

Ministère de l'éducation	<b>Examen du baccalauréat + Correction</b>	2025/2026
Prof : Kamel Maatallah	Session principale 2026	Section : Sciences expérimentales

### Exercice 1 ( 3 points )

Une étude statistique faite dans une région a montré que :

- ✓ 80% des femmes enceintes font un suivi médical sur leur grossesse.
- ✓ 95% des femmes qui font un suivi médical sur leur grossesse, accouchent sans aucune complication.
- ✓ 70% des femmes qui ne font pas un suivi médical sur leur grossesse, accouchent sans aucune complication.

1) On choisit au hasard une femme de cette région qui vient d'accoucher.

On considère les événements suivants :

$M$  : « la femme choisie a fait un suivi médical sur sa grossesse »,

$A$  : « l'accouchement de la femme choisie se déroule sans aucune complication ».

a) Donner les probabilités  $p(M)$ ,  $p(A/M)$  et  $p(A/\bar{M})$ .

b) Montrer que  $p(A) = 0.9$ .

c) Sachant que l'accouchement se déroule avec au moins une complication, calculer la probabilité que la femme choisie n'ait pas eu de suivi médical sur sa grossesse.

2) On interroge indépendamment 10 femmes de cette région ayant accouché.

On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de femmes ayant accouché sans aucune complication.

a) Calculer l'espérance mathématique de  $X$ .

b) Justifier que  $p(X = 9) = (0.9)^9$ .

c) Calculer la probabilité qu'au plus un accouchement se déroule avec au moins une complication. Le résultat sera arrondi à  $10^{-2}$  près.

### Exercice 2 ( 4.5 points )

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(-1, 3, 2)$ ,  $C(1, 1, 2)$  et  $I(-1, 0, -1)$ .

1) a) Déterminer les composantes du vecteur  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ .

En déduire que les points  $A, B$ , et  $C$  déterminent un plan  $P$ .

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan  $P$  est  $x + y + z - 4 = 0$ .

c) Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .

2) Soit  $\Delta$  la droite passant par le point  $B$  et de vecteur directeur  $\vec{u} = \vec{j} - \vec{k}$ .

a) Montrer que la droite  $\Delta$  est incluse dans le plan  $P$ .

b) Prouver que la distance du point  $I$  à la droite  $\Delta$  est  $d(I, \Delta) = 3\sqrt{2}$ .

3) Soit  $S$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2z - 16 = 0$ .

a) Vérifier que  $S$  est la sphère de centre  $I$  et de rayon  $3\sqrt{2}$ .

- b)** Montrer que  $S$  et  $P$  sont sécants suivant le cercle  $\zeta$  de centre  $A$  et passant par le point  $B$ .
- c)** Montrer que, dans le plan  $P$ , la droite  $\Delta$  est tangente au cercle  $\zeta$  au point  $B$ .

### Exercice 3 ( 5 points )

**1)** On considère dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $(E) : z^2 - (3\sqrt{3} + i)z + 6 + 2\sqrt{3}i = 0$ .

**a)** Vérifier que  $(\sqrt{3} - i)^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$ .

**b)** Résoudre l'équation  $(E)$ .

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $a = \sqrt{3} + i$ ,  $b = 2i$ ,  $c = 2\sqrt{3}$  et  $d = (1 + \sqrt{3})(1 + i)$ .

Dans la figure de l'annexe ci-jointe, on a placé le point  $B$ .

**2)** **a)** Montrer que le point  $A$  est le milieu du segment  $[BC]$ .

**b)** Vérifier que  $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ . Construire, dans l'annexe, les points  $A$  et  $C$ .

