

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 1

Exercice 1

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$.
- 2) Soit K, L et M les points d'affixes respectives $z_K = 1 + i$, $z_L = 1 - i$ et $z_M = -i\sqrt{3}$. Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Unité graphique 4cm. On complètera la figure dans les questions suivantes.
- 3) a) On appelle N le symétrique du point M par rapport à L. Déterminer l'affixe du point N.
b) La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point M en A et le point N en C. Déterminer les affixes respectives z_A et z_C des points A et C.
c) La translation de vecteur \vec{u} d'affixe $2i$ transforme le point M en B et le point N en D. Déterminer les affixes respectives z_B et z_D des points B et D.
- 4) a) Montrer que le point K est le milieu du segment [BA] et du segment [AC].
b) Montrer que $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$.
c) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 2

A-/ Soit f la fonction définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
- 2) Ecrire la fonction f sans les symboles de valeur absolue.
- 3) Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition.
- 4) Etudier la dérivabilité de f en -1 en 3 et sur chaque intervalle où f est dérivable. Interpréter graphiquement les résultats.
- 5) Déterminer la fonction dérivée sur chaque intervalle où f est dérivable.
- 6) Résoudre dans \mathbb{R} , les inéquations suivantes :
a) $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + x - 1 \leq 0$.
b) $\sqrt{-x^2 + 2x + 3} - x + 1 \leq 0$
c) En déduire le sens de variation de f.
- 7) Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f et étudier les branches infinies de (\mathcal{C}_f) .
- 8) Dresser le tableau de variation de f et construire (\mathcal{C}_f) .

B-/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; -1]$.

- 1) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} .
- 2) Sur quel intervalle g^{-1} est-elle dérivable ?
- 3) Calculer $(g^{-1})'(0)$.
- 4) Expliquer g^{-1} .
- 5) Construire $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$.

Exercice 3

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \cos(2x) - \cos x + 1$$

- 1) Etudier la parité et la périodicité de f. En déduire qu'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $I = [0; \pi]$.
- 2) a) Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$.
b) Résoudre dans $[0; \pi]$, l'équation $f'(x) = 0$ et l'inéquation $f'(x) > 0$.
c) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$; préciser le minimum de f sur $[0; \pi]$. En déduire le tableau de variation de f sur $[-\pi; \pi]$

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 2

Exercice 1

1. a) Montrer que pour tout nombre réel x , on a : $\frac{1}{(e^x + 1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

b) Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{(e^x + 1)^2} dx$.

2. a) Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{(e^x + 1)^3}$.

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{x e^x}{(e^x + 1)^3} dx$.

Exercice 2

1. Pour tout nombre complexe z , on donne : $P(z) = z^3 - (5 + 3i)z^2 + (5 + 8i)z - 1 - 5i$.

a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $3+4i$.

b) Montrer que $P(z)$ admet une racine réelle à déterminer.

c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$.

2. On désigne par z_1 la racine réelle, z_2 et z_3 les autres racines de $P(z)$ telles que $\text{Re}(z_2) < \text{Re}(z_3)$.

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 .

a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S de centre M_1 telle que $S(M_2) = M_3$.

b) Déterminer le rapport et l'angle de cette similitude.

c) Déterminer le point P tel que $S(P) = 0$ (0 est l'origine du repère).

3. On considère les points $A(3 ; -1)$ et $B(0 ; 2)$.

h est l'homothétie de centre A et de rapport $-\sqrt{2}$.

r est la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{3\pi}{4}$.

a) Déterminer l'écriture complexe de h , de r et de $r \circ h$.

b) Caractériser $r \circ h$.

Problème

On considère la fonction f définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$.

On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

L'unité graphique est 4cm.

Partie A

1. Etudier les variations de f et réaliser son tableau de variation.

2. a) Prouver que le point $\Omega(0 ; \frac{1}{2})$ est centre de symétrie de (\mathcal{C}) .

b) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (\mathcal{C}) au point Ω .

3. Construire (T) et (\mathcal{E}).

Partie B

4. a) Prouver que pour tout nombre réel x , $f(x) + f(-x) = 1$.

b) Prouver que pour tout nombre réel x , $\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^x}$

5. On pose $g(x) = f(-x)$; $I = \int_0^1 f(x)dx$ et $J = \int_0^1 g(x)dx$.

a) Calculer J puis I.

b) Prouver que pour tout nombre réel positif x , on a : $f(x) \leq g(x)$.

c) On note (\mathcal{D}) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$$

d) Exprimer l'aire \mathcal{A} de (\mathcal{D}) en fonction de I et J.

e) Calculer alors l'aire \mathcal{A} en cm^2 .

Partie C

On considère les fonctions h et H définies sur $[0 ; +\infty[$ par $h(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$ et $H = \int_0^x h(x)dx$.

6. a) Montrer que pour tout nombre réel $x \in [0 ; +\infty[$, $h(x)$ est strictement positif.

b) En déduire que H est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

7. On note h' la dérivée de h.

a) Vérifier que pour tout nombre réel positif x , $h(x) = h'(x) + g(x)$.

b) En déduire une écriture de $H(x)$ sans le symbole de l'intégrale.

8. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ (On pourra poser $t = e^{-x}$).

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de H.

d) Prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (H(x) - x) = 1 - 2\ln 2$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

e) Construire (\mathcal{E}'), la courbe représentative de H dans le même repère que (\mathcal{E}).

FIN

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 3

Exercice 1 (4,75pts)

Une urne contient 6 boules vertes et 4 boules jaunes, toutes indiscernables au toucher. On tire en une seule prise 3 boules de l'urne.

- Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes restant dans l'urne après le tirage.
 - Déterminer la loi de probabilité de X . (1,5pts)
 - Définir la fonction de répartition F de la variable aléatoire X et la représenter graphiquement. (1pt)
 - Calculer son espérance mathématique $E(X)$ et son écart-type $\sigma(X)$. (0,5pt+0,75pt+0,25pt)
- On procède à 5 tirages consécutifs des 3 boules, les boules étant remises dans l'urne après chaque tirage.

Quelle est la probabilité de tirer exactement 3 fois des boules jaunes au cours des 5 tirages. (0,75pt)

Exercice 2 (5,5pts)

- Pour tout nombre complexe z , on donne $P(z) = z^3 - (5 + 3i)z^2 + (5 + 8i)z - 1 - 5i$.
 - Déterminer les racines carrées du nombre complexe $3 + 4i$. (0,5pt)
 - Montrer que $P(z)$ admet une racine réelle à déterminer. (0,5pt)
 - Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $P(z) = 0$ (1pt)
- On désigne par z_1 la racine réelle, z_2 et z_3 les autres racines de $P(z)$ telles que $\text{Re}(z_2) < \text{Re}(z_3)$. On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 .
 - Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S de centre M_1 , telle que $S(M_2) = M_3$. (0,5pt)
 - Déterminer le rapport et l'angle de cette similitude. (0,5pt)
 - Déterminer le point P tel que $S(P) = O$ (O est l'origine du repère). (0,5pt)
- On considère les points $A(3; -1)$ et $B(0; 2)$; h l'homothétie de centre A et de rapport $(-\sqrt{2})$ et r la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{3\pi}{4}$.
 - Déterminer l'écriture complexe de h , de r et de $r \circ h$. (0,5pt + 0,5pt+0,5pt)
 - Caractériser $r \circ h$. (0,5pt)

Problème (9,75pts)

a est un nombre réel quelconque. On définit dans \mathbb{R} , la fonction f_a telle que $f_a(x) = \ln(ax - 1)$. On désigne par (C_a) la représentation graphique de f_a dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (Unité graphique 2cm).

Partie I (5pts)

- Quelle est la valeur de a pour laquelle la fonction f_a n'est pas définie ? (0,25pt)
- On suppose que a est non nul.

Déterminer suivant les valeurs du réel a l'ensemble de définition D_{f_a} de f_a . (0,25pt×2)
- Etudier suivant les valeurs du réel a , le sens de variation de f_a . (0,25pt×3)
 - Calculer suivant les valeurs du réel a , les limites de f_a aux bornes de D_{f_a} . (1pt)
 - Dresser suivant les valeurs du réel a , le tableau de variation de f_a . (0,5pt)
 - Etudier les branches infinies de (C_a) . (1pt)
- a) Déduire de ce qui précède le tableau de variation de $f_{-0,5}(x)$ et de $f_2(x)$. (0,5pt)

b) Construire $(C_{-0,5})$ et (C_2) .

(0,5pt)

Partie II (2,75pts)

1. On suppose que $a > 0$

a) Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{1}{a}; +\infty\right[$, $\frac{ax}{ax-1} = 1 + \frac{1}{ax-1}$.

(0,25pt)

b) Déterminer a tel que pour tout $x \in \left[\frac{1}{a-1}; +\infty\right[$, $\ln x \leq \ln(ax-1)$.

(0,75pt)

2. On pose $a \geq 2$.

a) Calculer en fonction de a , à l'aide d'intégrations par parties,

$$\int_{\frac{2}{a}}^a \ln(ax-1) dx \text{ et } \int_{\frac{2}{a}}^a \ln x dx.$$

(1pt)

b) En déduire en fonction de a , l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C_a) , la courbe (C_{\ln}) , les droites d'équation $x = \frac{2}{a}$ et $x = a$.

(On rappelle que (C_{\ln}) est la représentation graphique de la fonction logarithme népérien.)

(0,25pt)

3. Calculer, l'aire B de la partie du plan limitée par la courbe (C_2) , la courbe (C_{\ln}) , les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

(0,5pt)

Partie III (2pts)

On suppose que $a = -0,5$. On définit la suite numérique (u)

$$\text{par : } \begin{cases} u_0 = -4,001 \\ u_{n+1} = f_{-0,5}(u_n) \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

1. Construire à l'aide de $(C_{-0,5})$, les trois premiers termes de (u) .

(0,5pt)

2. a) Montrer que la suite (u) est décroissante.

(0,25pt)

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n > \frac{2}{3}$.

(0,75pt)

c) La suite (u) est-elle convergente ? Si oui, calculer sa limite.

(0,25pt×2)

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 4

Exercice 1

Soit l'application $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto z' = \frac{iz + 1}{z + i}$$

A, B, M et M' désignent dans le plan complexe (\mathcal{P}) rapporté au repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) les points d'affixes respectives $-i, i, z$ et z' (unité graphique 2cm).

1. a) Soit le nombre complexe $e = -1 + i$. Calculer $f(e)$ et placer sur une figure les points E d'affixe e et E' d'affixe $f(e)$.
b) Résoudre l'équation : $f(z) = 0$.
2. On pose $W = \frac{z - 1}{z + i}$.
a) Exprimer z' en fonction de W.
b) Donner une interprétation géométrique des arguments de $z - i$ et $z + i$. En déduire une interprétation géométrique de l'argument de $f(z)$.
3. a) Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que $f(z)$ soit un nombre réel.
b) Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points M du plan tel que $f(z)$ soit un imaginaire pur.
c) Déterminer et construire l'ensemble (E_3) = $\{M \in \mathcal{P} / |f(z)| = 2\}$.

Exercice 2

I-/ On considère la fonction f définie sur \mathbb{C} par $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.

1. Montrer que f admet un zéro imaginaire pur z_1 .
2. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation (E) : $f(z) = 0$.
3. Ecrire les solutions de (E) sous forme trigonométrique. (On notera z_2 la solution de (E) qui a la partie imaginaire positive et z_3 la troisième solution). Calculer z_2^{2005} .

II-/ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1. Représenter dans le plan, les trois points $M_1(z_1)$; $M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$ et montrer qu'ils sont sur un même cercle de centre O.
2. Calculer $z_2 - z_1$ et $z_2 - z_3$. Démontrer que le quadrilatère $O M_3 M_2 M_1$ est un losange.

Problème

1. On considère la fonction polynôme P définie par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
a) Etudier les variations de P .
b) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une solution réelle et une seule $\alpha \in]1, 2]$.
c) Déterminer un encadrement de α par deux décimaux consécutif d'ordre 1 par la méthode du balayage.
2. Soit D l'ensemble des nombres strictement supérieurs à -1. On considère la fonction f définie sur D par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.
On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (on prendra comme unité : 4cm)
Etudier les variations de f (utiliser les résultats du 1) puis construire (\mathcal{C}).

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 5

Exercice 1

- Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $a = 1 + i$.
- On pose $z = re^{i\theta}$ avec $r \in]0 ; +\infty[$ et $\theta \in [0 ; 2\pi[$.
 - Calculer z^2 et $(1 + i)\bar{z}$ en fonction de r et θ , où \bar{z} est le conjugué de z .
 - En déduire la valeur r' de r pour laquelle on a l'égalité : $z^2 = (1 + i)\bar{z}$. **(1)**
 - Déterminer les valeurs $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ tels que $z = re^{i\theta}$ vérifie l'égalité **(1)**. On note respectivement z_0, z_1 et z_2 les nombres complexes de module r et d'arguments respectifs $\theta_0, \theta_1, \theta_2$.
- Soit A_1 et A_2 les points d'affixes respectives $z_1 - z_0$ et $z_2 - z_0$ dans le plan complexe, et O le point d'affixe nulle.
 - Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$.
 - En déduire la nature du triangle OA_1A_2 .

Exercice 2

Soit f la fonction de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan x$.

- Montrer que f admet une réciproque f^{-1} dont on donnera le sens de variation et l'ensemble de dérivabilité.
- Calculer $(f^{-1})'(1)$; $(f^{-1})'(\sqrt{3})$.
 - Déterminer la fonction dérivée de f^{-1} .
- En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que pour tous réels a, b de $]0; \frac{\pi}{2}[$ tels que $a < b$, $\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$.
- On suppose maintenant $a \in [0; \frac{\pi}{4}]$ montrer que $a \leq \tan a \leq 2a$ (On utilisera l'inégalité des accroissements finis).

Problème

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$$

et (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J) tel que l'unité graphique sur (O,I) soit 4cm et sur (O,J), 2cm.

- f est-elle continue sur \mathbb{R} ?
- f est elle dérivable :
 - au point $-\frac{1}{2}$?
 - au point $\frac{1}{2}$?
- Calculer le nombre dérivé de f .
 - En un point x tel que : $x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$.

- b) En un point x tel que : $x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$.
4. a) Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation : $x \in \mathbb{R}, \sqrt{4x^2 - 1} + 4x < 0$ est l'intervalle $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right]$.
- b) Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation : $x \in \mathbb{R}, \sqrt{1 - 4x^2} - 4x > 0$ est l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{5}} \right]$.
- c) En déduire le signe de $f'(x)$:
- pour $x \in \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$.
 - pour $x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$.
5. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et donner le tableau des variations de f .
- b) Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$.
- En déduire que (C) admet deux asymptotes d'équations respectives : $y = -x$; $y = 3x$.
- c) Tracer la courbe (C).
6. Soit h la restriction de f à l'intervalle : $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right]$.
- a) Montrer que h est une bijection de $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h . Calculer $h^{-1}(0)$ puis trouver une équation de la tangente T à la courbe (Γ) , représentant les variations de h^{-1} , au point de coordonnées $(0, h^{-1}(0))$.
- c) Construire T et (Γ) sur le même graphique que (C).

BONNE REFLEXION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 6

Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

- Soit Z un nombre complexe de module 2. Alors le conjugué \bar{Z} de Z est égal à :
 - $\frac{\sqrt{2}}{Z}$
 - $\frac{2}{Z}$
 - $\frac{4}{Z}$
- Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et i . L'ensemble des points M d'affixe Z tel que $\frac{Z-i}{Z-1}$ est réel est :
 - La droite (AB) privée de A.
 - Le segment [AB] privé de A.
 - Le cercle de diamètre [AB] privé de A.
- La limite de $x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$ quand x tend vers 0 est égale à :
 - $\frac{1}{2}$
 - 2
 - 0
- La limite de $x \mapsto x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à :
 - 0
 - 1
 - 2
- Une primitive de la fonction $f : x \mapsto \cos^3 x + \frac{\cos x}{\sin x}$ sur $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ est la fonction F :
 - $x \mapsto \sin x - \frac{1}{3} \sin^{-3} x + \ln(\sin x)$
 - $x \mapsto \frac{\sin^4 x}{4} + \ln|\sin x|$
 - $x \mapsto \frac{\sin^4 x}{x} + \ln(-\sin x)$

Exercice 2

- Soit (O, \vec{u}, \vec{v}) un repère du plan complexe et S la transformation par laquelle, tout point M d'affixe Z a pour image M' d'affixe Z' définie par :

$$\begin{cases} x' = ax - by + 1 \\ y' = bx + ay + 1 \end{cases} \quad \text{avec } M(x; y) \text{ et } M'(x'; y') \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}.$$
 - Montrer que $Z' = Z_0 Z + 1 + i$ avec $Z_0 = a + ib$.
 - Déterminer le nombre complexe Z_0 pour que S soit une translation. Donner alors l'élément géométrique de cette translation.
 - Déterminer Z_0 pour que S soit une rotation d'angle de mesure $-\frac{\pi}{4}$. Trouver l'autre élément géométrique.
 - Peut-on déterminer Z_0 pour que S soit l'homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$? Si oui, donner l'autre élément géométrique.
 - Caractériser la transformation S si $Z_0 = 1 + i\sqrt{3}$.

2. On considère un cercle de centre O, A un point de ce cercle et M un point décrivant ce cercle mais distinct de A. Soit N le point du plan tel que AMN soit un triangle équilatéral de sens indirect.
- Considérons la similitude directe S' de centre A transformant M en I milieu de [MN]. Déterminer le rapport et l'angle S'. Placer l'image O₁ du centre O de ce cercle par S'.
 - Déterminer l'ensemble (E) décrit par I lorsque M décrit tout le cercle sauf le point A. Construire cet ensemble.

Problème

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i} , \vec{j}) (unité graphique : 4cm).

