CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUE: BAC2025

PROPOSÉ PAR :

M. KABY

<u>**EXERCICE N°1**</u>

①- VRAI

②- FAUX

③- FAUX

④- VRAI

<u>**EXERCICE N°2**</u>

①. D

②. C

③. C

④. D

<u>**EXERCICE N°3**</u>

①. Calculons $\boldsymbol{P(i)}$

$P(i) = i^3 - (3+2i)(i^2) + (1+4i)i + 1 - 2i$

$P(i) = -i - (3+2i)(-1) + (1+4i)i + 1 - 2i$

$P(i) = -i + 3 + 2i + (i + 4i^2) + 1 - 2i$

$P(i) = -i + 3 + 2i + i - 4 + 1 - 2i$

$P(i) = (3 - 4 + 1) + (-i + i + 2i - 2i)$; **donc $\boldsymbol{P(i) = 0}$.**

②. Vérifions que: $\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}, (z) = [(z-i)(z^2 - (3+i)z + 2 + i)]$

On a: $P(z) = [(z-i)(z^2 - (3+i)z + 2 + i)]$

$P(z) = z^3 - (3+i)z^2 + (2+i)z - iz^2 + (3i-1)z - 2i + 1$

$P(z) = z^3 - 3z^2 - iz^2 + 2z + iz - iz^2 + 3iz - z - 2i + 1$

$P(z) = z^3 - (3 + i + i)z^2 + (2 - 1 + i + 3i)z + 1 - 2i$

$\boldsymbol{P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+4i)z + 1 - 2i}$**.**

③. Vérifions que 1+i est une racine carrée de 2i

On a: $(1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2$

$(1+i)^2 = 1 + 2i - 1$ donc $\boldsymbol{(1+i)^2 = 2i}$ **, alors $\boldsymbol{1 + i}$ est une racine carrée de $\boldsymbol{2i}$.**

Autre méthode: Déterminons les racines carrées de $\boldsymbol{z = 2i}$

$|z| = |2i| = \sqrt{2^2} = 2$

Soit $z = x + iy$ une racine carrée de z.

$$z^2 = 2i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \ (1) \\ x^2 - y^2 = 0 \ (2) \\ 2xy = 2 \quad\quad (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \ (1) + (2) \\ 2y^2 = 2 \ (2) - (1) \\ xy = 1 \quad (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \ ou \ x = -1 \\ y = 1 \ ou \ y = -1 \\ x \ et \ y \text{ sont de même signe} \end{cases}$$

Les raciness carrées de $2i$ sont: $1 + i \quad et \quad -1 - i$

Donc **$\boldsymbol{1 + i}$ est une racine carrée de $\boldsymbol{2i}$.**

④. **Résolvons dans C l'équation: $P(z)=0$.**

$P(z)=0 \Leftrightarrow (z-i)(z^2-(3+i)z+2+i)=0$

$\Leftrightarrow (z-i)=0$ ou $(z^2-(3+i)z+2+i)=0$

$\Leftrightarrow z-i=0$ ou $z^2-(3+i)z+2+i=0$

$\Leftrightarrow z=i$ ou $\Delta=[-(3+i)]^2-4\times 1\times(2+i)$

$\Delta=(3+i)^2-4(2+i)$

$\Delta=9+6i-8-4i=2i$

D'après la question (3) les raciness carrées de $2i$ sont: $\delta_1=1+i$ $et\ \ \delta_2=-1-i.$

- ✓ $\boldsymbol{z_1=\frac{3+i+1+i}{2}=\frac{4+2i}{2}=\frac{2(2+i)}{2}=2+i.}$
- ✓ $\boldsymbol{z_2=\frac{3+i-1-i}{2}=\frac{2}{2}=1}$

Donc $\boldsymbol{S_{\mathbb{C}}=\{i\,;1\,;2+i\}}$

<u>EXERCICE N°4</u>

①. a) Démontrons que la suite (u_n) est croissante.

On a: $u_0=0$ et $u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$ puis on admet que: $0\leq u_n\leq 1$.

- Calculons la difference $u_{n+1}-u_n$ et montrons que $u_{n+1}-u_n\geq 0$.

