EXERCICES DE RENFORCEMENT : Calcul intégral TD

EXERCICE : 1

1°) Trouver les réels a et b tels que : pour tout x appartenant à $]0;1[\cup]1;+\infty[$,

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$$

2°) Par intégration par parties, calculer $J = \int_2^3 \frac{\ln x}{(1-x)}dx$.

EXERCICE :2

1°) Etudier les variations de f définie sur R par $f(x) = e^{2x} - e^x$.

2°) Soit (Γ) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. ; unité 2 cm .

a) Déterminer l'équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse ln 2 .

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement le résultat.

3°) a) Tracer (Γ) .

b) Calculer l'aire A (α) en cm² du domaine délimité par (Γ) , les droites d'équations respectives : $x = \alpha$ $(\alpha < 0)$, $x = \ln 2$ et l'axe des abscisses .

c) Calculer $\lim_{\alpha \to -\infty} \mathscr{A}(\alpha)$ et interpréter graphiquement le résultat .

EXERCICE : 3

Soit la fonction f telle que $\begin{cases} f(x) = x \ln |x| & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1°) a) Préciser D_f et étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b) Montrer que f est impaire, puis étudier f sur $[0 ; +\infty[$ en précisant les limites éventuelles puis son sens de variation .

2°) a) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur de l'intégrale I (α) telle que $I(\alpha) = \int_\alpha^1 f(x)dx$ avec $\alpha \in]0;1]$.

b) En déduire $\lim_{\alpha \to 0^+} I(\alpha)$.

3°) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$ (en unités d'aires U.A.) .

EXERCCICE 4

1.a) Démontre que pour tout x on a : $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$

b) En déduis la valeur de $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

2. Calcule la dérivée de la fonction f $définie\ sur\ \mathbb{R}\ par\ f(x) = \ln(1+e^x)$

3.A l'aide d'une intégration par parties , calcule $J = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x)$

DEVOIR DE MATHEMATIQUES

Année Scolaire : 2021-2022
Niveau :
Durée :

Exercice 1 :

On définit les deux Un et Vn su N par :

$$\begin{cases} U_{0}=1 \\ U_{n+1}=\frac{U_n+2v_n}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} V_0 = 12 \\ V_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4} \end{cases}$$

1) On pose $\forall n \in N, W_n = V_n - U_n$
   a- Démontrer que W_n est une suite géométrique
   b- Exprimer W_n en fonction de n
   c- En déduire la limite de (W_n)
2) a) Montrer que (U_n) est une suite croissante et (V_n) une suite décroissante
   b) En déduire que $\forall n \in N, U_0 \leq U_n \leq V_n \leq V_0$
3) Montrer que les deux suites (U_n) *et* (V_n) convergent et ont la même limite que l'on appellera l:
4) On appelle (t_n) la suite définie par $\forall n \in N: t_n = 3U_n + 8V_n$
   a) Montrer que (t_n) est une suite stationnaire (constante)
   b) Déterminer alors la valeur de l $(limU_n = limV_n = l)$

Exercice 2 :

On considère les suites numériques (u_n) *et* (u_n) définies par :

$u_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{2}(u_n)^2$ et $v_n = ln\left(\frac{3}{2}u_n\right)$.

1) Calcule v_0.
2) Démontre que (v_n) est une suite géométrique de raison 2.
3) a) Exprime v_n en fonction de n.
   b) Déduis-en la limite de la suite (v_n).
4) a) Exprime u_n en fonction de n.
   b) Déduis-en la limite de la suite (u_n).
5) On désigne par S_n la somme des n premiers termes de la suite (v_n) et par T_n le produit des n premiers termes de la suite (u_n)

a) Démontre que : $S_n = (1 - 2^n)ln2$

b) Exprime T_n en fonction de n

c) Démontre que : $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$.

DEVOIR DE NIVEAU N°3 TERMINALE D Durée : 3 heures

Lundi 11 avril 2016

MATHEMATIQUES

Toute calculatrice NON GRAPHIQUE est autorisée.