Soit f l'application définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On appelle Γ la courbe représentative de f. On se propose d'étudier f et de construire Γ , après avoir précisé sa position par rapport à la courbe représentative de ln et par rapport à l'une de ses tangentes.

Partie A : Préliminaires

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

- On donne les valeurs approchées : $\ln 2 \approx 0,69$; $\ln 3 \approx 1,10$; $\ln 10 \approx 2,30$.
En déduire des valeurs approchées de $\ln 0,2$ et $\ln 0,3$.
- Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}^{*+} par : $g(x) = x + 1 + \ln x$.
 - Etudier les variations de g, et calculer ses limites en 0 et en $+\infty$.
 - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .
Prouver que $0,2 < \alpha < 0,3$.
 - En déduire le signe de g sur \mathbb{R}^{*+} .
- Soit h la fonction définie sur \mathbb{R}^{*+} par : $h(x) = x \ln x + \frac{1-x^2}{2}$
 - Calculer ses dérivées première et seconde : h' et h''.
 - Etudier les variations puis le signe de h' ; en déduire les variations et le signe de h.

Partie B : Etude de f.

- Montrer que f est continue en 0.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$; que peut-on en déduire pour f ? Interpréter graphiquement.
- Calculer la limite de f en $+\infty$.
- Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$ (on utilisera la question A 2b).
- Etudier le signe de f' (on utilisera la question A 2c) et donner le tableau de variation de f.

Partie C : Construction de Γ .

- Pour tout $x > 0$, on pose $\varphi(x) = f(x) - \ln x$. Etudier le signe de $\varphi(x)$ en fonction de x, et calculer la limite de φ en $+\infty$.
 - On note L la courbe représentative de la fonction ln. Interpréter graphiquement les résultats obtenus à la question 1 a.
- Déterminer une équation de la tangente Δ à Γ au point d'abscisse 1.
Etudier la position relative de Γ et de sa tangente Δ (on utilisera la question A 3b).
- Construire L, Δ et donner l'allure de Γ .

BONNE COMPOSITION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 7

Exercice 1 (4,5pts)

On considère les intégrales : $I_0 = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x} dx$ et $I_n = \int_0^{\pi/3} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $\int_0^{\pi/3} (\sin x)^n \cos x dx$. (0,5pt)

En déduire $I_{n+2} - I_n$. (0,5pt)

b) Calculer I_1 . En déduire I_3 et I_5 . (1,5pt)

c) Soit f la fonction définie sur $[0 ; \frac{\pi}{3}]$ par : $f(x) = \ell_n[\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})]$.

Prouver que f est une primitive sur $[0 ; \frac{\pi}{3}]$ de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{\cos x}$. En déduire I_0 , puis I_2 et I_4 . (0,5pt×4)

Exercice 2 (4,5pts)

Soit dans \mathbb{C} l'équation du second degré : $2z^2 - 2(\cos(2t))z + i\sin(2t) = 0$ où t est un réel appartenant à l'intervalle $[0 ; \pi]$.

1. Résoudre cette équation. (0,5pt×3)

2. Déterminer suivant les valeurs de t , le module et un argument de chaque solution. (0,5pt×6)

Problème (11pts)

Partie A

Soit la fonction φ définie dans \mathbb{R} par $\varphi(x) = e^x + x + 1$.

1. Etudier le sens de variation de φ et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. (0,25pt×4)

2. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution et une seule réelle α et que l'on a :

$$-1,28 < \alpha < -1,27. \quad (0,5pt)$$

3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur \mathbb{R} . (0,5pt)

Partie B

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$ et (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan (unité graphique : 4cm).

1. Montrer que $f'(x) = \frac{e^x \varphi(x)}{(e^x + 1)^2}$. En déduire le sens de variation de f . (0,5pt×2)

2. Montrer que $f(x) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (0,5pt×2)

3. Soit (T) la tangente à (\mathcal{C}) au point d'abscisse 0. Donner une équation de (T) et étudier la position de (\mathcal{C}) par rapport à (T) . (0,5pt×2)

4. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. (0,25pt×2)

Démontrer que la droite $(\mathcal{D}) : y = x$ est asymptote à (\mathcal{C}) et étudier la position de (\mathcal{C}) par rapport à (\mathcal{D}) . (0,25+0,5pt)

5. Dresser le tableau de variations de f . (0,5pt)

6. Tracer sur un même dessin (\mathcal{C}) , (T) et (\mathcal{D}) . La figure demandée fera apparaître les points de (\mathcal{C}) dont les abscisses appartiennent à $[-2 ; 4]$. (2pts)

Partie C

On considère la fonction g , définie sur $[0 ; 1]$ par $g(x) = \ln(1 + e^x)$.

On note (L) la courbe représentative de g dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , I le point défini par $\vec{OI} = \vec{i}$, A le point de (L) d'abscisse 0 et B son point d'abscisse 1 .

1. Etudier brièvement les variations de g . (0,5pt)
2. Donner une équation de la tangente en A à (L) . (0,5pt)
3. On note P l'intersection de cette tangente avec le segment $[IB]$. Calculer les aires des trapèzes $OIPA$ et $OIBA$. (0,5pt×2)
4. On admet que la courbe (L) est située entre les segments $[AP]$ et $[AB]$. Montrer que
$$\ln 2 + \frac{1}{4} \leq \int_0^1 g(x) dx \leq \ln \sqrt{2(1+e)}. \quad (0,5pt)$$
5. Au moyen d'une intégration par parties, justifier que
$$\int_0^1 f(x) dx = \ln(1+e) - \int_0^1 g(x) dx. \quad (0,5pt)$$
6. En déduire un encadrement de $\int_0^1 f(x) dx$. (0,5pt)

BONNE REFLEXION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 8

Exercice 1

Soit le système (S) :
$$\begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + 2y - z + t = 0 \end{cases}$$

- Résoudre (S) en prenant t comme indéterminée.
- Déterminer (x ; y ; z ; t) pour que $4x^2 - y^2 + z^2$ soit minimal puis donner la valeur de ce minimum.

Exercice 2

On lance simultanément deux dés sur une table. L'un est cubique et ses faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6. L'autre est tétraédrique et ses faces sont numérotées 1, 2, 3 et 4. On suppose que chacune des faces de chaque dé a la même probabilité d'apparition. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe la valeur absolue de la différence des nombres figurant sur les deux faces en contact avec la table.

- Déterminer la loi de probabilité de X.
- Définir la fonction de répartition F de X et construire sa représentation graphique.
- Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

Exercice 3

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- Résoudre l'équation différentielle : $y' - \frac{1}{n}y = 0$ (1)
- On considère l'équation différentielle : $y' - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n(n+1)}$ (2)

Déterminer deux réels a et b tels que la fonction affine g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = ax + b$ soit solution de (2).

- Montrer que, pour que la fonction h définie sur \mathbb{R} soit solution de (2), il faut et il suffit que (h - g) soit solution de (1).
 - En déduire toutes les solutions de (2).
 - Déterminer celle de ces solution, f, vérifiant $f(0) = 0$.

Problème

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$; on considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :
$$\begin{cases} f(x) = xe^x - x & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = 2x(-1 + \ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]-\infty ; 0]$ par $g(x) = xe^x - x$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g$.
- Pour tout nombre réel x élément de l'intervalle $]-\infty ; 0]$, calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ (g' et g'' sont respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g).
 - Démontrer que la courbe représentative (\mathcal{C}_g) de g admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées.
 - Dresser le tableau de variation de la fonction g' ; en déduire le signe de $g'(x)$.

Partie B

3. Quel est l'ensemble de définition de f ?
4. Démontrer que f est continue en 0 .
5. a) Etudier la dérivabilité de f en 0 . En déduire une interprétation géométrique.
b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[$ et étudier son signe.
6. Dresser le tableau de variation de f .
7. Soit φ l'application définie par : $\varphi : J \rightarrow f(J)$
$$x \mapsto \varphi(x) = f(x), \quad \text{où } J = [1 ; +\infty[.$$
 - a) Démontrer que φ est une bijection (soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ).
 - b) Prouver que la fonction dérivée première (φ^{-1}) de φ^{-1} est positive sur $f(J)$.

Partie C

- (\mathcal{C}_f) est la courbe représentative de la fonction f , dans le repère \mathcal{R} .
8. Justifier que la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique à (\mathcal{C}_f) en $-\infty$.
 9. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et conclure.
 10. (\mathcal{C}_h) désigne la courbe représentative de la fonction h définie par $h(x) = -f(x)$. Construire les courbes (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_h) et les tangentes en 0 sur une même figure.
 11. Soit $H(x) = \int_1^x h(t) dt, \forall x \in J$.
 - a) La fonction H étant définie et continue sur J , calculer $H(e)$. En donner une interprétation géométrique.
 - b) Calculer en cm^2 , l'aire \mathcal{A} du domaine plan délimité par (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_h) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

BONNE REFLEXION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 9

Exercice 1 (4pts)

On dispose d'un dé tétraédrique dont les faces sont numérotées : 0 ; 1 ; 2 ; 3. On lance ce dé quatre fois de suite et chaque fois on note le résultat indiqué sur la face non visible. Il est supposé que les quatre faces ont la même probabilité d'apparaître. Si n_1, n_2, n_3, n_4 désignent les nombres obtenus dans cet ordre au cours d'une série de 4 lancers, on associe au quadruplet (n_1, n_2, n_3, n_4) l'application $f_{a,b}$ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par $f_{a,b}(z) = az + b$ avec $a = n_1 + in_2$ et $b = n_3 + in_4$.

- Quelle est la probabilité pour que l'application géométrique associée à $f_{a,b}$ soit :
 - une translation ?
 - une homothétie distincte de l'application identique ?
 - une similitude directe dont l'angle α pour mesure $\frac{\pi}{4}$ et de centre d'affixe i .
- Soit x la variable aléatoire qui au quadruplet (n_1, n_2, n_3, n_4) associe le nombre réel $\sqrt{n_1 + n_2}$.
 - Déterminer la loi de probabilité de x .
 - Calculer $E(x)$; $V(x)$; $\sigma(x)$.
- Définir et construire la fonction de répartition F associée à la variable aléatoire x .

Exercice 2 (5pts)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère la suite des points M_n de coordonnées (x_n, y_n) définie par récurrence de la manière suivante : le point M_0 de coordonnée (x_0, y_0) est donné, et pour tout entier naturel n ,

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{1}{2}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Démontrer par récurrence que, si M_0 est le point de coordonnées $(1 ; 0)$, pour tout entier naturel n : $M_n = M_0$.
- Déterminer les points M_1, M_2, M_3 en prenant pour M_0 le point de coordonnées $(5 ; 4)$.
Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 .
Montrer que les droites (M_0M_1) et (M_2M_3) sont parallèles.
Montrer que les droites (M_0M_2) et (M_1M_3) sont perpendiculaires.
- On se propose de généraliser les résultats précédents.
On suppose que le point M_0 fixé est distinct du point Ω de coordonnées $(1 ; 0)$.
Soit $z_n = x_n + iy_n$ l'affixe du point M_n .
 - Montrer que pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = \frac{1}{2}iz_n + 1 - \frac{1}{2}i$.
On pose $Z_n = z_n - 1$.
Démontrer que pour tout entier naturel n : $Z_{n+1} = \frac{1}{2}iZ_n$
 - On pose d_n la distance de Ω à M_n : $d_n = \Omega M_n$. Calculer d_n en fonction de n et de d_0 où $d_0 = \Omega M_0$.
 - Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega M_n}, \overrightarrow{\Omega M_{n+1}} \right)$.
Que peut-on dire des droites $(M_n M_{n+2})$ et $(M_{n+1} M_{n+3})$?
 - Montrer que pour tout entier naturel n : $z_{n+1} - z_n = Z_{n+1} - Z_n$ et $z_{n+3} - z_{n+2} = -\frac{1}{4}(Z_{n+1} - Z_n)$

Que peut-on dire des droites $(M_n M_{n+1})$ et $(M_{n+2} M_{n+3})$?

Problème (11pts)

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Soit la fonction $f_m(x) = e^{x-1}(mx - m + 1) - 1$.

I-/ On suppose que m est un paramètre non nul.

1. a) Déterminer la fonction dérivée f'_m de f_m et discuter son signe suivant les valeurs de m .
b) Préciser les limites de $f_m(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
c) Dresser les tableaux de variations de f_m suivant les valeurs de m .
2. Soit (C_m) la courbe de f_m . Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un même point A.
3. Soit N le point de (C_m) en lequel la tangente à (C_m) est parallèle à l'axe des abscisses. Quelle est l'ensemble des points N lorsque m décrit \mathbb{R}^* ?
4. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}; f''_m(x) = f'_m(x) + me^{x-1} + 1$. En déduire sans calculer $f''_m(x)$ la relation $f''_m(x) - 2f'_m(x) + f_m(x) = -1$.
5. Soit $m > 0$. On considère P et Q deux points appartenant respectivement à (C_{-m}) et (C_m) et de même abscisse x . Calculer \overline{PQ} . Etudier son signe et en déduire la position de (C_{-m}) et (C_m) .

II-/ On pose $m = 1$ puis $m = -1$.

1. Dresser les tableaux de variation de f_1 et f_{-1} .
2. Construire dans un repère (C_1) et (C_{-1}) .
3. Soit λ un réel tel que $\lambda > 1$.
a) Calculer l'aire $a(\lambda)$ de la portion du plan limitée par les courbes (C_1) ; (C_{-1}) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.
b) Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} a(\lambda)$.

Partie B

Soit m un paramètre réel et f_m la fonction définie par $f_m(x) = \ell_n(x^2 - (m+3)x + 3m + 1)$.

I-/ 1. Trouver l'ensemble de définition de f_m suivant les valeurs de m .

2. Démontrer qu'il existe un point A commun à toutes les courbes (C_m) de f_m .
3. Démontrer que si M est un point du plan distinct de A, alors il existe au plus une valeur de m pour laquelle (C_m) passe par M.
4. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de (C_m) avec l'axe des abscisses. On donnera les coordonnées de ces points en fonction de m .

II-/ On suppose maintenant que $m = \frac{1}{2}$.

1. Etudier les variations de $f_{1/2}$ et tracer sa courbe représentative $(C_{1/2})$.
2. Soit $g(x) = |f_{1/2}(x)|$.
a) Comment obtient-on la courbe (C_g) de g à partir de la courbe $(C_{1/2})$?
b) Tracer (C_g) dans le même repère que $(C_{1/2})$.
3. a) Déterminer les réels a , b et c tels que : $\frac{4x^2 - 7x}{2x^2 - 7x + 5} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{2x-5}$.
b) Evaluer l'aire du plan limité par la courbe $(C_{1/2})$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \frac{3}{4}$.

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 10

Exercice 1 (10pts)

N.B. : Les parties A et B sont indépendantes.

A) Soit P le polynôme défini par $P(z) = z^3 + (1 - 2i)z^2 + (1 - 2i)z - 2i$.

1. Démontrer qu'il existe un imaginaire pur $z_1 = ib$ solution de l'équation (E) : $P(z) = 0$.
2. Déterminer le polynôme Q tel que $P(z) = (z - ib) Q(z)$.
3. a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) : $P(z) = 0$.

On notera j la solution de l'équation $Q(z) = 0$ dont la partie imaginaire est positive.

b) Vérifier que $j^2 = -j - 1$; $j^2 = \bar{j} = \frac{1}{j}$; $j^3 = 1$.

c) Ecrire sous forme trigonométrique les solutions de (E).

B) A tout complexe $z \neq 2i$ on associe le complexe $z' = \frac{z+1}{z-2i}$.

1. Déterminer l'ensemble des points M, images de z tels que z' soit réel.
2. Déterminer l'ensemble des points M, images de z tels que z' soit imaginaire pur.
3. Déterminer l'ensemble des points M, images de z tels que $|z'| = 1$.

Exercice 2 (10pts)

Partie A

Soit la fonction φ définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$.

1. Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer $\varphi'(x)$ et dresser le tableau de variation de φ .
3. Déterminer l'image par φ de l'intervalle $[1 ; 3]$.
4. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $[1 ; 3]$.

Partie B

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{x-2} \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ et on désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2cm.

1. a) Préciser l'ensemble de définition de f et déterminer les limites de f aux bornes de ce dernier.
b) En déduire que la courbe de f admet une asymptote dont on précisera la nature et une équation.
2. Etudier la dérivabilité de f en 1 et en 3 et interpréter graphiquement les résultats.
3. Montrer que pour tout $x \in]1 ; 2[\cup]2 ; 3[$, $f' = \frac{-\varphi(x)}{(x-2)^2 \sqrt{-x^2 + 4x - 3}}$.
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe (C), son asymptote et ses demi-tangentes éventuelles.
5. On pose $g(x) = \frac{-x}{x-2} \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$.
a) Comment peut-on déduire la courbe (C') de g de celle de f ? Tracer (C').
b) En déduire la construction de la courbe Γ d'équation : $y^2(x-2)^2 = x^2(-x^2 + 4x - 3)$.
6. Soit t un paramètre réel et $(\Delta)_t$ la droite d'équation $y = tx$. On constate graphiquement que $(\Delta)_t$ coupe Γ en O et en deux points M'_t et M''_t distincts de O.
a) Ecrire une équation du second degré ayant pour solution les abscisses des points M'_t et M''_t .
b) Sans résoudre cette équation, montrer que le milieu $[M'_t M''_t]$ appartient à une droite fixe et que la distance $M'_t M''_t$ est une constante indépendante de t.

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 11

Exercice 1 (5pts)

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse qui n'est pas justifiée ne sera pas prise en compte.

Question 1

On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal (o, \vec{u}, \vec{v}) , les points A, B et C d'affixes respectives

$$a = 1 + i \quad ; \quad b = 3i \quad ; \quad c = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right)$$

Affirmation

Le triangle ABC est un triangle équilatéral.