**3)** Soit  $\zeta$  le cercle de centre  $A$  et de rayon 2.

**a)** Vérifier que le point  $D$  appartient au cercle  $\zeta$ .

**b)** Montrer que  $b - c = 2i(d - a)$ . En déduire que les droites  $(AD)$  et  $(BC)$  sont perpendiculaires.

**c)** Construire, dans l'annexe, le point  $D$ .

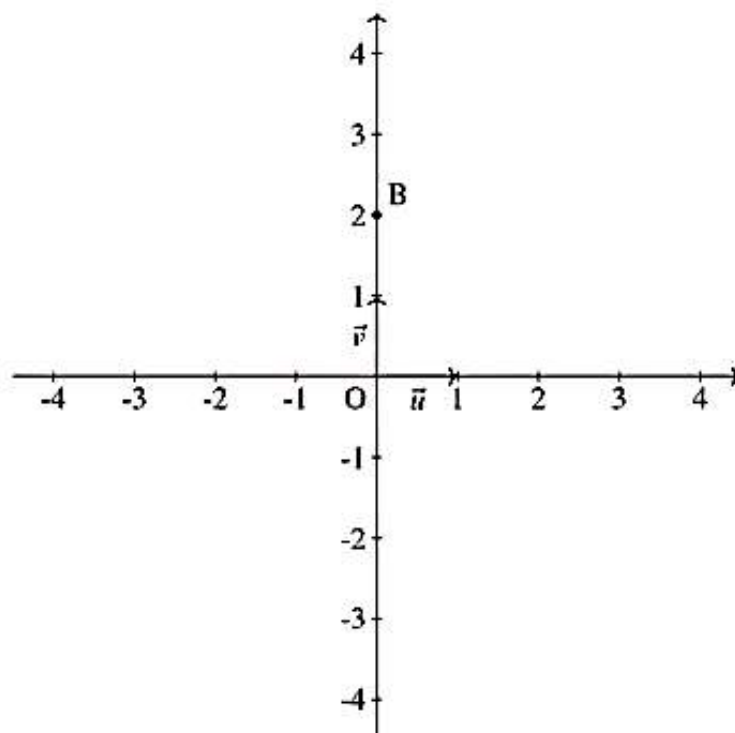
**4)** Soit  $M$  un point du cercle  $\zeta$  d'affixe  $z$  non nulle.

**a)** Justifier que  $|z - a|^2 = 4$ . En déduire que  $z\bar{z} = a\bar{z} + \bar{a}z$ .

**b)** On pose  $z = re^{i\theta}$ ,  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $r = 4 \cos(\theta - \frac{\pi}{6})$ .

**c)** Ecrire le nombre complexe  $d$  sous forme exponentielle. Déduire que  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ .

**5)** Le cercle de centre  $O$  et passant par le point  $D$  recoupe le cercle  $\zeta$  en un point  $H$  d'affixe  $h$ . Déterminer un argument de  $h$ .



## Exercice 4 ( 7.5 points )

**Partie A** Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x - \frac{1}{x} + e^{x-1}$ .

On désigne par  $(\zeta_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . Interpréter graphiquement.  
 b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ . Interpréter graphiquement.

- 2) a) Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .  
 b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

- 3) a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .  
 On note  $(\Gamma)$  la courbe représentative de  $f^{-1}$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
 b) Justifier que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $]0, +\infty[$  une unique solution  $\alpha$ .  
 Vérifier que  $0.6 < \alpha < 0.7$ .  
 c) On donne ci-contre, le tableau de signe de l'expression  $f(x) - x$ ,  $x > 0$ .

$x$	0		1	$+\infty$
$f(x) - x$		-	0	+

Donner la position relative de la courbe  $(\zeta_f)$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ .

- d) Tracer, sur votre copie, les courbes  $(\zeta_f)$  et  $(\Gamma)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
 4) a) Soit  $\mathcal{A}$  l'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe  $(\zeta_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = \alpha$  et  $x = 1$ .  
 Montrer que  $\mathcal{A} = \frac{3}{2} - \frac{\alpha^2}{2} + \ln \alpha - e^{\alpha-1}$ .  
 b) En déduire, à l'aide de  $\alpha$ , la valeur de l'intégrale  $\int_0^1 f^{-1}(x) dx$ .

