

BACCALAURÉAT
SESSION 2026

Durée : 4 h
Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

*Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.*

EXERCICE 1 (2 points)

Écris le numéro de chacune des propositions ci-dessous suivi de V si la proposition est vraie ou de F si elle est fausse.

- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ sont les fonctions du type :
 $x \mapsto ae^{2x} + be^{-2x}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- Une primitive sur $] -\frac{b}{a}; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{ax+b}$ est la fonction $x \mapsto \ln(ax+b)$ où $a \in]0; +\infty[$ et $b \in \mathbb{R}$.
- L'excentricité d'une ellipse est toujours inférieure à celle d'une hyperbole.
- Toute suite géométrique de raison inférieure ou égale à -1 est divergente.
- A et B sont deux points distincts du plan. La ligne de niveau 2 de l'application $M \mapsto \frac{MA}{MB}$ est le cercle de diamètre [IJ], où $I = \text{bar}\{(A; 1); (B; 2)\}$ et $J = \text{bar}\{(A; -2); (B, 1)\}$.
- Toute isométrie du plan qui laisse invariant deux points distincts E et F et qui n'est pas l'application identique est la symétrie orthogonale d'axe (EF).

EXERCICE 2 (2 points)

Écris le numéro de chacun des énoncés ci-dessous suivi de l'une des lettres A, B, C ou D qui permet d'obtenir la proposition vraie.

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = (1 + \frac{3}{n})^n$ est convergente et a pour limite :
A : 0 ; B : 1 ; C : e^3 ; D : 3.
- La variance d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{3}$ est :
A : $\frac{8}{3}$; B : $\frac{8}{9}$; C : $\frac{4}{3}$; D : $\frac{11}{3}$.
- Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J). L'axe focal de la conique d'équation $y^2 + 9x^2 - 18x = 0$ est la droite d'équation.
A : $x = 0$; B : $y = 0$; C : $x = 1$; D : $y = 1$.
- Le plan est muni d'un repère orthogonal. L'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de la fonction $x \mapsto 2x - x^2$ et les droites d'équation $x = 0$, $x = 2$ et $y = 0$ en unités d'aires est :
A : $\frac{2}{3}$; B : $\frac{1}{3}$; C : 2 ; D : $\frac{4}{3}$.

EXERCICE 3 (3 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- On pose : $B_n = \text{PGCD}(n^2 + 1 ; n + 1)$.
 - Justifie que : $B_n = \text{PGCD}(n + 1 ; 2)$.
 - Déduis-en les valeurs possibles de B_n .
- On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation $(E_n) : (n^2 + 1)x + (n + 1)y = 1$.
 - Justifie que l'équation (E_n) admet des solutions si et seulement si n est pair.
 - Dans le cas où n est pair, vérifie que $(-\frac{n}{2} ; 1 + \frac{n}{2}(n - 1))$ est une solution particulière de (E_n) .
 - Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E_n) .

EXERCICE 4 (4,5 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'unité graphique 2 cm, on donne les points A, B, C, D et E d'abscisses respectives

$$Z_A = -1 - i ; Z_B = 1 - i ; Z_C = 1 + i ; Z_D = -1 + i \text{ et } Z_E = 1 - 3i.$$

- Place les points A, B, C, D et E dans le repère $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
- Justifie qu'il existe une rotation r et une seule qui applique A sur B et C sur D.
 - Détermine l'angle et le centre de r .
- On pose $f = h \circ r$, où h est l'homothétie de centre C et de rapport 2.
 - Justifie que f est une similitude directe dont on précisera l'angle et le rapport. On note I le centre de f .
 - Justifie que E est l'image de A par f .
- On désigne par (Γ_1) l'ensemble des points M du plan tels que $\text{Mes}(\widehat{MA, ME}) = \frac{\pi}{2}$ et (Γ_2) l'ensemble des points M tels que : $ME^2 - 4MA^2 = 0$.
 - Détermine et construis l'ensemble (Γ_1) .
 - Détermine et construis l'ensemble (Γ_2) .
 - Déduis-en la construction du point I.

EXERCICE 5 (3,5 points)

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f_n(x) = x^{1-n}e^{nx}$, ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$). On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

- Justifie que la droite (OJ) est une asymptote à (C_n) .
 - Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
- On admet que f_n est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
 - Démontre que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'_n(x) = \frac{nx - (n-1)}{x^n} e^{nx}$.
 - Déduis-en que f_n admet un minimum unique au point d'abscisse $a_n = 1 - \frac{1}{n}$.
 - Dresse le tableau de variation de f_n .
- On rappelle que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.
 - Justifie que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{e^x}{x}$.
 - Déduis-en la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}) sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - Justifie que : $f_n(a_n) = (\frac{n}{n-1})^{n-1} e^{n-1}$.

EXERCICE 6**(5 points)**

Dans le cadre des activités du club de robotique d'un établissement secondaire, des élèves de terminale C effectuent des essais de vols de drones dans un espace spécialement aménagé pour cette activité.