On a: $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n+1}{u_n+2}-u_n=\frac{2u_n+1-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{2u_n+1-{u_n}^2-2u_n}{u_n+2}$

$$\boldsymbol{u_{n+1}-u_n=\frac{1-{u_n}^2}{u_n+2}} \textbf{ et de plus } \boldsymbol{u_n+2\geq 0} \textbf{ et } \boldsymbol{0\leq u_n\leq 1} \textbf{ donc } \boldsymbol{0\leq 1-{u_n}^2\leq 1}$$

Alors $\boldsymbol{\forall n\in\mathbb{N}^*, u_{n+1}-u_n\geq 0}$ **donc la suite** (u_n) est croissante.

b) Déduison que la suite (u_n) est convergente.

Comme la suite (u_n) est croissante est majorée par 1 alors la suite (u_n) est convergente.

②. **a) Démontrons que:** $\boldsymbol{\forall x\in[0\,;1], |f'(x)|\leq\frac{3}{4}}$.

- Déterminons la dérivée de la fonction f.

$\forall x\in[0\,;1],\ f'(x)=\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)'=\frac{(2x+1)'(x+2)-(x+2)\prime(2x+1)}{(x+2)^2}=\frac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2}=\frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2}$

$\boldsymbol{\forall x\in[0\,;1],\ f'(x)=\frac{3}{(x+2)^2}}$.

- **Démontrons que:** $\boldsymbol{\forall x\in[0\,;1], |f'(x)|\leq\frac{3}{4}}$.

$\forall x\in[0\,;1], 0\leq x\leq 1\Leftrightarrow 2\leq x+2\leq 3$

$\Leftrightarrow 4 \leq (x+2)^2 \leq 9$

$\Leftrightarrow \frac{1}{9} \leq \frac{1}{(x+2)^2} \leq \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 3 \times \frac{1}{9} \leq 3 \times \frac{1}{(x+2)^2} \leq 3 \times \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{9} \leq \frac{3}{(x+2)^2} \leq \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{3}{(x+2)^2} \leq \frac{3}{4}$ **donc** $\boldsymbol{|f'(x)| \leq \frac{3}{4}}$

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrons que :

$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 1| \leq \frac{3}{4}|u_n - 1|$

Appliquons l'inégalité des accroissements finis.

$\forall x \in [0\,;1], |f(x) - f(1)| \leq \frac{3}{4}|x - 1|$. Comme $\forall n \in IN, u_n \in [0\,;1]$, posons $x = u_n$.

On a: $|f(u_n) - f(1)| \leq \frac{3}{4}|x - 1|$ or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = \frac{2\times1+1}{1+2} = 1$ d'où $f(1) = 1$

Donc $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 1| \leq \frac{3}{4}|u_n - 1|}$**.**

c) Démontrons par récurrence que : $\boldsymbol{\forall n \in, |u_n - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n}$**.**

- **Vérifions que la proposition est vraie au rang 0.**

On a: $|u_0 - 1| = |0 - 1| = |-1| = 1$

D'où $|u_0 - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 \Leftrightarrow |u_0 - 1| \leq 1$ or $1 \leq 1$.

Donc la proposition est vrie au rang 0.

- **Soit k un entier naturel tel que** $\boldsymbol{k \geq 0}$**.**

Supposons que la proposition soit vraie au rang k c'est-à-dire $|u_k - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k$ démontrons que la proposition est vraie au rang $k+1$ c'est-à-dire $|u_{k+1} - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$.

D'après l'hypothèse de recurrence, $|u_k - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k$.

On déduit que: $|u_{k+1} - 1| \leq \frac{3}{4}|u_k - 1|$ alors on a: $|u_{k+1} - 1| \leq \frac{3}{4}|u_k - 1| \leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^k$.

D'où $|u_{k+1} - 1| \leq \frac{3}{4}|u_k - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}$.

Donc la proposition est vraie au rang $k+1$.

Conclusion: $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n}$

d) Déduison la limite de la suite (u_n)

On sait que: $|u_n - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 1| = 0$ **donc** $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

<u>EXERCICE N°5</u>

①. **a) Calculons la limite de f en 0.**

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} 2x - 1 = -1} \\ \boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{e^x-1} = +\infty} \end{cases} \quad \textbf{donc } \boldsymbol{\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty}.$$

b) Calculons la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 1 = +\infty} \\ \boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x-1} = 0} \end{cases} \quad \textbf{donc } \boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}.$$

②. a) Démontrons que: $\boldsymbol{\forall x \in]0\,;\,+\infty[; f'(x) = \frac{(2e^x-1)(e^x-2)}{(e^x-1)^2}}$.

