PROBLÈME 1

PARTIE A

1. $D_f = \mathbb{R}$

2.

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{f(x)} = +\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$

b. $f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \frac{x^2+1-x^2}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$

$$\boxed{\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{x^2+1}+x}}$$

On en déduit que :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x)} = \mathbf{0}}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$

(Γ) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

3.

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}+x$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{(\sqrt{x^2+1}-x)}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} (\boldsymbol{f(x)} + \mathbf{2}\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}}$$

b. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > |x|$

Or $|x| \geq x, \forall\, x \in \mathbb{R}$

D'où $\forall\, x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} > x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0$

$\Leftrightarrow f(x) > 0$

$$\boxed{\textbf{En conclusion : } \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f(x)} > 0}$$

$f(x) + 2x = \sqrt{x^2+1} + x$

$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{f(x)}$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, (\boldsymbol{f(x)} + \mathbf{2}\boldsymbol{x}) > 0}$$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+2x) = 0.$

Alors (Γ) admet une asymptote oblique d'équation $y = -2x$ au voisinage de $-\infty$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}, (f(x)+2x) > 0$.

Alors (Γ) est au dessus de son asymptote oblique.

4.

a. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

$= \frac{-(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{f'(x)} = \frac{-\boldsymbol{f(x)}}{\sqrt{x^2+1}}}$$

b. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} > 0$.

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-f(x)$.

Par conséquent : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $\mathbb{R}$, f est strictement décroissante

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$+\infty$	0

c. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur cet ensemble ; de plus f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I =]0; +\infty[$

Soit $y \in I$,

$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - x = y$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = y + x$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = (y+x)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = y^2 + 2xy + x^2$

$\Leftrightarrow 1 - y^2 = 2xy$

$\Leftrightarrow\ x = \frac{1-y^2}{2y} = u^{-1}(y)$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall \boldsymbol{x} \in \left]\mathbf{0};\ +\infty\right[,\ \boldsymbol{f^{-1}(x)} = \frac{\mathbf{1-x^2}}{\mathbf{2x}}}$$

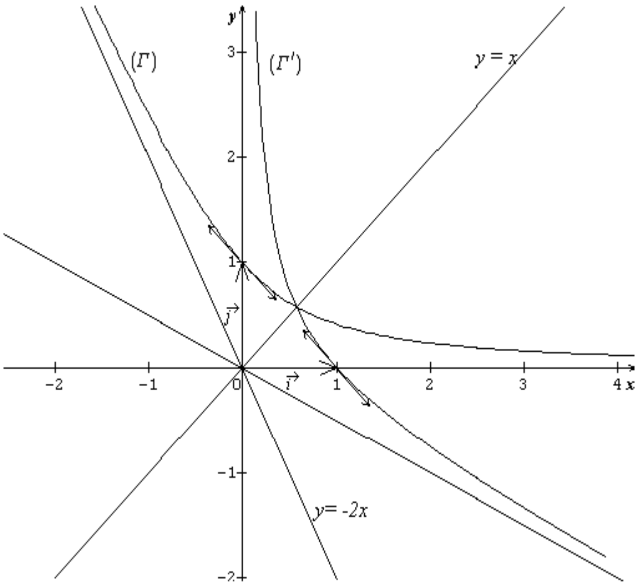
5. $(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f'(0) = 1$ et $f(0) = 1$

$$\boxed{(\boldsymbol{T}): \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \mathbf{1}}$$

6. Voir graphique

7. Pour la construction de (Γ') on remarquera que (Γ') et (Γ) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



PARTIE B

1. $f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x^2 + 1 = 4x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

On conclut donc que :

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ est l'unique solution de l'équation $\boldsymbol{f(x) = x}$

2. f étant décroissante,

$\forall\, x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right], f\left(\frac{3}{4}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{4}$

(Car $\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \simeq 0{,}61 \leq \frac{3}{4}$)

$$\boxed{\textbf{Donc } \forall\, \boldsymbol{x} \in \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}; \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right], \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \leq \boldsymbol{f(x)} \leq \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}}$$

$f'(x) = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

$\forall\, x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right],\ \frac{1}{4} \leq x^2 \leq \frac{9}{16}$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4} \leq x^2 + 1 \leq \frac{25}{16}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{2} \leq \sqrt{x^2+1} \leq \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{4}{5} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{3}{2\sqrt{5}}$

(Car $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{4}$)

$\Leftrightarrow -\frac{3}{2\sqrt{5}} \leq f'(x) \leq -\frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq |f'(x)| \leq \frac{3}{2\sqrt{5}} \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\boxed{\textbf{Donc } \forall\, \boldsymbol{x} \in \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}; \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right], |\boldsymbol{f'(x)}| \leq \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}}}$$

3.

a. Par définition, $U_0 = \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$

et montrons que $U_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$

En effet :

$U_n \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right] \Longrightarrow f(U_n) \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$

Car d'après 2.a,

$\forall\, x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right], \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{4}$

Or $f(U_n) = U_{n+1}$

D'où $U_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$ si $U_n \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$

On conclut donc que :
$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{U_n} \in \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}; \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right]}$$

b. $\frac{\sqrt{3}}{3} \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$, $U_n \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$ et

$\forall\, x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right], |f'(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a :

$\left|f(U_n) - f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}\left|U_n - \frac{\sqrt{3}}{3}\right|$

Or $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

D'où $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$,
$$\boxed{\left|\boldsymbol{U_{n+1}} - \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}\right| \leq \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}}\left|\boldsymbol{U_n} - \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}\right|}$$

c. En partant de l'inégalité précédente, on a :

$n = 0 \Longrightarrow \left|U_1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}\left|U_0 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right|$

$n = 1 \Longrightarrow \left|U_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}\left|U_1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right|$

$n = 3 \Longrightarrow \left|U_3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}\left|U_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right|$

$\vdots$

$n = n - 1 \Longrightarrow \left|U_n - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}\left|U_{n-1} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right|$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.
On obtient après simplification :

$\left|U_n - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \left|U_0 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right|$

$\left|U_0 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| \simeq 0{,}07 \leq 1$

$\Rightarrow \left|U_n - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \left|U_0 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n \times 1$

On en déduit que :
$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \left|\boldsymbol{U_n} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\boldsymbol{n}}$

d. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$

On en déduit que la suite $(\boldsymbol{U_n})$ converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} \boldsymbol{U_n} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

PROBLEME 2

$\begin{cases} f(x) = x\ln x - x + 1 \;\; si\; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

$D_f = [0; +\infty[$

PARTIE A

1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x - x + 1$

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \boldsymbol{f(x)} = \mathbf{1}}$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (-x + 1) = 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{f(0)}$

Alors f est continue en 0

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} (\ln x - 1) = -\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\boldsymbol{f(x) - f(0)}}{\boldsymbol{x - 0}} = -\infty}$

Alors f n'est pas dérivable en 0

<u>Interprétation graphique</u>

Au point $(0; 1)$ la courbe $(\mathcal{C})$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas

2. $\boldsymbol{f'(x) = \ln x}$

$\forall\, x \in]0; 1[, f'(x) < 0$

$\forall\, x \in]1; +\infty[, f'(x) > 0$

On en déduit que :
Sur $]0; 1[$, f est décroissante
Sur $]1; +\infty[, f$ est croissante

<u>Tableau de variations de f</u>

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\ln x - 1 + \frac{1}{x}\right)$

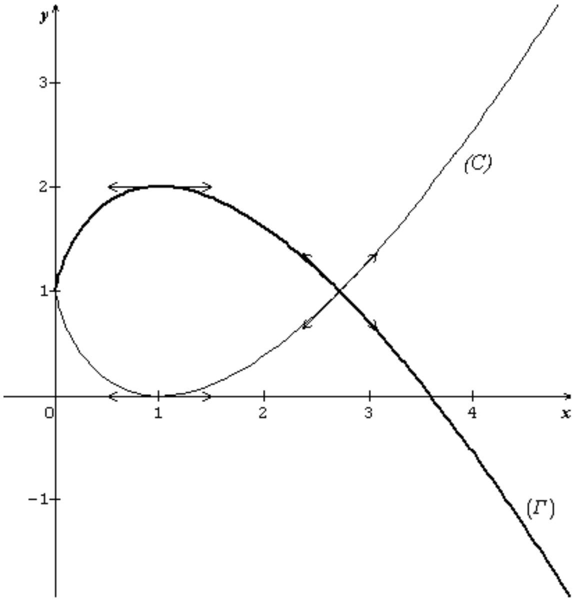
$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x)} = +\infty}$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$

3. $(T): y = f'(e)(x - e) + f(e)$

$\boxed{(\boldsymbol{T}): \boldsymbol{y = x + 1 - e}}$

4. Tracer de (T) et $(\mathcal{C})$



PARTIE B

$g(x) = 2 - f(x)$

1. $f(x) - g(x) = 2x(\ln x - 1)$

$\forall\, x \in [0;\ +\infty[, 2x \geq 0$ alors le signe dépend de celui de $(\ln x - 1)$

$\ln x - 1 > 0 \Rightarrow x > e$

$\forall\, x \in [0;\ e[, f(x) - g(x) \leq 0$

$\forall\, x \in [e;\ +\infty[, f(x) - g(x) \geq 0$

On en déduit que :

Sur $[0;\ e[$, $(\mathcal{C})$ est en dessous de (Γ)
Sur $[e; +\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au dessus de (Γ)

2. $g(x) = -f(x) + 2$

Soit $(\mathcal{C}')$ la courbe symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'axe des abscisses ; la courbe (Γ) est l'image de $(\mathcal{C}')$ par la translation du vecteur $2\vec{j}$

(voir la figure)

3. $\mathcal{A}(\lambda) = ua \times \int_\lambda^e \big(g(x) - f(x)\big)dx$

$\int_\lambda^e \big(g(x) - f(x)\big)dx$

$= \int_\lambda^e 2x(1 - \ln x)dx$

<u>**Intégration par parties**</u>

$$\begin{cases} u(x) = 1 - \ln x \\ v'(x) = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = -\dfrac{1}{x} \\ v(x) = x^2 \end{cases}$$

$\int_\lambda^e \big(g(x) - f(x)\big)dx$

$= \left[x^{2(1-\ln x)}\right]_\lambda^e + \int_\lambda^e x dx$

$= \left[\frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x\right]_\lambda^e$

$\int_\lambda^e \big(g(x) - f(x)\big) = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}\lambda^2 + \lambda^2 \ln \lambda$

$ua = 4cm^2$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda) = (2e^2 - 6\lambda^2 + 4\lambda^2 \ln \lambda)\ cm^2}}$$

4. $\lim\limits_{\lambda \to 0} \mathcal{A}(\lambda) = 2e^2$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda^2 = \mathbf{0} \\ \lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda^2 \ln \lambda = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A} = \lim_{\lambda \to 0} \mathcal{A}(\lambda) = 2e^2}}$$

<u>**Interprétation graphique**</u>

$\mathcal{A}$ représente l'aire en cm² du domaine plan délimité par les courbes $(\mathcal{C})$ et (Γ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e$

PARTIE C

1. $\boldsymbol{g'(x) = -f'(x)}$

D'après PARTIE A.2

$\forall\, x \in]0; 1[, g'(x) > 0$

$\forall\, x \in]1; +\infty[, g'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]0; 1[$, g est croissante

Sur $]1; +\infty[, g$ est décroissante

<u>**Tableau de variation de g**</u>

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	↗	2	↘	$-\infty$

Sur $[0; 1], g > 0$

(Car $\forall\, x \in [0; 1], g(x) \in [1; 2]$)

Sur $]1;\ +\infty[, g$ est continue car dérivable et est strictement décroissante. Alors g réalise une bijection de $]1;\ +\infty[$ sur $]-\infty;\ 2[$ et $0 \in]-\infty;\ 2[$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et $\alpha \in]1;\ +\infty[$

2.

a. $\begin{cases} g(3) = 0{,}70 > 0 \\ g(4) = -0{,}54 < 0 \end{cases}$

On a : $\boldsymbol{g(3) \times g(4) < 0}$
Alors $\boldsymbol{\alpha \in I = [3; 4]}$

b. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -x\ln x + x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 1 + \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow x = e^{1+\frac{1}{x}}$

$\boldsymbol{g(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1+\frac{1}{x}} = x}$

Déduction

On sait que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur $[3;4]$.
On en déduit que α est l'unique solution de l'équation $e^{1+\frac{1}{x}} = x$ sur $[3;4]$

3. $\Phi(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$; $D_\Phi = I = [3;4]$

a. $\boldsymbol{\Phi'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1+\frac{1}{x}}} < 0 \ \forall x \in [\boldsymbol{3};\boldsymbol{4}]$