Cet espace est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les drones sont programmés pour survoler un mur vertical de hauteur 8 m assimilé à la portion de plan (P) d'équation $2x - y - 5 = 0$ comprise entre les niveaux $z = 0$ et $z = 8$.

Un vol est réussi lorsque le drone passe au-dessus du mur, c'est-à-dire si sa trajectoire coupe le plan (P) pour une valeur de z telle que $z > 8$.

La performance d'un élève est déterminée par le nombre de fois, par mois, que son drone ne rentre pas en collision avec le mur. Moins il y a de collision, plus l'élève est performant.

L'élève Fatim a noté dans le tableau suivant ses performances au cours des 7 premiers mois de sa formation.

Mois	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de collisions	25	21	18	17	14	11	9

On admet que les conditions d'entraînement restent identiques au fil des mois.

Pour le premier vol du 8^e mois, elle place son drone au point $A(1 ; 2 ; 0)$ et veut le faire décoller en suivant une trajectoire rectiligne dirigée par le vecteur $\vec{u}(2 ; -1 ; 9)$.

Elle souhaite savoir si son vol sera réussi et le rang du mois à partir duquel sa performance sera à moins de 3 collisions par mois.

1. Étudie la trajectoire du drone lancé par Fatim et justifie si elle réussira oui ou non son vol.
2. Détermine le rang du mois à partir duquel la performance de Fatim sera à moins de 3 collisions par mois.

CORRIGE	BAREME
<u>EXERCICE 1</u> (2 points)	
1. F	0,25
2. F	0,5
3. V	0,25
4. V	0,25
5. F	0,5
6. V	0,25
<u>EXERCICE 2</u> (2 points)	
1. C ; 2. B ; 3. C ; 4. D	0,5 x 4
<u>EXERCICE 3</u> (3 points)	
1. a) $n^2 + 1 = (n+1)(n-1) + 2$ $\text{PGCD}(n^2 + 1; n+1) = \text{PGCD}(n+1; 2)$	0,5
b) $B_n = \text{PGCD}(n+1; 2)$ donc les valeurs possibles de B_n sont 1 et 2.	0,5
2. a) Si n pair alors $n+1$ est impair donc $\text{PGCD}(n^2 + 1; n+1) = \text{PGCD}(n+1; 2) = 1$ et l'équation (En) admet des solutions Si n est impair alors $n+1$ est pair donc $\text{PGCD}(n^2 + 1; n+1) = \text{PGCD}(n+1; 2) = 2$ Comme 2 ne divise pas 1, l'équation (En) n'admet pas de solution.	0,75
b) Vérification Correcte	0,5
c) Résolution $(n^2 + 1)x + (n+1)y = 1$ $(n^2 + 1)x + (n+1)(1 + \frac{n}{2}(n-1)) = 1$ Ce qui entraîne $(n^2 + 1)(x + \frac{n}{2}) = (n+1)(-y + 1 + \frac{n}{2}(n-1))$ D'après Gauss $n^2 + 1$ divise $-y + 1 + \frac{n}{2}(n-1)$ et $n+1$ divise $x + \frac{n}{2}$; Il existe un entier relatif k tel que $-y + 1 + \frac{n}{2}(n-1) = k(n^2 + 1)$ et $x + \frac{n}{2} = k(n+1)$	

CORRIGÉ	BAREME
$S_{2 \times n} = \left\{ \left(-\frac{n}{2} + k(n+1); -k(n^2+1) + 1 + \frac{n}{2}(n-1) \right) \right\}$ $k \in \mathbb{Z}$	(0,75)
EXERCICE 4 (4,5 points) 1. Voir feuille annexe. (Trois points bien placés — 0,5) (Plus de trois points bien placés 0,75) 2. a) $AC = 2\sqrt{2}$ et $BD = 2\sqrt{2}$ Les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{BD}$ n'étant pas colinéaires, il existe une unique rotation r qui applique A sur B et C sur D. b) Angle : $\frac{\pi}{2}$; Centre : l'origine O	(0,75)
3. a) $f = h \circ r$ où h est l'homothétie de rapport 2 et r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc f est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$. b) $f(A) = h \circ r(A) = h(B) = E$ car B est le milieu de $[CE]$ ($3C + 3E = 3B$)	(0,25 x 3)
4. a) $M \in (\Gamma_1) \Leftrightarrow \text{Mes}(\vec{MA}, \vec{ME}) = \frac{\pi}{2}$ (Γ_1) est le demi-cercle de diamètre $[AE]$ contenant le point B privé des points A et E. Construction (Voir feuille annexe) b) $M \in (\Gamma_2) \Leftrightarrow \vec{ME}^2 - 4\vec{MA}^2 = 0$ $\Leftrightarrow \vec{ME}^2 - 4\vec{MA}^2 = 0$ $\Leftrightarrow (\vec{ME} - 2\vec{MA}) \cdot (\vec{ME} + 2\vec{MA}) = 0$ $\Leftrightarrow \vec{MG}_1 \cdot \vec{MG}_2 = 0$ où $G_1 = \text{bar} \{(E; 1); (A; -2)\}$ et $G_2 = \text{bar} \{(E; 1); (A; 2)\}$ (Γ_2) est le cercle de diamètre $[G_1 G_2]$	(0,25) (0,25) (0,5)