EXERCICE (6 points)

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $4z^2 + 2(1 - 3i)z - 2 - i = 0$.
2. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = 4z^3 + 6(1 - i)z^2 - 7iz - 2 - i$.
   a) Calculer : $P(-1)$.
   b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z) = 0$.
3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$. Unité graphique : 4cm
   On donne les points A, B et C d'affixes respectives -1, $\frac{1}{2}i$ et $-\frac{1}{2} + i$.
   a) Calculer les distances AB, AC et BC.
   b) Justifier que ABC est un triangle isocèle.
4. Soit K le milieu du segment [BC].
   a) Calculer l'affixe de K.
   b) Calculer l'affixe du point D, symétrique de A par rapport à K.
   c) Démontrer que le quadrilatère ABDC est un losange.
5. Pour tout nombre complexe z distinct de -1, on pose : $Z = \frac{2iz + 1}{z + 1}$.
   a) Vérifier que pour tout nombre complexe z distinct de -1, $Z = 2i\frac{z - \frac{1}{2}i}{z + 1}$.
   b) Interpréter graphiquement le module de Z.
   c) Déterminer et construire l'ensemble (Γ_1) de points M d'affixe z tels que : $|Z| = 2$.
6. a) Interpréter graphiquement un argument de Z.
   b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ_2) de points M d'affixe z tels que $Z \in]0 ; +\infty[$.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$. OI = 1cm.

Partie A (3 points)

On considère la fonction dérivable h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = axe^{2-x} + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels. On note (C) la courbe représentative de h dans le repère $(O;I;J)$.

1. a) Déterminer chacun des nombres réels a, b et c sachant que : $\begin{cases} h(0) = 1 \\ h(2) = 2 \\ h'(2) = -\frac{3}{2} \end{cases}$
   b) Trouver une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 2.
2. On donne la fonction dérivable g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{x-2} + 2x - 2$.
   a) Etudier le sens de variation de g.
   b) Démontrer que l'équation : $g(x) = 0$, a une unique solution α comprise entre 0,84 et 0,85.
   c) Justifier que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; \alpha[, \ g(x)<0 \\ \forall x \in]\alpha ; +\infty[, \ g(x)>0 \end{cases}$

Partie B (7 points)

On considère la fonction dérivable f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{2-x} - \frac{x}{2} + 1$

1. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

   b) Justifier que la droite (D) : $y = -\frac{x}{2} + 1$, est une asymptote à (C) en $+\infty$.

   c) Justifier que (C) est en-dessous de (D) sur $]-\infty ; 0]$ et au-dessus de (D) sur $[0 ; +\infty[$.

2. Calculer la limite de f en $-\infty$ puis vérifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Donner une interprétation graphique de ces résultats.

3. a) Justifier que : $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 2}{2 - 2\alpha}$.

   b) En déduire que : $f(\alpha) > 0$.

4. Démontrer que l'unique point K de (C) où la tangente (T') est parallèle à la droite (D) a pour coordonnées $(1 ; \frac{1}{2} + e)$.

5. Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{2-x}g(x)$.

6. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

7. Construire (D), (T), (T') et la courbe (C) sur le même graphique que le point K [*la courbe* (C) *traverse la droite* (T) *au point de coordonnées* (2 ; 2)].

Partie C (4 points)

On pose : $\forall t \in [1 ; +\infty[$, $A(t) = \int_0^t \left(f(x) - \left(-\frac{x}{2} + 1\right)\right)dx$.

1. Interpréter géométriquement l'intégrale A(t).

2. a) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall t \in [1 ; +\infty[$, $A(t) = e^2 - (t+1)e^{2-t}$.

   b) En déduire l'aire $\mathcal{A}_1$, en cm^2, de la partie du plan limitée par (C), la droite (D), la droite (OJ) et la droite d'équation $x = 1$.

3. a) Hachurer le domaine $\mathfrak{D}$ du plan formé par les points M de coordonnées $(x ; y)$ telles que :
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -\frac{x}{2} + 1 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

   b) Calculer $\lim\limits_{t \to -\infty} A(t)$. En déduire que l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du domaine $\mathfrak{D}$ vaut : e^2.