**Partie B** Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[\frac{1}{2}, 1]$  par  $g(x) = x - \frac{1}{8}f(x)$ .

- 1) a) Montrer que pour tout  $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ ,  $\frac{1}{x^2} + e^{x-1} \leq 5$ .  
 b) Déduire que la fonction  $g$  est croissante sur l'intervalle  $[\frac{1}{2}, 1]$ .  
 2) Soit  $u$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ , pour tout entier naturel  $n$ .  
 a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\alpha \leq u_n \leq 1$ .  
 b) Montrer que la suite  $u$  est décroissante.  
 c) Déduire que la suite  $u$  est convergente et déterminer sa limite.

## Correction : Exercice 1

- 1) a) D'après l'énoncé, on peut extraire les probabilités suivantes : La probabilité qu'une femme fasse un suivi médical est  $p(M) = 0.8$ . La probabilité d'un accouchement sans complication sachant qu'elle a fait un suivi est  $p(A/M) = 0.95$ . La probabilité d'un accouchement sans complication sachant qu'elle n'a pas fait de suivi est  $p(A/\bar{M}) = 0.70$ .  
 b) En appliquant la formule des probabilités totales :

$$p(A) = p(A \cap M) + p(A \cap \bar{M}) = p(A/M) \times p(M) + p(A/\bar{M}) \times p(\bar{M})$$

$$p(A) = 0.95 \times 0.8 + 0.70 \times (1 - 0.8) = 0.76 + 0.70 \times 0.2 = 0.76 + 0.14 = 0.9$$

- c) L'accouchement se déroule avec au moins une complication correspond à l'événement  $\bar{A}$ .

$$p(\bar{M}/\bar{A}) = \frac{p(\bar{M} \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{p(\bar{A}/\bar{M}) \times p(\bar{M})}{1 - p(A)} = \frac{(1 - 0.70) \times 0.2}{1 - 0.9} = \frac{0.3 \times 0.2}{0.1} = \frac{0.06}{0.1} = 0.6$$

- 2) a) L'interrogatoire de 10 femmes de façon indépendante constitue un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire  $X$  suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = p(A) = 0.9$ . L'espérance mathématique est :

$$E(X) = n \times p = 10 \times 0.9 = 9$$

- b) La probabilité que  $X = 9$  est donnée par la formule de la loi binomiale :

$$p(X = 9) = C_{10}^9 (0.9)^9 (1 - 0.9)^{10-9} = 10 \times (0.9)^9 \times (0.1)^1$$

$$p(X = 9) = 1 \times (0.9)^9 = (0.9)^9$$

- c) "Au plus un accouchement se déroule avec au moins une complication" signifie que  $X \geq 9$  (c'est-à-dire 9 ou 10 femmes n'ont eu aucune complication).

$$p(X \geq 9) = p(X = 9) + p(X = 10) = (0.9)^9 + C_{10}^{10} (0.9)^{10} (0.1)^0 = (0.9)^9 + (0.9)^{10} \approx 0.74$$

### Correction : Exercice 2

1) a)  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Puisque  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$ , les vecteurs ne sont pas colinéaires. Les points  $A, B$ , et  $C$  ne sont pas alignés et déterminent un plan  $P$ .

- b) Le vecteur  $\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan  $P$ . On peut le simplifier en prenant

$\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Une équation cartésienne de  $P$  est de la forme  $lx + ly + lz + d = 0$ . Le point  $A(1, 2, 1)$

appartient à  $P$ , donc :  $1 + 2 + 1 + d = 0 \implies d = -4$

L'équation du plan  $P$  est donc bien  $x + y + z - 4 = 0$ .

- c) L'aire du triangle  $ABC$  est :  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{12} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

2) a) Le vecteur directeur de  $\Delta$  est  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

On a :  $\vec{u} \cdot \vec{n}' = 0 \times 1 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$ . La droite  $\Delta$  est donc parallèle au plan  $P$ . De plus, le point  $B(-1, 3, 2)$  qui appartient à  $\Delta$  vérifie l'équation de  $P$  ( $-1 + 3 + 2 - 4 = 0$ ). Donc  $\Delta$  est incluse dans le plan  $P$ .