Question 2

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct (o, \vec{u}, \vec{v}) la transformation f dont une écriture complexe est $z' = \left(\frac{2i}{\sqrt{3}+i}\right)z$.

Affirmation

La transformation f est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Question 3

On considère le nombre complexe $a = (-\sqrt{3} + i)^{2011}$

Affirmation

Le nombre complexe a est un nombre imaginaire pur.

Question 4

Z étant un nombre complexe de module 2.

Affirmation

Le conjugué de $Z_1 \bar{Z}$ est tel que $\bar{Z} = \frac{4}{Z}$.

Question 5

f est la fonction numérique définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan x$. On note f^{-1} la bijection réciproque de f .

Affirmation $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$.

Exercice 2 5pts

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère l'application F qui au point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' définie par $Z' = t^3 Z + (1+t)t$ où t désigne un nombre complexe.

- Déterminer l'ensemble des nombres complexes t pour lesquels F est une translation : caractériser F pour chaque valeur de t trouvée.
- Déterminer l'ensemble des nombres complexes t pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. Caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

3) Caractériser F pour $t = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 3 (7pts)

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \cos(2x) - \cos x + 1$

- 1) Expliquer pourquoi est-il suffisant d'étudier f sur l'intervalle $[0; \pi]$. (1pt)
- 2) a – Montrer que f est dérivable et déterminer f' . (0,5pt)
 b – Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équation $f'(x) = 0$ puis $f'(x) > 0$. (1,5pt)
 c – Vérifier que le minimum de f sur $[0; \pi]$ est $-\frac{1}{8}$ puis dresser le tableau de variation sur $[0; \pi]$. (1pt)
- 3) a – Résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans $[0; \pi]$. (0,5pt)
 Quels sont les points communs à la courbe représentative (\mathcal{C}) de f restreinte à $[-\pi; \pi]$ et à l'axe des abscisses (1pt).
 b – Tracer la courbe (\mathcal{C}) sur $[-3\pi; 3\pi]$. (1,5pt)

Exercice 4 3pts

Pour chaque fonction déterminer les primitives sur l'intervalle K.

- 1) $f(x) = \sin^2 x \cos^4 x$ $K = \mathbb{R}$
- 2) $f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$ $K = \mathbb{R}$
- 3) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$ $K = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$
- 4) $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{(1-3x)^3}$ $K = \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$

NB: (0,75pt par question)

Bonne Réflexion

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 12

Exercice 1 (5pts)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $Z_A = 2 + i$; $Z_B = 1 + 2i$; $Z_C = 6 + 3i$ et $Z_D = -1 + 6i$.

1. Représenter les points A, B, C et D. (0,5pt)
2. a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe f telle que $f(A) = B$ et $f(C) = D$. (0,5pt)
b) Montrer que cette similitude est une rotation et préciser ses éléments caractéristiques. (0,5pt)
3. Soit J le point d'affixe $3 + 5i$. Montrer que la rotation r de centre J et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B. (1pt)
4. On appelle I le point d'affixe $1 + i$, M et N les milieux respectifs des segments [AC] et [BD]. Déterminer en utilisant les résultats des questions précédentes la nature du quadrilatère IMJN. (0,75pt)
5. On considère les points P et Q tels que les quadrilatères IAPB et ICQD sont des carrés de sens direct.
 - a) Calculer les affixes Z_P et Z_Q des points P et Q. (0,5pt)
 - b) Déterminer : $\frac{IP}{IA}$ et $\frac{IQ}{IC}$ ainsi qu'une mesure des angles $(\widehat{IA;IP})$ et $(\widehat{IC;IQ})$. (1pt)
En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(A) = P$ et $g(C) = Q$. (0,25pt)

Exercice 2 (3,5pts)

1. Soit la fonction numérique h de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} h(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

- a) Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin \frac{1}{x} = 0$.
 - b) En remarquant que pour tout réel $x \neq 0$, $\cos \frac{1}{x} = 2x \sin \frac{1}{x} - h(x)$, démontrer que h n'est pas continue en 0. (0,5pt)
 - c) Démontrer que la fonction H définie par
$$\begin{cases} H(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ H(0) = 0 \end{cases}$$
 est une primitive de la fonction h sur \mathbb{R} . (0,5pt)
2. Soit t, u et v trois fonctions numériques définies sur $] \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} [$ par $t(x) = \sin x - \cos x$; $u(x) = \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}$ et $v(x) = \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}$.
 - a) Calculer la fonction dérivée t' de t. (0,5pt)
 - b) Déterminer une primitive sur $] \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} [$ de $u - v$ et $u + v$ puis de u et de v. (1pt)

Problème (11,5pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

A-/ On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par $g(x) = \frac{2 - \ln x^2}{2 + \ln x^2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de g . (0,5pt)
2. Montrer que g admet un prolongement par continuité en O et préciser ce prolongement. (0,5pt)
3. Etudier la parité de g . (0,5pt)

B-/ Soit f la fonction définie par
$$\begin{cases} f(x) = g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

4. Déterminer l'ensemble de définition D de f . (0,5pt)
5. Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout x de D , $f(x) = a + \frac{b}{1 + \ln|x|}$. (0,5pt)
6. Etudier la dérivabilité de f en O et en donner une interprétation géométrique. (1pt)
7. Etudier les variations de f sur $E = D \cap [0 ; +\infty[$ puis établir son tableau de variation sur D . (1,5pt)
8. Tracer la courbe (C) de la fonction f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . (1pt)
9. Discuter graphiquement suivant les valeurs du nombre réel m , l'existence, le nombre et le signe des solutions de l'équation $(E_m) : (2 - m) \ln|x| - (m + 2) = 0$. (1pt)

C-/ On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $I =]e^{-1} ; +\infty[$.

10. Montrer que l'équation $h(x) = 2$ admet une solution unique X_0 dans l'intervalle $]e^{-1} ; 1[$ et donner son encadrement à $0,1$ près. (1pt)
11. Montrer que h admet une bijection réciproque notée h^{-1} que l'on déterminera. (1pt)
12. Montrer que h^{-1} est dérivable puis calculer $(h^{-1})'(0)$ de deux manières bien justifiées. (1pt)
13. Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_1) de h^{-1} en son point d'abscisse O . Tracer (T) et (C_1) dans la figure précédente avec une couleur différente. (1,5pt)

BONNE REFLEXION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 13

Exercice 1 (5,5pts)

A-/ Le plan complexe ϕ est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère le polynôme $P(z)$ défini par $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 + (3 + ai)z^2 + (b + 5i)z + c + 6i$ où a, b, c sont des réels.

Déterminer a, b, c sachant que $P(-1) = 1 + 3i$ et $P(0) = 2 + 6i$.

B-/ On donne dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^3 + (3 + 2i)z^2 + (3 + 5i)z + 2 + 6i = 0$.

1. a) Montrer que (E) admet une solution dont le point image appartient à la droite d'équation $y = -x$. (0,75pt)
 - b) Déterminer les réels α, β et γ tels que (E) soit équivalente à : $(z + 2i)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma) = 0$. (0,75pt)
 - c) En déduire les solutions de (E). (0,75pt)
2. On désigne par A, B, C les points d'affixes respectives $U_1 = -2i$; $U_2 = -1 + i$; $U_3 = -2 - i$.
 - a) Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle. (0,75pt)
 - b) On pose $w = \frac{U_2 - U_3}{U_1 - U_2}$. Calculer w^{2007} . (0,75pt)
3. a) Déterminer l'affixe du point D tel que [AB] et [CD] aient même milieu. (0,75pt)
 - b) Quelle est la nature du quadrilatère ACBD ? Donner l'équation cartésienne du cercle (\mathcal{C}) circonscrit au quadrilatère ACBD. (1pt)

Exercice 2 (4pts)

Soit f la fonction de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan x$.

1. Montrer que f admet une réciproque f^{-1} dont on donnera le sens de variation et l'ensemble de dérivabilité. (0,5pt+0,25pt+0,25pt)
2. a) Calculer $(f^{-1})'(1)$; $(f^{-1})'(\sqrt{3})$. (0,5pt×2)
 - b) Déterminer la fonction dérivée de f^{-1} . (0,5pt)
3. En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que pour tous réels a, b de $]0; \frac{\pi}{2}[$ tels que $a < b$, $\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$. (0,5pt+0,25pt)
4. On suppose maintenant $a \in [0; \frac{\pi}{4}]$ montrer que $a \leq \tan a \leq 2a$ (On utilisera l'inégalité des accroissements finis). (0,5pt+0,25pt)

Exercice 3 (10,5pts)

A-/ Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 2$.

1. Etudier les variations de g . (2pts)
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α et que $\alpha \in [-3, -2]$. (0,75pt)

Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près. (0,5pt)
3. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . (0,5pt)

B-/ On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x + 2 + \frac{x}{(x+1)^2}$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $(x+1)g(x)$. (0,75pt)
2. Etudier les variations de f . On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) . (1,5pt)
3. a) Préciser les branches infinies de (\mathcal{C}) . (0,5pt)
b) Etudier la position de (\mathcal{C}) par rapport à la droite d'équation $y = x + 2$. (0,5pt)
c) Ecrire l'équation de la tangente T à (\mathcal{C}) au point d'abscisse 0. (0,5pt)
4. Construire T et (\mathcal{C}) . (1pt)

C-/ Soit h la restriction de f à l'intervalle $] -1, +\infty[$.

1. Montrer que h est une bijection de $] -1, +\infty[$ vers \mathbb{R} . (0,5pt)
Soit h^{-1} la bijection réciproque de h .
2. Calculer $(h^{-1})'(2)$. (0,5pt)
3. Construire la courbe représentative Γ de h^{-1} . (1pt)

BONNE REFLEXION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 14

Exercice 1

On considère dans le plan complexe (\mathcal{C}), les points A d'affixe $z_A = 1$, M d'affixe z et N d'affixe $z_N = iz - (1 + i)$.

On note T_λ , l'application, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \lambda z_N - \lambda z_M + z_A$ où λ est un nombre réel non nul.

- 1) Démontrer que pour tout M du plan, le point N est l'image de M par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
- 2) a) Démontrer que l'affixe z' de M' est telle que : $z' = \lambda(1 - i)z + \lambda(1 + i) + 1$.
b) Démontrer que T_λ est une similitude directe dont on précisera l'affixe w de centre Ω , le rapport et l'angle. Pour quelles valeurs de λ , T_λ est-elle une rotation ?
c) Exprimer les coordonnées (x', y') de M' en fonction des coordonnées (x, y) de M.
- 3) Le nombre réel λ étant strictement positif, on lui associe le point P $(-\ln\lambda ; \ln\lambda)$. Soit P' le point du plan tel que $P' = T_\lambda(P)$.
a) Déterminer les coordonnées de P' en fonction de λ .
b) Démontrer que, lorsque λ décrit \mathbb{R}_+^* , l'ensemble des points P' est la courbe (\mathcal{C}) d'équation $y = 2(x - 1)\ln(x - 1) + (x - 1)$.

Exercice 2

- 1) Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle K .
a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $K = \mathbb{R}$.
b) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ et $K =]-2 ; 2[$.
c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ et $K =]0 ; +\infty[$.
d) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ et $K =]0 ; +\infty[$.
e) $f(x) = \frac{\tan x}{\cos^2 x}$ et $K =]0 ; \frac{\pi}{2}[$.
- 2) Soit f la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $f(x) = (\sin x)^2(\cos x)^2$.
a) Montrer que $f(x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4x$.
b) En déduire la primitive de f sur \mathbb{R} qui prend la valeur 1 en $\frac{\pi}{4}$.

Problème

Dans ce problème, n est un entier naturel différent de zéro et on considère la famille de fonctions f_n

définies sur $]0 ; +\infty[$ comme suit :
$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0. \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Pour les représentations graphiques, le plan est muni d'un repère orthonormé d'une graphique 2cm, et on note (\mathcal{C}_n) la courbe représentative de la fonction f_n .

Partie A

Dans cette première partie, on se propose d'étudier la fonction f_1 .

- 1) a) Etudier la continuité de f_1 en 0 et son comportement en $+\infty$.
b) Etudier le comportement du rapport $\frac{f_1(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0.
Que peut-on conclure pour la fonction f_1 en 0 et la courbe (\mathcal{E}_1) ?
- 2) a) Justifier la dérivabilité de f_1 sur $]0 ; +\infty[$.
Calculer $f_1'(x)$ puis $f_1''(x)$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[$.
b) Etudier successivement les variations de f_1' et de f_1 et dresser le tableau de variation de f_1 .
- 3) Tracer la courbe (\mathcal{E}_1), son asymptote et la tangente au point 0.

Partie B

La seconde partie est consacrée à l'étude des fonctions f_n lorsque $n \geq 2$.

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0 puis le comportement de f_n en $+\infty$.
- 2) a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $]0 ; +\infty[$.
Démontrer que : $f_n'(x) = x^{n-1}g_n(x)$, où g_n est une fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ que l'on déterminera.
b) Etudier les variations de la fonction g_n et en déduire le signe de $g_n(x)$.
c) Dresser le tableau de variation de f_n .

Partie C

La troisième partie porte sur les courbes (\mathcal{E}_n) lorsque $n \geq 2$.

- 1) Quelle est la tangente à (\mathcal{E}_n) en O, origine du repère ?
- 2) Etudier la position relative de (\mathcal{E}_n) et de (\mathcal{E}_{n+1}) pour $n \geq 2$.
Quelle est la position de (\mathcal{E}_1) par rapport à toutes les courbes (\mathcal{E}_n) ?
- 3) a) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]$.
Que peut-on en conclure pour (\mathcal{E}_2) ?
b) Préciser la position de (\mathcal{E}_2) par rapport à la droite d'équation : $y = x - \frac{1}{2}$.
- 4) Tracer (\mathcal{E}_2) et (\mathcal{E}_3) dans le même repère que (\mathcal{E}_1).

BONNE COMPOSITION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 15

Exercice 1 (6pts)

- 1) z et z' étant des nombres complexes. Montrer que : $(z - z')(z + z')(z + iz')(z - iz') = z^4 - z'^4$. (1pt)
- 2) Soit (E) l'équation : $(z - a)^4 = (z - b)^4$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, où a et b sont des nombres complexes donnés distincts.

En utilisant la première question, résoudre (E) et montrer que ses solutions sont :

$$z_1 = \frac{a+b}{2} ; z_2 = \frac{a+b+i(b-a)}{2} \text{ et } z_3 = \frac{a+b+i(a-b)}{2}. \quad (1,5\text{pt})$$

On appelle A, B, M_1, M_2, M_3 les images respectives de a, b, z_1, z_2, z_3 dans le plan complexe (O, \vec{u}, \vec{v}) .

- 3) Pour cette question seulement, on pose : $a = 2$ et $b = -1 + i$. Représenter les points A, B, M_1, M_2, M_3 dans le plan complexe. (1,25pt)
- 4) On se propose de montrer dans le cas général que les points A, M_2, B, M_3 sont les sommets d'un carré de centre M_1 .
 - a) Montrer que les segments $[AB]$ et $[M_2M_3]$ ont pour milieu M_1 ; que peut-on en déduire sur la nature du quadrilatère AM_2BM_3 ? (0,75pt)
 - b) Montrer que ce quadrilatère a de plus, deux côtés consécutifs de même longueur et perpendiculaires. Conclure. (1,5pt)

Exercice 2 (4,5pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Soit S_1 la similitude plane directe d'écriture complexe $z' = (1 - i)z + 3 - 2i$ et S_2 la similitude plane directe d'écriture complexe $z' = az + b$; $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$.

Déterminer a et b dans chacun des cas suivants :

- a) $S_2 \circ S_1$ est l'homothétie de rapport 2 et de centre O . (1,5pt)
- b) $S_2 \circ S_1$ est la translation de vecteur \vec{u} d'affixe $2+i$. (1,5pt)
- c) $S_2 \circ S_1$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. (1,5pt)

Problème (9,5pts)

A-/ On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x + 1)e^{-x}$.

On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique 4cm).

- 1) a) Etudier le sens de variation de f . (1pt)
 - b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et donner une interprétation graphique du résultat. Déterminer la limite de f en $-\infty$. (0,75pt)
 - c) Dresser le tableau de variation de f . (0,25pt)
 - d) Prouver que l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ admet exactement deux solutions réelles. On notera α et β ces solutions ($\alpha < \beta$). (0,75pt)

Montrer que $\alpha \in]-1 ; -\frac{1}{2}[$. (0,5pt)

Déterminer une valeur approchée de β à 10^{-2} près par défaut en justifiant la méthode utilisée. (0,5pt)

2) Tracer (\mathcal{C}) en faisant apparaître graphiquement tous les résultats obtenus dans la question 1). (1pt)
B-/ Pour tout entier relatif k , on note f_k la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f_k(x) = (x + 1)e^{-kx}$. On note (\mathcal{C}_k) la courbe représentative de f_k dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Lorsque $k = 1$, on retrouve la fonction f étudiée dans la partie A ; c'est-à-dire que dans ce cas : $f_1 = f$ et $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$.

1) Quelle est la nature de la fonction f_0 ? (0,5pt)

Déterminer par calculs les coordonnées des points d'intersection des courbes \mathcal{C}_0 et \mathcal{C}_1 . (1pt)

Vérifier que, pour tout entier relatif k , la courbe (\mathcal{C}_k) passe par ces points. (0,5pt)

2) Etudier, suivant les valeurs de x , le signe de $(x + 1)(e^{-x} - 1)$. (0,75pt)

En déduire les positions relatives de (\mathcal{C}_k) et de (\mathcal{C}_{k+1}). (0,5pt)

3) On suppose que k est non nul.

a) Calculer $\mathcal{C}'_k(x)$ pour tout x réel. (0,5pt)

b) En déduire le sens de variation de la fonction f_k (on distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$). (1pt)

BONNE REFLEXION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 16

Exercice 1 (5pts)

Une partie de loterie consiste à lâcher une bille dans un appareil qui comporte 6 portes de sortie numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la porte de sortie franchie par la bille. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6
$P(X = i)$	$\frac{1}{32}$	a	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	a	$\frac{1}{32}$

où a est un réel.