LCA DEVOIR DE MATH TD 19 année scolaire 2022-2023

DUREE : 02h00

EXERCICE1 (4points)

Pour chaque affirmation , écris VRAI si l'affirmation est vraie ou FAUX si l'affirmation est fausse

1−Pour tout $x \in IR$, $e^x > 0$

2-L'ensemble de définition de la fonction exp est $]0, +\infty[$

3-*Pour tout* $x \in IR$, $e^{\ln x} = x$

4- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - e^x) = +\infty$

EXERCICE 2 (4 points)

Pour chaque affirmation trois réponses sont proposées et une seule est exacte. Ecris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre qui correspond à la bonne réponse

1-Largument principal du nombre complexe $z=(1-\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ est

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{4\pi}{3}$ c) $\frac{-2\pi}{3}$

2)Soit j une racine troisième de l'unité ,alors :

a) $j+\bar{j} = 0$ b) $1 + j + \bar{j} = 1$ c) $1 + j + \bar{j} = 0$

Soit $A(1 - i)$ et $B(2i)$ deux points du plan complexe

3) la distance AB est égale à

a) 10 b) $\sqrt{10}$ c) $2\sqrt{2}$

4) L'ensemble des points M d'affixe Z tel que $|z - 1 + i| = |z - 2i|$ est

a)la médiatrice de $[AB]$ b)le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{10}$ c) la droite (AB)

EXERCICE 3 (6 points)

On considère dans C le polynôme $P(z) = iz^3 + (5 - 2i)z^2 - (4 + 9i)z - 9 - 6i$

1-a)Vérifie que 3i est une solution de l'équation $P(z) = 0$

b)Détermine les nombres complexes a et b tels que $P(z) = (z - 3i)(iz^2 + az + b)$

2-a) Calcule $(2 + i)^2$

b) Résous dans C l'équation $iz^2 + (2 - 2i)z + 2 - 3i = 0$

c) Déduis des questions 1a) et 2b) les solutions de l'équation $P(z) = 0$

3-Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points A et B d'affixes respecives -1 et $1+i$

Détermine l'ensemble(Δ) des points M d'affixe z tel que $|z-1-i| = \sqrt{5}$

EXERCICE 4 (6 points)

Soit la fonction g definie sur IR par $g(x) = 1 - x - 2e^{-x}$

1-Etudie les variations de g puis dresse son tableau de variation (on ne demande pas de calculer les limites)

2-Déduis-en que pour tout réel x ; $g(x) < 0$

On considère la fonction f definie sur IR par $f(x) = (x + e^{-x})e^{-x}$

On appelle (C) sa représentation graphique dans le repère orthonormé (O, I, J)

3-a)Calcule la limite de f en $+\infty$

d) Interprète graphiquement le résultat

4-On donne $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

Interprète graphiquement les résultats ci-dessus

5-a) Démontre que pour tout $x \epsilon IR$, $f'(x) = e^{-x}g(x)$

b) Etudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation

	DEVOIR MATHEMATIQUES Durée : 2 heures	Année scolaire : 2022-2023 Niveau : T^{le} D

Exercice 1 : (2 points)

Ecris le numéro de chaque affirmation suivie de vraie si l'affirmation est vraie ou faux si elle est faux.

1- Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.
2- Deux nombres complexes qui ont le même argument sont égaux.
3- Pour tout nombre réel x, on a $\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2+\left(\frac{e^{-ix}+e^{ix}}{2}\right)^2=1$.
4- Un argument du nombre complexe $z=-i\left(cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right)$ est $-\frac{\pi}{6}$.