- b) La distance du point  $I$  à la droite  $\Delta$  :  $d(I, \Delta) = \frac{\|\vec{IB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ .

$$\vec{IB} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{IB} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{IB} \wedge \vec{I}\| = 6 \text{ et } \|\vec{I}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}. \quad d(I, \Delta) = \frac{\|\vec{IB} \wedge \vec{I}\|}{\|\vec{I}\|} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

3) a)

$$x^2 + 2x + y^2 + z^2 + 2z - 16 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + y^2 + (z+1)^2 - 1 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 18$$

S est bien la sphère de centre  $I(-1, 0, -1)$  et de rayon  $R = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ .

$$\text{b) } d(I, P) = \frac{|-1+0-1-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} = \sqrt{12} \text{ Comme } d(I, P) < R (\sqrt{12} < \sqrt{18}), S \text{ et } P \text{ sont}$$

sécants suivant un cercle  $\zeta$ . Le centre du cercle est le projeté orthogonal de  $I$  sur  $P$ , comme  $\vec{IA} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

est normal à  $P$  et  $A \in P$ , ainsi  $A$  est le centre du cercle  $\zeta$  de rayon  $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{18 - 12} = \sqrt{6}$ .  
 $AB = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6} = r$ . Donc, le cercle  $\zeta$  passe bien par le point  $B$ .

c) On a  $\Delta \subset P$  et  $B \in \Delta \cap \zeta$ . Pour montrer que  $\Delta$  est tangente à  $\zeta$  en  $B$ , il suffit de montrer que  $\Delta$  est perpendiculaire au rayon  $[AB]$ .  $\vec{u} \cdot \vec{AB} = 0 \times (-2) + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$ . Les vecteurs sont orthogonaux, donc la droite  $\Delta$  est tangente au cercle  $\zeta$  au point  $B$ .

### Correction : Exercice 3

$$1) \text{ a) } (\sqrt{3} - i)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3})(i) + (i)^2 = 3 - 2\sqrt{3}i - 1 = 2 - 2\sqrt{3}i$$

$$\text{b) } \Delta = [-(3\sqrt{3} + i)]^2 - 4(1)(6 + 2\sqrt{3}i) = 27 + 6\sqrt{3}i - 1 - 24 - 8\sqrt{3}i = 2 - 2\sqrt{3}i = (\sqrt{3} - i)^2.$$

Donc  $\delta = \sqrt{3} - i$  est une racine carrée de  $\Delta$

$$\text{Les solutions sont : } z_1 = \frac{3\sqrt{3} + i - (\sqrt{3} - i)}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i, \quad z_2 = \frac{3\sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Les solutions de  $(E)$  sont donc  $S_C = \{\sqrt{3} + i, 2\sqrt{3}\}$ .

$$2) \text{ a) } \text{L'afixe du milieu de } [BC] \text{ est } \frac{b+c}{2} = \frac{2i+2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + i = a. \text{ Donc } A \text{ est le milieu du segment } [BC].$$

$$\text{b) } a = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

$A \in \mathcal{C}_{(O,2)} \cap \Delta : y = 1$ , avec  $x_A = \sqrt{3} > 0$  Le point  $C$  est le symétrique de  $B$  par rapport à  $A$ .

$$3) \text{ a) } d = (1 + \sqrt{3})(1 + i) = 1 + i + \sqrt{3} + \sqrt{3}i = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} + 1).$$

$$AD = |d - a| = |(\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} + i)| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Comme  $AD = 2$ , le point  $D$  appartient au cercle  $\zeta$ .

$$\text{b) } b - c = 2i - 2\sqrt{3}.$$

$$2i(d - a) = 2i(1 + i\sqrt{3}) = 2i + 2i^2\sqrt{3} = 2i - 2\sqrt{3} = b - c$$

On obtient bien  $b - c = 2i(d - a)$ . Cela implique que  $\frac{b-c}{d-a} = 2i \Leftrightarrow \frac{Z_{\vec{CB}}}{Z_{\vec{AD}}} = 2i \in i\mathbb{R}$ , ce qui signifie

que les vecteurs  $\vec{CB}$  et  $\vec{AD}$  sont orthogonaux. Les droites  $(AD)$  et  $(BC)$  sont perpendiculaires.