1) Déterminer la valeur de a .

On suppose dans la suite de l'exercice que $a = \frac{5}{32}$.

- Déterminer et représenter la fonction de répartition de X

La règle du jeu est la suivante : un joueur mise 2F, il reçoit 12F si la bille passe dans les portes 1 ou 6, 2F si elle passe dans les portes 3 ou 4. Les portes 2 et 5 ne rapportent rien.

Le gain d'un joueur est la différence entre ce qu'il reçoit à l'issue de la partie et sa mise.

2) Soit Y la variable aléatoire représentant le gain d'un joueur dans une partie.

a) Quelles sont les valeurs possibles de Y ?

b) Déterminer la loi de probabilité de Y .

c) Le jeu est-il équitable ? (On rappelle qu'un jeu est équitable si l'espérance mathématique du gain est nulle).

3) Un joueur fait 5 parties successives dont les issues sont supposées indépendantes.

Déterminer :

a) La probabilité que le gain total à l'issue des 5 parties soit nul.

b) La probabilité que le joueur reçoive au moins une fois 12F.

Exercice 2 (5pts)

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel non nul par : $U_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$.

1) Calculer U_1 . (0,25pt)

2) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ et tout entier non nul n , $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$. (0,5pt)

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $1 - \frac{1}{n+1} \leq U_n \leq 1$. (0,5pt)

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$. (0,25pt)

On considère la suite (V_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $V_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n} dx$.

3) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $V_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$. (0,75pt)

b) Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, $0 \leq \ln(1+t) \leq t$. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \frac{1}{n+1}. \quad (1,25pt)$$

c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$. (0,25pt)

4) a) Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$, $V_n + nU_n = n$. (0,5pt)

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - U_n) = \ln 2$. (0,5pt)

Problème (10pts)

A-/ Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n défini par $f_n(x) = nx - |x| \ln(x^n)$.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f_n suivant les valeurs de n .

En déduire l'ensemble de définition de la fonction f_k définie par $f_k(x) = 2kx - |x| \ln(x^{2k})$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

b) f_k est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui étudier la dérivabilité en 0 de ce prolongement.

2) Soit g_k la fonction définie par :
$$\begin{cases} g_k(x) = 2kx - |x| \ln(x^{2k}) & \text{si } x \neq 0. \\ g_k(0) = 0 \end{cases}$$

On note (\mathcal{C}_k) la courbe représentative de g_k dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Déterminer les points d'intersection de (\mathcal{C}_k) avec l'axe des abscisses.

En déduire que (\mathcal{C}_k) passe par 3 points fixes dont on donnera les coordonnées.

3) a) Étudier les variations de g_k et dresser son tableau de variation.

b) Tracer (C_1) . (Unité graphique 2cm)

B-/ 1) Soit (D_k) la droite d'équation $y = 2kx$.

Déterminer les points d'intersection de (C_k) et (D_k) .

2) a et b étant 2 réels tels que $-1 < b < 0 < a < 1$, déterminer l'aire $A_1(a)$ du domaine limité par (C_k) , (D_k) et les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$ puis l'aire $A_2(b)$ du domaine limité par (C_k) , (D_k) et les droites d'équation $x = -1$; $x = b$.

3) Calculer $\lim_{a \rightarrow 0} A_1(a)$; $\lim_{b \rightarrow 0} A_2(b)$.

C-/ On note (Γ_1) la courbe de la restriction de g_k à \mathbb{R}_+ et (Γ_2) celle de la restriction de g_k à \mathbb{R}_- .

Soit T l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe $Z' = -e^2 \bar{Z}$.

1) S étant la symétrie orthogonale d'axe (O, \vec{i}) , démontrer que $T = T' \circ S$ où T' est une application du plan dont on précisera les éléments caractéristiques.

2) Montrer que $T(\Gamma_2) = (\Gamma_1)$.

BONNE COMPOSITION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 17

Exercice 1 (7,5pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , unité graphique 4cm. Dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} , i désigne le nombre de module 1, et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On appelle f l'application, qui à tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe : $Z = f(z) = \frac{z - 2 + i}{z + 2i}$.

- 1) Si $z = x + iy$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y . (1pt)
Déterminer et construire :
 - a) L'ensemble E des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un réel. (1pt)
 - b) L'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur. (1pt)
- 2) On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$.
En remarquant que $Z = \frac{z - z_A}{z - z_B}$, retrouver les ensembles E et F par une méthode graphique. (2pts)
- 3) Déterminer et construire l'ensemble G des points M du plan d'affixe z tels que : $|Z| = 1$. (1pt)
- 4) Calculer $|f(z) - 1| \times |z + 2i|$, et déduire que les points M' d'affixe Z , lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre. (1,5pt)

Exercice 2 (8,5pts)

A-/ Soit $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.

- 1) a) Vérifier que $P(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$. (0,5pt)
b) Résoudre l'équation $z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$. (1,5pt)
c) Mettre les solutions sous forme exponentielle. (1pt)
- 2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) on considère les complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $z_3 = 2i$.
 - a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 et montrer qu'ils sont sur un même cercle de centre O . (1,5pt)
 - b) Calculer $z_2 - z_1$ et $z_2 - z_3$ puis montrer que le quadrilatère $OABC$ est un losange. (1,5pt)

B-/ On considère le nombre complexe $z = \frac{(1 + i\sqrt{3})^4}{(1 + i)^3}$.

- a) Mettre z sous forme trigonométrique. (0,75pt)
- b) Mettre z sous forme algébrique. (0,75pt)
- c) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$. (1pt)

Exercice 3 (4pts)

On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 3 + i, z_B = 2i$ et $z_C = 2 - 2i$.

- 1) Placer les points A, B et C dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle. (2pts)
- 2) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer le point D . (1pt)
- 3) Déterminer l'affixe du point E , symétrique de A par rapport au milieu de $[BC]$. (1pt)

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 18

Exercice 1 (4pts)

Soit l'équation $(E_0) : z^2 - 2z + 1 = e^{i2\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$.

1) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation (E_0) . (1pt)

2) Montrer que les solutions de (E_0) peuvent se mettre sous la forme : $z_1 = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$ et

$$z_2 = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}. \quad (1pt)$$

3) Soit $A(2)$; $M_1(1 + e^{i\theta})$ et $M_2(1 - e^{i\theta})$.

a) Montrer que OM_1AM_2 est rectangle. (1pt)

b) Déterminer θ pour que OM_1AM_2 soit un carré. (1pt)

Exercice 2 (7pts)

Dans le plan complexe \mathcal{P} rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 2i$; $z_B = i$; $z_C = -1 + i$ et $z_D = 1 + i$.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice. (Unités graphiques 4cm)

1) Soit f l'application de \mathcal{P} privé du point B dans \mathcal{P} qui au point M d'affixe z , associe le point M'

$$\text{d'affixe } z' = i \left(\frac{z - 2i}{z - i} \right).$$

a) Développer l'expression : $(z + 1 - i)(z - 1 - i)$. (0,5pt)

b) Chercher les points M vérifiant $f(M) = M$ et exprimer leurs affixes sous forme algébrique puis géométrique. (1,5pt)

2) a) Montrer que pour tout $z \neq i$, $|z'| = \frac{AM}{BM}$ et que pour tout z différent de i et de $2i$,

$$\arg(z') = \frac{\pi}{2} + \text{mes}(\widehat{BM, AM}). \quad (1,5pt)$$

b) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M(z) tels que $|z'| = 1$. (1pt)

c) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M(z) tels que $\arg(z') = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). (1pt)

3) a) Démontrer que pour tout z différent de i , $z' - i = \frac{1}{z - i}$. En déduire que $|z' - i| |z - i| = 1$. (1pt)

b) Soit M un point du cercle \mathcal{C} de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$. Prouver que le point M' d'affixe z' appartient à un cercle de centre B dont on déterminera le rayon. (1pt)

Exercice 3 (4pts)

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . L'unité graphique est 2cm.

On considère les points A, B, C, D d'affixes respectives a, b, c, d avec $a = 1$, $b = e^{\frac{i\pi}{3}}$; $c = \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$;

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{i\pi}{2}}.$$

1) a) Donner une forme exponentielle de c et la forme algébrique de d. (1pt)

b) Représenter les points A, B, C, D. (1pt)

- 2) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre O qui transforme A en C . (1pt)
- 3) a) Montrer que les points D , A et C sont alignés. (0,5pt)
b) On note F et G les images respectives de D et C par s .
montrer que les points C , F et G sont alignés. (0,5pt)

Exercice 4 (5pts)

Soit f la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = \frac{3x^2 - 18x + 25}{x^2 - 6x + 8}$ et (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Etudier les variations de la fonction f (ensemble de définition, limites aux bornes de l'ensemble de définition, dérivée, sens de variations et tableau de variations). (2pts)
- 2) Montrer que la droite d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie de (\mathcal{C}_f) . (1pt)
- 3) Déterminer les points d'intersection de (\mathcal{C}_f) avec les axes du repère. (1pt)
- 4) Construire (\mathcal{C}_f) . (1pt)

BONNE REFLEXION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 19

Exercice 1

Soit α un nombre complexe.

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $(1 + i)z^2 - 2i(\alpha + 1)z + (i - 1)(\alpha^2 + 1) = 0$.
- 2) Soient z_1 et z_2 les solutions de cette équation. Trouver entre z_1 et z_2 une relation indépendante de α .
- 3) Caractériser la transformation f du plan complexe qui, à tout point M_1 d'affixe z_1 associe le point M_2 d'affixe z_2 .
- 4) On pose $z_1 = x + iy$ et $z_2 = x' + iy'$.
 - a-/ Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
 - b-/ Quelle est l'image par f de la droite (D) d'équation : $x + 2y - 1 = 0$?

Exercice 2

On considère les équations différentielles suivantes :

(E) : $y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 2(1 - 2x)e^x$; (E') : $y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 0$; dans lesquelles m est un paramètre réel.

- 1) Résoudre, suivant les valeurs de m , l'équation (E').
- 2) Déterminer la valeur de m pour laquelle, la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = x^2e^x$ est une solution de (E).
- 3) Dans cette question, on donne $m = 2$.
 - a-/ Soit φ une fonction au moins deux fois dérivable sur \mathbb{R} .
 - a1-/ Montrer que si φ est une solution de (E) alors $(\varphi - h)$ est une solution de (E').
 - a2-/ Montrer que si $(\varphi - h)$ est une solution de (E') alors φ est une solution de (E).
 - b-/ Déduire de 1), la résolution de (E') ; puis résoudre (E).
 - c-/ Déterminer la fonction f de (E) dont la courbe représentative, dans le plan rapporté à un repère orthonormé passe par le point $\Omega(0 ; -1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.
- 4) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = (x^2 - 2)e^x + e^{3x}$ et U une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto 2(1 - 2x)e^x$.
 - a-/ Sachant que g est une solution de (E), montrer que la fonction G définie sur \mathbb{R} par :

$$G(x) = \frac{1}{3} [U(x) - g'(x) + 4g(x)]$$
 est une primitive de g sur \mathbb{R} .
 - b-/ Déterminer une expression de $U(x)$ de la forme : $U(x) = (ax + b)e^x$ où a et b sont des constantes réelles.
 - c-/ En déduire $G(x)$.

Problème

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2cm.

A-/ Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

- 1) Etudier le sens de variation de g sur $[0 ; +\infty[$ et déterminer les limites de g en $+\infty$.
- 2) a-/ Montrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $[0 ; +\infty[$.
On note α cette solution.
- b-/ Prouver que : $1,14 < \alpha \leq 1,15$.

3) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

B-/ 1) a-/ Montrer que, pour tout x appartenant à $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.

b-/ En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.

2) a-/ Montrer que, pour tout réel positif x , $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.

b-/ En déduire la limite de f en $+\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3) a-/ Etablir $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$.

b-/ En utilisant l'encadrement de α établi dans la question A-/ 2), donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2} .

4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

5) a-/ Etablir que pour tout x appartenant à $[0 ; +\infty[$, $f(x) - x = \frac{(x+1)\varphi(x)}{xe^x + 1}$ avec $\varphi(x) = e^x - xe^x - 1$.

b-/ Etudier le sens de variation de φ sur $[0 ; +\infty[$. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.

c-/ Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

d-/ Tracer (C) et (T).

C-/ 1) Déterminer une primitive F de f sur $[0 ; +\infty[$; on pourra utiliser l'expression de $f(x)$ établie en B-/2)

On note D le domaine du plan limité par la courbe (C), la tangente (T), les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

2) Calculer en cm^2 l'aire A du domaine D .

3) Pour tout entier naturel k , on pose $V_k = \int_k^{k+1} f(x) dx$.

a-/ Calculer V_0 , V_1 et V_2 .

b-/ Démontrer que pour tout entier naturel $k \geq 2$, $f(k+1) \leq V_k \leq f(k)$.

c-/ Déduire la limite de V_k quand k tend vers $+\infty$.

ooo0ooo

Epreuve 20**Exercice 1** (4pts)

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \tan x$.

- 1) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} . (1pt)
- 2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $(f^{-1})'(1)$. (1pt)
- 3) Démontrer que pour tout nombre réel a de l'intervalle $[0; \frac{\pi}{4}]$, on a : $a \leq \tan a \leq 2a$. (1pt)
- 4) Démontrer que pour tous nombres réels a et b de l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}[$; on a :

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}. \quad (1pt)$$

Exercice 2 (5,5pts)

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiqué.

$$1) f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1} ; \quad I =]-\infty ; 1[\quad (0,5pt)$$

$$2) f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} ; \quad I =]-\pi ; 0[\quad (0,5pt)$$

$$3) f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{2}{x}} ; \quad I =]0 ; +\infty[\quad (0,5pt)$$

$$4) f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} ; \quad I =]0 ; +\infty[\quad (0,5pt)$$

$$5) f(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2} ; \quad I =]0 ; +\infty[\quad (0,5pt)$$

$$6) f(x) = \frac{\ln x}{x} ; \quad I =]0 ; +\infty[\quad (0,5pt)$$

$$7) f(x) = \frac{1}{x \ln x} ; \quad I =]0 ; +\infty[\quad (0,5pt)$$

$$8) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} ; \quad I = \mathbb{R} \quad (0,5pt)$$

$$9) f(x) = \cos^4 x \sin^2 x ; \quad I = \mathbb{R} \quad (0,75pt)$$

$$10) f(x) = 2 \sin^5 x \cos^4 x ; \quad I = \mathbb{R} \quad (0,75pt)$$

Problème (10,5pts)**Partie A**

1) Soit la fonction P définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $P(x) = 3x^3 - x - 2$.

a) Factoriser $P(x)$ sachant que 1 est un zéro de $P(x)$. (0,5pt)

b) Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x . (0,5pt)

2) Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x + 1 - 2 \ln(x)$.

a) Déterminer la dérivée g' de g . (0,5pt)

b) En utilisant la question 1) b), donner le sens de variation de g (on ne calculera pas les limites de g en 0 et en $+\infty$). (0,5pt)

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + 1 + \frac{x + \ln(x)}{x^2}$ et (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2cm.

- 1) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. (0,5pt)
- 2) Démontrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln(x)}{x^2} = 0$; en déduire $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. (0,5pt+0,25pt)
- 3) Justifier que les droites (\mathcal{D}) et (Δ) d'équations respectives $x = 0$ et $y = x + 1$ sont asymptotes à la courbe (\mathcal{C}). (0,5pt)
- 4) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}) au point d'abscisse 1. (0,5pt)
- 5) Etudier le sens de variation de la fonction h telle que $h(x) = x + \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.
En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une équation solution α vérifiant $0,56 < \alpha < 0,57$. (1,25pt)
- 6) Etudier la position relative de (\mathcal{C}) et (Δ). (0,75pt)
- 7) a) Etudier le sens de variation de f. (0,75pt)
b) Dresser son tableau de variation. (0,5pt)
c) En déduire l'existence d'un nombre réel unique $\beta \in]0,46, 0,47[$ tel que $f(\beta) = 0$. (0,75pt)
d) Construire (\mathcal{C}) et (Δ) et (T). (1,25pt)
e) Soit (Δ_m) la droite d'équation $y = x + m$ où m est un paramètre réel.
Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre m, le nombre de points d'intersection de (\mathcal{C}) avec (Δ_m). (1pt)

BONNE RÉFLEXION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 21

Exercice 1 (5pts)

On donne l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = (x + 1)e^{-2x}$. (1)

- 1) Résoudre l'équation homogène : $y'' + 4y' + 4y = 0$. (2) (0,75pt)
- 2) On considère $h(x) = p(x) \cdot e^{-2x}$ où p est une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} .
 - a) Démontrer que si h est une solution particulière de l'équation (1) alors p est une fonction polynôme de degré 3 que l'on déterminera. (1pt)
 - b) f étant une solution quelconque de l'équation (1), démontrer que $f - h$ est une solution de l'équation homogène (2). (0,5pt)
 - c) En déduire la solution générale de l'équation (1). (0,75pt)
- 3) Soit f une solution de l'équation (1).
 - a) Vérifier que pour tout réel x , $4f(x) - (x + 1)e^{-2x} = -4f'(x) - f''(x)$. (0,25pt)

Puis déterminer en fonction de f et f' une primitive sur \mathbb{R} de la fonction

$$x \mapsto 4f(x) - (x + 1)e^{-2x}. \quad (0,5pt)$$

- b) Vérifier que la fonction $x \mapsto \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$ est une solution de (1). (0,5pt)

En déduire la valeur de $I = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)e^{-2x} dx$. (0,75pt)

Exercice 2 (4pts)

Le plan complexe \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 2cm. On désigne par A le point d'affixe 2 ; par B le point d'affixe $2i$ et par Ω le point d'affixe $1 + i$. On considère l'application f qui, à tout nombre complexe z différent de 2, associe le nombre complexe $f(z) = \frac{iz + 2}{z - 2}$.