Exercice 2 : (2 points)

Pour chacune des propositions suivantes indique le numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Affirmations	Réponses		
		A	B	C
1	Le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne E $(-2+i)$ *et* F (4) l'ensemble des points M(z) tels que : $\lvert z+2-i\rvert=\lvert z+4\rvert$ est	Le cercle de centre E et de rayon 4	Le cercle de diamètre $[EF]$	La médiatrice du segment $[EF]$
2	Le système d'équation dans ℝ x ℝ définie par $\begin{cases}5lnx+2lny=8\\4lnx-3lny=11\end{cases}$ *a pour solution*	$\left(e^2;\frac{1}{e}\right)$	$\left(\frac{1}{e};e^2\right)$	$(e^{-2};e^{-1})$
3	Le nombre complexe $\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une racine	Cinquième de l'unité	Sixième de l'unité	Une racine carrée de l'unité
4	Soit r le module et θ un argument de z. $z=\frac{1+i}{1-i}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ on a	$r=1$ $\theta=\frac{\pi}{2}$	$r=1$ $\theta=-\frac{\pi}{2}$	$r=2$ $\theta=\frac{\pi}{4}$

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ *par*: $f(x)=\frac{2(x-1)}{x}-lnx$

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), d'unité 4 cm.

Partie A

1. Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation graphique du résultat.
3. Montre que pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$ $f'(x)=\frac{2-x}{x^2}$
4. Etudie les variations de f et dresser son tableau de variation.
5. Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
6. Démontre que l'équation : $x\in[2;+\infty[f(x)=0$ admet une solution unique α comprise entre 4,9 et 5.
   Justifie que : $\forall x\in]1;\alpha[f(x)>0$; $\forall x\in]0;1[\cup]\alpha;+\infty[f(x)<0$.
7. Tracer (T) et (C).

Partie B

Soit g la restriction de f à $]0;2]$.

1. Démontre que g est une bijection de $]0;2]$ *sur* $]-\infty;1-ln2]$.
2. Démontre que la bijection réciproque g^{-1} *de* g est dérivable en 0 puis calculer $(g^{-1})'(0)$.
3. Soit (C') la courbe représentative de g^{-1} dans le repère (O, I, J).

Exercice 4 (5points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Unité : 1 cm.

Soit le polynôme P défini par $p(z) = z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3}$.

1. Justifie que 1 est un zéro de P.
2. a) Justifie que les racines carrées du nombre complexe $-2 - 2i\sqrt{3}$ sont : $1 - i\sqrt{3}$ et $-1 + i\sqrt{3}$.

   b) Soit A et B deux points d'affixes respectives $z_A = 1 - i\sqrt{3}$ *et* $z_B = -1 + i\sqrt{3}$. Détermine la forme trigonométrique de z_A *et de* z_B.

   c) Place exactement les points A et B dans le plan complexe.
3. Résous dans C, l'équation : $z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 6 + 3i\sqrt{3} = 0$.
4. Justifie que : $P(z) = (z-1)(z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 6 + 3i\sqrt{3}) = 0$.
5. En déduire dans C, les solutions de l'équation : $P(z) = 0$.

Exercice 5 (5 points)

Pour réduire le nombre d'accidents de circulation dû à la consommation d'alcool par les automobilistes, la gendarmerie nationale en collaboration avec l'oser utilisent un nouvel alcootest : Après an essai, dans une population composée de 8% de personnes ures, la gendarmerie et l'oser recueillent les statistiques suivantes :

- 80% des automobilistes ivres sont déclarés positifs à ce test.
- 95% des automobilistes non ivres sont déclarés négatifs à ce test le directeur de ta localité voudraient savoir le nombre minimal d'automobilistes à contrôler pour que la probabilité d'avoir au moins un test positif soit supérieur à 0,99 – tu es sollicité pour trouver le nombre.

  Utilise tes connaissances mathématiques pour répondre à la préoccupation de ces autorités.

LYCEE CLASSIQUE ABIDJAN
08 BP 30 ABIDJAN 08
22 44 35 17
Cherche, trouve et jamais n'abandonne

DEVOIR DE NIVEAU DE MATHEMATIQUES n°3

Prof : CE MATH.