On en déduit que Φ est décroissante

x	3	4
$\Phi'(x)$	$-$	
$\Phi(x)$	3,79 ↘	3,49

b. D'après le tableau de variation de Φ, on a :
$\forall x \in [3;4], 3{,}49 \leq \Phi(x) \leq 3{,}79$
Or $[3{,}49\,;3{,}79] \subset [3;4]$

D'où $\boldsymbol{\forall x \in [3;4], \Phi(x) \in [3;4]}$

c. $\forall x \in [3;4], 9 \leq x^2 \leq 16$

$\Leftrightarrow \frac{1}{16} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{9}$ et $3 \leq \Phi(x) \leq 4$

$\Leftrightarrow \frac{3}{16} \leq \frac{1}{x^2}e^{1+\frac{1}{x}} \leq \frac{4}{9}$

$\Leftrightarrow -\frac{4}{9} \leq \Phi'(x) \leq -\frac{3}{16}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{16} \leq |\Phi'(x)| \leq \frac{4}{9}$

On conclut que :
$\boldsymbol{\forall x \in [3;4], |\Phi'(x)| \leq \frac{4}{9}}$

4. $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \Phi(U_n) \end{cases}$

a. $U_0 = 3 \in [3;4]$
$\forall n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \in [3;4]$ et montrons que $U_{n+1} \in [3;4]$
$U_n \in [3;4] \Longrightarrow \Phi(U_n) \in [3;4]$
Car d'après 3b),
$\forall x \in [3;4], \Phi(x) \in [3;4]$
Or par définition, $U_{n+1} = \Phi(U_n)$
D'où $U_{n+1} \in [3;4]$ si $U_n \in [3;4]$

On conclut donc que :
$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [3;4]}$

b. $\alpha \in [3;\ 4]$, $U_n \in [3;\ 4]$ et
$\forall x \in [3;\ 4], |\Phi'(x)| \leq \frac{4}{9}$
Donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a :
$|\Phi(U_n) - \Phi(\alpha)| \leq \frac{4}{9}|U_n - \alpha|$
Or $\Phi(U_n) = U_{n+1}$ et $\Phi(\alpha) = \alpha$ d'où
$\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|U_n - \alpha|$

Déduction

En partant de l'inégalité précédente, on a :

$n = 0 \Longrightarrow \quad |U_1 - \alpha| \leq \frac{4}{9}|U_0 - \alpha|$

$n = 1 \Longrightarrow \quad |U_2 - \alpha| \leq \frac{4}{9}|U_1 - \alpha|$

$n = 3 \Longrightarrow \quad |U_3 - \alpha| \leq \frac{4}{9}|U_2 - \alpha|$

$\vdots$

$n = n - 1 \Longrightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{4}{9}|U_{n-1} - \alpha|$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités. On obtient après simplification :

$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |U_0 - \alpha|$

$|U_0 - \alpha| = |3 - \alpha|$

$3 \leq \alpha \leq 4 \Longrightarrow -1 \leq 3 - \alpha \leq 0$

$\Longrightarrow |U_0 - \alpha| \leq 1$

$\Longrightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n \times 1$

On en déduit que :
$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n}$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{4}{9} < 1$

On en déduit que la suite (U_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$

d. $\left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 10^{-2} \Longrightarrow |U_n - \alpha| \leq 10^{-2}$

Or $\left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 10^{-2} \Leftrightarrow -n\ln\frac{9}{4} \leq -2\ln 10$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 10}{\ln 3 - \ln 2}$

$\Leftrightarrow n \geq 5{,}67$

Donc $|U_n - \alpha| \leq 10^{-2}, \forall n \geq 6$

Le plus petit entier cherché est 6

PROBLEME 3

$f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$; $D_f = [0; +\infty[$

PARTIE A

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} \times e^{-x} = +\infty$ car

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \\ e^0 = 1 \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty}$$

Alors f n'est pas dérivable en 0

Conclusion

La courbe $(\mathcal{C})$ admet à l'origine O du repère une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

2. $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-x} - \sqrt{x} \cdot e^{-x}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot e^{-x}}{2x} - \frac{2x\sqrt{x} \cdot e^{-x}}{2x}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1-2x}{2x}\right)\sqrt{x} \cdot e^{-x}$

On conclut donc que :

$$\boxed{\forall x > 0, f'(x) = \left(\frac{1-2x}{2x}\right) \times f(x)}$$

$\forall x \in]0; +\infty[, 2x > 0$ et $f(x) > 0$

Le signe dépend de celui de $1 - 2x$

Par conséquent :

$\forall x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[, f'(x) > 0$

$\forall x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[, f'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $\left]0; \frac{1}{2}\right[$, f est croissante

Sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$, f est décroissante

Tableau de variation de f

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

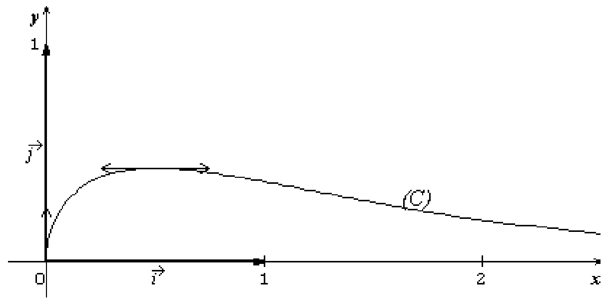
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{x}{e^x} = 0$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \end{cases}$

On conclut donc que : La courbe $(\mathcal{C})$ de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$

4. Tracer de $(\mathcal{C})$



5.

a. $\mathcal{V}(\lambda) = uv \times \int_0^\lambda f^2(x)dx$

$\int_0^\lambda f^2(x)dx = \int_0^\lambda xe^{-2x}dx$

Intégration par parties

$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$

$\int_0^\lambda f^2(x)dx = \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_0^\lambda + \int_0^\lambda \frac{1}{2}e^{-2x}dx$

$\int_0^\lambda f^2(x)dx = \left[\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{-2x}\right]_0^\lambda$

$\int_0^\lambda f^2(x)dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(2\lambda + 1)e^{-2\lambda}$

$uv = 64cm^3$

$\mathcal{V}(\lambda) = 16[1 - (2\lambda + 1)e^{-2\lambda}]cm^3$

b. $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{V}(\lambda) = 16$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to +\infty} 2\lambda e^{-2\lambda} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2\lambda} = 0 \end{cases}$

PARTIE B

1. $g(x) = \ln x + 2x$

a. $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot e^{-x} = x$

$\Leftrightarrow x \cdot e^{-2x} = x^2$

$\Leftrightarrow e^{-2x} = x$

$\Leftrightarrow -2x = \ln x$

$\Leftrightarrow \ln x + 2x = 0$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$\boxed{f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0}$$

b. $\boldsymbol{g'(x) = 2 + \frac{1}{x}} > 0 \ \forall\, x \in \boldsymbol{]0};\ +\infty[$

On en déduit que :

Sur $]0;\ +\infty[, g$ est croissante

<u>Tableau de variation de g</u>

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$
$g'(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

<u>Déduction</u>

Sur $]0;\ +\infty[, g$ est continue car dérivable et est strictement croissante

Alors g réalise une bijection de $]0;\ +\infty[$ sur $]-\infty;\ +\infty[$ et $0 \in]-\infty;\ +\infty[$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;\ +\infty[$

c. $\begin{cases} g(0{,}4) = -0{,}12 < 0 \\ g(0{,}5) = 0{,}30 > 0 \end{cases}$

On a : $\boldsymbol{g(0,4) \times g(0,5)} < 0$
Alors $\boldsymbol{\alpha \in [0,4; 0,5]}$

2. α étant aussi solution de l'équation $f(x) = x$, alors α est l'abscisse du point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et la droite d'équation $y = x$

3.

a. Sur $[0{,}4; 0{,}5], f$ est croissante

Par conséquent :

$\forall\, x \in [0{,}4; 0{,}5]$,

$f(0{,}4) \le f(x) \le f(0{,}5)$

$\Leftrightarrow 0{,}42 \le f(x) \le 0{,}43$

Or $[0{,}42; 0{,}43] \subset [0{,}4; 0{,}5]$

D'où $\boldsymbol{\forall\, x \in [0,4; 0,5], f(x) \in [0,4; 0,5]}$

b. $f'(x) = \left(\frac{1-2x}{2x}\right) \times f(x)$

$\forall\, x \in [0{,}4; 0{,}5], \frac{4}{5} \le 2x \le 1$

$\Leftrightarrow 0 \le 1 - 2x \le \frac{1}{5}$ et $1 \le \frac{1}{2x} \le \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow 0 \le \frac{1-2x}{2x} \le \frac{1}{4}$ et $0{,}4 \le f(x) \le 0{,}5$

$\Leftrightarrow 0 \le \left(\frac{1-2x}{2x}\right) \times f(x) \le \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow 0 \le |f'(x)| \le \frac{1}{8}$

Donc $\boldsymbol{\forall\, x \in [0,4; 0,5], |f'(x)| \le \frac{1}{8}}$

4. $\begin{cases} U_0 = 0{,}4 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a. $U_0 = 0{,}4 \in [0{,}4; 0{,}5]$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \in [0{,}4; 0{,}5]$ et montrons que $U_{n+1} \in [0{,}4; 0{,}5]$

$U_n \in [0{,}4; 0{,}5] \Longrightarrow f(U_n) \in [0{,}4; 0{,}5]$

Car d'après 3a),

$\forall\, x \in [0{,}4; 0{,}5], f(x) \in [0{,}4; 0{,}5]$

Or par définition, $U_{n+1} = f(U_n)$

D'où $U_{n+1} \in [0{,}4; 0{,}5]$ si $U_n \in [0{,}4; 0{,}5]$

On conclut donc que :
$\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \in [0,4; 0,5]}$

b. $\alpha \in [0{,}4; 0{,}5]; U_n \in [0{,}4; 0{,}5]$ et $\forall\, x \in [0{,}4; 0{,}5], |f'(x)| \le \frac{1}{8}$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a :

$|f(U_n) - f(\alpha)| \le \frac{4}{9}|U_n - \alpha|$

Or $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$

D'où $\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N}}$,
$\boldsymbol{|U_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{8}|U_n - \alpha|}$

c. En partant de l'inégalité précédente, on a :

$n = 0 \Longrightarrow \quad |U_1 - \alpha| \le \frac{1}{8}|U_0 - \alpha|$

$n = 1 \Longrightarrow \quad |U_2 - \alpha| \le \frac{1}{8}|U_1 - \alpha|$

$n = 3 \Longrightarrow \quad |U_3 - \alpha| \le \frac{1}{8}|U_2 - \alpha|$

$\vdots$

$n = n - 1 \Longrightarrow |U_n - \alpha| \le \frac{1}{8}|U_{n-1} - \alpha|$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités. On obtient après simplification :

$|U_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{8}\right)^n |U_0 - \alpha|$

$|U_0 - \alpha| = |0{,}4 - \alpha|$

$0{,}4 \le \alpha \le 0{,}5 \Longrightarrow -0{,}1 \le 0{,}4 - \alpha \le 0$

$\Longrightarrow |U_0 - \alpha| \le 0{,}1$

$\Longrightarrow |U_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{8}\right)^n |U_0 - \alpha| \le \left(\frac{1}{8}\right)^n \times 0{,}1$

On en déduit que :
$\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \le 0,1 \times \left(\frac{1}{8}\right)^n}$

d. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{8} < 1$

On en déduit que la suite $(\boldsymbol{U_n})$ converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} \boldsymbol{U_n = \alpha}$

5. $0{,}1 \times \left(\frac{1}{8}\right)^n \leq 10^{-5}$

$\Longrightarrow \ |U_n - \alpha| \leq 10^{-5}$

Or $0{,}1 \times \left(\frac{1}{8}\right)^n \leq 10^{-5}$

$\Leftrightarrow -3n \ln 2 \leq -4 \ln 10$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{4 \ln 10}{3 \ln 2}$

$\Leftrightarrow n \geq 4{,}42$

Donc $|U_n - \alpha| \leq 10^{-5}$, $\forall\, n \geq 5$

L'entier cherché est $\boldsymbol{n_0 = 5}$

PARTIE C

$F(x) = \int_0^x \sqrt{t} \cdot e^{-t} dt\,;\ D_F = [0;\ +\infty[$

1. F est la primitive de f qui s'annule en 0.

Par conséquent :

$$\boxed{\boldsymbol{F'(x) = f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}}}$$

<u>Déduction</u>

$\forall\, x \in [0;\ +\infty[, f(x) \geq 0 \Leftrightarrow F'(x) \geq 0$

On en déduit que F est croissante

2.

a. $\forall\, t \geq 0, \left(\sqrt{t} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow t - \sqrt{t} + \frac{1}{4} \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{t} \leq t + \frac{1}{4}$