$\forall x \in]0\,;\,+\infty[; f'(x) = \left(2x - 1 + \frac{1}{e^x-1}\right)' = 2 - \frac{e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{2(e^x-2)^2 - e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{2(e^{2x}-2e^x+1)-e^x}{(e^x-1)^2}$

$\forall x \in]0\,;\,+\infty[; f'(x) = \frac{2e^{2x}-4e^x+2-e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}$; or $(2e^x-1)(e^x-2) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$

Donc $\boldsymbol{\forall x \in]0\,;\,+\infty[; f'(x) = \frac{(2e^x-1)(e^x-2)}{(e^x-1)^2}}$.

b) Déduisons que: f est strictement décroissante sur $]0\,;\,ln 2[$ et f strictement croissante $]ln 2\,;\,+\infty[$.

- **Étudions le signe de la dérivée $f'(x)$**

$\forall x \in]0\,;\,+\infty[, (e^x-2)^2 > 0$ **, donc le signe de $f'(x)$ depend de** $(2e^x-1)(e^x-2)$.

$\forall x \in]0\,;\,+\infty[, f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2e^x-1)(e^x-2) = 0$

$\Leftrightarrow (2e^x - 1) = 0 \; ou \; (e^x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0$ ou $e^x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2}$ ou $e^x = 2$

$\Leftrightarrow ln\, e^x = ln \frac{1}{2}$ ou $ln\, e^x = ln\, 2$

$\Leftrightarrow x = -ln\, 2$ ou $x = ln\, 2$ or $-ln\, 2 \notin]0\,;\,+\infty[$

- **Tableau de signe**

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

- $\forall \boldsymbol{x} \in \left]\mathbf{0}\,;\boldsymbol{ln2}\right[, \boldsymbol{f'(x)} < \mathbf{0}$
- $\forall \boldsymbol{x} \in \left]\boldsymbol{ln2}\,;\,+\infty\right[, \boldsymbol{f'(x)} > \mathbf{0}$

▪ **Sens de variation**

- $\boldsymbol{f}$' **est strictement décroissante sur** $\left]\mathbf{0}\,;\boldsymbol{ln2}\right[$
- $\boldsymbol{f}$ **Strictement croissante**$\left]\,\boldsymbol{ln2}\,;\,+\infty\right[$**.**

c) Dresse le tableau de variation

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\ln 2)$	$\nearrow$	$+\infty$

③**. a) Justifion que la courbe (C) est au-dessus de la droite (D).**

Étudions le signe de $f(x) - (2x - 1)$.

$\forall \boldsymbol{x} \in \left]\mathbf{0}\,;\,+\infty\right[, [f(x) - (2x - 1)] = \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e^x - 1}} - (\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{1}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e^x - 2}}$

$\forall \boldsymbol{x} \in \left]\mathbf{0}\,;\,+\infty\right[\,, \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e^x - 2}} > \mathbf{0}$**, donc** $f(x) - (2x - 1) > 0$ alors $f(x) > (2x - 1)$.

Par consequent la courbe (C) est au-dessus de (D).

b) vérifions que: $\forall \boldsymbol{x} \in \left]\mathbf{0}\,;\,+\infty\right[, \boldsymbol{f(x)} = \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{2} + \frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{e^x - 1}}$

$\forall \boldsymbol{x} \in \left]\mathbf{0}\,;\,+\infty\right[, \boldsymbol{f(x)} = \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{2} + \frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{e^x-1}} = \frac{(2x-2)(e^x-1)+e^x}{e^x-1} = \frac{2xe^x-2x-2e^x+2+e^x}{e^x-1} = \frac{(2x+1)e^x-2x+2}{e^x-1}$

Or $\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e^x-1}} = \frac{(2x-1)(e^x-1)+1}{e^x-1} = \frac{2xe^x-2x-e^x+1+1}{e^x-1} = \frac{(2x+1)e^x-2x+2}{e^x-1}$

Donc $\forall \boldsymbol{x} \in \left]\mathbf{0}\,;\,+\infty\right[, \boldsymbol{f(x)} = \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{2} + \frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{e^x-1}}$**.**

c) Démontrons que: $A(\boldsymbol{k}) = \mathbf{4}[\boldsymbol{ln2} + \boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{k-1}}{\boldsymbol{k}}\right)\boldsymbol{cm^2}$

