*R. C. I. - M. E. N. Direction des Examens et Concours * Direction des Examens et Concours * R. C. I. - M. E. N.*

BACCALAUREAT
SESSION 2009

Coefficient : 5
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : C

Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2.
Chaque candidat recevra deux feuilles de papier millimétré.
Toute calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1

On pose : $a = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$, $b = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, $c = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.

Partie A

1. Exprimer a^6, b^6 et c^6 sous forme algébrique.
2. En déduire une solution de l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^6 = -8i$.
3. Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.
   a) Vérifier que $j^3 = 1$.
   b) Démontrer que jb et j^2b sont aussi des solutions de (E).
   c) En déduire toutes les solutions de (E). Les écrire sous forme algébrique.

Partie B

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :
$$\begin{cases} x \equiv 0[6] \\ x \equiv 3[4] \end{cases}$$
2. Déterminer tous les entiers naturels n vérifiant à la fois les deux propositions suivantes :
   - a^n est un nombre réel
   - b^n est un imaginaire pur.

EXERCICE 2

OAB est un triangle rectangle isocèle en O tel que Mes $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{2}$.

On désigne par I le milieu du segment [AB], par (C) le cercle de centre O et de rayon OA et par (Γ) le cercle de diamètre [AB]. Le point D est l'intersection du cercle (C) et de la demi-droite [IO). On note J le point d'intersection de la demi-droite [DB) et du cercle (Γ).

1. a) Faire une figure.
   b) Justifier que Mes $(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}) = \frac{\pi}{4}$.
   c) Démontrer que le triangle DAJ est rectangle isocèle en J et de sens direct.
   Démontrer que la droite (OJ) est la médiatrice du segment [AD].

Tournez la page S.V.P.