- 1) On pose $z = x + iy$ et $f(z) = X + iY$ avec x, y, X et Y des nombres réels.
 - a) Exprimer X et Y en fonction de x et y . (0,5pt)
 - b) En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit réel et représenter cet ensemble. (0,75pt)
- 2) Soit C l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{-3\pi}{4}$.
 - a) Déterminer l'affixe z_C du point C . (0,5pt)
 - b) Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $\widehat{(O\Omega; OC)}$. En déduire que les points Ω, O, C sont alignés. (0,75pt)
- 3) On pose $z' = f(z)$.
 - a) Justifiez que i n'a pas d'antécédent par f et exprimer pour z' différent de i , z en fonction de z' . (0,5pt)
 - b) Soit M le point d'affixe $z(z \neq 2)$ et M' celui d'affixe z' ($z' \neq i$).
Montrer que $OM = 2 \times \frac{M'D}{M'E}$ où D et E sont les points d'affixes respectives -1 et i . (0,5pt)
 - c) Montrer que, lorsque le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 2 privé du point A , son image M' appartient à une droite fixe que l'on définira graphiquement. (0,5pt)

Problème (11pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . (Unité 3cm)

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan.

- 1) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$. (0,5pt)
b) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a : $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$. (0,5pt)
c) En déduire que la courbe (C) admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation $y = x$. (0,5pt)
d) Etudier la position relative de (C) par rapport à (Δ). (0,5pt)
- 2) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau. (1pt)
- 3) Tracer la droite (Δ) et la courbe (C). (1pt)

Partie B

Pour tout x élément de $[0 ; +\infty[$, on pose $F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t}) dt$. On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

- 1) Soit x un réel strictement positif. En utilisant la question 1 de la partie A, donner une interprétation géométrique de $F(x)$. (0,5pt)
- 2) Etudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. (0,5pt)
- 3) Soit α un réel strictement positif.

a) Montrer que pour tout t appartenant à l'intervalle $[1 ; 1+a]$, on a : $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$. (0,5pt)

b) En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis à la fonction \ln sur $[1 ; 1+a]$, établir que $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$. (0,75pt)

- 4) Soit x un réel strictement positif.

Déduire de la question 3 les relations : $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t} dt$. (0,75pt)

Puis $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x}$. (0,75pt)

- 5) On admet que la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ existe et est un nombre réel noté L .
Montrer que $\frac{1}{2} \ln 2 \leq L \leq \frac{1}{2}$. (0,75pt)

- 6) Pour tout entier naturel n , on pose $U_n = \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-2t}) dt$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq U_n \leq \ln(1 + e^{-2n})$. (1pt)

(On pourra utiliser le sens de variation de la fonction h , définie sur $[0, +\infty[$ par $h(t) = \ln(1 + e^{-2t})$.)

b) Déterminer la limite de la suite (U_n) . (0,5pt)

- 7) Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

a) Exprimer S_n à l'aide de F et n . (0,5pt)

b) La suite (S_n) est-elle convergente ? Si oui donner sa limite. (0,5pt)

BONNE COMPOSITION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 22

Exercice 1

On considère la fonction f de $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ vers \mathbb{R} définie par $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

1) Démontrer que f est dérivable sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ et que : pour tout x de $[0 ; \frac{\pi}{4}]$, $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} + \frac{2}{\cos^2 x}$.

2) Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

3) En déduire une relation entre les intégrales I et J où $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$. Calculer J .

Exercice 2

On considère le nombre complexe a défini par : $a = \frac{1}{2}(1 + i)$.

1) Déterminer le module du nombre complexe $a - 1$.

2) On considère la suite (z_n) définie par : $z_0 = 1$, et pour tout nombre entier n strictement supérieur à 0, $z_n = a^n$.

On désigne par M_n le point d'affixe z_n .

Placer dans le plan complexe les points $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7$ (unité : 5cm).

Pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1, on considère la suite (U_n) définie par :

$$U_n = |z_n - z_{n-1}|. \text{ Vérifier que } U_n = |a|^{n-1} \times |a - 1|.$$

Démontrer que la suite (U_n) de terme général U_n est une suite géométrique dont on précisera le premier terme U_1 et la raison.

3) Calculer la somme $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$.

Problème

A-/ On considère la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} \text{Pour } x \text{ de } \mathbb{R}^*, & f(x) = 2x - |x| - \ln(x^2) \\ & f(0) = 0 \end{cases}$$

1) a) Déterminer $f(x)$ pour tout x de \mathbb{R}^* , puis pour tout x de \mathbb{R}_+^* .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

$$\begin{matrix} x \rightarrow 0 & & x \rightarrow 0 \\ < & & > \end{matrix}$$

La fonction f est-elle continue au point 0 ?

c) f admet-elle une limite lorsque x tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers $-\infty$? (On pourra factoriser x dans l'expression de $f(x)$).

d) Calculer la dérivée f' de f pour tout x de \mathbb{R}_+^* et pour tout x de \mathbb{R}^* .

La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

e) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

2) (\mathcal{C}) est la représentation graphique de la fonction f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) .

a) Calculer les abscisses des points d'intersection de (\mathcal{C}) avec la droite (OI) .

b) Tracer la courbe (\mathcal{C}) en prenant pour unité 4cm sur chaque axe.

B-/ Dans tout ce qui suit on désignera par (\mathcal{C}') l'arc de la courbe (\mathcal{C}) , ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient : $x \in \mathbb{R}_+$ et $y = f(x)$.

(\mathcal{C}''') est l'arc de la courbe (\mathcal{C}) , ensemble des points du P dont les coordonnées vérifient :

$$x \in \mathbb{R}^- \text{ et } y = f(x).$$

1) On considère l'application T du plan dans le plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M'

d'affixe z' égale à $-e^z \bar{z}$, \bar{z} étant le nombre complexe conjugué de z .

a) x, y, X et Y étant des nombres réels tels que : $z = x + iy$ et $z' = X + iY$, déterminer x et y en fonction de X et Y .

b) S désigne la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.

Démontrer que : $T = T' \circ S$, T' étant une application du plan dans le plan dont on précisera les éléments.

c) Démontrer que $T(\mathcal{E}'') = (\mathcal{E}')$.

2) On considère l'application S du plan dans le plan qui à tout point M de coordonnées x et y associe le point M' de coordonnées X et Y vérifiant : $X = -x$ et $Y = -4x + y$.

a) Déterminer l'ensemble des points invariants par l'application S .

Démontrer que lorsque M et M' sont distincts, la droite (MM') conserve une direction fixe.

b) Quelle est la nature de S ?

c) Quel est le transformé par S de (\mathcal{E}') ? de (\mathcal{E}'') ?

C-/ 1) (D) est la droite d'équation : $y = 2x$.

Déterminer les points communs de (\mathcal{E}) et (D)

2) a et b étant deux nombres réels tels que : $-1 < b < 0$ et $0 < a < 1$, calculer par une intégration par parties : $I_1 = \int_a^1 x \ln x dx$ et $I_2 = \int_{-1}^b x \ln(-x) dx$.

3) Déterminer l'aire $\mathcal{A}(a)$ de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient :

$$\begin{cases} a \leq x \leq 1 \\ 2x \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

et déterminer l'aire $\mathcal{A}(b)$ de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient :

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 2x \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

a et b étant les nombres réels précisés au 2).

4) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{A}(a)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{A}(b)$.

$$\begin{matrix} x \rightarrow 0 & x \rightarrow 0 \\ < & > \end{matrix}$$

Comparer les deux résultats.

BONNE REFLEXION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 23

Exercice 1

Soit z un nombre complexe différent de 1. On note par M le point du plan complexe d'affixe z . On pose :

$$Z = \frac{z+i}{z-1}.$$

Détermine l'ensemble :

- 1) E des points M tels que Z soit réel.
- 2) F des points M tels que $|Z| = 1$.
- 3) G des points M tels que $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

A tout point M d'affixe z non nul, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{-1}{z}$.

- 1) Construire les images des points A d'affixe $1+i$ et B d'affixe $2i$.
- 2) On pose : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (x, y, x', y' réels).
 - a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
 - b) En déduire que O, M, M' sont alignés.
- 3) Montrer que $\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z-1)$.
- 4) On note par C et D les points d'affixes respectives 1 et -1 et par Γ^* , le cercle de centre C passant par O et privé de 0 .
On suppose dans cette question que $M \in \Gamma^*$.
 - a) Justifier que $|z-1| = 1$; montrer que $|z'+1| = |z'|$ puis interpréter cette relation.
 - b) En déduire une construction géométrique de M' à partir de M . (On fera une figure.)

Exercice 3

On considère le nombre complexe $z = 1 + \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$.

- 1) Exprimer $1 + \cos \frac{7\pi}{6}$ en fonction de $\cos \frac{7\pi}{12}$ puis $\sin \frac{7\pi}{6}$ en fonction de $\sin \frac{7\pi}{12}$ et $\cos \frac{7\pi}{12}$.
- 2) Déduire de 1) le module et un argument de z .
- 3) Déduire de ce qui précède les parties réelles et imaginaire de z^6 .

Exercice 4

A-/ Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$.

- a) Calculer la limite en 1 de la fonction f après avoir déterminé son ensemble de définition.
- b) En déduire une fonction g , prolongement par continuité de f en 1.

B-/ Calculer les limites suivante :

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x - 1 ; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x} ; \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

BONNE REFLEXION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 24

Exercice 1 (6,5pts)

On considère dans \mathbb{C} , le polynôme : $P(z) = z^4 - (10 + 2i)z^3 + (38 + 14i)z^2 - (66 + 34i)z + 45 + 30i$.

- 1) a) Calculer $(2 - 2i)^2$ et $(1 + 3i)^2$. (0,5pt)
 - b) Démontrer que pour tout complexe z ; $p(z) = [z^2 - (5 + i)z]^2 + (14 + 4i)[z^2 - (5 + i)z] + 45 + 30i$. (0,75pt)
- 2) a) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation : $(E_1) : u^2 + (14 + 4i)u + 45 + 30i = 0$. (0,75pt)
 - b) En déduire les solutions de l'équation : $(E) : P(z) = 0$. (0,75pt)
- 3) Soit A, B, C et D quatre points du plan complexe d'affixes respectives : $z_1 = 3$; $z_2 = 2 + i$; $z_3 = 3 + 2i$ et $z_4 = i \bar{z}_2$.
 - a) Donner l'écriture complexe de la similitude directe f du plan qui laisse invariant le point B et transforme A en C. (0,5pt)
 - b) Donner les éléments caractéristiques de f . (0,75pt)
- 4) a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g , la transformation du plan dont l'écriture complexe est $z' = -2z + 6 + 3i$. (0,5pt)
 - b) En déduire l'écriture complexe, la nature et les éléments caractéristiques de $g \circ f$. (1pt)
- 5) Soit la transformation S du plan dont l'écriture complexe est : $z' = -2iz + 5i$.
 - a) Déterminer l'affixe du point E du plan dont l'image par S est D. (0,5pt)
 - b) Donner la nature du triangle BDE. (0,5pt)

Exercice 2 (3pts)

A-/ Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 2x - 2}{x^3 - 1}$.

- 1) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$. (0,75pt)
- 2) En déduire la primitive F de f sur $] -\infty ; 1[$ telle que $F(-1) = -\ell n_2$. (0,75pt)

B-/ Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle K.

- a) $f(x) = \cos x \sin^5 x$, $K = \mathbb{R}$. (0,5pt)
- b) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$; $K = \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. (0,5pt)
- c) $f(x) = \cos^2 x \sin^2 x$, $K = \mathbb{R}$. (0,5pt)

Problème (10,5pts)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ell nx$.

- 1) Etudier le sens de variation de g. (0,5pt)

Préciser les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition. (0,5pt)

Dresser le tableau de variation de g. (0,5pt)
- 2) Montrer qu'il existe un nombre unique x_0 tel que $g(x_0) = 0$. (0,5pt)

Montrer que $0,65 < x_0 < 0,66$. (0,25pt)
- 3) Préciser le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. (0,5pt)

Partie B

Soit f la fonction définie pour tout réel $x \in]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 - x + \frac{1 + \ln x}{x}$.

On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) ayant comme unité graphique 4cm.

- 1) a) Déterminer la limite de f en O . Interpréter graphiquement le résultat. (0,5pt)
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. (0,25pt)
Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à (\mathcal{C}) . (0,5pt)
Etudier la position relative de la courbe (\mathcal{C}) par rapport à l'asymptote (D) . (0,5pt)
- 2) Calculer $f'(x)$. (0,5pt)
Etudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$. (0,5pt)
- 3) x_0 désigne le réel défini dans la question A – 2.
 - a) Montrer que $\ln(x_0) = -x_0^2$. En déduire que $f(x_0) = 1 - 2x_0 + \frac{1}{x_0}$. (0,5pt)
 - b) Montrer que la fonction h définie par $h(x) = 1 - 2x + \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$. (0,5pt)
 - c) En déduire que $f(x_0) < h(0,65)$. (0,25pt)
 - d) Montrer que $f(x_0) > f(0,65)$. (0,25pt)
 - e) Donner alors un encadrement de $f(x_0)$ à 10^{-2} près. (0,5pt)
- 4) Calculer les coordonnées du point de (\mathcal{C}) où la tangente est parallèle à (D) . (0,5pt)
Donner une équation de cette tangente (T) . (0,5pt)
- 5) Tracer (\mathcal{C}) , (D) et (T) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . (1pt)
- 6) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -x + m$, suivant les valeurs du réel m . Justifier la méthode. (1pt)

BONNE COMPOSITION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 25

Exercice 1

- 1) Résoudre dans \mathbb{R} , les équations suivantes :
a-/ $(x-2)\ln(x-2) = 0$; b-/ $3(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0$; c-/ $(e^x - 2)(e^{-x} + 1) = 0$; d-/ $2e^x - 2e^{-x} - 3 = 0$
- 2) Résoudre dans \mathbb{R} , les inéquations suivantes:
a-/ $\ln(x+2) \leq \ln(x^2-4)$; b-/ $|\ln x| \leq 2$; c-/ $2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$; d-/ $2x < 2^{-x}$
- 3) Résoudre dans \mathbb{R}^2 , les systèmes suivants :
- $$(\Sigma_1) : \begin{cases} x + y = 25 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 12 \end{cases} \quad (\Sigma_2) : \begin{cases} x^2 - y^2 = 700 \\ \ln x - \ln y = 2\ln \frac{4}{3} \end{cases} \quad (\Sigma_3) : \begin{cases} 5e^x - e^y = 19 \\ e^{x+y} = 30 \end{cases} \quad (\Sigma_4) : \begin{cases} e^{2x} - 7e^{y+1} = -10 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Exercice 2

Soit f l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} telle que : $f(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 20$.

- 1) Déterminer les nombres complexes p et q pour que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :
 $f(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + pz + q)$. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $f(z) = 0$.
- 2) Dans le plan complexe \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A, B, C et D dont les affixes sont les solutions de l'équation $f(z) = 0$.
A est le point d'ordonnée négative, B le point d'abscisse négative, C le point de même abscisse que A.
Montrer que ABCD est un carré.
- 3) On considère dans le plan \mathcal{P} les points B_1, C_1 et D_1 ayant respectivement pour affixes : $i, 1+i$ et 1 .
a) Montrer qu'il existe une similitude directe S du plan \mathcal{P} telle que $S(O) = A$ et $S(B_1) = B$.
b) Déterminer les éléments caractéristiques de S et montrer que le quadrilatère $O B_1 C_1 D_1$ a pour image ABCD par S .
c) Quelle est alors la nature de $O B_1 C_1 D_1$?

Problème

Le but de ce problème est d'étudier certaines fonctions f_k de la variable réelle x définies par l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f_k(x) = xe^{-x} + kx$ où k est un réel donné quelconque, et de construire leurs courbes représentatives (\mathcal{C}_k).

A-/ 1) Etude de f_k .

- a) Déterminer selon les valeurs du réel k , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x)$.
Montrer que la droite (\mathcal{D}_k) d'équation $y = kx$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe (\mathcal{C}_k).
Préciser la position de (\mathcal{C}_k) par rapport à (\mathcal{D}_k).
- b) Calculer $f'_k(x)$ et $f''_k(x)$.
Calculer, en fonction du réel k , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''_k(x)$. Donner le sens de variation de f''_k .

2) Donner les tableaux de variations de f_0 et f_1 .

3) Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Pour le dessin, on choisit pour unité 5cm.

- a) Donner les coefficients directeurs des tangentes à l'origine τ_0 et τ_1 respectivement à (\mathcal{C}_0) et (\mathcal{C}_1).
b) Construire les tangentes τ_0 et τ_1 , les asymptotes $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1$ et les courbes (\mathcal{C}_0), (\mathcal{C}_1).

B-/ Le but de cette partie est d'étudier la fonction f_k obtenue pour $k = -\frac{1}{2}$; c'est-à-dire la fonction $f_{-\frac{1}{2}}$ définie

sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f_{-\frac{1}{2}}(x) = xe^{-x} - \frac{1}{2}x$.

- 1) Calculer $f'_{-\frac{1}{2}}(x)$. Montrer que l'équation $(1-x)e^{-x} - \frac{1}{2} = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0; +\infty[$. On note α cette solution (que l'on ne demande pas de calculer).
- 2) Vérifier que $0 \leq \alpha \leq 0,5$.
- 3) Montrer que $f_{-\frac{1}{2}}(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)}$.