c)  $D$  se trouve à l'intersection du cercle  $\zeta$  et de la perpendiculaire à  $(BC)$  passant par  $A$ , avec  $x_D = \sqrt{3} + 1 > 0$  et  $y_D = \sqrt{3} + 1 > 0$ .

$$4) \text{ a) } M \in \zeta \implies AM = 2 \implies |z - a| = 2. \text{ En élevant au carré : } |z - a|^2 = 4. \text{ Ceci s'écrit :}$$

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 4 \implies z\bar{z} - z\bar{a} - a\bar{z} + |a|^2 = 4. \text{ Puisque } |a| = 2 \implies |a|^2 = 4, \text{ l'équation devient}$$

$$z\bar{z} - z\bar{a} - a\bar{z} + 4 = 4 \implies z\bar{z} = a\bar{z} + \bar{a}z.$$

- b) En remplaçant  $z = re^{i\theta}$  et  $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$  dans l'équation  $z\bar{z} = a\bar{z} + \bar{a}z$

$$r^2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}re^{-i\theta} + 2e^{-i\frac{\pi}{6}}re^{i\theta} = 2r \left[ e^{-i(\theta - \frac{\pi}{6})} + e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})} \right]$$

On a :  $e^{-i\alpha} + e^{i\alpha} = 2\cos\alpha$ .

$$r^2 = 2r[2\cos(\theta - \frac{\pi}{6})] = 4r\cos(\theta - \frac{\pi}{6})$$

Comme  $M$  est différent de  $O$ ,  $r > 0$ , donc en simplifiant par  $r$ , on a  $r = 4\cos(\theta - \frac{\pi}{6})$ .

- c)  $d = (1 + \sqrt{3})(1 + i) = (1 + \sqrt{3}) \left[ \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = (\sqrt{2} + \sqrt{6})e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

Comme  $D \in \zeta$ , son module vérifie l'équation trouvée en (b) avec  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

$$|d| = \sqrt{2} + \sqrt{6} = 4\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

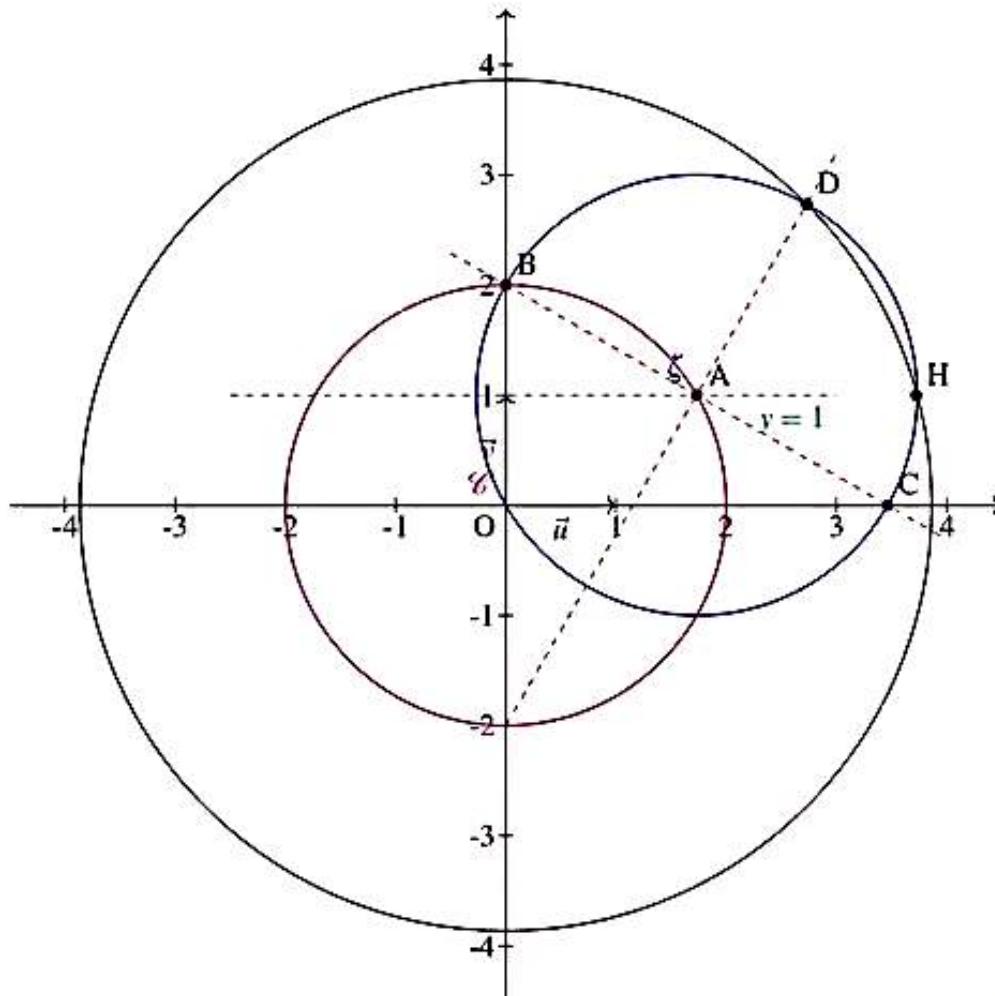
$$\text{D'où } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