Classe : $T^{le}D$ Durée : 2 h Date : Lundi 13 Mars 2023

Ce devoir comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2

Exercice 1 (*2 pts*)

Pour chacune des affirmations suivantes, écris le numéro suivi de Vrai si elle est correcte ou le numéro suivi de Faux si elle ne l'est pas.

1. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = (e^x)^2$ est la fonction $F(x) = e^{2x}$
2. L'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $2^{x-9} < 8^{3x+1}$ est $S = \left]-\frac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$
3. L'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^{2x} + e^x - 6 = 0$ est $\{\ln 2\}$
4. La fonction $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et a pour dérivée la fonction $x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{x}$

Exercice 2 (*2 pts*)

Pour chaque ligne du tableau, quatre réponses sont proposées dont une, et une seule est exacte. Indique la réponse exacte en notant par exemple : 1. a ou 1. b ou 1. c ou 1. d

Affirmations	a	b	c	d
1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{2x}-e^2}{x-1}$ est égale à	e^{-1}	2	$2e^2$	$+\infty$
2. Pour tous réels strictement positifs a et b, $e^{\ln a + \ln b}$ est égal à	$a+b$	$a-b$	$a \times b$	$\frac{a}{b}$
3. Pour tout nombre réel x, $\sin x$ est égal à ….	$\frac{e^{ix}+e^{-x}}{2i}$	$\frac{e^{x}-e^{-x}}{2i}$	$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2i}$	$\frac{e^{-ix}-e^{ix}}{-2i}$
4. La forme exponentielle du nombre complexe $z = -2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ est	$2e^{-i\frac{\pi}{3}}$	$-2e^{-i\frac{\pi}{3}}$	$-2e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Exercice 3 (*5 pts*)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)^2e^{-x}$

On désigne par (C) la courbe représentative de g dans le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 1 cm

1. a. Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$. .

   b. Donne une interprétation graphique des résultats obtenus.
2. Calcule la limite de f en $+\infty$ puis interprète graphiquement le résultat.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

   a. Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -x(x+2)e^{-x}$.

   b. Déduis-en les variations de f puis dresse son tableau de variation.
4. Construis (C).

Exercice 4 (*6 pts*)

Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

1. a. Détermine les racines carrées du nombre complexe $-5 + 12i$.

   b. Déduis-en les solutions de l'équation $iz^2 - iz - 3 - i = 0$.

c. Détermine la forme trigonométrique du nombre complexe $(-1+i)^5$.

2. On considère l'équation (E): $z \in \mathbb{C}$, $z^3 + 4z^2 + 2z - 28$
   a. Démontre que l'équation (E) admet une unique solution réelle z_0.
   b. Détermine les nombres complexes a et b tels que l'équation (E) s'écrive :
   $(z-2)(z^2 + az + b) = 0$.
   c. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

3. On note $(\mathcal{E})$ l'ensemble des points M d'affixe z telle que $z^2 + \bar{z}^2 - 8 = 0$. On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z du point M.
   a. Montre que M appartient à $(\mathcal{E})$ si et seulement si $x^2 - y^2 = 4$.
   b. Justifie que le point A d'affixe $-3 - i\sqrt{5}$ appartient à $(\mathcal{E})$.

Exercice 5 (*5 pts*)

A la fin de chaque mois, une nouvelle entreprise de fabrication de boissons gazeuses fait le bilan de ses recettes du mois écoulé.

Un expert en finances et ami du chef de l'entreprise, ayant obtenu des chiffres sur l'évolution financière de cette entreprise, fait une modélisation des recettes par la fonction r telle que : pour tout $x \geq 1$, $r(x) = 3x - xln\frac{1}{2}x$, où x désigne le nombre de mois d'existence de l'entreprise et $r(x)$ est exprimée en millions de francs CFA.

Le chef, pour surmonter d'éventuelles difficultés que pourrait connaître son entreprise, voudrait savoir le nombre de mois à partir duquel une baisse des recettes sera enregistrée, en vue d'accroître le capital d'investissement. Il te sollicite.

A l'aide d'une production argumentée, basée sur tes connaissances mathématiques, aide-le.