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 26

Exercice 1 (4,75pts)

Une urne contient 6 boules vertes et 4 boules jaunes, toutes indiscernables au toucher. On tire en une seule prise 3 boules de l'urne.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes restant dans l'urne après le tirage.
 - a) Déterminer la loi de probabilité de X . (1,5pt)
 - b) Définir la fonction de répartition F de la variable aléatoire X et la représenter graphiquement. (1pt)
 - c) Calculer son espérance mathématique $E(X)$ et son écart – type $\sigma(X)$. (0,5pt+0,75pt+0,25pt)
2. On procède à 5 tirages consécutifs des 3 boules, les boules étant remises dans l'urne après chaque tirage. Quelle est la probabilité de tirer exactement 3 fois des boules jaunes au cours des 5 tirages ? (0,75pt)

Exercice 2 (5,5pts)

1. Pour tout nombre complexe z , on donne $P(z) = z^3 - (5 + 3i)z^2 + (5 + 8i)z - 1 - 5i$.
 - a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $3 + 4i$. (0,5pt)
 - b) Montrer que $P(z)$ admet une racine réelle à déterminer. (0,5pt)
 - c) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $P(z) = 0$. (1pt)
2. On désigne par z_1 la racine réelle, z_2 et z_3 les autres racines de $P(z)$ telles que : $\text{Re}(z_2) < \text{Re}(z_3)$. On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 .
 - a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S de centre M_1 , telle que $S(M_2) = M_3$. (0,5pt)
 - b) Déterminer le rapport et l'angle de cette similitude. (0,5pt)
 - c) Déterminer le point P tel que $S(P) = O$ (O est l'origine du repère). (0,5pt)
3. On considère les points $A(3 ; -1)$ et $B(0 ; 2)$; h l'homothétie de centre A et de rapport $(-\sqrt{2})$ et r la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{3\pi}{4}$.
 - a) Déterminer l'écriture complexe de h , de r et de $r \circ h$. (0,5pt + 0,5pt+0,5pt)
 - b) Caractériser $r \circ h$. (0,5pt)

Problème (9,75pts)

Le problème comporte 2 parties.

Dans tout le problème, le plan P est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

m est un réel quelconque.

On considère la fonction f_m définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par : $f_m(x) = e^{m-x} - m + x - 1$; (\mathcal{E}_m) sa courbe.

- 1) Détermine les limites de f_m aux bornes de son domaine de définition.
- 2) Etudie les variations de f_m suivant m .
- 3) Montre que la droite $(\Delta_m) : x - y - m - 1$ est une asymptote à (\mathcal{E}_m) .
- 4) Montre que : $\forall m \in \mathbb{R}$, il existe un unique point Ω_m où la tangente à (\mathcal{E}_m) est parallèle à l'axe des abscisses.

- 5) Quel est alors l'ensemble (E) décrit par les points Ω_m lorsque m parcourt \mathbb{R} ?
- 6) On choisit $m = 2$.
 - a) Ecris $f_2(x)$.
 - b) Etudie les variations de f_2 .
 - c) Trace (\mathcal{E}_2).
- 7) α désigne un réel supérieur ou égal à 3.
Calcule l'aire \mathcal{A}_α du domaine limité par (\mathcal{E}_2), (Δ_2) et les droites d'équations : $x = 3$ et $x = \alpha$.

Partie B

On considère la fonction g définie par : $g(x) = -x + 2 + 4\mathcal{L}_n\left(\frac{x}{2}\right)$. (Γ) sa courbe.

- 1) Détermine le domaine de définition D de g .
- 2) Calcule les limites de g aux bornes de D.
- 3) Etudie les variations de g .
- 4) Détermine les branches infinies de (Γ).
- 5) Construis (Γ).
- 6) Trouve une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 2. Trace (T).
- 7) On désigne par S la similitude plane directe de centre $A\left(\frac{2}{0}\right)$, de rapport $k = 2\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\theta = \frac{5\pi}{4}$.
 - a) Détermine l'application s de \mathbb{C} dans \mathbb{C} du type $z \mapsto az + b$ associée à S ; $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
(On trouvera les valeurs de a et b).
 - b) Soit $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ un point quelconque de P et $M'\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ son image par S.
Exprime x' et y' en fonction de x et y .
 - c) N est un point quelconque de (\mathcal{E}_2).
Montre que l'image S(N) de N est située sur la courbe (Γ).

BONNE COMPOSITION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 27

Exercice 1

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 2 + 2i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

- 1) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z .
- 2) Ecrire chacun des complexes z_1 , z_2 puis Z sous sa forme trigonométrique.
- 3) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
- 4) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $(\sqrt{6} - \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} + \sqrt{2})\sin x = 2$.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soient les points A, B et C d'affixes respectives i , $i + 1$ et $-1 + i$. Soit f l'application qui, à tout point M du plan différent de A, d'affixe z , associe le point M' du plan d'affixe z' tel que $z' = \frac{iz + 2}{z - i}$.

- 1) a) Déterminer les images B' et C' des points B et C respectifs par f .
b) Justifier que A n'a pas d'antécédent par f .
c) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de i , on a la relation $(z' - i)(z - i) = 1$.
d) Soit D le point d'affixe $1 + 2i$. Placer les points A, B, C et D sur une figure (unité 2cm). Déduire de la question précédente une construction du point D' image du point D par l'application f .
- 2) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.
a) Ecrire x' et y' en fonction de x et y .
b) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' soit un réel.

Problème

On considère la fonction f de la variable réelle x définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} \text{Si } x \in]-\infty ; 0], f(x) = -x + 2 - \frac{1}{x-1} \\ \text{Si } x \in]0 ; +\infty[, f(x) = \frac{-2x^2 + 3x - 3}{x^2 - 1} \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D de f .
- 2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en O. Interpréter géométriquement le résultat.
- 3) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation.
- 4) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x - 2$ est asymptote à (C) en $-\infty$.
b) Préciser les autres asymptotes à (C).
Soit (Δ') l'asymptote horizontale.
c) Soit $h :]-\infty ; 0] \rightarrow \mathbb{R}$ et $k :]0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x-1} \qquad x \mapsto \frac{3x-5}{x^2-1}$$

- Etudier le signe de $h(x)$ et celui de $k(x)$ suivant les valeurs de x .
 - En déduire la position relative de (C) par rapport à (Δ) sur $]-\infty ; 0]$ et par rapport à (Δ') sur $]0 ; +\infty[$
- 5) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en $x_0 = 5/3$ et de chacune des demi-tangentes à (C) en $x_1 = 0$.
- b) Tracer (C) ; (T) ; (Δ) ; (Δ') ainsi que les demi-tangentes en x_1 .
- 6) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du réel m , le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = m$.
- 7) Soit la fonction g définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par : $g(x) = f(-x)$ et (C') sa courbe dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- a) Déterminer l'ensemble de définition de g .
- b) Construire (C') dans le même repère que (C) . Justifier.

BONNE REFLEXION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 28

Exercice 1 (4pts)

Soit le nombre complexe : $u = \frac{ai - 4b}{5 + 3i}$ ($a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$).

- 1) Déterminer a et b sachant que u a pour module 1 et arguments $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). (1pt)
- 2) On donne $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$.
 - a) Calculer $u^{12} + u^{16}$. (0,75pt)
 - b) Démontrer que quels que soient les entiers naturels m et n, respectivement pair et impair, on a : $u^{4m} + u^{4n} = 0$. (0,75pt)
 - c) p et q sont des entiers consécutifs ; résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $(u^{2p})z^2 - (2u^{2q})z - u^{2p} = 0$. (1,5pt)

Exercice 2 (7,5pts)

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$. (0,5pt)
- 2) Soit K, L et M les points d'affixes respectives $z_K = 1 + i$, $z_L = 1 - i$ et $z_M = -i\sqrt{3}$. Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. (Unité graphique 4cm).
On complètera la figure dans les questions suivantes. (1,5pt)
- 3) a) On appelle N le symétrique du point M par rapport au point L. Vérifier que l'affixe z_N du point N est $2 + i(\sqrt{3} - 2)$. (0,75pt)
 - b) La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point M en le point A et le point N en le point C. Déterminer les affixes respectives z_A et z_C des points A et C. (1pt)
 - c) La translation de vecteur \vec{u} d'affixe $2i$ transforme le point M en le point D et le point N en le point B. Déterminer les affixes respectives z_D et z_B des points D et B. (1pt)
- 4) a) Montrer que le point K est le milieu des segments [DB] et [AC]. (1pt)
 - b) Montrer que $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$. (0,75pt)
 - c) En déduire la nature du quadrilatère ABCD. (1pt)

Problème (8,5pts)

On considère le fonction f_1 de la variable réelle x , définie par $f_1(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

- 1) Etudier et représenter graphiquement la fonction f_1 dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (3pts)
- 2) Soit g_1 la restriction de f_1 à l'intervalle $I_1 =]-\infty; -1]$ et g_2 la restriction de f_1 à l'intervalle $I_2 = [3; +\infty[$.
 - a) Montrer que g_1 et g_2 sont bijectives, puis définir leurs bijections réciproques g_1^{-1} et g_2^{-1} . (1,5pt)
 - b) Etudier la dérivabilité de g_1^{-1} et de g_2^{-1} . (0,5pt)
 - c) Construire dans le même repère, les courbes de g_1^{-1} et de g_2^{-1} . (1pt)
- 3) On considère plus généralement, les fonctions f_m telles que $f_m(x) = mx + \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ où $m \in \mathbb{R}$.
Soit (Γ_m) , les courbes des fonctions f_m . Soit d'autre part (\mathcal{E}_m) la courbe d'équation $y^2 + (m^2 - 1)x^2 - 2mxy + 2x + 3 = 0$. Montrer que $(\Gamma_m) \subset (\mathcal{E}_m)$. (Ne tracer ni (Γ_m) , ni (\mathcal{E}_m)). (1pt)
- 4) Montrer que : $xf'_m(x) - f_m(x)$ est une fonction ϕ indépendante de m et en déduire une primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{x+3}{x^2\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$ sur $]3; +\infty[$. (1,5pt)

BONNE COMPOSITION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 29

Exercice 1 (5pts)

1) Déterminer les réels a et b pour que $F : x \mapsto (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $f : x \mapsto (2x + 1)e^{-x}$. (0,5pt)

2) a) Déterminer les réels a, b et c pour que pour tout nombre réel x on ait :

$$\frac{1}{(e^x + 2)^2} = a + \frac{be^x}{e^x + 2} + \frac{ce^x}{(e^x + 2)^2}. \quad (0,75pt)$$

b) Déterminer alors une primitive sur \mathbb{R} , de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{(e^x + 2)^2}$. (0,75pt)

3) Pour tout réel strictement positif α , montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0$. (0,5pt×2)

4) Résoudre dans \mathbb{R} :

a-/ $\ln(x + 3) + \ln(x + 5) = \ln 15$ (0,5pt)

b-/ $3\ln^2 x - 5\ln x + 2 = 0$ (0,5pt)

c-/ $|\ln x| \leq 2$ (0,5pt)

d-/ $\ln \frac{1}{x} \geq \ln x$ (0,5pt)

Exercice 2 (5pts)

Soit φ une fonction définie sur $]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$ par $\varphi(x) = \frac{1}{1 - \sin(2x)}$ et (\mathcal{C}) sa courbe dans le plan muni de repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a-/ Démontrer que φ est dérivable sur $]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$; $\varphi'(x) = \frac{2\cos(2x)}{(1 - \sin(2x))^2}$. (1pt)

b-/ Etudier les variations de φ . (1pt)

2) a-/ Démontrer que φ réalise une bijection de $]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle I que l'on précisera. (0,75pt)

b-/ Déterminer l'ensemble de dérivabilité de φ^{-1} . (0,5pt)

c-/ Calculer : $\varphi(\frac{\pi}{3})$ et $(\varphi^{-1})'[2(2 + \sqrt{3})]$. (0,5pt×2)

3) a-/ Démontrer que pour tout réel a ; $1 - \sin a = 2\sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2})$. (0,25pt)

b-/ Vérifier que : la fonction $\phi : x \mapsto \frac{1}{2 \tan(\frac{\pi}{4} - x)}$ est une primitive de φ sur $]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$. (0,5pt)

Problème (10pts)

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

A-/ Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \ln|x - 2|$ et (\mathcal{C}) sa courbe dans (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Déterminer la fonction dérivée f' et étudier son signe suivant les valeurs de x. (0,25pt)

2) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D (0,75pt)

- 3) Dresser le tableau de variation de f . (0,5pt)
 - 4) Construire (\mathcal{C}). (1pt)
 - 5) Soit (Da) la droite d'équation $y = x + a$, où a est un réel donné.
 - a) Lorsque (Da) et (\mathcal{C}) ont deux points Pa et Qa en commun, on note x_1 et x_2 leurs abscisses respectives.
Montrer que la Somme $x_1 + x_2$ est indépendante de a . (0,5pt)
 - b) I_a désignant le milieu de $[Pa ; Qa]$, déterminer l'ensemble décrit par I_a lorsque a varie dans \mathbb{R} . (0,5pt)
 - c) En utilisant la courbe (\mathcal{C}), déterminer suivant les valeurs du paramètre k , le nombre des solutions réelles de l'équation : $\sin\theta - 1/\sin\theta - 2 = k$ (inconnu θ ; $\theta \in]-\pi \pi]$). (1pt)
- B-/ Soit f_m la fonction de variable réelle x définie par :
- $$f_m = mx - 1/mx - 2/ \quad \text{où } m \text{ désigne un paramètre réel non nul.}$$
- Soit (\mathcal{E}_m) la courbe représentative de f_m dans (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 1) Déterminer la fonction dérivée f'_m de f_m et discuter son signe suivant les valeurs de m . (0,75pt)
 - 2) Préciser les limites aux borne de l'ensemble D_m de f_m . (1,5pt)
 - 3) Dresser les tableaux de variation de f_m suivant les valeurs de m . (1pt)
 - 4) Démontrer que toutes les courbes (\mathcal{E}_m) passent par un même point à préciser. (0,5pt)
 - 5) Par quelle transformation géométrique les courbes (\mathcal{E}_m) et (\mathcal{E}_{-m}) se déduisent-elles l'une de l'autre ? (0,5pt)
 - 6) Dédire des résultats précédents le nombre et le signe des solutions de l'équation :
 $x \in \mathbb{R}, f_m(x) = 0$. (0,5pt)
 - 7) Soit A_m le point de (\mathcal{E}_m) en lequel la tangente à (\mathcal{E}_m) est parallèle à l'axe des abscisses.
Quel est l'ensemble des points A_m lorsque m varie dans \mathbb{R}^* ? (0,25pt)

BON DEVOIR

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 30

Exercice 1 (4pts)

A-/ On considère les deux intégrales $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x dx$ et $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x dx$.

- 1) Calculer $A + B$ et $A - B$. (1pt)
- 2) En déduire les valeurs de A et B . (1pt)

B-/ Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie par : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$.

- 1) A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} , autrement dit, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (2n + 5)I_{n+1} = (2n + 2)I_n$. (0,75pt)
- 2) Calculer I_0 . (0,5pt)
- 3) En déduire I_1, I_2 et I_3 . (0,75pt)

Exercice 2 (4pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère la transformation S qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que $\begin{cases} x' = ax - by + a' \\ y' = bx + ay + b' \end{cases}$ où a, b, a', b' sont des nombres réels.

- 1) Montrer que les affixes des points M et M' sont liées par une relation de la forme $z' = mz + p$ où m et p sont deux nombres complexes que l'on déterminera en fonction de a, b, a' et b' . (1pt)
- 2) Déterminer les quatre réels a, b, a' et b' pour que S soit la translation de vecteur $\vec{A} = -2\vec{u} + \vec{v}$. (1pt)
- 3) Déterminer les quatre réels a, b, a' et b' pour que S soit l'homothétie de centre $A(1; 2)$ et de rapport 3. (1pt)
- 4) Déterminer les quatre réels a, b, a' et b' pour que S soit la rotation de centre $\Omega(0; 2)$ et d'angle de mesure $\frac{3\pi}{4}$. (1pt)

Problème (12pts)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) , l'unité graphique étant égale à 2cm.

- 1) a-/ Déterminer l'ensemble de définition D de f . (0,5pt)
Etudier les limites de f aux bornes de D . Préciser les asymptotes de la courbe (\mathcal{C}) . (1pt)
- b-/ Etudier les variations de f . (0,75pt) Dresser le tableau de variation. (0,5pt)
Déterminer une équation de la tangente (T) à (\mathcal{C}) au point d'abscisse O . (0,5pt)
- c-/ Construire avec soin (T) et la courbe (\mathcal{C}) . (1pt)

2) On se propose de montrer que l'équation $f(x) = x$ admet sur $[0; 1]$ une solution unique.

a-/ Etudier les variations de la fonction dérivée f' sur $[0; 1]$. (0,5pt)

Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$, on a $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$. (0,5pt)

b-/ Etudier les variations de la fonction numérique g définie sur $[0; 1]$ par : $g(x) = f(x) - x$. (0,5pt)

Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0 ; 1]$ une solution unique α . (0,5pt)

Vérifier que $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{e}{3}$. (0,25pt)

3) On se propose de déterminer une valeur approchée de α .

Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a-/ Démontrer par récurrence que : pour tout n de \mathbb{N} , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{e}{3}$. (0,75pt)

b-/ En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :

pour tout n de \mathbb{N} , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha|$. (0,5pt)

En déduire que : pour tout n de \mathbb{N} , $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$. (0,5pt)

c-/ Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ? (0,5pt)

d-/ Déterminer un entier n_0 tel que : si $n \geq n_0$, alors $|u_n - \alpha| \leq 10^{-2}$. (0,5pt)

4) Ne connaissant pas de primitive de la fonction f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on se propose de déterminer un

encadrement de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$.

a-/ Justifier l'existence de I et en donner une interprétation graphique. (0,5pt)

b-/ On pose : $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (2-x)e^x dx$ et $K = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx$. Vérifier que $4I = J + K$. (0,25pt)

c-/ Calculer J . (0,25pt)

d-/ Quelle est image par f du segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$? (0,25pt)

En déduire un encadrement de K par deux intégrales simples que l'on calculera. (0,5pt)

e-/ A l'aide des questions précédentes, écrire un encadrement de l'intégrale I . (0,5pt)

En déduire un encadrement de I , d'amplitude 10^{-2} par des nombres décimaux. (0,5pt)

BONNE COMPOSITION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 31

Exercice 1 (4pts)

Des pièces mécaniques sont fabriquées en grande série sur une chaîne. On estime que 99% des pièces sont bonnes. On effectue un test de qualité sur chaque pièce.