Donc $\forall\, t \geq 0, \sqrt{t} \leq t + \frac{1}{4}$

b. $\forall\, t \geq 0, \sqrt{t} \leq t + \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \sqrt{t} \cdot e^{-t} \leq \left(t + \frac{1}{4}\right) e^{-t}$

$\Leftrightarrow \int_0^x \sqrt{t} \cdot e^{-t} dt \leq \int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) e^{-t} dt$

$$\boxed{\textbf{Donc } \forall\, \boldsymbol{t \geq 0},\ \boldsymbol{F(x) \leq \int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) e^{-t} dt}}$$

c. **<u>Intégration par parties</u>**

$\begin{cases} u(t) = t + \frac{1}{4} \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(x) = -e^{-t} \end{cases}$

$\int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) e^{-t} dt$

$= \left[-\left(t + \frac{1}{4}\right) e^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt$

$\int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) e^{-t} dt = \left[-\left(t + \frac{5}{4}\right) e^{-t}\right]_0^x$

$$\boxed{\boldsymbol{\int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) e^{-t} dt = \frac{5}{4} - \left(x + \frac{5}{4}\right) e^{-x}}}$$

d. $\forall\, x \geq 0, x + \frac{5}{4} \geq 0$ et $e^{-x} \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right) e^{-x} \geq 0$

$\Leftrightarrow -\left(x + \frac{5}{4}\right) e^{-x} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4} - \left(x + \frac{5}{4}\right) e^{-x} \leq \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow F(x) \leq \int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) e^{-t} dt \leq \frac{5}{4}$

$$\boxed{\textbf{Donc } \forall\, \boldsymbol{x \geq 0},\ \boldsymbol{F(x) \leq \frac{5}{4}}}$$

PROBLEME 4
PARTIE A

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \quad si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$D_f = [0.+\infty[$

1.

a. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\ln(x+2) - x\ln x$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

Alors f est continue en 0

b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \ln(x+2) - \ln x$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty}$$

Car $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

Alors f n'est pas dérivable en 0

c. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$

Posons $X = \frac{2}{x}\ (x > 0)$

Si $x \to +\infty$, alors $X \to 0$ et

$\lim\limits_{X\to 0} \frac{2}{X}\ln(1+X) = \lim\limits_{X\to 0} 2\frac{\ln(1+X)}{X} = 2$

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{x\to +\infty} f(x) = 2}$$

2.

a. $\forall\, x \in]0;\ +\infty[$,

$f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - x \times \frac{-2}{x^2} \times \frac{x}{x+2}$

$$\boxed{\text{On a donc } f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2}}$$

D'autres parts :

$f''(x) = \frac{-2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)^2}$

$$\boxed{f''(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}}$$

b. $\forall\, x \in]0;\ +\infty[, f''(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]0;\ +\infty[$, f' est strictement décroissante

Tableau de variation de f'

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$
$f'(x)$	‖	↘ 0

$\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2}$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f'(x) = 0}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+2}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{x+2} = 0 \end{cases}$

Déduction

D'après le tableau de variation de f', $\forall\, x \in]0;\ +\infty[, f'(x) > 0$

c. **Tableau de variation de f**

Sur $]0;\ +\infty[, f$ est croissante

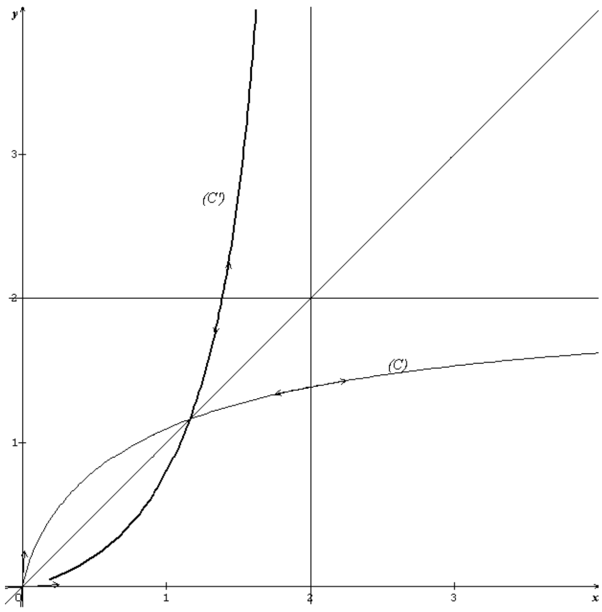
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗ 2

3. A l'origine O du repère la courbe $(\mathcal{C})$ admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut

Au point A d'abscisse 2,

$(\boldsymbol{T}): \boldsymbol{y} = \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)\boldsymbol{x} + \mathbf{1}$

Au voisinage de $+\infty$, $(\mathcal{C})$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$



4.

a. $\forall\, x \in]0;\ +\infty[, f(x) = x$

$\Leftrightarrow x\left(\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - 1\right) = 0$ et $x \neq 0$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x} = e$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{e-1}$

Donc $\forall\, \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0};\ +\infty[$,
$\boldsymbol{f(x) = x \Leftrightarrow x = \frac{2}{e-1}}$

b. La courbe $(\mathcal{C}')$ de la réciproque f^{-1} de f et la courbe $(\mathcal{C})$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (Voir figure)

PARTIE B

1. $\mathcal{A}(\alpha) = \int_\alpha^2 f(x)dx = \int_\alpha^2 x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)dx$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \\ v'(x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{-2}{x(x+2)} \\ v'(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$\mathcal{A}(\alpha) = \left[\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)\right]_\alpha^2 + \int_\alpha^2 \frac{x}{x+2}dx$

$\mathcal{A}(\alpha) = \left[\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + x - 2\ln(x+2)\right]_\alpha^2$

Car $\frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$

On a donc :
$\boldsymbol{\mathcal{A}(\alpha) = 2 - 2\ln 2 - \frac{1}{2}\alpha^2\ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) - \alpha + 2\ln(\alpha+2)}$

2. $\begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha^2\ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) = 0 \\ \lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha = 0 \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{\alpha\to 0}\mathcal{A}(\alpha) = 2$

Interprétation graphique

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\mathcal{A}(\alpha) = 2$ est l'aire en unité d'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$

PARTIE C

$u(x) = \frac{2x}{x+2};\ D_u =]0.+\infty[$

(P): $g(x) - xg'(x) = u(x)$

1. $f(x) - xf'(x)$
$= x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - x\left(\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2}\right)$
$\Leftrightarrow f(x) - xf'(x)$
$= x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{2x}{x+2}$
$\Leftrightarrow f(x) - xf'(x) = \frac{2x}{x+2} = u(x)$

On en déduit que :
$\boldsymbol{f}$ **possède la propriété** $(\boldsymbol{P})$

2. $G(x) = \frac{g(x)}{x};\ D_g = D_G =]0.+\infty[$

Supposons que g possède la propriété (P)

On a : $\forall x \in]0;\ +\infty[$,
$g(x) - xg'(x) = u(x)$
$\Rightarrow xG(x) - x\big(xG(x)\big)' = u(x)$
$\Rightarrow xG(x) - xG(x) - x^2G'(x) = u(x)$
$\Rightarrow G'(x) = -\frac{u(x)}{x^2}$
$\Rightarrow G'(x) = -\frac{2}{x(x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$

Alors $\boldsymbol{G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}}$ **si** $\boldsymbol{g}$ **possède la propriété** $(\boldsymbol{P})$

Réciproquement :

Supposons que $\forall x \in]0;\ +\infty[$,
$G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$

On a : $\left(\frac{g(x)}{x}\right)' = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$
$\Rightarrow -\frac{1}{x^2}g(x) + \frac{1}{x}g'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$
$\Rightarrow g(x) - xg'(x) = -\frac{x^2}{x+2} + x$
$\Rightarrow g(x) - xg'(x) = \frac{2x}{x+2} = u(x)$

Alors $\boldsymbol{g}$ **possède la propriété** $(\boldsymbol{P})$ **si** $\boldsymbol{G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}}$

On vient ainsi de montrer que :
g possède la propriété (P) si et seulement si : pour tout x appartenant à $]0.+\infty[$,
$G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$

3. **Déduction**

$\forall x \in]0;\ +\infty[$,
$G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$
$\Leftrightarrow G(x) = \ln(x+2) - \ln x + K;$
$K \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow G(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + K; K \in \mathbb{R}$

Or $g(x) = xG(x)$

On en déduit que :
$\boldsymbol{g(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + Kx;\quad K \in \mathbb{R}}$

Les éléments de (E) sont les fonctions G définie sur $]0;\ +\infty[$ par :
$g(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + Kx\ ; K \in \mathbb{R}$

PROBLEME 5

$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{e^x+1}$; $D_f = \mathbb{R}$ et

$U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

PARTIE A

Étude de la fonction f_n

1. *On suppose $n = 0$*

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = 0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x+1} = 1$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_0(x) = 1 \text{ car } \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0}$$

b. $f_0{}'(x) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f_0{}'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $\mathbb{R}$, f_0 est strictement décroissante

Tableau de variation de f_0

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f_0{}'(x)$	$-$
$f_0(x)$	1 ↘ 0

c. $\mathrm{I}\left(0; \frac{1}{2}\right)$

$f_0(2\times 0 - x) + f_0(x)$

$= f_0(-x) + f_0(x)$

$= \frac{1}{e^{-x}+1} + \frac{1}{e^x+1}$

$= \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{e^x+1}$

$= \frac{e^x+1}{e^x+1} = 1$

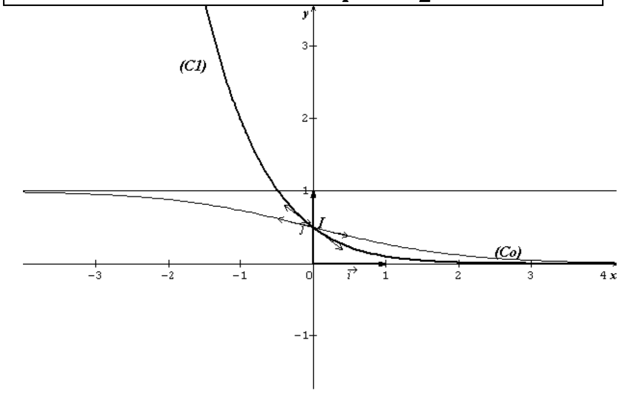
$\boldsymbol{f_0(2\times 0 - x) + f_0(x) = 2 \times \frac{1}{2}}$

Alors I $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C_0)

d. Traçons (C_0)

Tangente en I $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

$$\boxed{(T): y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}$$



2. *On suppose que $n \geq 1$*

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} = 0$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-(n+1)x} = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-nx}}{1+e^x} = +\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-nx} = +\infty \end{cases}$

b. Les fonctions $x \longmapsto e^{-nx}$ et $x \longmapsto e^x + 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + 1 \neq 0$ alors

$f_n : x \longmapsto \frac{e^{-nx}}{e^x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f_n{}'(x) = \frac{-ne^{-nx}(e^x+1) - e^{-(n-1)x}}{(e^x+1)^2}$

$= \frac{-e^{-nx}(ne^x+n+e^x)}{(e^x+1)^2}$

On conclut donc que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f_n{}'(x) = \frac{-e^{-nx}(n+(n+1)e^x)}{(e^x+1)^2}}$$

c. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-nx} > 0$; $(e^x+1)^2 > 0$ et $\forall n \geq 1, (n + (n+1)e^x) > 0$ et par suite $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n{}'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $\mathbb{R}$, f_n est strictement décroissante

Tableau de variation

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f_n{}'(x)$	$-$
$f_n(x)$	$+\infty$ ↘ 0

d. $f_n(0) = \frac{1}{2}$

Alors le point I $\left(\mathbf{0};\ \frac{1}{2}\right)$ appartient à toutes les courbes $(\boldsymbol{C_n})$

e. Traçons (C_1) dans le même repère que (C_0)

Tangente en $\mathrm{I}\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$

$$\boldsymbol{(T): y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}}$$

3. <u>Interprétation graphique</u>

U_n est l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_n), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

$U_0 = \int_0^1 f_0(x)dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$

$U_0 = [-\ln(1 + e^{-x})]_0^1$

Donc on a : $U_0 = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$

PARTIE B

Étude de la suite (U_n)

1. *Étude d'une suite auxiliaire* (V_n)

Pour tout n , on pose $V_n = \int_0^1 e^{-nx}\,dx$

a. $V_n = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1$

$$\boldsymbol{V_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}e^{-n}}$$

b. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0 \end{cases}$

Alors $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0}$

$nV_n = 1 - e^{-n}$

$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} (nV_n) = 1}$ **car** $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0}$