CORRIGÉ

BAREME

EXERCICE 5 (3,5 points)

$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ $x \in]0; +\infty[$ $f_n(x) = x e^{-nx}$

1°) (a) Justification Correcte

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = +\infty$$

(0,25)

la droite (OJ) est asymptote à (C_n)

(b) Calcul de limite

$x > 0, f_n(x) = x \left(\frac{e^x}{x} \right)^n$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$

(0,5)

2°) (a) Dérivée

On démontre que $x > 0, f'_n(x) = \frac{nx - (n-1)}{x^n} e^{-nx}$

(0,5)

(b) Deductif

* Signe de $f'_n(x)$, $\forall x > 0$

x	0	$\frac{n-1}{n}$	$+\infty$
$f'_n(x)$		-	+

(0,5)

* Variations : f_n est décroissante sur $]0, \frac{n-1}{n}]$

f_n est croissante sur $[\frac{n-1}{n}, +\infty[$

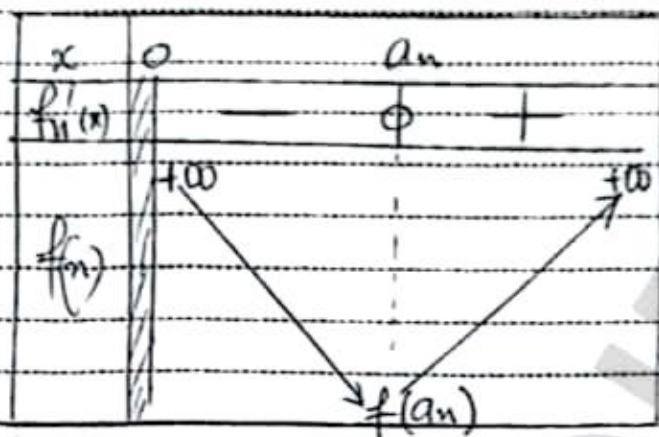
* f_n admet un minimum en $a_n = \frac{n-1}{n}$

(0,25)

CORRIGE

BAREME

(c) Tableau de variations



(0,5)

3°)

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$$

(a) Justification

$$\forall x > 0, \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{e^x}{x}$$

(0,5)

(b) Positivité relative

$$\forall x > 0 \begin{cases} f_{n+1}(x) > 0 \\ f_n(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} > 1$$

donc (C_{n+1}) au-dessus de (C_n)

(ou (C_n) au-dessous de (C_{n+1}))

(0,5)

Remarque : On attribuera 0,25 pt à tout candidat ayant trouvé

$$f(a_n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \cdot e^{n-1}$$

CORRIGÉ		BAREME
EXERCICE 6		
CONSIGNE 1. (2,25/5)		
CRITERES	INDICATEURS	BAREME
CM ₁	Pour étudier la trajectoire du chône, et justifier si Fatim réussira ou non son vol, j'utilise mes connaissances sur la géométrie analytique de l'espace.	(0,15)
Pertinence de la production	Pour cela, je vais : - Donner la nature de la trajectoire et la caractériser ; - Justifier que la trajectoire rencontre le plan du mur en un point d'impact - Déterminer la cote du point d'impact et la comparer à 8 ; - Conclure.	2 ind/4 → 0,25 3 ind/4 → 0,50
CM ₂	- la trajectoire est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$	(1,25)
Utilisation correcte des outils mathématiques	- Représentation paramétrique de la trajectoire : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 9t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$	1 ind/5 → 0,5 2 ind/5 → 0,75 3 ind/5 → 1
	- Intersection de la trajectoire et du plan du mur $2(1 + 2t) - (2 - t) - 5 = 0$ $t = 1$	4 ind/5 → 1,25

	- la tangente et le plan du cône ont pour équation $K(3, 1, 9)$ - 3/2 donc l'aire normale au cône.	
CM2	- Construite de la dernière pour la détermination de la valeur de t - Construite pour la détermination de la suite du point d'intersection - le résultat obtenu est conforme au résultat trouvé	(0,5) 1 point / 1 pt 1 point / 1 pt
CRITÈRES	CONTENU (2,25 pt)	
	INDICATEURS	
CM2	Pour déterminer le sens du mouvement, l'intégration des courbes de la fonction statistique des variables Pour cela, je vais : - une équation de la courbe - courbes de régression par la méthode des moindres carrés - résoudre l'équation $y = 1,3$ - conclure	(0,5) 1 point / 1 pt 2,25 / 2,25

ANNEXE EXERCICE 1