- 5) Le point  $H$  appartient à  $\zeta$  et au cercle de centre  $O$  passant par  $D$ . Son module est donc  $|h| = |d| = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ . D'après 4.b),  $H \in \zeta \implies 4\cos(\theta_H - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ .

$$\cos\left(\theta_H - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Les solutions sont  $\theta_H - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$  ou  $\theta_H - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{12}$ . La première donne  $\theta_H = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$  (qui est l'argument de  $D$ ). La seconde donne  $\theta_H = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$ . Un argument de  $h$  est donc  $\frac{\pi}{12}$ .

Figure Exercice 3



## Correction : Exercice 4

## Partie A

$$1) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x - \frac{1}{x} + e^{x-1} \right) = 0 - \infty + e^{-1} = -\infty.$$

Interprétation : La droite d'équation  $x = 0$  (axe des ordonnées) est une asymptote verticale à  $(\zeta_f)$ .

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - 0 + +\infty = +\infty. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_0 + \underbrace{\frac{e^{x-1}}{x}}_{+\infty} \right) = +\infty.$$

Interprétation : La courbe  $(\zeta_f)$  admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de  $+\infty$ .

2) a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

$$f'(x) = 1 - \left( -\frac{1}{x^2} \right) + e^{x-1} = 1 + \frac{1}{x^2} + e^{x-1} > 0$$

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

b) Tableau de variation de  $f$  :

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3) a)  $f$  est continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ . Elle réalise donc une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ . Elle admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

b)  $f$  est continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ . Comme  $0 \in \mathbb{R}$ , l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  d'après le théorème de la bijection.

$f(0.6) = 0.6 - \frac{1}{0.6} + e^{-0.4} \approx -0.39 < 0$ .  $f(0.7) = 0.7 - \frac{1}{0.7} + e^{-0.3} \approx 0.012 > 0$ . Donc  $0.6 < \alpha < 0.7$ .

c) D'après le tableau de signe de  $f(x) - x$ , on déduit la position de  $(\zeta_f)$  par rapport à  $\Delta(y = x)$  : Sur  $]0, 1[$ ,  $f(x) - x < 0 \implies (\zeta_f)$  est en dessous de  $\Delta$ . Pour  $x = 1$ ,  $f(x) - x = 0 \implies (\zeta_f)$  coupe  $\Delta$  au point de coordonnées  $(1, 1)$ . Sur  $]1, +\infty[$ ,  $f(x) - x > 0 \implies (\zeta_f)$  est au-dessus de  $\Delta$ .

d) La courbe  $\Gamma$  est la symétrique de  $\zeta_f$  par rapport à  $\Delta$ .