2. Comparaison de (U_n) à (V_n)

a. $\forall\, x \in [0; 1], 1 \leq e^x \leq e$

$\Leftrightarrow 2 \leq e^x + 1 \leq e + 1$ et

$e^x + 1 \leq 2e^x \leq e^x + e$

On conclut donc que :
$\boldsymbol{\forall\, x \in [0; 1], 2 \leq e^x + 1 \leq 2e^x}$

b. <u>Déduction</u>

$2 \leq e^x + 1 \leq 2e^x$

$\Leftrightarrow \frac{e^{-x}}{2} \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{e^{-(n+1)x}}{2} \leq \frac{e^{-nx}}{e^x+1} \leq \frac{e^{-nx}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-(n+1)x}dx \leq \int_0^1 f_n(x)dx$

$\leq \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-nx}\,dx$

On en déduit que :
$$\boldsymbol{\forall\, n \geq 1, \frac{1}{2}V_{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{2}V_n}$$

c. $\forall\, n \geq 1, \frac{1}{2}V_{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{2}V_n$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_{n+1} = 0$

D'où $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq 0$

On conclut donc que :
$$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0}$$

D'autres parts :

$\forall\, n \geq 1, \frac{1}{2}(nV_{n+1}) \leq nU_n \leq \frac{1}{2}(nV_n)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (nV_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (nV_{n+1}) = 1$

D'où $\frac{1}{2} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} (nU_n) \leq \frac{1}{2}$

On conclut donc que :
$$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} (nU_n) = \frac{1}{2}}$$

3. *Étude d'une suite associée à* (U_n)

On pose : $S_n = \sum_{p=1}^n U_p$ et

$t_n = \sum_{p=1}^n V_p$

a. $\forall\, p \geq 1, \frac{1}{p} \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq \frac{e^{-p}}{p} \leq e^{-p}$

Par conséquent :

$0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \sum_{p=1}^n e^{-p}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq e^{-1} \times \left(\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}\right)$

Or $\forall\, n \geq 1, 1 - e^{-n} \leq 1$

D'où $0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} \times 1$

On a donc :
$$\boldsymbol{0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{1}{e-1}}$$

b. $\forall\, t \in [p; p + 1], \frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$

D'où d'après l'inégalité de la moyenne on a :

$\frac{1}{p+1}(p + 1 - p) \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leq$
$\frac{1}{p}(p + 1 - p)$

Alors on a : $\boldsymbol{\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{p}}$

Par la suite on a :

$\frac{1}{p+1} \leq [\ln t]_p^{p+1} \leq \frac{1}{p}$

Soit $\boldsymbol{\frac{1}{p+1} \leq \ln(p + 1) - \ln p \leq \frac{1}{p}}$

c. Déduction

$\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p+1} \leq \sum_{p=1}^{n}\ln(p+1)-\ln p \leq \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$

$\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p+1} \leq \ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$

Ou encore

$\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p+1} \leq \ln n \leq \sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p}$

Or $\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p+1} = -1+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$

On en déduit que :

$\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} \leq \ln n + 1$ et

$\ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$

D'où on a :
$$\boldsymbol{\ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} \leq \ln n + 1}$$

d. $t_n = \sum_{p=1}^{n} V_p = \sum_{p=1}^{n}\int_0^1 e^{-px}\,dx$

$t_n = \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{p}-\frac{e^{-p}}{p}\right)$

$t_n = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n}\frac{e^{-p}}{p}$

Or $0 \leq \sum_{p=1}^{n}\frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{1}{e-1}$ et

$\ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} \leq \ln n + 1$

D'où on a :
$$\boldsymbol{\ln(n+1) - \frac{1}{e-1} \leq t_n \leq \ln n + 1}$$

En passant à la limite, on a :

$+\infty \leq \lim\limits_{n\to+\infty} t_n \leq +\infty$

car $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln n = +\infty$

$$\textbf{Donc } \boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty}$$

Par ailleurs : $\forall\, n > 1$,

$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} - \frac{1}{e-1}\times\frac{1}{\ln n} \leq \frac{t_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$

En passant à la limite, on a :

$1 \leq \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{t_n}{\ln n} \leq 1$

Car

$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{\ln n}\times\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\ln n = +\infty \end{cases}$

$$\textbf{Donc } \boldsymbol{\lim_{n\to+\infty}\frac{t_n}{\ln n} = 1}$$

e. $\forall\, p \geq 1, \frac{1}{2}V_{p+1} \leq U_p \leq \frac{1}{2}V_p$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(t_{n+1}-V_1) \leq S_n \leq \frac{1}{2}t_n$

On en déduit que :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty} \textbf{ et } \boldsymbol{\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{\ln n} = \frac{1}{2}}$$

PROBLEME 6

PARTIE A

$g(x) = (2x+1)e^{-2x}+1;\ D_g = \mathbb{R}$

1.

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty \end{cases}$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 2xe^{-2x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0 \end{cases}$

2. $\boldsymbol{g'(x) = -4xe^{-2x}}$

$\forall\, x \in]-\infty;0[, g'(x) > 0$

$\forall\, x \in]0;+\infty[, g'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty;0[$, g est croissante

Sur $]0;+\infty[$, g est décroissante

Tableau de variations de g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

3. Sur $]-\infty;0[$, g est continue car dérivable et est strictement croissante. Alors g réalise une bijection de $]-\infty;0[$ sur $]-\infty;2[$ et $0 \in]-\infty;2[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-\infty;0[$

Sur $[0;\ +\infty[$, $g(x) \in]1;2]$ donc on a $g(x) \neq 0$

Montrons que $-1 < \alpha < 0$

$\begin{cases} g(-1) = 1-e^2 < 0 \\ g(0) = 2 > 0 \end{cases}$;

On a : $g(-1)\times g(0) < 0$

Alors $-1 < \alpha < 0$

4. Signe de $g(x)$

$$\boldsymbol{\forall\, x \in]-\infty;\alpha[, g(x) < 0}$$
$$\boldsymbol{\forall\, x \in]\alpha;+\infty[, g(x) > 0}$$

PARTIE B

$f(x) = (1+x)e^{-2x} + 1 - x;\ D_f = \mathbb{R}$

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x}(1 + x + e^{2x} - xe^{2x})$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 1 + x = -\infty \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-2x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty \end{cases}$

2. $(\Delta): y = -x + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x \to +\infty} (1+x)e^{-2x}$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = 0}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-2x} = 0 \end{cases}$

Alors la droite $(\Delta): y = -x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

__Position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ)__

$\forall\, x \in\,]-\infty; -1[,\ f(x) - y < 0$

$\forall\, x \in\,]-1; +\infty[,\ f(x) - y > 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; -1[$, $(\mathcal{C})$ est en dessous de (Δ)
Sur $]-1; +\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au dessus de (Δ)

3. $f'(x) = e^{-2x} - 2(1+x)e^{-2x} - 1$

$\Leftrightarrow f'(x) = -[(2x+1)e^{-2x} + 1]$

Don on a : $f'(x) = -g(x)$

__Déduction__

D'après PARTIE A on a :

$\forall\, x \in\,]-\infty; \alpha[,\ f'(x) > 0$

$\forall\, x \in\,]\alpha; +\infty[,\ f'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; \alpha[$, f est croissante

Sur $]\alpha; +\infty[$, f est décroissante

__Tableau de variations de f__

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

4. Sur $[0; +\infty[$, f est continue car dérivable et est strictement décroissante. Alors f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $]-\infty; 2]$ et $0 \in\,]-\infty; 2]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0; +\infty[$ une solution et une seule β.

Justification de l'encadrement

$\begin{cases} f(1) = 0{,}27 > 0 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = -0{,}37 < 0 \end{cases}$

On a : $f(1) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$
Alors $1 \leq \beta \leq \frac{3}{2}$

5. $f(-\beta) = (1-\beta)e^{2\beta} + 1 + \beta$

$\Leftrightarrow f(-\beta)$

$= e^{2\beta}\left[1 - \beta + (1+\beta)e^{-2\beta}\right]$

$\Leftrightarrow f(-\beta) = e^{2\beta} f(\beta)$

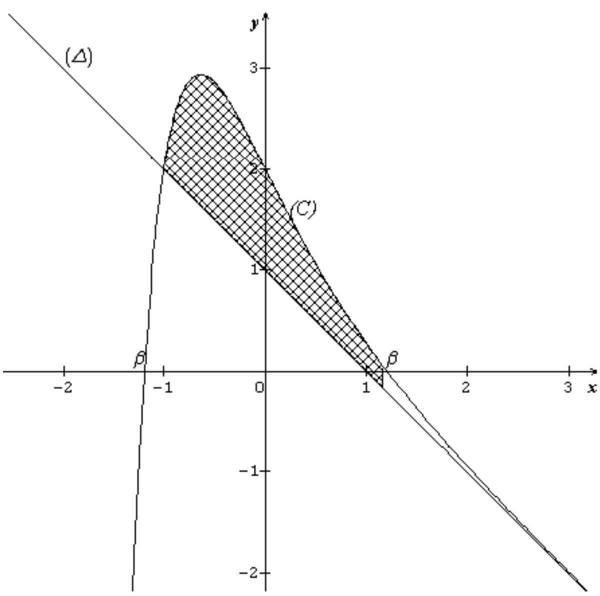
Or $f(\beta) = 0$

D'où on a : $f(-\beta) = 0$

__Déduction__

On en déduit que $-\beta$ est solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$

6. Traçons (Δ) et $(\mathcal{C})$



PARTIE C

$t > -1$

1. Voir figure
2. $\mathcal{A}(t) = ua \times \int_{-1}^{t}(f(x) - y)dx$

$\int_{-1}^{t}(f(x) - y)dx = \int_{-1}^{t}(1 + x)e^{-2x}dx$

<u>Intégration par parties</u>

$\begin{cases} u(x) = 1 + x \\ v'(x) = e^{-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$

$\int_{-1}^{t}(f(x) - y)dx$

$= \left[-\frac{1}{2}(1 + x)e^{-2x}\right]_{-1}^{t} + \int_{-1}^{t}\frac{1}{2}e^{-2x}dx$

$= \left[\left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^{-2x}\right]_{-1}^{t}$

$\int_{-1}^{t}(f(x) - y)dx = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}(2t + 3)e^{-2t}$

$ua = 4cm^2$

$$\boxed{\mathcal{A}(t) = [e^2 - (2t + 3)e^{-2t}]\ cm^2}$$

3. $\begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} 2te^{-2t} = 0 \\ \lim\limits_{t \to +\infty} e^{-2t} = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\textbf{Alors } \lim_{t \to +\infty} \mathcal{A}(t) = e^2}$$

PARTIE D

$h(x) = (1 + x)e^{-2x} + 1;$

$D_h = I = \left[1; \frac{3}{2}\right]$

1. $h(x) = x$

$\Leftrightarrow (1 + x)e^{-2x} + 1 = x$

$\Leftrightarrow (1 + x)e^{-2x} + 1 - x = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = 0$

<u>Déduction</u>

β étant l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $\left[1; \frac{3}{2}\right]$ donc β est aussi l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

2. $h'(x) = -(2x + 1)e^{-2x}$

$\forall\, x \in \left[1; \frac{3}{2}\right], h'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $\left[1; \frac{3}{2}\right]$, h est décroissante

x	1 $\qquad\qquad$ $\frac{3}{2}$
$h'(x)$	$-$
$h(x)$	$1{,}27 \searrow 1{,}12$

<u>Déduction</u>

$\forall\, x \in \left[1; \frac{3}{2}\right], 1{,}12 \leq h(x) \leq 1{,}27$

Or $[1{,}12\ ;\ 1{,}27] \subset \left[1; \frac{3}{2}\right]$

$$\boxed{\textbf{D'où } \forall\, x \in \left[1; \frac{3}{2}\right], h(x) \in \left[1; \frac{3}{2}\right]}$$

3. $\forall\, x \in \left[1; \frac{3}{2}\right], 2 \leq 2x \leq 3$

$\Leftrightarrow 3 \leq 2x + 1 \leq 4$ et

$e^{-3} \leq e^{-2x} \leq e^{-2}$

$\Leftrightarrow 3e^{-3} \leq (2x + 1)e^{-2x} \leq 4e^{-2}$

$\Leftrightarrow -4e^{-2} \leq h'(x) \leq -3e^{-3}$

$\Leftrightarrow 3e^{-3} \leq |h'(x)| \leq 4e^{-2}$

Donc $\forall\, x \in \left[1; \frac{3}{2}\right], |h'(x)| \leq \frac{4}{e^2}$

Déduction

$\forall\, x \in \left[1; \frac{3}{2}\right], |h'(x)| \leq \frac{4}{e^2}$

D'après l'inégalité de la moyenne

On a :