$A(k) = \int_{ln2}^{lnk} [f(x) - (2x - 1)]dx \times ua$ or $ua = OI \times OJ = 2cm \times 2cm = 4cm^2$

$$= \int_{ln2}^{lnk} \left[\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{2} + \frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{e^x-1}} - (\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{1})\right] dx \times 4\ cm^2$$

$$= \int_{ln2}^{lnk} \left[\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{2} + \frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{e^x-1}} - \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}\right] dx \times 4\ cm^2$$

$$= \int_{ln2}^{lnk} \left[-\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{e^x-1}}\right] dx \times 4\ cm^2 = [-x + \ln(e^x - 1)]_{ln2}^{lnk} \times 4cm^2$$

$\boldsymbol{A(k) = 4[ln2 + ln\left(\frac{k-1}{k}\right)]cm^2}$

d) Calculons $\lim\limits_{k\to+\infty} A(k)$.

$\lim\limits_{k\to+\infty} A(k) = 4[ln2 + ln\left(\frac{k-1}{k}\right)]$

$\boldsymbol{\lim\limits_{k\to+\infty} A(k) = 4ln2}$ car $\lim\limits_{k\to+\infty} ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = 0$.

EXERCICE N°6

Pour apporter une réponse à la preoccupation des organisateurs cette lottérie, je vais utiliser la notion de probabilité conditionnelle et variable aléatoire.

Pour cela, je vais:

- Utiliser une variable aléatoire et donner ses valeurs;
- Calculer son espérance mathématique en fonction de sa mise;
- Poser que cette espérance mathématique est inférieure ou égale à zero puis résoudre l'inéquation.

❖ Déterminons les valeurs prises par X.

Soit S la valeur de la mise.

X est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joeur.

Les valeurs prises par X sont : $-$S ; $500 -$ S et S .

❖ Calculons l'espérance mathématique E(X).

- **Loi de probabilité de X**

- **Détermines la probabilité de chaque évènement.**

Déterminons le nombre de tirage possible

Le tirage sefait de façon simultané, un tel tirage est une combinaison de 2 boules parmi 6.

Le nonmbre de tirage possible est: C_6^2= 15 possibilités.

Déterminons la probablité d'obtenir deux boules de couleurs différentes

Soit A" tirer deux boules de couleurs différentes"

$P(A) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 + C_2^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_1^1}{C_6^2} = \frac{2\times3+2+1+3\times1}{15} = \frac{11}{15}$

Déterminons la probablité d'obtenir deux boules noires

Soit B"tirer deux boules noires"

$P(B) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15}$.

Déterminons la probabilité d'obtenir deux boules noires

Soit B"tirer deux boules blanches"

$P(B) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$.

- **Loi de probabilité de X**

x_i	$-S$	$500 - S$	S
$P(X = x_i)$	$\frac{11}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$

- Calculons l'espérance mathématique.

$\mathrm{E(X)} = -\mathrm{S} \times \frac{11}{15} + (500 - \mathrm{S}) \times \frac{3}{15} + \mathrm{S} \times \frac{1}{15}$

$\mathrm{E(X)} = \frac{-11\mathrm{S}}{15} + \frac{3(500-\mathrm{S})}{15} + \frac{\mathrm{S}}{15} = \frac{-11\mathrm{S}+1500-3\mathrm{S}+\mathrm{S}}{15}$

$\mathbf{E(X)} = \frac{\mathbf{1500-13S}}{\mathbf{15}}$

❖ **Déterminons le montant minimal**

$\mathbf{E(X)} \leq \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{1500-13S}}{\mathbf{15}} \leq \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow \mathbf{1500 - 13}\boldsymbol{S} \leq \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow \mathbf{-13}\boldsymbol{S} \leq \mathbf{-1500}$

$\Leftrightarrow -\boldsymbol{S} \leq -\frac{\mathbf{1500}}{\mathbf{13}}$

$\Leftrightarrow -\boldsymbol{S} \leq \mathbf{-115,38}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{S} \geq \mathbf{115,38}$ **donc S** $\approx$ **116 francs CFA**

Conclusion: Le montant minimal à fixer comme mise pour que les organiseurs ne perdent pas ce jeu est de 116 francs CFA