Lorsque la pièce est bonne, le test confirme avec une probabilité de 0,995 et déclare donc qu'elle est mauvaise avec une probabilité de 0,005. Lorsque la pièce est mauvaise, le test le confirme avec une probabilité de 0,990 et déclare donc qu'elle est bonne avec une probabilité de 0,010.

On note :

B : l'événement « la pièce est bonne ».

\bar{B} : l'événement « la pièce est mauvaise ».

T : l'événement « le test indique que la pièce est bonne ».

\bar{T} : l'événement « le test indique que la pièce est mauvaise ».

N.B. : Les résultats des questions seront donnés à 10^{-3} près par défaut.

- Déterminer les probabilités : $P(\bar{B} \cap \bar{T})$ et $P(B \cap \bar{T})$. (0,75pt+0,75pt)
- En déduire $P(\bar{T})$ puis $P(T)$. (0,5pt+0,5pt)
- On décide d'écartier de la vente, toute pièce dont le test indique qu'elle est mauvaise.
 - Déterminer la probabilité pour qu'une pièce écartée de la vente soit bonne (0,75pt)
 - On tire successivement au hasard et avec remise 20 pièces parmi celles écartées de la vente. Calculer la probabilité de tirer au moins une bonne pièce. (0,75pt)

Exercice 2 (4,5pts)

- Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation (E) : $z^2 - (2\sqrt{3} + i)z + 3 + i\sqrt{3} = 0$. (1pt)
- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $\sqrt{3}$ et $\sqrt{3} + i$.
Soit S_1 la similitude directe plane d'écriture complexe : $z' = (1 - i)z + 3 - 2i$.
 - Déterminer les images A' et B' des points A et B par S_1 . (0,5pt)
 - Déterminer les éléments caractéristiques de S_1 . (0,75pt)
- Soit S_2 la similitude directe plane d'écriture complexe : $z' = az + b$; $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$. Déterminer a et b dans chacun des cas suivants :
 - $S_2 \circ S_1$ est l'homothétie de rapport 2 et de centre O. (0,75pt)
 - $S_2 \circ S_1$ est la translation de vecteur \vec{u} d'affixe $2 + i$. (0,75pt)
 - $S_2 \circ S_1$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. (0,75pt)

Problème (10,75pts)

Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . L'unité graphique est 2cm.

Partie 1 : Etude d'une fonction g. (4pts)

Soit g la fonction sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = -x + 1 + x \ln(x)$ et τ sa représentation graphique dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Etudier les limites de g en 0 et en $+\infty$. (0,5pt)

- 2) Etudier les variations de g . (1pt)
 En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x . (0,5pt)
- 3) On note τ la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \ln x$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 Montrer que τ et τ' ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et e et que, pour tout x élément de $[1 ; e]$ on a : $-x + 1 + x(\ln(x) \leq \ln(x))$. (1pt)

N.B. : On ne demande pas de représenter τ et τ' .

- 4) a-/ Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $I = \int_1^e (x-1) \ln x dx$. (0,5pt)

b-/ Soit D le domaine plan défini par : $D = \{M(x ; y) ; 1 \leq x \leq e \text{ et } g(x) \leq y \leq \ln x\}$.

Déterminer, en cm^2 , l'aire de D .

Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de cette aire. (0,5pt)

Partie 2 : Etude d'une fonction f . (2pts)

Soit f la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1} \ln x$.

- 1) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en 1. (0,5pt)
- 2) Déterminer le tableau de variation de f (on pourra remarquer que $f'(x)$ s'écrit en fonction de $g(x)$). (1pt)
- 3) Tracer la courbe représentative de f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . (0,5pt)

Partie 3 : Etude de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$. (4,75pts)

- 1) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution, notée α , et que $3,5 < \alpha < 3,6$. (0,75pt)

- 2) Soit h la fonction sur $]1 ; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \ln(x)$.

a-/ Montrer que α est solution de l'équation $h(x) = x$. (0,25pt)

b-/ Etudier le sens de variation de h . (0,5pt)

c-/ On pose $I = [3 ; 4]$. Montrer que, pour tout x élément de I , on a : $h(x) \in I$ et $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$. (0,75pt)

- 3) On définit la suite (U_n) par : $U_0 = 3$ et pour tout $n \geq 0$, $U_{n+1} = h(U_n)$.

a-/ Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $U_n \in I$. (0,5pt)

b-/ Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_n - \alpha|$. (0,5pt)

c-/ En déduire que pour tout entier $n \geq 0$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$. (0,75pt)

d-/ Calculer la limite de la suite (U_n) . (0,25pt)

e-/ Déterminer un entier naturel p tel que des majorations précédentes, on puisse déduire que U_p a une valeur approchée de α à 10^{-3} près. (0,5pt)

BONNE COMPOSITION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 32

Exercice 1 (7,5pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , (unité graphique 4cm).

Dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} , i désigne le nombre de module 1, et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On appelle f

l'application, qui à tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe : $Z = f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}$.

1) Si $z = x + iy$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y . (1pt)

Déterminer et construire :

a-/ L'ensemble E des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un réel. (1pt)

b-/ L'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur. (1pt)

2) On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - i$ et $z_B = -2i$.

En remarquant que $Z = \frac{z-z_A}{z-z_B}$, retrouver les ensembles E et F par une méthode graphique. (2pts)

3) Déterminer et construire l'ensemble G des points M du plan d'affixe z tels que : $|Z| = 1$. (1pt)

4) Calculer $|f(z) - 1| \times |z + 2i|$, et déduire que les points M' d'affixe Z , lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre. (1,5pt)

Exercice 2 (8,5pts)

A-/ Soit $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.

1) a) Vérifier que $P(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$. (0,5pt)

b) Résoudre l'équation $z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$. (1,5pt)

c) Mettre les solutions sous forme exponentielle. (1pt)

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) on considère les complexes

$z_1 = \sqrt{3} - i$; $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $z_3 = 2i$.

a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 et montrer qu'ils sont sur un même cercle de centre O . (1,5pt)

b) Calculer $z_2 - z_1$ et $z_2 - z_3$ puis montrer que le quadrilatère $OABC$ est un losange. (1,5pt)

B-/ On considère le nombre complexe $z = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^3}$.

a) Mettre z sous forme trigonométrique. (0,75pt)

b) Mettre z sous forme algébrique. (0,75pt)

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$. (1pt)

Exercice 3 (4pts)

Soit $P(z) = z^3 - 2(2+i)z^2 + (5+8i)z - 10i$ et $(E) : z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$.

1) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera. (1pt)

2) Résoudre (E) . On notera z_1 et z_2 les solutions de (E) distincts de z_0 , (z_1 est celle dont la partie imaginaire est négative). (1,5pt)

3) Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et C d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 .

Déterminer les réels β et γ pour que le point A soit le barycentre des points O, B et C affectés des coefficients respectifs 1, β et γ . (1,5pt)

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 33

Exercice 1

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère l'application F qui, au point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' définie par $Z' = t^3Z + t(t+1)$ où t désigne un nombre complexe.

- 1) Déterminer l'ensemble des nombres complexes t pour lesquels F est une translation ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
- 2) Déterminer l'ensemble des nombres complexes t pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
- 3) Caractériser F pour $t = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 2

- 1) On considère la fonction polynôme P définie par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
 - a) Etudier les variations de P.
 - b) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une solution réelle et une seule α et que $\alpha \in]1,6 ; 1,7]$.
En déduire le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.
- 2) Soit D l'ensemble des nombres strictement supérieurs à -1. On considère la fonction f définie sur D par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.
On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (on prendra comme unité 4cm).
 - a) Etudier les variations de f. (Utiliser les résultats du 1.)
 - b) Construire (\mathcal{C}).

Exercice 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

- 1) Pour tout nombre complexe z distinct de 1, vérifier que : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{z^5 - 1}{z - 1}$.
- 2) Résoudre dans \mathbb{C} , $z^5 = 1$.
Représenter les points images des solutions dans le plan complexe.
- 3) En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation (E) : $\left(\frac{i+z}{i-z}\right)^4 + \left(\frac{i+z}{i-z}\right)^3 + \left(\frac{i+z}{i-z}\right)^2 + \left(\frac{i+z}{i-z}\right) + 1 = 0$.
Vérifier que les solutions de (E) sont les réels : $-\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ où $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

Exercice 4

On considère l'équation :

$$(E) : z^3 + 9iz^2 + 2(-11 + 6i)z - 3(12 + 4i) = 0.$$

- 1) Démontrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2 .
- 2) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation (E) (On notera z_3 la troisième solution).
- 3) Démontrer que les points images des solutions de (E) sont alignés. BONNE REFLEXION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 34

Exercice 1 (5pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique 5cm).

On considère les points A et B d'affixes respectives $\sqrt{2}$ et i .

Soit C le point tel que OACB soit un rectangle. On note I, J et K les milieux respectifs des segments [OA] ; [BC] et [AI].

1) On considère la transformation S du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'

$$\text{tel que : } z' = \frac{-i\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i.$$

a-/ Quelle est la nature de S ? Donner ses éléments caractéristiques. (1pt)

b-/ Déterminer les images par S des points O, A, B et C. (1pt)

2) a-/ Calculer une mesure de l'angle $\left(\widehat{\Omega B, \Omega A}\right)$ où Ω est le centre de S. (0,5pt)

En déduire que les points A, B et Ω sont alignés. (0,5pt)

b-/ Démontrer de même que les points I, C et Ω sont alignés. (1pt)

c-/ En déduire une construction de Ω . Placer le sur la figure. (1pt)

Exercice 2 (5pts)

A-/ Soit f une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{(x-1)^2}$.

1) Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} ; f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}$. (0,75pt)

2) En déduire une primitive de f sur $]1 ; +\infty[$. (0,5pt)

3) Déterminer la primitive de f sur $]1 ; +\infty[$ prenant la valeur 8 en 3. (0,5pt)

B-/ 1) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^4 x = \cos^4 x - 2\cos^2 x + 1$. (0,5pt)

2) Soit φ , la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\ell(x) = \cos^2 x \sin^5 x$.

Déduire de la question 1), la primitive de φ qui s'annule en π . (0,5pt)

3) a-/ Ecrire la forme linéarisée de $\cos^5 x$. (1pt)

b-/ En déduire une primitive de la fonction $\psi : x \mapsto \cos^5 x$. (0,75pt)

Problème (10pts)

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère la fonction f définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $f(x) = -2x + \sqrt{x^2 + 1}$ et (\mathcal{C}) sa courbe représentative.

1) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, x - 2\sqrt{x^2 + 1} < 0$. (0,75pt)

2) a-/ Etudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition \mathcal{D}_f . (0,75pt)

b-/ Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$. (0,5pt)

c-/ Dresser le tableau de variation de f après avoir étudié le sens de variation et les limites de faux bornes de \mathcal{D}_f . (1pt)

3) Etudier les branches infinies de (\mathcal{C}) . (1pt)

4) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (\mathcal{C}) avec l'axe des abscisses. (0,5pt)

5) Tracer (\mathcal{C}) ainsi que ses asymptotes. (1pt)

Partie B

- 1) a-/ Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} . (0,5pt)
b-/ Résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$. (0,5pt)
c-/ Calculer $(f^{-1})(1)$. (0,5pt)
d-/ En déduire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}') de f^{-1} au point d'abscisse 1. (0,5pt)
- 2) Tracer (\mathcal{C}') et ses asymptotes dans le même repère que (\mathcal{C}). (1,5pt)

Partie C

On considère la fonction h définie par : $h(x) = 2|x| + \sqrt{x^2 + 1}$.

- 1) a-/ Etudier la parité de h . (0,5pt)
b-/ Comment obtient-on la courbe (\mathcal{C}'') de h à partir de (\mathcal{C}) ? (0,5pt)
- 2) Tracer (\mathcal{C}'') dans le même repère que (\mathcal{C}). (0,5pt)

BONNE COMPOSITION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 35

Exercice 1

On se propose de calculer l'intégrale ; $J = \int_0^1 \frac{x e^x}{(1 + e^x)^3} dx$.

1) Calculer les deux intégrales : $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x} dx$; $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} dx$.

2) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réel t positif ou nul, on ait :

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} \quad (1)$$

3) En posant $t = e^x$ dans l'égalité (1), calculer l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{1}{(1 + e^x)^2} dx$.

4) a-/ A l'aide d'une intégration par parties, exprimer J en fonction de I.

b-/ En déduire la valeur de J. A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de J à 10^{-2} près.

Exercice 2

Une boîte contient 60 boules blanches et 40 boules noires. On effectue dans cette boîte des tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage.

On s'arrêtera à l'obtention d'une boule blanche.

A-/ Dans cette partie, on ira au maximum à 4 tirages.

On appellera X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche. Par convention, X sera égale à 0 si l'on n'obtient pas de boule blanche après les 4 tirages.

1) Calculer la probabilité pour que X soit égal à 0.

2) Calculer la probabilité pour que X soit égal à k, k valant successivement 1, 2, 3 et 4.

B-/ Dans cette partie, on procédera à n tirages au maximum, n étant un entier naturel non nul.

De même, on appellera X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche et X sera nul si l'on n'obtient pas de boule blanche après n tirages.

1) Calculer la probabilité pour que X soit égal à k, k étant un entier naturel variant de 1 à n.

2) On considère la fonction polynôme f telle que $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$.

Soit E(X) l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. Montrer que $E(X) = \frac{3}{5} f\left(\frac{2}{5}\right)$

3) On sait que pour tout réel x différent de 1, on a : $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

a-/ En dérivant les deux termes de l'égalité précédente, en déduire une autre expression de : $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$.

b-/ En déduire que $E(X) = \frac{5}{3} - \left(n + \frac{5}{3}\right) \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

PROBLEME

Partie A

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction numérique f_k définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f_k(x) = k^2 x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln x.$$

On appelle (\mathcal{C}_k) la courbe représentation de f_k dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) où l'unité graphique est 5cm.

- 1) Etudier les variations de f_k et dresser son tableau de variation. (On précisera les limites de f_k aux bornes de l'ensemble de définition).
- 2) Soit M_k le point de (\mathcal{C}_k) correspondant au minimum de f_k . Déterminer dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) une équation cartésienne de l'ensemble (Λ) des points M_k quand k décrit $]0; +\infty[$.
- 3) Tracer sur une même figure les courbes (Λ) et (\mathcal{C}_1) après avoir précisé leur position relative.

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln x$.

- 1) Tracer sur une nouvelle feuille, la courbe représentative (\mathcal{C}) dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) où l'unité graphique est 5cm (On pourra utiliser le A-/ 1)).
- 2) Soit (Γ) le cercle de centre O de rayon 1 et A le point de coordonnées $(0; 1)$. A tout point M de (\mathcal{C}) d'abscisse a , on associe le point H projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. La droite (AH) recoupe (Γ) en K .
 - a-/ Déterminer les coordonnées de K en fonction de a .
 - b-/ Démontrer que la droite (OK) est parallèle à la tangente en M à (\mathcal{C}) .
 - c-/ En déduire un procédé géométrique pour construire la tangente à la courbe (\mathcal{C}) en un point M donné de cette courbe.

Partie C

Dans cette partie, f désigne toujours la fonction définie à la partie B.

- 1) On note λ un réel strictement positif.
 - a-/ A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{\lambda}^1 \ln x dx$, en déduire la valeur de $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) dx$.
 - b-/ Déterminer la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers zéro par valeurs supérieures.
- 2) Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2, on pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n f\left(\frac{p}{n}\right)$.
 - a-/ En utilisant le sens de variation de f sur $]0; 1]$, démontrer que, pour p entier naturel vérifiant $1 \leq p \leq n-1$; on a : $\frac{1}{n} f\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{p}{n}\right)$.
 - b-/ En déduire que : $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$, puis que : $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.
 - c-/ En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

BONNE COMPOSITION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 36

Exercice 1 (7pts)

On pose : $P(z) = z^3 - (i + 2i\cos\alpha)z^2 - (1 + \cos\alpha)^2z + i(1 + \cos^2\alpha)$ où z désigne un nombre complexe, i l'unité imaginaire pur, α un nombre réel tel que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Les trois racines de $P(z)$ sont désignées par a , b et c respectivement. On veut déterminer les racines de $P(z)$ de deux façons différentes.