$\left|\int_{\beta}^{x} h'(t)\,dt\right| \leq \frac{4}{e^2}|x - \beta|$

$\Leftrightarrow \left|[h(t)]_{\beta}^{x}\right| \leq \frac{4}{e^2}|x - \beta|$

$\Leftrightarrow |h(x) - h(\beta)| \leq \frac{4}{e^2}|x - \beta|$

$\Leftrightarrow |h(x) - h(\beta)| \leq \frac{4}{e^2}|x - \beta|$

Or $h(\beta) = \beta$ d'après PARTIE D1.

$$\boxed{\textbf{D'où } \forall\, x \in \left[1; \frac{3}{2}\right],\quad |h(x) - \beta| \leq \frac{4}{e^2}|x - \beta|}$$

4. $U_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = h(U_n)$

a. $U_0 = 1 \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, supposons $U_n \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$ et montrons que $U_{n+1} \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$

$U_n \in \left[1; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow h(U_n) \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$

Car $\forall\, x \in \left[1; \frac{3}{2}\right], h(x) \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$

Or par définition $U_{n+1} = h(U_n)$

D'où $U_{n+1} \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$ si $U_n \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$

$$\boxed{\textbf{On conclut donc que : } \forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n \in \left[1; \frac{3}{2}\right]}$$

b. On sait que :
$\forall\, x \in \left[1; \frac{3}{2}\right], |h(x) - \beta| \leq \frac{4}{e^2}|x - \beta|$
Prenons $x = U_n$ on a :
$|h(U_n) - \beta| \leq \frac{4}{e^2}|U_n - \beta|$
Par définition $U_{n+1} = h(U_n)$

Donc $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$,
$$\boldsymbol{|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{4}{e^2}|U_n - \beta|}$$

c. En partant de l'inégalité précédente, on a :
$n = 0 \Longrightarrow \quad |U_1 - \beta| \leq \frac{4}{e^2}|U_0 - \beta|$
$n = 1 \Longrightarrow \quad |U_2 - \beta| \leq \frac{4}{e^2}|U_1 - \beta|$
$n = 3 \Longrightarrow \quad |U_3 - \beta| \leq \frac{4}{e^2}|U_2 - \beta|$
$\vdots$
$n = n - 1 \Longrightarrow |U_n - \beta| \leq \frac{4}{e^2}|U_{n-1} - \beta|$
Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités. On obtient après simplification :
$|U_n - \beta| \leq \left(\frac{4}{e^2}\right)^n |U_0 - \beta|$
$|U_0 - \beta| = |1 - \beta|$
$1 \leq \beta \leq \frac{3}{2} \Longrightarrow -\frac{1}{2} \leq 1 - \alpha \leq 0$
$\Longrightarrow |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2} \leq 1$
$\Longrightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{e^2}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left[\left(\frac{2}{e}\right)^2\right]^n$

On en déduit que :
$$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{|U_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^{2n}}$$

d. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^{2n} = 0$ car $0 < \frac{2}{e} < 1$
On en déduit que la suite (U_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \beta$

e. On sait que :
$\left(\frac{2}{e}\right)^{2n} \leq 10^{-3} \Longrightarrow |U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$
Or $\left(\frac{2}{e}\right)^{2n} \leq 10^{-3}$
$\Leftrightarrow -2n(1 - \ln 2) \leq -3\ln 10$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{3\ln 10}{2(1 - \ln 2)}$
$\Leftrightarrow n \geq 11{,}25$
Donc on a: $|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}\ \forall\, n \geq 12$
C'est à partir de $\boldsymbol{n = 12}$ que l'on est sûr que $\boldsymbol{U_n}$ représente une valeur approchée de $\boldsymbol{\beta}$ à $\boldsymbol{10^{-3}}$ près?

PROBLEME 7

$g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto \frac{1+x^2}{3x^2-1}$

PARTIE A

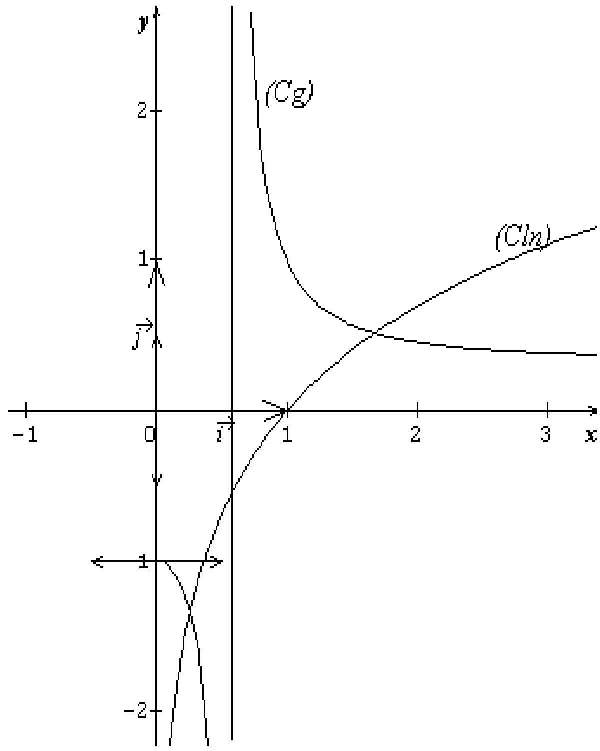
1. $D_g = \left[0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{1}{3}}$$
$$\boldsymbol{\lim_{x \to \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^-} g(x) = -\infty}$$
$$\boldsymbol{\lim_{x \to \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^+} g(x) = +\infty}$$

$\boldsymbol{g'(x) = -\frac{8x}{(3x^2-1)^2}}$
$\forall\, x \in D_g, (3x^2 - 1)^2 > 0$ et $-8x \leq 0$
Par conséquent :
$\forall\, x \in D_g, g'(x) \leq 0$
On en déduit que :
Sur D_g, g est décroissante

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	||	$-$	
$g(x)$	-1	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{3}$

2. Tracer des courbes de g et de ln



3. $h(x) = \ln x - g(x)$

$D_h = \left]0;\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{3};\ +\infty\right[$

$$\boldsymbol{h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{8x}{(3x^2-1)^2} > 0\ \forall\, x \in D_h}$$

On en déduit que :
Sur D_h, h est strictement croissante
Des limites des fonctions g et ln, on déduit :

$$\lim_{x\to 0} h(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^-} h(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^+} h(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$$

Tableau de variation de h

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$h'(x)$	||	$+$	||	$+$	
$h(x)$	|| $-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

Sur chacun des intervalles $\left]0;\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ et $\left]\frac{\sqrt{3}}{3};\ +\infty\right[$, h est dérivable donc continue et est strictement croissante sur chacun de ces intervalles.
Alors h réalise une bijection de chacun de ces intervalles sur $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$.
Par conséquent l'équation $h(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 telles que :

$\boldsymbol{x_1 \in \left]0;\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right[}$ **et** $\boldsymbol{x_2 \in \left]\frac{\sqrt{3}}{3};\ +\infty\right[}$

C'est-à-dire $0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{3} < x_2$

Montrons que $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$

$$\begin{cases} h(1) = -1 < 0 \\ h(2) = \ln 2 - \frac{5}{11} > 0 \end{cases}$$

On a : $\boldsymbol{]1;2[\subset \left]\frac{\sqrt{3}}{3};\ +\infty\right[}$ **et** $\boldsymbol{h(1) \times h(2) < 0}$**, alors** $\boldsymbol{1 < x_2 < 2}$

Par conséquent :

$0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 < x_2 < 2$

Donc on a : $\boldsymbol{0 < x_1 < 1 < x_2 < 2}$

Déduction

Signe de $h(x)$

$\forall\, x \in]0;\ x_1[,\ h(x) < 0$
$\forall\, x \in \left]x_1;\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right[,\ h(x) > 0$
$\forall\, x \in \left]\frac{\sqrt{3}}{3};\ x_2\right[,\ h(x) < 0$
$\forall\, x \in]x_2;\ +\infty[,\ h(x) > 0$

PARTIE B

$f(x) = \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}$

1. $D_f =]0;\ +\infty[$

$$f'(x) = \frac{(1+\ln x)(x^2+1)^2 - 4x^2(x^2+1)\ln x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{x^2+1+(1-3x^2)\ln x}{(x^2+1)^3} = \frac{(1-3x^2)\left(-\frac{x^2+1}{3x^2-1} + \ln x\right)}{(x^2+1)^3}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{(1-3x^2)h(x)}{(x^2+1)^3}\ \text{ si } x \neq \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

Car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln x \times \frac{1}{(x^2+1)^2}$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0}$$

Car $\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(x^2+1)^2} = 1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \ln x \times \frac{1}{(x^2+1)^2}$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(x^2+1)^2} = 1 \end{cases}$

3. $\forall x \in D_f$; $(x^2+1)^3 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $(1-3x^2)h(x)$

$1 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

D'après PARTIE A, et la règle des signes, on a :

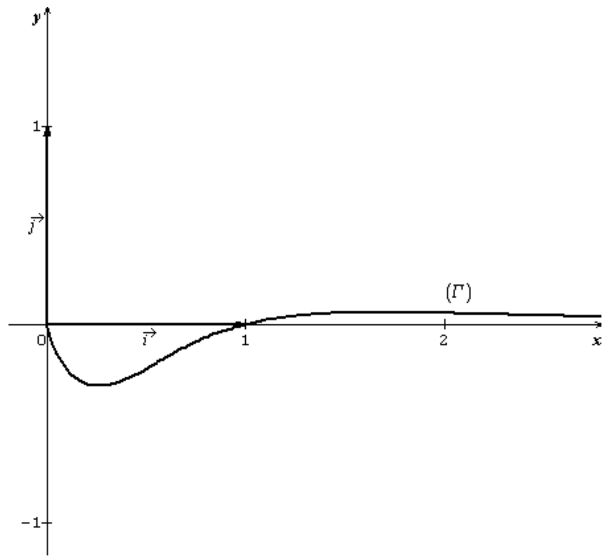
$\forall\, x \in]0;\, x_1[,\ f'(x) < 0$
$\forall\, x \in]x_1;\, x_2\, [, f'(x) > 0$
$\forall\, x \in]\, x_2\, , +\infty[, f'(x) < 0$

On en déduit que
Sur $]0;\ x_1[, f$ est décroissante
Sur $]x_1;\ x_2\,[, f$ est croissante
Sur $]\, x_2\, , +\infty[, f$ est décroissante

Tableau de variation de f

x	0		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	↘	$f(x_1)$	↗	$f(x_2)$	↘	0

4. Allure de (Γ)



5. $\forall\, x \in \mathbb{R}^*;\ \frac{1}{x} - \frac{x}{(x^2+1)} = \frac{x^2+1-x^2}{x(x^2+1)}$

Soit $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{(x^2+1)}$

On en déduit que :

> $\boldsymbol{x \mapsto \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)}$ **est une primitive de la fonction** $\boldsymbol{x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}}$ **sur** $\boldsymbol{]0;+\infty[}$

6. $\alpha \in]0;1[\, , J(\alpha) = \int_\alpha^1 \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2+1} \end{cases}$$

$$J(\alpha) = \left[\frac{-\ln x}{2(x^2+1)}\right]_\alpha^1 + \frac{1}{2}\int_\alpha^1 \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx$$

$$= \left[\frac{-\ln x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\right]_\alpha^1$$

$$= -\frac{\ln 2}{4} + \frac{\ln\alpha}{2(\alpha^2+1)} - \frac{1}{2}\left(\ln\alpha - \frac{1}{2}\ln(\alpha^2+1)\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{J(\alpha) = -\frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{4}\ln(\alpha^2+1) - \frac{\alpha^2\ln\alpha}{2(\alpha^2+1)}}}$$

7. $\mathcal{A}(\alpha) = ua \times \left(-J(\alpha)\right)$

$ua = 16\ cm^2$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A}(\alpha) = \left(4\ln 2 - 4\ln(\alpha^2+1) + \frac{8\alpha^2\ln\alpha}{\alpha^2+1}\right)cm^2}}$$

> **Et on a :** $\boldsymbol{\lim_{\alpha\to 0} A(\alpha) = 4\ln 2}$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha^2 = 0 \\ \lim\limits_{\alpha\to 0^+} \alpha^2\ln\alpha = 0 \end{cases}$

Cette limite est l'aire en cm² du domaine limité par (Γ) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

PROBLEME 8

PARTIE A

$f(x) = x - 4 + \frac{1}{4}\ln|x|$

1. $D_f = \mathbb{R}^*$ et pour x élément de $\mathbb{R}^*$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{4x+1}{4x}}$$

$\forall\, x \in \left]-\infty; -\frac{1}{4}\right[, f'(x) > 0$

$\forall\, x \in \left]-\frac{1}{4}; 0\right[, f'(x) < 0$

$\forall\, x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $\left]-\infty; -\frac{1}{4}\right[$, f est croissante

Sur $\left]-\frac{1}{4}; 0\right[$, f est décroissante

Sur $]0; +\infty[$, f est croissante

<u>Tableau de variation de f</u>

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-17-\ln 4}{4}$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x - 4 + \frac{1}{4}\ln(-x)\right)$

Posons $X = -x$;

Si $x \longrightarrow -\infty$ alors $X \to +\infty$ et

$\lim\limits_{X\to+\infty}\left(-X - 4 + \frac{1}{4}\ln X\right)$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} X\left(-1 + \frac{4}{X} - \frac{1}{4}\frac{\ln X}{X}\right) = -\infty$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{4}{X} = 0 \\ \lim\limits_{X\to+\infty} X = +\infty \end{cases}$

Alors $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x - 4 + \frac{1}{4}\ln|x|\right)$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$ car $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\ln|x| = -\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{4}\frac{\ln x}{x}\right)$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$

2. $\forall\, x \in]-\infty; 0[\,; f(x) < 0$

Par ailleurs :

Sur $]0; +\infty[$, f est dérivable donc continue et est strictement croissante.