4) a) Sur  $[\alpha, 1]$ , la fonction  $f$  est positive car  $f$  est croissante et  $f(\alpha) = 0$ .

$$\mathcal{A} = \int_{\alpha}^1 f(x) dx = \int_{\alpha}^1 \left( x - \frac{1}{x} + e^{x-1} \right) dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 - \ln(x) + e^{x-1} \right]_{\alpha}^1$$

$$\mathcal{A} = \left( \frac{1}{2} - \ln(1) + e^0 \right) - \left( \frac{1}{2}\alpha^2 - \ln(\alpha) + e^{\alpha-1} \right)$$

$$\mathcal{A} = \frac{3}{2} - \frac{\alpha^2}{2} + \ln(\alpha) - e^{\alpha-1}$$

b) Par symétrie par rapport à la droite  $y = x$ , l'aire sous la courbe  $\Gamma$  de  $x = 0$  à  $x = 1$  est égale à l'aire du rectangle unitaire diminuée de l'aire  $\mathcal{A}$  sous  $f$  de  $\alpha$  à 1.

$$\int_0^1 f^{-1}(x) dx = 1 - \mathcal{A} = 1 - \left( \frac{3}{2} - \frac{\alpha^2}{2} + \ln \alpha - e^{\alpha-1} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2} - \ln \alpha + e^{\alpha-1}$$

**Partie B**

- 1) a) Pour tout  $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ , on a  $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x^2} \leq 4$ . De plus,  $x \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq 0 \Rightarrow e^{x-1} \leq e^0 = 1$ . En sommant les deux inégalités, on trouve :  $\frac{1}{x^2} + e^{x-1} \leq 4 + 1 = 5$ .
- b)  $g'(x) = 1 - \frac{1}{6}f'(x) = 1 - \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{x^2} + e^{x-1}\right)$ . Puisque  $\frac{1}{x^2} + e^{x-1} \leq 5$ , on a :  $f'(x) \leq 1 + 5 = 6$ . Ainsi,  $g'(x) \geq 1 - \frac{1}{6}(6) = 0$ . La fonction  $g$  est donc croissante sur  $[\frac{1}{2}, 1]$ .
- 2) a)  $u_0 = 1$ . On sait que  $\alpha \in ]0.6, 0.7[$ , donc  $\alpha \leq u_0 \leq 1$ . Vraie.  
Soit  $n \geq 0$ , Supposons que  $\alpha \leq u_n \leq 1$ . Montrons que  $\alpha \leq u_{n+1} \leq 1$ . Puisque  $g$  est croissante sur ce domaine,  $g(\alpha) \leq g(u_n) \leq g(1)$ . Or  $g(\alpha) = \alpha - \frac{1}{6}f(\alpha) = \alpha - 0 = \alpha$ . Et  $g(1) = 1 - \frac{1}{6}f(1) = 1 - \frac{1}{6}(1) = \frac{5}{6} \leq 1$ . On a donc  $\alpha \leq u_{n+1} \leq 1$ . Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \leq u_n \leq 1$ .
- b)  $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n = -\frac{1}{6}f(u_n)$ . Comme  $\alpha \leq u_n \leq 1$  et que  $f$  est croissante avec  $f(\alpha) = 0$ , on a  $f(u_n) \geq 0$ . Donc  $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{6}f(u_n) \leq 0$ . La suite  $u$  est décroissante.
- c) La suite  $u$  est décroissante et minorée par  $\alpha$ , elle converge donc vers une limite réelle  $L$ . Puisque  $g$  est continue en  $L$ , la limite vérifie l'équation  $g(L) = L$ .  $L - \frac{1}{6}f(L) = L \Rightarrow f(L) = 0$ . La seule solution de cette équation sur l'intervalle est  $\alpha$ . Donc  $L = \alpha$ .

Figure Exercice 4

