# CORRIGÉ - MATHÉMATIQUES - SÉRIE D

## EXERCICE 1 (2 points)

1. Si $\lim_{x \to x_0} u(x) = \ell$ et $\lim_{x \to x_0} v(x) = m$, alors $\lim_{x \to x_0} v \circ u(x) = m$.

   C'est l'inverse : la limite de $v \circ u$ vaut $\ell$. **FAUX**

2. Soit $f$ une bijection d'un intervalle K sur $f(K)$ et $f^{-1}$ sa bijection réciproque.

   Si $f(a) = b$, alors $f^{-1}$ est dérivable en $b$.

   En général Faux. Contre-exemple : $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ n'est pas dérivable en 0. **FAUX**

3. $(X ; Y)$ série statistique double.

   $(D) : x = \alpha y + \beta$ droite de régression de X en Y, alors $\alpha = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(X)}$.

   Faux. Pour la régression de X en Y : **FAUX**

   $$\alpha = \frac{Cov(X,Y)}{V(Y)} \quad \text{et} \quad \beta = \overline{x} - \alpha \overline{y}.$$

4. Si E et F deux événements, $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \overline{F})$.

   Or $P(E \cap F) + P(E \cap \overline{F}) = P(E \cap (F \cup \overline{F})) = P(E)$. **VRAI**

## EXERCICE 2 (2 points)

1. $z' = bz + c$, $(b \neq 1)$. Point invariant $z' = z$ : $z = bz + c \Rightarrow (1-b)z = c \Rightarrow$

   $z = \dfrac{c}{1-b}$. **B $\left(\frac{c}{1-b}\right)$**

2. $y' - \frac{1}{3} y = 2$.

   Équation linéaire : $y_h = C e^{\frac{1}{3}x}$. Cherchons une particulière constante A :

   $0 - \frac{1}{3} A = 2 \Rightarrow A = -6$.

   Donc $y(x) = C e^{\frac{1}{3}x} - 6$. **D**

3. Primitive F telle que $F' = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ sur $]0 ; \frac{\pi}{2}[$.

   Or $\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{1}{\sin x}\right) = -\left(-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

   Donc une primitive est $F(x) = -\dfrac{1}{\sin x}$. **A**

4. $\ln(4-x) \geq \ln(x-3)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

   Conditions : $4 - x > 0$ et $x - 3 > 0 \Rightarrow 3 < x < 4$.

   Comme ln est croissante : $4 - x \geq x - 3 \Rightarrow 7 \geq 2x \Rightarrow x \leq \frac{7}{2}$.

   Avec $3 < x < 4 \Rightarrow 3 < x \leq \frac{7}{2} = ]3 ; \frac{7}{2}]$. **C**

## EXERCICE 5

On considère $g$ définie sur $]0;+\infty[$ par
$$g(x) = e^x - \ln x - 1.$$
On admet que : $\forall x \in ]0;+\infty[,\ g(x) > 0$.

Soit $f$ définie par : $\begin{cases} f(x) = e^x - x\ln x, & x > 0 \\ f(0) = 1. \end{cases}$

(C) sa courbe représentative dans $(O, I, J)$
unité graphique : 2 cm.

1. a) $\forall x > 0,\ e^x - x\ln x = e^x(1 - x e^{-x}\ln x)$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ car $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{x^2}{e^x}\ln x\right)$

et $\frac{e^x}{x} \to +\infty$, $\frac{x^2}{e^x}\ln x \to 0$.

d) Interprétation : la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe (OJ).

2. a) $f$ est continue en 0 car $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(e^x - x\ln x)$

$= e^0 - \lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x = 1 - 0 = 1 = f(0)$.

b) $\forall x > 0,\ \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^x - 1}{x} - \ln x$.

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} - \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x$

$= 1 - (-\infty) = +\infty$.

Donc $f$ n'est pas dérivable en 0.

3. a) $\forall x > 0$, $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

b) $f'(x) = e^x)' - (x\ln x)'$

$= e^x - (\ln x + 1) = e^x - \ln x - 1 = g(x)$.

Donc $f'(x) = g(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$.
Ainsi $f$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
Tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $1 \nearrow +\infty$ |

4. a) $K = \int_1^2 x\ln x\, dx$.

Par intégration par parties : $u = \ln x$, $dv = x\,dx$
donc $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{x^2}{2}$.

$K = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx$

$= \left(\frac{4}{2}\ln 2 - 0\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$

$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{1} - \frac{1}{2}\right)$

$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.



b) Unité graphique : 2 cm.

$A_\lambda$ aire (en cm$^2$) de la partie du plan limitée par (C), l'axe (OI) et les droites $x = \lambda$ et $x = 1$.