Alors f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]-\infty\,; +\infty[$ et $0 \in]-\infty\,; +\infty[$

Donc l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$ admet, une solution unique $\boldsymbol{\alpha}$ dans $\boldsymbol{]0; +\infty[}$

$\begin{cases} f(3) = -1 + \frac{1}{4}\ln 3 < 0 \\ f(4) = \frac{1}{4}\ln 4 > 0 \end{cases}$

On a : $\boldsymbol{f(3) \times f(4) < 0}$
D'où $\boldsymbol{3 < \alpha < 4}$

3. De tout ce qui précède, on déduit que :

$\boldsymbol{\forall\, x \in]-\infty; 0[\,; f(x) < 0}$
$\boldsymbol{\forall\, x \in]0\,; \alpha[\,; f(x) < 0}$
$\boldsymbol{\forall\, x \in]\alpha\,; +\infty[\,; f(x) > 0}$

PARTIE B

$\forall\, x \in \mathbb{R}^*$,

$h(x) = x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2\ln|x|$ et

$h(0) = 1$

$D_h = \mathbb{R}$

1. $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 1$ car $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln|x| = 0$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} h(x) = h(0)}$
Alors la fonction $\boldsymbol{h}$ est continue en 0

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} 1 - \frac{31}{16}x + \frac{1}{8}x\ln|x|$.

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = 1}$ car $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} x\ln|x| = 0}$

Alors $\boldsymbol{h}$ est dérivable en 0 et $\boldsymbol{h'(0) = 1}$

2. $h'(x) = 1 - \frac{31}{8}x - \frac{1}{4}x\ln|x| - \frac{1}{8}x$

$h'(x) = 1 - 4x - \frac{1}{4}x\ln|x|$

$\Leftrightarrow h'(x) = x\left(\frac{1}{x} - 4 - \frac{1}{4}\ln|x|\right)$

Or $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 4 + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1}{x}\right|$

$= \frac{1}{x} - 4 - \frac{1}{4}\ln|x|$

D'où $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^*$, $\boldsymbol{h'(x) = x\, f\left(\frac{1}{x}\right)}$

3. On sait que :

$\frac{1}{x} \in]-\infty; 0[\;\Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[$

$\frac{1}{x} \in]0\,; \alpha\,[\;\Leftrightarrow\; x \in \left]\frac{1}{\alpha}\,; +\infty\right[$

$\frac{1}{x} \in]\alpha\,; +\infty[\Leftrightarrow x \in \left]0\,; \frac{1}{\alpha}\right[$

D'après PARTIE A3

$\forall\, x \in]-\infty; 0[, x < 0$ et $f\left(\frac{1}{x}\right) < 0$

$\forall\, x \in \left]0\,; \frac{1}{\alpha}\right[, x > 0$ et $f\left(\frac{1}{x}\right) < 0$

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{\alpha}\,; +\infty\right[, x > 0$ et $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$

Par conséquent :

$\forall\, x \in]-\infty; 0[, h'(x) > 0$

$\forall\, x \in \left]0\,; \frac{1}{\alpha}\right[, h'(x) > 0$

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{\alpha}\,; +\infty\right[, h'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $\left]-\infty; \frac{1}{\alpha}\right[, h$ est croissante

Sur $\left]\frac{1}{\alpha}\,; +\infty\right[, h$ est décroissante

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2\ln(-x)$

Posons $X = -x$;

Si $x \longrightarrow -\infty$ alors $X \to +\infty$ et

$\lim\limits_{X\to+\infty} -X + 1 - \frac{31}{16}X^2 - \frac{1}{8}X^2\ln X = -\infty$

Car $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$

Alors $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{31}{16} - \frac{1}{8}\ln x\right) = -\infty$

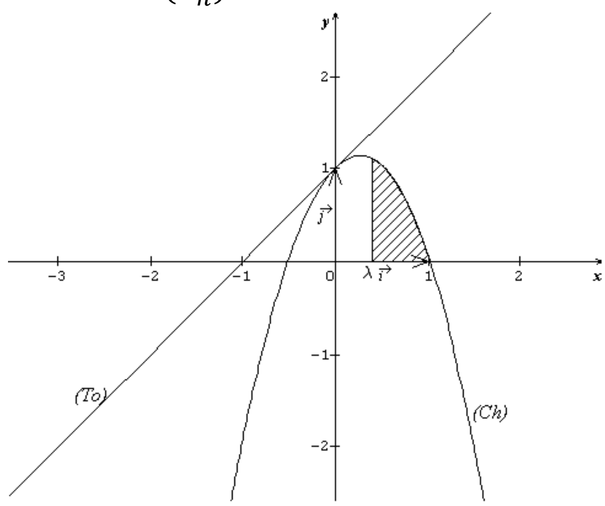
$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty}$

<u>Tableau de variation de *h*</u>

x	$-\infty$	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$-\infty$ ↗	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	↘ $-\infty$

4. (T_0): $y = x + 1$

Tracer de $(\mathcal{C}_h)$



Unité : 2 cm

5.

a. $\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^1 h(x)\,dx$

$\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^1 \left(x + 1 - \frac{31}{16}x^2\right)dx - \frac{1}{8}\int_\lambda^1 x^2\ln|x|\,dx$

Calculons $\int_\lambda^1 x^2\ln|x|\,dx$

<u>Intégration par parties :</u>

$\begin{cases} u(x) = \ln|x| \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$ on a : $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{3}x^3 \end{cases}$

$$\int_\lambda^1 x^2\ln|x|\,dx$$

$= \left[\frac{1}{3}x^3\ln|x|\right]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 \frac{1}{3}x^2dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3\ln|x| - \frac{1}{9}x^3\right]_\lambda^1$

$\mathcal{A}(\lambda) = \left[\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{91}{144}x^3 - \frac{1}{24}x^3\ln|x|\right]_\lambda^1$

$\boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda) = \frac{125}{144} - \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{91}{144}\lambda^3 + \frac{1}{24}\lambda^3\ln\lambda}$

b. $\lim\limits_{\lambda\to0^+} \lambda^3\ln\lambda = 0$

Alors $\boldsymbol{\lim\limits_{\lambda\to0^+} \mathcal{A}(\lambda) = \frac{125}{144}}$

PARTIE C

1.

a. g est une fonction paire.

$g'(x) = -\frac{1}{4x} < 0\ ,\ \forall\, x\ > 0$

Alors g est une fonction décroissante sur $]0;+\infty[$

Tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$-\infty$ ↘	$+\infty$

On en déduit que :

$g([3;4]) = [g(4);g(3)] = [3{,}65\ ;3{,}73]$

Or $[3{,}65\ ;3{,}73] \subset [3;4]$

D'où $\boldsymbol{g([3;4]) \subset [3;4]}$

b. $g(x) = x$

$\Leftrightarrow 4 - x - \frac{1}{4}\ln|x| = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = 0$

$\boldsymbol{\alpha}$ étant l'unique solution de l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$, alors $\boldsymbol{\alpha}$ est aussi l'unique solution de l'équation $\boldsymbol{g(x) = x}$ car ces deux équations sont équivalentes

a. $U_0 = 3 \in [3;4]$.

Supposons que $U_n \in [3;4]$ pour tout entier n puis montrons que $U_{n+1} \in [3;4]$

En effet :

$U_n \in [3;4]\ \Rightarrow\ g(U_n) \in [3;4]$

Car $g([3;4]) \subset [3;4]$

Or par définition $U_{n+1} =\ g(U_n)$

D'où $U_{n+1} \in [3;4]$ si $U_n \in [3;4]$

On conclut donc que :
$\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n \in [3;4]}$
C'est-à-dire $\boldsymbol{3 \leq\ U_n \leq 4}$

b. $g'(x) = -\frac{1}{4x}$

$3 \leq\ x \leq 4 \Leftrightarrow\ -\frac{1}{12} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{16}$

$\frac{1}{16} \leq |g'(x)| \leq \frac{1}{12}$

On déduit donc que
$\boldsymbol{\forall x \in [3;4],\ |g'(x)| \leq \frac{1}{12}}$

On sait que $\alpha \in [3;4]$

$\forall x \in [3;4]$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à l'intervalle de bornes $(\alpha\ ;x)$ on a :

$|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{12}|x - \alpha|$.

Or $g(\alpha) =\ \alpha$

D'où $\boldsymbol{\forall x \in [3;4]}$,
$\boldsymbol{|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{12}|x - \alpha|}$

c. On sait que $3 \leq\ U_n \leq 4$.

Donc en faisant $x = U_n$ dans la relation précédente on a :

$|g(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{12}|U_n - \alpha|$

Or par définition : $U_{n+1} =\ g(U_n)$

D'où $\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N}}$,
$\boldsymbol{|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12}|U_n - \alpha|}$

Déduction :

En partant de l'inégalité précédente, on a :

$n = 0 \Rightarrow\quad |U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{12}|U_0 - \alpha|$

$n = 1 \Rightarrow\quad |U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{12}|U_1 - \alpha|$

$n = 3 \Rightarrow\quad |U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{12}|U_2 - \alpha|$

$\vdots$

$n = n - 1 \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{12}|U_{n-1} - \alpha|$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n |U_0 - \alpha|$

$|U_0 - \alpha| = |3 - \alpha|$

$3 \leq \alpha \leq 4$

$\Leftrightarrow -4 \leq -\alpha \leq -3$

$\Leftrightarrow -1\ \leq U_0 - \alpha < 0$

$\Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq 1$

$\Leftrightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n \times 1$

On en déduit que :
$\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N},\ |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n}$

d. Comme g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, $g(\alpha) =\ \alpha$ et $U_{n+1} =\ g(U_n)$, on a :

$U_n < \alpha \Rightarrow g(U_n) > \alpha$
$\Rightarrow U_{n+1} > \alpha$
$\Rightarrow U_n < \alpha < U_{n+1}$

D'autres parts :

$U_n > \alpha \Rightarrow g(U_n) < \alpha$
$\Rightarrow U_{n+1} < \alpha$
$\Rightarrow U_{n+1} < \alpha < U_n$

On conclut donc que :
α est compris entre deux termes consécutifs de la suite (U_n)

Par ailleurs :
On pourra remarquer que $U_0 < \alpha < U_1$ et montrer alors par récurrence que pour tout entier p : $U_{2p} < \alpha < U_{2p+1}$

e. Il suffit de résoudre $\left(\frac{1}{12}\right)^n \leq \frac{1}{100}$ pour obtenir $|U_n - \alpha| \leq 10^{-2}$
On trouve que le plus petit entier n_0 à partir duquel cette inégalité est vraie est $n_0 = 2$.
D'où l'encadrement :

$$U_2 < \alpha < U_2 + 10^{-2}$$

Une calculatrice fournit $U_2 \simeq 3{,}675$.
On peut donc prendre $\alpha \simeq 3{,}68$ avec la précision 10^{-2}.

