(x\ln x)^2}$

$h'(x) = \frac{-x - \ln x - 1}{(x\ln x)^2}$

$\boxed{h'(x) = -\frac{1+x+\ln x}{(x\ln x)^2}}$

b) Justifions que : $\forall x \in]1; +\infty[$, $h'(x) < 0$

On sait que : $\forall x \in]1; +\infty[$, $1 + x + \ln x > 0$

$-(1+x+\ln x) < 0$

or le signe de $h'(x)$ est celui de $-(1+x+\ln x)$ car $\forall x \in]1; +\infty[$, $(x\ln x)^2 > 0$.

Donc : $\boxed{\forall x \in]1; +\infty[, h'(x) < 0}$

CORRIGÉ | BARÈME

4) Démontrons que h est une bijection de $]1;+\infty[$ dans un intervalle K à préciser :

h étant continue et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$, alors elle réalise une bijection de $]1;+\infty[$ dans l'intervalle $K = h(]1;+\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} h \,; h(1)[=]0;+\infty[$.

5) Démontrons que $(\mathscr{C})$ est au-dessus de (Γ) :

On a : $\forall x \in]1;+\infty[$, $h(x) - g(x) = \dfrac{x+1}{x\ln x} - \dfrac{1}{\ln x}$

$$= \frac{x+1-x}{x\ln x}$$

$$= \frac{1}{x\ln x}$$

or : $\forall x \in]1;+\infty[$, $x\ln x > 0$

donc : $\forall x \in]1;+\infty[$, $h(x) - g(x) > 0$

D'où $(\mathscr{C})$ est au-dessus de (Γ) sur $]1;+\infty[$

6.a) Justifions que : $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln 2$

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \int_e^{e^2} \frac{\ln'(x)}{\ln(x)}\,dx = \Big[\ln(\ln x)\Big]_e^{e^2}$$

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln(\ln(e^2)) - \ln(\ln(e)) = \ln 2 - \ln 1$$

donc : $\boxed{\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx = \ln 2}$

b) Déterminons l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 :

$\mathcal{A} = \left(\int_e^{e^2} (h(x) - g(x))dx\right) \times u.a$ avec $u.a = 4\,cm^2$

$\mathcal{A} = \left(\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\right) \times 4\,cm^2 = \ln 2 \times 4\,cm^2$

$\boxed{\mathcal{A} = 4\ln 2\,cm^2}$

Exercice 6

Pour répondre à la préoccupation de Monsieur ZAHUI, je vais utiliser les suites numériques.

Pour cela, je vais :

- traduire la situation par une suite numérique (U_n) ;
- préciser la nature et les éléments caractéristiques de cette suite ;
- exprimer la suite U par sa formule explicite ;

CORRIGÉ	BARÈME
- Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $u_n \geq 2 \times 20.000.000$; - Conclure **Déroulement** • Soit la suite (u_n) dont le terme général le solde annuel de Monsieur ZAHUI de son compte d'épargne à la $n^{ième}$ année. $(n \geq 0)$ • On a : $u_0 = 20.000.000$ $u_1 = u_0 + u_0 \times 0{,}069 = 1{,}069\, u_0$ Donc : $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = 1{,}069\, u_n$ On voit que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1{,}069$ et de premier terme $u_0 = 20.000.000$ • Ainsi : $\forall n \geq 0$, $u_n = u_0 \times q^n$ $u_n = 20.000.000 \times (1{,}069)^n$ • Je résous dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $u_n \geq 2 \times 20.000.000$	

CORRIGÉ | BARÈME

$\forall n \geq 0,\ u_n \geq 2 \times 20.000000 \Leftrightarrow 20.000.000 \times (1{,}069)^n \geq 40.000.000$

$\Leftrightarrow (1{,}069)^n \geq 2$

$\Leftrightarrow n \ln(1{,}069) \geq \ln 2$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 2}{\ln(1{,}069)}$

$\Leftrightarrow n \geq 10{,}38$

D'où : $S_{\mathbb{N}} = [\![11 ; +\infty [$

Par conséquent, il faudra au moins 11 années à Monsieur Zahmi pour commencer son projet.

~~ Fin ~~