Unité–Travail–Progrès — وحدة – عمل – تقدم

OFFICE NATIONAL DES EXAMENS
ET CONCOURS DU SUPÉRIEUR

الهيئة الوطنية للامتحانات
والمسابقات العلمية

EXAMEN : BACCALAURÉAT — SÉRIE : D — SESSION : JUIN 2023

ÉPREUVE : **MATHEMATIQUES** — DURÉE : 4 HEURES — COEFFICIENT : 4

EXERCICE 1 :

1) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation (E) : $z^2 - 2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z + 16 = 0$.
   a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = -4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$.
   b) En déduire les solutions de l'équation (E).
2) Soient les nombres complexes $a = (\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.
   a) Vérifier que $b\overline{c} = a$, puis en déduire que $ac = 4b$.
   b) Ecrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique.
   c) En déduire que $a = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.
   d) Déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 2 :

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

1) Calculer I_0.
2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.
3) Donner l'expression de I_{n+1} et à l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \geq 1$, $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$
4) En déduire I_2, puis I_3.
5) Montrer que la suite I_n est décroissante.

EXERCICE 3 : Une urne contient quatre boules roses, trois boules vertes et deux boules jaunes indiscernables au toucher.
On tire simultanément trois boules de l'urne.

1) Déterminer la probabilité d'obtenir :
   a) Les trois couleurs.
   b) Les deux boules jaunes.
   c) Au moins une boule jaune.
2) Soit X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules, associe le nombre de boules jaunes tirées.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.
   c) Définir la fonction de répartition de X.

PROBLEME

Partie A : on considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^x + 2\ln x$

1) a) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
   b) Calculer $g'(x)$.
   c) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
2) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0\,;+\infty[$ et vérifier que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.
   b) Déterminer suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = e^x + 2x\ln x - 2x \ si\ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On note (C) la courbe de f.

1) a) Déterminer la limite de f en 0, puis calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.
   b) Interprété graphiquement les résultats.
2) a) Démontrer que f est continue en 0.
   b) Démontrer que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$.
   c) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier la réponse.
   d) Interpréter graphiquement le résultat de la question 2) b).
3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

… la courbe (C) de f.