PROBLEME 9
PARTIE A

$f(x) = 2 + \frac{\ln x}{x+1}$; $D_f = \mathbb{R}_+^*$

1. $g(x) = 1 + x - x\ln x$; $D_g = \mathbb{R}_+^*$

a. $g'(x) = -\ln x$
$\forall\, x \in \,]0;1[,\ g'(x) > 0$
$\forall\, x \in \,]1\,;+\infty[,\ g'(x) < 0$
On en déduit que :
Sur $]0;1[$, g est croissante
Sur $]1\,;+\infty[$, g est décroissante

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + x(1-\ln x)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

Tableau de variation de g

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

b. Sur $]0;1]$, $g(x) \neq 0$ car
$\forall\, x \in \,]0;1],\ g(x) \in \,]1;2]$
Sur $]1\,;+\infty[$, g est continue car dérivable et est strictement décroissante.
Alors g réalise une bijection de $]1\,;+\infty[$ sur $]-\infty;2[$ et $0 \in \,]-\infty;2[$
donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $x_0 \in \,]1\,;+\infty[$

$\begin{cases} g(3{,}5) = 0{,}125 > 0 \\ g(3{,}6) = -0{,}008 < 0 \end{cases}$

On a : $g(3,5) \times g(3,6) < 0$
Alors $x_0 \in \,]3,5\,;3,6[$

c. Signe de $g(x)$
$\forall\, x \in \,]0\,;x_0[,\ g(x) > 0$
$\forall\, x \in \,]x_0\,;+\infty[,\ g(x) < 0$

2.

a. $f'(x) = \frac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2} = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$
$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, x(x+1)^2 > 0$
Alors $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$.

Par conséquent :

$\forall\, x \in \left]0\,;\, x_0\right[,\ f'(x) > 0$

$\forall\, x \in \left]x_0\,;+\infty\right[, f'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]0\,;\, x_0[,\ f$ est croissante

Sur $]x_0\,;+\infty[, f$ est décroissante

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x+1} = 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 2 + \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x+1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \end{cases}$

<u>Tableau de variations de f</u>

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(x_0)$	↘	2

$f(x_0) = 2 + \frac{\ln x_0}{x_0+1}$

Or $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{x_0+1}{x_0}$

$$\boxed{\text{D'où } f(x_0) = 2 + \frac{1}{x_0}}$$

<u>Encadrement de $f(x_0)$</u>

$3{,}5 \leq x_0 \leq 3{,}6$

$\Leftrightarrow 0{,}27 \leq \frac{1}{x_0} \leq 0{,}28$

$\Leftrightarrow 2{,}27 < f(x_0) < 2{,}28$

b. (D) : $y = 2$

$\boldsymbol{f(x) - y = \frac{\ln x}{x+1}}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ x + 1 > 0$

Alors le signe de $f(x) - y$ est celui de $\ln x$

Par conséquent :

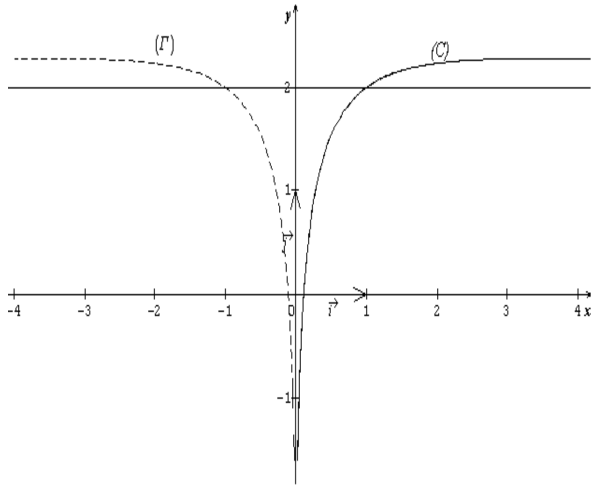
$\forall\, x \in]0; 1[, f(x) - y < 0$

$\forall x \in]1;\ +\infty[, f(x) - y > 0$

On en déduit que :

> **Sur $]0; 1[$, $(\mathcal{C})$ est en dessous de (D)**
> **Sur $]1;\ +\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au dessus de (D)**

Tracer de $(\mathcal{C})$



c. $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ F(-x) = F(x)$

Alors F est une fonction paire

D'autre part :

$\forall\, x > 0, F(x) = f(x)$

> **On en déduit que :**
> **Sur $]0;\ +\infty[$, $(\mathcal{C}) = (\Gamma)$**
> **Sur $]-\infty; 0[$, (Γ) est la symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'axe des ordonnées. (Voir figure)**
> $(\Gamma) = (\mathcal{C}) \cup S_{(O;\vec{j})}((\mathcal{C}))$

PARTIE B

1. $I(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x+1} dx;\ t \geq 1$

a. $I(t)$ est l'aire en unité d'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$

b. $J(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^t$

$$\boxed{J(t) = \frac{1}{2}(\ln t)^2}$$

c. $K(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$

<u>Intégration par parties :</u>

$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$K(t) = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^t + \int_1^t \frac{1}{x^2} dx$

$K(t) = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^t$

$$\boldsymbol{K(t) = \frac{t-1-\ln t}{t}}$$

$K'(t) = \frac{\ln t}{t^2} \geq 0 \; \forall \; t \geq 1$

On en déduit que :

Sur $[1;\, +\infty[$, K est croissante

$\lim\limits_{t\to +\infty} K(t) = 1$

Tableau de variation de K

t	1	$+\infty$
$K'(t)$	+	
$K(t)$	0 ↗	1

On en déduit que :
$\forall \; t \geq, \; 0 \leq K(t) \leq 1$

2. $\forall \; \boldsymbol{x \geq 1}$, $\boldsymbol{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} \geq 0}$

D'autres parts :

$x \geq 1 \Leftrightarrow x + 1 \geq x$

$\Leftrightarrow \; x(x+1) \geq x^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} \leq \frac{1}{x^2}$

On conclut donc que :
$\boldsymbol{\forall \; x \geq 1, 0 \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x^2}}$

Déduction :

$\forall \; x \geq 1$, $\ln x \geq 0$ et

$0 \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln x}{x+1} \leq \frac{\ln x}{x^2}$

$\Rightarrow 0 \leq \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx - \int_1^t \frac{\ln x}{x+1} dx \leq \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$

Donc on a : $\boldsymbol{0 \leq J(t) - I(t) \leq K(t)}$

3. $0 \leq \frac{1}{2}(\ln t)^2 - I(t) \leq K(t) \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} - \frac{I(t)}{(\ln t)^2} \leq \frac{1}{(\ln t)^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{(\ln t)^2} \leq \frac{I(t)}{(\ln t)^2} \leq \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{(\ln t)^2} = 0$

Alors $\boldsymbol{\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{I(t)}{(\ln t)^2} = \frac{1}{2}}$

PARTIE C

1. $h(x) = f(x) - x$; $D_h = [1;+\infty[$

a. $\boldsymbol{h'(x) = f'(x) - 1}$

$\forall \; x \in \,]x_0;\; +\infty[, f'(x) < 0$ et donc

$\forall \; x \in \,]x_0;\; +\infty[, h'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]x_0;\; +\infty[, h$ est décroissante

b. $\boldsymbol{f''(x) = \frac{(x^3+2x^2+x)g'(x)-(3x^2+4x+1)g(x)}{[x^3+2x^2+x]^2}}$

$\forall \; x \in [1;\; x_0]$; $g'(x) < 0$ et $g(x) \geq 0$

Donc $(x^3 + 2x^2 + x)g'(x) < 0$ et

$(3x^2 + 4x + 1)g(x) \geq 0$

Par conséquent :

$\forall \; x \in [1;\; x_0], f''(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $[1;\; x_0], f'$ est décroissante

Par conséquent :

$\forall \; x \in [1;\; x_0],\; f'(x_0) \leq f'(x) \leq f'(1)$

Alors $\boldsymbol{0 \leq f'(x) \leq \frac{g(1)}{4}}$

c. $\forall \; x \in [1;\; x_0];\; 0 \leq f'(x) \leq \frac{g(1)}{4}$

$\Rightarrow \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 1 \leq f'(x) - 1 \leq -\frac{1}{2} < 0$

$\Rightarrow h'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur$[1;\; x_0], h$ décroissante

2.

a. h est dérivable donc continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$

Elle réalise alors une bijection de $[1;+\infty[$ sur $h([1;+\infty[) = \,]-\infty\,;1]$ et $0 \in \,]-\infty\,;1]$.

D'où l'équation $\boldsymbol{h(x) = 0}$ admet une unique solution $\boldsymbol{\alpha} \in [1;+\infty[$

$\begin{cases} h(2) = 0{,}23 > 0 \\ h(3) = -\,0{,}73 < 0 \end{cases}$

On a : $\boldsymbol{h(2) \times h(3) < 0}$
Alors $\boldsymbol{2 < \alpha < 3}$

$h(x) = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; f(x) = x$

Alors $\boldsymbol{\alpha}$ est l'unique solution de l'équation $\boldsymbol{f(x) = x}$ sur $[1;+\infty[$ et on a : $\boldsymbol{2 \leq \alpha \leq 3}$

b. f est croissante sur $[2\ ;\ 3]$
$\forall\, x \in [2\ ;\ 3]$,
$f(2) \leq f(x) \leq f(3)$
$\Leftrightarrow$ 2,23 $\leq f(x) \leq$2,27

Or $[2{,}23\ ;\ 2{,}27] \subset [2\ ;\ 3]$
D'où $2 \leq f(x) \leq 3$

Donc $\forall\, \boldsymbol{x} \in [\mathbf{2}\ ;\ \mathbf{3}]$, $\boldsymbol{f(x)} \in [\mathbf{2}\ ;\mathbf{3}]$

c. $[2\ ;\ 3] \subset [1;\ x_0]$.
Donc f' est décroissante sur $[2\ ;\ 3]$
$\forall\, x \in [2\ ;\ 3]$, $f'(3) \leq f'(x) \leq f'(2)$
$\Leftrightarrow$ 0,015 $\leq f'(x) \leq$ 0,09 $\leq \frac{1}{9}$

Donc $\forall\, \boldsymbol{x} \in [\mathbf{2}\ ;\ \mathbf{3}]$, $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{f'(x)} \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}$

d. $\forall\, x \in [2\ ;\ 3]$, en appliquant à l'intervalle de bornes $(x;\ \alpha)$ l'inégalité des accroissements finis, on a :
$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{9}|x - \alpha|$
Or $f(\alpha) = \alpha$

D'où $\forall\, \boldsymbol{x} \in [\mathbf{2}\ ;\ \mathbf{3}]$,
$|\boldsymbol{f(x)} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\alpha}|$

3.

a. $U_0 = 2 \in [2\ ;\ 3]$
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \in [2\ ;\ 3]$ et montrons que $U_{n+1} \in [2\ ;\ 3]$
En effet :
$U_n \in [2\ ;\ 3] \Longrightarrow f(U_n) \in [2\ ;\ 3]$
Car $\forall\, x \in [2\ ;\ 3]$, $f(x) \in [2\ ;3]$
Or par définition $U_{n+1} = f(U_n)$
D'où $U_{n+1} \in [2\ ;\ 3]$ si $U_n \in [2\ ;\ 3]$

On conclut alors que :
$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{U_n} \in [\mathbf{2}\ ;\ \mathbf{3}]$

On sait aussi que :
$\forall\, x \in [2\ ;\ 3]$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{9}|x - \alpha|$
Prenons $x = U_n$
On a : $|f(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_n - \alpha|$
Or par définition $U_{n+1} = f(U_n)$

D'où $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$,
$|\boldsymbol{U_{n+1}} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}|\boldsymbol{U_n} - \boldsymbol{\alpha}|$

b. En partant de l'inégalité précédente, on a :
$n = 0 \Longrightarrow \quad |U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_0 - \alpha|$
$n = 1 \Longrightarrow \quad |U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_1 - \alpha|$
$n = 3 \Longrightarrow \quad |U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_2 - \alpha|$
$\vdots$
$n = n - 1 \Longrightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_{n-1} - \alpha|$
Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.
On obtient après simplification :
$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n |U_0 - \alpha|$
$|U_0 - \alpha| = |2 - \alpha|$
$2 \leq \alpha \leq 3$
$\Leftrightarrow\ -1 \leq U_0 - \alpha \leq 0$
$\Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq 1$
$\Leftrightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times 1$

Donc $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $|\boldsymbol{U_n} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\right)^{\boldsymbol{n}}$

c. $0 < \frac{1}{9} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = 0$

On en déduit que la suite $(\boldsymbol{U_n})$ converge et $\lim\limits_{\boldsymbol{n} \to +\infty} \boldsymbol{U_n} = \boldsymbol{\alpha}$

PROBLEME 10
PARTIE A

$f(x) = \sqrt{x}\, e^{1-x}$; $D_g = [0; +\infty[$

1. $f(x) = \sqrt{x}\, e^{1-x}$
$= \frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \times e \times e^{-x}$
$= \frac{e}{\sqrt{x}} \times xe^{-x}$

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = \frac{e}{\sqrt{x}} \times \frac{x}{e^x}}}$$