1^{ère} façon

- 1) Sans calculer a , b et c , calculer $(a + b + c)$; $(ab + ac + bc)$ et abc . (0,5pt×3)
- 2) Sachant que la somme de deux de ces racines est égale à $(2i\cos\alpha)$, utiliser les résultats précédents pour résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $P(z) = 0$. (1,5pt)

2^{ème} façon

- 3) Montrer que $P(z)$ admet une racine imaginaire pure que l'on déterminera. (0,5pt)
- 4) En déduire les autres racines de $P(z)$. (1pt)
- 5) a étant la racine de $P(z)$ dont la partie réelle est positive, donner son module en fonction de α et déterminer le cosinus et le sinus de son argument en fonction de α . (1,5pt)
- 6) Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) ; soit f la similitude directe du plan de centre le point Ω d'affixe c , c étant la racine imaginaire pure de $P(z)$ et qui transforme le point B d'affixe b en A d'affixe a . Donner l'écriture complexe de f . Déduire de cette écriture que f est une rotation du centre Ω . (1pt)

Exercice 2 (4pts)

- 1) a-/ Déterminer le module et un argument du nombre complexe $w = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{4}$. (1pt)
b-/ En déduire ses racines carrées. (1pt)
- 2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante : $z^2 + (\sqrt{3} - 7i)z - 4(3 + i\sqrt{3}) = 0$. (1pt)
- 3) Soit z_1 , la solution imaginaire pure et z_2 , l'autre solution. Montrer que : $\frac{z_2 - 2i}{z_1 - 2i} = w$. (0,5pt)
- 4) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $2i, z_1$ et z_2 . Préciser la nature du triangle ABC en utilisant 1) a-/. (0,5pt)

Exercice 3 (4pts)

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation : $(\sin^2\alpha)z^2 + (\sin 2\alpha)z + 1 + \cos^2\alpha = 0$; $0 < \alpha < \pi$.
On désignera par z_1 et z_2 les solutions obtenues avec $\text{Im}(z_1) > 0$. (1pt)
- 2) Vérifier que $z_1^2 + z_2^2$ est un réel indépendant de α . (1pt)
- 3) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On désigne par M' et M'' les points d'affixes respectives z_1 et z_2 .
a-/ Déterminer α tel que $\begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \\ M'M'' = 2\sqrt{2} \end{cases}$ (1pt)
b-/ α étant le réel obtenu au 3) a-/, montrer que M' et M'' appartiennent à un même cercle de centre O dont on précisera le rayon. (1pt)

Exercice 4 (5pts)

On considère la fonction g définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

- 1) Dresser le tableau des variations de g . (Limites, dérivée et tableau des variations.) (1,5pt)
- 2) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et donner le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R} . (0,5pt×2)
- 3) Justifier que $\alpha \in]2 ; 3[$ et donner une valeur approchée de α à 0,1 près par la méthode de balayage. (0,25pt×2)
- 4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$ par $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$.

a-/ Justifier que f est dérivable en tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$, et on a : $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$. (0,5pt)

b-/ Donner le sens de variations de f . (0,5pt)

c-/ Montrer que $f(\alpha) = 3\alpha$. (0,5pt)

d-/ Dresser le tableau de variations de f . (0,5pt)

BONNE REFLEXION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 37

Exercice 1 (4,5pts)

Soit f la fonction définie de $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ vers \mathbb{R} par : $f(x) = 3 - 4\cos 2x$.

- Démontrer que f réalise une bijection g de $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ vers un intervalle I que l'on précisera. (1pt)
- Démontrer que l'équation $f(x) = \sqrt{3}$ admet une solution unique dans $[\frac{\pi}{2}; \pi]$. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de cette solution. (0,5pt)
- Déterminer l'ensemble de dérivabilité et le sens de variation de g^{-1} . (0,5pt)
- Démontrer les égalités suivantes : $g^{-1}(3 - 2\sqrt{3}) = \frac{11\pi}{12}$; $(g^{-1})'(1) = \frac{-\sqrt{3}}{12}$. (On démontrera la 1^{ère} égalité de deux façons différentes.) (0,5pt)
- Soit x un élément de l'intervalle $] -1 ; 7[$.
 - Montrer que si $g^{-1}(x) = y$ alors $2y \in [\pi ; 2\pi]$ et $\cos 2y = \frac{3-x}{4}$. (0,5pt)
 - Montrer que $4\sin 2y = -\sqrt{-x^2 + 6x + 7}$. (0,5pt)
 - En déduire que : $(g^{-1})'(x) = -\frac{\sqrt{-x^2 + 6x + 7}}{2(-x^2 + 6x + 7)}$. (0,5pt)

Exercice 2 (4,5pts)

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on désigne par f_1 l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par : $f_1(z) = (1 + i)z + 2 - i$.

- Donner la nature et les éléments caractéristiques de f_1 . (1pt)
- Déterminer l'expression analytique de f_1 dans \mathbb{R}^2 . (0,5pt)
- Soit f_2 l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par : $f_2(z) = az + b$ où a et b sont des nombres complexes, a distinct de 0.
 - Trouver a et b pour que $f_1 \circ f_2$ soit l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$. (1pt)
 - Trouver a et b pour que $f_1 \circ f_2$ soit la translation de vecteur $\vec{v}\left(\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}\right)$. (1pt)
 - Trouver a et b pour que $f_1 \circ f_2$ soit la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. (1pt)

Problème (11pts)

Partie A

Résoudre dans \mathbb{R} , les inéquations suivantes :

- $\sqrt{x^2 - 4} + x \leq 0$. (0,5pt)
- $\sqrt{4 - x^2} - x \leq 0$. (0,5pt)

Partie B

On considère la fonction définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $f(x) = x - 1 + \sqrt{|x^2 - 4|}$.

- Justifier que f est définie sur \mathbb{R} . (0,5pt)
- a-/ Montrer que f est continue sur \mathbb{R} . (1pt)

b-/ Ecrire $f(x)$ sans les symboles de valeur absolue. (0,5pt)

3) **Etude de branches infinies.**

a-/ Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe (\mathcal{C}) de f possède une asymptote (Δ) dont on précisera une équation. (0,75pt)

b-/ Montrer que la courbe (\mathcal{C}) possède une deuxième asymptote (D) dont on précisera une équation. (0,75pt)

4) **Etude des variations.**

a-/ Etudier la dérivabilité de f en -2 et en 2 . Donner à chaque fois une interprétation graphique des résultats. (1pt)

b-/ Calculer $f'(x)$ où f est la dérivée de f lorsque f est dérivable.

c-/ En utilisant la partie A, donner le sens de variation de f . (1,5pt)

d-/ Dresser le tableau de variation de f . (0,5pt)

5) **Courbe et compléments.**

a-/ Construire (\mathcal{C}) dans un repère orthonormé direct d'unité 1,5cm. (1,5pt)

b-/ Justifier que la restriction h de f à l'intervalle $[2 ; +\infty[$ est une bijection vers un intervalle J à préciser.

c-/ Construire sur le même graphique la courbe (\mathcal{C}') de h .

BONNE COMPOSITION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 38

Exercice 1 (4pts)

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1) Soit M_1, M_2 et M_3 les points d'affixes respectives $z_1 ; z_2$ et z_3 . Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral direct si et seulement si : $z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$ où $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. (1pt)

(On pourra utiliser une rotation de centre M_2)

2) On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) suivante :

$$z^3 - (1 + a + ia)z^2 + a(1 + i + ia)z - ia^2 = 0 \text{ où } a \text{ désigne un paramètre complexe.}$$

a-/ Vérifier que 1 est une solution de (E) puis calculer les deux autres solutions z' et z'' de (E). (1,5pt)

b-/ Soit A, B et C les points d'affixes respectives 1, z' et z'' .

Déterminer les deux valeurs complexes de a pour lesquelles le triangle ABC est équilatéral.

On exprimera chaque valeur de a sous forme algébrique puis sous forme exponentielle. (1,5pt)

Exercice 2 (4pts)

Soit l'équation (E) : $z \in \mathbb{C} ; z^n = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}, n \in \mathbb{N}^*$.

1) Déterminer les solutions z_k de (E). (1pt)

2) On pose $n = 5$.

Représenter dans le plan complexe \mathcal{S} muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) les points images des solutions z_k de (E). (1pt)

3) On pose $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

a-/ Soit $j = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Exprimer α en fonction de \bar{j} . (0,25pt)

b-/ Montrer que α est une solution de l'équation $z^5 = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}$. (0,25pt)

4) Soit la transformation T de \mathcal{S} dans \mathcal{S} qui au point M de \mathcal{S} d'affixe z associe le point M' de \mathcal{S} d'affixe z' tel que : $z' = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)z + \frac{5 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i$.

a-/ Ecrire la forme algébrique du nombre complexe $w = (1 - i)(2 + \sqrt{3} + 3i)$. (0,25pt)

b-/ Donner la nature de T et préciser ses éléments caractéristiques. (1pt)

Problème (12pts)

On considère la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| & \text{si } x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\\ f(x) = x^2 e^{-x} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

Partie A

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f . Calculer $f(-2)$ et $f(3)$. (1pt)
- 2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. (1pt)
- 3) Calculer la dérivée f' de f . (1pt)
- 4) Etudier le sens de variation de f .
- 5) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition puis dresser le tableau de variation de f . (1,25pt)
- 6) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre $-1,6$ et $-1,5$.
- 7) a-/ Justifier que la droite (D) : $y = x$ est asymptote à (\mathcal{C}) en $-\infty$. (0,5pt)
b-/ Etudier la position relative de (\mathcal{C}) par rapport à (D) sur $] -\infty ; -1[$ et sur $] -1 ; 0[$. (0,5pt)
- 8) Construire la courbe (\mathcal{C}), ses asymptote et ses demi-tangentes à l'origine. (1,25pt)

Partie B

Soit g la restriction de f à $[0 ; 2]$.

- 1) Montrer que g définit une bijection de $[0 ; 2]$ sur un intervalle J à préciser. (0,5pt)
- 2) On note g^{-1} la bijection réciproque de g .
 - a-/ Résoudre l'équation : $g^{-1}(x) = 1$. (0,5pt)
 - b-/ Calculer $(g^{-1})'(\frac{1}{e})$. (0,5pt)
- 3) On appelle (\mathcal{C}') la courbe représentative de g^{-1} .
Tracer (\mathcal{C}') en utilisant la courbe (\mathcal{C}) et une transformation à préciser. (On placera sur la courbe (\mathcal{C}') le point d'ordonnée 1 et la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{e}$). (1pt)

Partie C

λ est un réel strictement positif.

On pose $I(\lambda) = \int_0^\lambda f(x)dx$.

- 1) a-/ Interpréter graphiquement $I(\lambda)$. (0,5pt)
b-/ Détermine r les nombres réels a , b et c pour que la fonction $F : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$. Calculer alors $I(\lambda)$. (1pt)
- 2) Calculer la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$. (0,5pt)
- 3) On pose $\lambda = 2$.
 - a-/ Calculer $I(2)$. (0,5pt)
 - b-/ En déduire la valeur en cm^2 de l'aire du domaine du plan limité par (\mathcal{C}') et les droites d'équations $y = 0$; $x = 0$ et $x = \frac{4}{e^2}$. (0,5pt)

BONNE COMPOSITION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 39

Exercice

On considère les intégrales définies par : $I_n = \int_0^{\pi/3} \frac{(\sin)^n}{\cos x} dx$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_0 = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x} dx$.

1-/ a) Justifier l'existence de (I_n) et calculer $\int_0^{\pi/3} (\sin x)^n \cos x dx$.

b) En déduire $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n .

2-/ Calculer I_1 . En déduire I_3 ; I_5 .

3-/ a) Soit f l'application qui à $x \in [0 ; \pi/3]$ associe $f(x) = I_n \left[\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$.

Montrer que f est une primitive de g définie sur $[0 ; \pi/3]$ par $g(x) = \frac{1}{\cos x}$.

b) En déduire I_0 puis I_2 et I_4 .

Problème

Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Pour tout nombre réel m , on définit la fonction f_m par : $f_m(x) = \ln \left| \frac{mx+1}{x+m} \right|$.

On désigne par (\mathcal{E}_m) la courbe représentative de f_m .

1-/ Etudier f_m et tracer (\mathcal{E}_m) dans les cas suivants : $m = 0$; $m = -1$ et $m = 1$.

Dans la suite, on suppose que : $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 0 ; 1\}$.

2-/ a) Déterminer les ensembles de définition, de continuité et de dérivabilité de f_m .

On désigne par D_m l'ensemble de définition de f_m .

b) Démontrer que les courbes (\mathcal{E}_m) passent par deux points fixes.

3-/ a) Démontrer que $D_m = D_{\frac{1}{m}}$ et que pour tout élément x de D_m , on a $f_{\frac{1}{m}}(x) = -f_m(x)$.

En déduire la position relative de (\mathcal{E}_m) et $(\mathcal{E}_{\frac{1}{m}})$.

b) Démontre que : * $(x \in D_{-m}) \Leftrightarrow (-x \in D_m)$;

* $\forall x \in D_{-m}, f_{-m}(x) = f_m(-x)$.

En déduire la position relative de (\mathcal{E}_m) et (\mathcal{E}_{-m}) .

c) Déduire des questions précédentes qu'il suffit d'étudier f_m et de tracer (\mathcal{E}_m) pour $m > 1$ pour obtenir toutes les courbes (\mathcal{E}_m) .

4-/ On suppose dans cette questions que : $m > 1$.

a) Etudier f_m et dresser son tableau de variation.

b) En déduire le tracé de (\mathcal{E}_2) , (\mathcal{E}_1) et $(\mathcal{E}_{\frac{1}{2}})$.

Soit Ω le point d'intersection de (\mathcal{E}_2) et de son asymptote parallèle à (OI) .

Démontrer que Ω est un centre de symétrie de (\mathcal{E}_2) .

c) Soit g la restriction de f_2 à $]-2 ; -\frac{1}{2}[$.

Démontrer que g réalise une bijection de $]-2 ; -\frac{1}{2}[$ vers \mathbb{R} et construire sur un autre graphique les courbes représentatives de g et de g^{-1} .

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 40

Exercice

Un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 a été pipé de telle sorte que les six faces ne sont pas équiprobables. On note P_n , $1 \leq n \leq 6$, la probabilité d'obtenir le chiffre n lors d'un lancer de dé. Les nombres P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6 dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique et que $P_1 \times P_4 = (P_2)^2$.

- 1) Calculer la probabilité d'apparition de chaque numéro.
- 2) On lance ce dé une fois et on considère les événements suivants :
 - A : « Le nombre obtenu est pair. »
 - B : « Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3. »
 - a-/ Calculer la probabilité de chacun de ces événements.
 - b-/ Calculer la probabilité pour que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.
 - c-/ Les événements A et B sont-ils indépendants ?
- 3) On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :
 - D'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires.
 - D'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.

Le joueur lance le dé :

- S'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1 .
- S'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2 .

On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche, on note G cet événement.

- a-/ Calculer la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne U_1 et en déduire la probabilité de l'événement $G \cap A$.
- b-/ Déterminer ensuite la probabilité de l'événement G.
- c-/ Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

Problème

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right), \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (c) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique : 5cm)

Partie A

Soit la fonction numérique g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1}$.

- 1) a-/ Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on a : $g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2}$.
 b-/ Etudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x .
- 2) Déterminer la limite aux bornes de l'ensemble de définition de g .
- 3) a-/ Dresser le tableau des variations de g .
 b-/ En déduire que l'équation : $g(x) = 0$, admet une solution unique α et que : $0,5 < \alpha < 0,6$.
- 4) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

- 5) a-/ Démontrer que, pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = g(x)$.
b-/ En déduire le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.
- 6) On pose $k(x) = xf(x)$ pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$.
a-/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$ (on pourra poser $h = \frac{1}{x^2}$).
b-/ En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- 7) a-/ Démontrer que f est continue à droite en 0. (On pourra écrire $x \ln(1 + \frac{1}{x^2}) = x(\ln(x^2 + 1) - 2x \ln x)$.
b-/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
- 8) a-/ Dresser le tableau des variations de $f(x)$.
b-/ Donner l'allure de la courbe (C) (on prendra $f(\alpha) = 0,805$).
- 9) Soit λ un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0 ; 1[$.
a-/ En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale : $\int_{\lambda}^1 f(x) dx$.
b-/ Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = \lambda$ et $x = 1$.
c-/ Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ > 0}} A(\lambda)$.

BONNE REFLEXION

SUPER PROF TOGO	PREPA BAC 2024
MATHEMATIQUE TLE D	Durée : 4h / Coeff. : 3

Epreuve 41

Exercice 1

A-/

Soit dans \mathbb{C} l'équation : (E) : $Z^3 - (4 + i)Z^2 + (7 + i)Z - 4 = 0$.

1.a) Montrer que (E) admet une solution réelle Z_1 .

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) ; on notera Z_2 et Z_3 les solutions non réelles telles que

$$|Z_2| > |Z_3| .$$

2. Soit A et B les points d'affixes respectives Z_2 et Z_3 .

a) Calculer Z_3^{13} .

b) Ecrire sous forme trigonométrique $\frac{Z_2}{Z_3}$ et en déduire la nature du triangle OAB.

B-/

A tout nombre réel $z \neq 1 - i$, on associe le nombre complexe Z tel que $Z = \frac{z - 2 - 2i}{z - 1 + i}$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

a) $|Z| = 1$; $|Z| = 2$.

b) Z est un nombre réel strictement positif.

c) Z est un nombre imaginaire pur.

Exercice 2

x et y sont des réels.

On donne le point M du plan complexe d'affixe $z = x + iy$ tel que

$$(2 + 3i)z + (-2 + 3i)\bar{z} - 12i = 0 \quad (1)$$

1/ Montrer que l'ensemble des points M est une droite (D) ; déterminer (D) par un point et un vecteur directeur. Représenter cette droite dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, l'unité graphique étant 1 cm.

2/ Montrer qu'il existe un seul réel z_0 et un seul imaginaire pur z_1 qui vérifient la relation (1). Calculer z_0 et z_1 .

3/ Soit A et B les points du plan complexe d'affixes respectives $-\frac{4}{3}i$ et $4 + \frac{4}{3}i$.

Montrer que la droite (D) est médiatrice du segment [AB].

4/ Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie la relation :

$$\left| -\frac{4}{3}i - z \right| = \left| 4 + \frac{4}{3}i - z \right| .$$

5/ Déterminer et représenter sur le graphique précédent l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $\arg\left(\frac{-4i - 3z}{12 + 4i - 3z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

TSVP

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = |x - 1| + \frac{2}{x + 1}.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1.a) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$.
- b) Déterminer les équations des demi-tangentes à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$.
2. Etudier les variations de f et donner son tableau de variation.
3. Démontrer que (C) possède trois asymptotes dont on déterminera les équations.
4. Construire (C) (unité graphique : 2cm).

Super Prof Togo