Sur $[\lambda, 1]$, $f(x) \geq 0$ (car $f$ croissante et $f(0) = 1$)

donc $A_\lambda = \int_\lambda^1 f(x)\,dx$

$= \int_\lambda^1 (e^x - x\ln x)\,dx$

$= \left[e^x\right]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 x\ln x\,dx$

$= (e - e^\lambda) - \left(\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_\lambda^1\right)$

$= (e - e^\lambda) - \left(\left(\frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{\lambda^2}{2}\ln\lambda - \frac{\lambda^2}{4}\right)\right)$

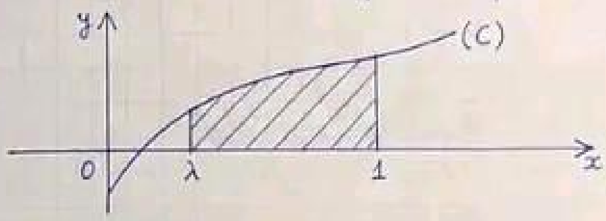
$= (e - e^\lambda) + \frac{1}{4} + \frac{\lambda^2}{2}\ln\lambda - \frac{\lambda^2}{4}$

$= e - e^\lambda - \frac{1}{4} + \frac{\lambda^2}{2}\ln\lambda - \frac{\lambda^2}{4}$

$= (e - e^\lambda) + \frac{1}{4}(\lambda^2 - 1) + \frac{\lambda^2}{2}\ln\lambda$.

c) $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} A_\lambda = e - e^0 + \frac{1}{4}(0 - 1) + 0$

$= e - 1 - \frac{1}{4} = e - \frac{5}{4}$.




## EXERCICE 6

1. Chaque serveur fonctionne un jour avec la probabilité $p = 1 - q = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

Le centre est opérationnel si au moins 8 serveurs fonctionnent.

$X$ = nombre de serveurs opérationnels dans la journée.
$X \sim \mathcal{B}(n = 10,\ p = 0{,}9)$.

P(centre opérationnel) $= P(X \geq 8)$

$= \binom{10}{8} 0{,}9^8\, 0{,}1^2 + \binom{10}{9} 0{,}9^9\, 0{,}1 + \binom{10}{10} 0{,}9^{10}$

$= 45 \times 0{,}9^8 \times 0{,}1^2 + 10 \times 0{,}9^9 \times 0{,}1 + 0{,}9^{10}$

$\approx 0{,}9298$.

2. Sur 5 jours indépendants, la probabilité d'être opérationnel chaque jour est 0,9298.

La probabilité d'être opérationnel pendant 5 jours consécutifs vaut : $(0{,}9298)^5 \approx 0{,}698$.

Comme $0{,}698 < 0{,}90$, le Directeur ne peut pas être rassuré.

**EXERCICE 3** (3 points)

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \ , \quad u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{4}{5} u_{n+1} - \frac{4}{25} u_n \end{cases}$$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - \frac{2}{5} u_n$.

1. a) $v_0 = u_1 - \frac{2}{5} u_0 = 5 - \frac{2}{5} \times 4 = \frac{17}{5}$.

b) $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{2}{5} u_{n+1} = \left(\frac{4}{5} u_{n+1} - \frac{4}{25} u_n\right) - \frac{2}{5} u_{n+1}$

$= \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}\right) u_{n+1} - \frac{4}{25} u_n = \frac{2}{5}\left(u_{n+1} - \frac{2}{5} u_n\right) = \frac{2}{5} v_n$.

Donc $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

c) $v_n = v_0 \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{17}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

a) $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{4}{17/5} = \frac{20}{17}$.

On admet que $(w_n)$ est une suite arithmétique de raison $\frac{5}{2}$.

b) $w_n = w_0 + n \times \frac{5}{2} = \frac{20}{17} + \frac{5}{2} n = \frac{40 + 85n}{34} = \frac{5(17n + 8)}{34}$.

c) $u_n = w_n v_n = \frac{5(17n+8)}{34} \times \frac{17}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{17n+8}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

$= \frac{2^{n-1}}{5^n}(17n + 8)$.

**EXERCICE 4** (3 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{e_1} ; \vec{e_2})$.

On considère dans $\mathbb{C}$, le polynôme $P$ défini par : $P(z) = z^3 - 13z^2 + 59z - 87$.

1. a) On veut : $P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$.

$P(z) = z^3 + (a-3)z^2 + (b - 3a)z - 3b$.

Par identification : $\begin{cases} a - 3 = -13 & \Rightarrow & a = -10 \\ b - 3a = 59 & \Rightarrow & b = 29 \\ -3b = -87 & \Rightarrow & b = 29 \quad \text{(cohérent)} \end{cases}$

Donc $a = -10$ et $b = 29$.

b) $P(z) = (z-3)(z^2 - 10z + 29)$.

$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 29 = -16 < 0$, donc $z^2 - 10z + 29$ n'a pas de racines réelles.

Ainsi, l'équation $P(z) = 0$ admet une unique solution réelle : $z = 3$.

2. Soient $A(3)$, $B(5-2i)$ et $C(5+2i)$.

a) $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{(5-2i) - 3}{(5+2i) - 3} = \frac{2-2i}{2+2i} = \frac{1-i}{1+i}$.

$\frac{1-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{(1-i)^2}{(1)^2 - (i)^2} = \frac{1 - 2i + i^2}{2} = \frac{-2-2i}{2} = -1 - i = -i(1 + i^2) = -i$.

Donc $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$.

b) Le module de $-i$ vaut 1 et son argument est $-\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont même norme et un angle de $-\frac{\pi}{2}$.

Donc le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

3. La rotation de centre A qui transforme B en C est d'angle $-\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

Son écriture complexe est : $z' - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_A) = -i(z - z_A)$.

Avec $z_A = 3$, on obtient : $z' = -i(z-3) + 3 = -iz + 3i + 3$.

$$\boxed{z' = -iz + 3 + 3i}$$