On a donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x) = 0}}$$

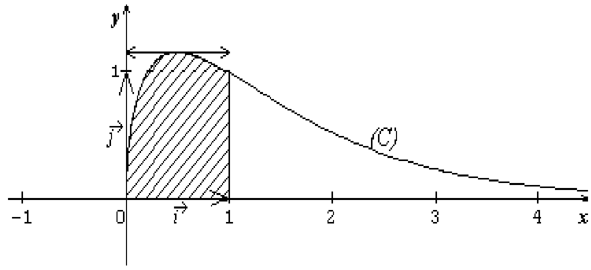
Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e}{\sqrt{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \end{cases}$

La courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$

2. $\forall\ x > 0$; $\boldsymbol{f'(x) = \frac{(1-2x)}{2\sqrt{x}} e^{1-x}}$
$\forall\ x \in]0; +\infty[, 2\sqrt{x} > 0$ et $e^{1-x} > 0$
Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $1 - 2x$
$1 - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$
Par conséquent :
$\forall x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[, f'(x) > 0$
$\forall x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[, f'(x) < 0$
On en déduit que :
Sur $\left]0; \frac{1}{2}\right[$, f est croissante
Sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$, f est décroissante
<u>**Tableau de variation de f**</u>

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	↘	0

3. Tracé de $(\mathcal{C})$:



4.
a. Voir figure
b. $\mathcal{V} = uv \times \pi \int_0^1 f^2(x)dx$
$\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 xe^{2-2x}dx$
Intégration par parties
$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{2-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{2}e^{2-2x} \end{cases}$
$\int_0^1 xe^{2-2x}dx = \left[-\frac{1}{2}xe^{2-2x}\right]_0^1 +$
$\int_0^1 \frac{1}{2}e^{2-2x}dx$
$\int_0^1 xe^{2-2x}dx = \left[-\frac{1}{4}(2x+1)e^{2-2x}\right]_0^1$
$\int_0^1 xe^{2-2x}dx = \frac{e^2-3}{4}$
$uv = 8cm^3$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{V} = 8\pi\left(\frac{e^2-3}{4}\right)cm^3 = 2\pi(e^2-3)cm^3}}$$

PARTIE B

$U_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$

1. U_n est l'aire en unité d'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = n$ et $x = n+1$
2. f est décroissante sur $[1; +\infty[$.
D'où $\forall\ n \geq 1$ et $\forall\ t, n \leq t \leq n+1$
On a : $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$
En appliquant l'inégalité de la moyenne sur , on a :
$f(n+1)[n+1-n] \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)[n+1-n]$

Donc $\forall\ \boldsymbol{n \geq 1}$,
$\boldsymbol{f(n+1) \leq U_n \leq f(n)}$

3. On déduit de cette inégalité que :
$f(n+2) \leq U_{n+1} \leq f(n+1) \leq U_n \leq f(n)$

C'est-à-dire $\forall n \geq 1$, $U_{n+1} \leq U_n$
Ceci montre que (U_n) est une suite décroissante.

4. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
D'où $\lim_{n \to +\infty} f(n) = \lim_{n \to +\infty} f(n+1) = 0$

On déduit que (U_n) est convergente et $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

PARTIE C

1.
a. F est l'unique primitive de f s'annulant pour $x = 1$
b. On en déduit que :

$\forall x \geq 1, \ F'(x) = f(x)$

D'après l'étude de f dans PARTIE A
$\forall x \in [1; +\infty[, f(x) > 0$
Par conséquent :
Sur $[1; +\infty[, F$ est croissante

2.
a. $\forall t \geq 0, \left(\sqrt{t} - \sqrt{2}\right)^2 \geq 0$
$\Leftrightarrow t - 2\sqrt{t}\sqrt{2} + 2 \geq 0$

Donc $\forall t \geq 0, (t+2) \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}$

b. Déduction
$\forall t \geq 1, (t+2) \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}$
$\Leftrightarrow (t+2)e^{1-t} \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}e^{1-t}$
D'où $\forall x \geq 1$,
$\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt \geq 2\sqrt{2}\int_1^x \sqrt{t}e^{1-t}dt$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}F(x) \leq \int_1^x (t+2)e^{1-t}\,dt$

On en déduit que :
$\forall x \geq 1, F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_1^x (t+2)\,e^{1-t}dt$

c. <u>Intégration par parties</u>
$\begin{cases} u(t) = t+2 \\ v'(t) = e^{1-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{1-t} \end{cases}$
$\int_1^x (t+2)\,e^{1-t}dt$
$= [-(t+2)e^{1-t}]_1^x + \int_1^x e^{1-t}\,dt$
$= [-(t+2)e^{1-t} - e^{1-t}]_1^x$
$\int_1^x (t+2)\,e^{1-t}dt = [-(t+3)e^{1-t}]_1^x$

$\int_1^x (t+2)\,e^{1-t}dt = 4 - (x+3)e^{1-x}$

Déduction
$\forall x \in [1; +\infty[, (x+3) > 0 \,; e^{1-x} > 0$
$\Leftrightarrow (x+3)e^{1-x} \geq 0$
$\Leftrightarrow -(x+3)e^{1-x} \leq 0$
$\Leftrightarrow 4 - (x+3)e^{1-x} \leq 4$
$\Leftrightarrow \int_1^x (t+2)\,e^{1-t}dt \leq 4$
$\Leftrightarrow F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_1^x (t+2)\,e^{1-t}dt \leq \frac{2}{\sqrt{2}}$
$\Leftrightarrow F(x) \leq \sqrt{2}$
D'autre part :
$\forall t \geq 1, f(t) \geq 0$
$\Leftrightarrow \int_1^x f(t)dt \geq 0 \ \forall x \geq 1$
$\Leftrightarrow F(x) \geq 0$

On en déduit que :
$\forall x \geq 1, 0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$

3.
a. $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_{n-1}$
$= \int_1^2 f(t)dt + \int_2^3 f(t)dt + \cdots + \int_{n-1}^n f(t)dt$
D'après la relation de Chasles on a :

$S_n = \int_1^n f(t)dt$

b. $S_n = F(n) \Leftrightarrow 0 \leq S_n \leq \sqrt{2}$
La suite (S_n) est croissante et bornée.
On en déduit que (S_n) est convergente
On sait que : $0 \leq S_n \leq \sqrt{2}$
D'où en passant à la limite, on a :
$0 \leq \lim_{n \to +\infty} S_n \leq \sqrt{2}$

Soit $0 \leq l \leq \sqrt{2}$

PROBLEME 11

PARTIE A

$f(x) = e^{-x}\cos x$; $D_f = \mathbb{R}$

1. $\boldsymbol{f'(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x)}$

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0$

Ceci montre bien que $f'(x)$ est du signe de $-(\cos x + \sin x)$

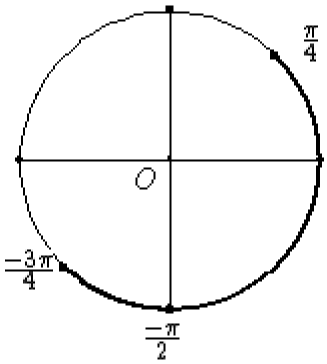
2. $\cos x + \sin x$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$

$$\boxed{\textbf{Donc } \cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$\forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right],\ \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-\frac{3\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$



$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le 0$

$\Leftrightarrow \frac{-3\pi}{4} \le x - \frac{\pi}{4} \le -\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{-\pi}{2} \le x \le -\frac{\pi}{4}$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{-\pi}{2} \le x - \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{-\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$

$f'(x) = -\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Par conséquent :

$\forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{-\pi}{4}\right],\ f'(x) \ge 0$

$\forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right],\ f'(x) \le 0$

On en déduit que :

Sur $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{-\pi}{4}\right]$, f est croissante

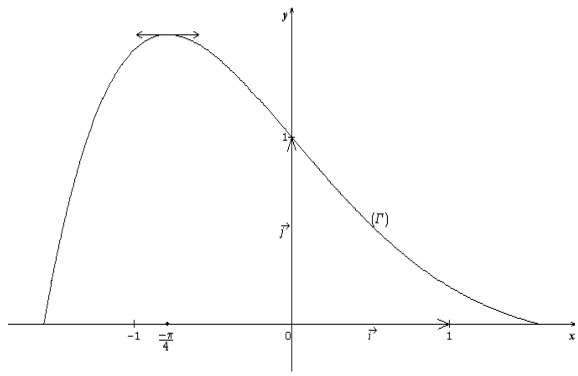
Sur $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right]$, f est décroissante

3. **Tableau de variations**

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$	↘	0

Les coefficients directeurs des tangentes :

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$e^{\frac{\pi}{2}}$	0	-1	$-e^{\frac{-\pi}{2}}$



4.

a. $F'(x) = f(x)$

$\Leftrightarrow\ [(b-a)\cos x - (b+a)\sin x]e^{-x} = e^{-x}\cos x$

Par identification on a :

$\begin{cases} b - a = 1 \\ b + a = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\boxed{\boldsymbol{F(x) = \frac{e^{-x}}{2}(-\cos x + \sin x)}}$$

b. $\mathcal{A} = ua \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

$\mathcal{A} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

$\mathcal{A} = 25\left(F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) cm^2$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A} = 25 \times \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}\, cm^2}}$$

Ou encore

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A} = 25sh\left(\frac{\pi}{2}\right) cm^2}}$$

PARTIE B

1. $f\left(\left]-\frac{\pi}{2};\ 0\right[\right) = \left]0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right[$

$\Leftrightarrow \forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2};\ 0\right[,$

$x < 0 < f(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow \forall\, \boldsymbol{x} \in \left]-\frac{\pi}{2};\ \mathbf{0}\right[, \boldsymbol{f(x) \neq x}$

D'autres parts :

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq -\frac{\pi}{2}$

$f(0) = 1 \Leftrightarrow f(0) \neq 0$

On conclut donc que : $\forall\, \boldsymbol{x} \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \mathbf{0}\right], \boldsymbol{f(x) \neq x}$

C'est-à-dire que sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\ \mathbf{0}\right]$, il n'existe pas de point d'intersection de (Γ) avec la droite (Δ) : $\boldsymbol{y = x}$

2. $\varphi(x) = e^{-x}\cos x - x;\ D_\varphi = \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$

a. $\boldsymbol{\varphi(0) = 1}$ **et** $\boldsymbol{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}}$

b. $\boldsymbol{\varphi'(x) = f'(x) - 1}$

$\forall\, x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right], f'(x) < 0 \Leftrightarrow \varphi'(x) < 0$

Sur $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, φ est décroissante

<u>**Tableau de variation de φ**</u>

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$\varphi'(x)$	$-$
$\varphi(x)$	$1 \searrow -\frac{\pi}{2}$

c. φ est continue car dérivable sur $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et est strictement décroissante sur cet intervalle. φ réalise alors une bijection de $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ 1\right]$ et $0 \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ 1\right]$.

Donc l'équation $\boldsymbol{\varphi(x) = 0}$ admet une unique solution $\boldsymbol{\alpha}$ dans $\left]\mathbf{0};\ \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right]$

$\boldsymbol{\varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha}$

d. $\beta = f(1) = e^{-1}\cos 1$

$]0\,;1[\ \subset \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right]$

$\begin{cases} \varphi(0) = 1 > 0 \\ \varphi(1) = \beta - 1 < 0 \end{cases}$

On a : $\boldsymbol{\varphi(0) \times \varphi(1) < 0}$ **D'où** $\boldsymbol{\alpha} \in\ ]\mathbf{0}\,;\mathbf{1}[$ **c'est-à-dire** $\boldsymbol{\alpha} < 1$

D'autres parts :

f étant décroissante sur $]0\,;1[$

On a :

$\alpha < 1 \Leftrightarrow f(1) < f(\alpha)$

Or $f(\alpha) = \alpha$ et $\beta = f(1)$

D'où $\beta < \alpha$

On a : $\boldsymbol{\beta < \alpha}$ **et** $\boldsymbol{\alpha} < 1$ **Donc** $\boldsymbol{\beta < \alpha} < 1$

3. On considère la suite (U_n) définie par son premier terme $U_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$

a. $U_0 = 1$ donc on a : $\beta \leq U_0 \leq 1$.

Supposons $\beta \leq U_n \leq 1$ pour tout entier n puis montrons que $\beta \leq U_{n+1} \leq 1$

En effet :

$\beta \leq U_n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \beta \leq U_n \leq 1$

$\Rightarrow f(1) \leq f(U_n) \leq f(0)$

Car f est décroissante sur $[0\,;1]$

Or par définition $U_{n+1} = f(U_n)$

D'où $\beta \leq U_{n+1} \leq 1$ si $\beta \leq U_n \leq 1$

On conclut donc que : $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{\beta \leq U_n \leq 1}$

b. On pose $k = |f'(\beta)|$

$f''(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x}\sin x > 0\ \forall\, x \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right]$

On en déduit que :

Sur $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right], f'$ est croissante

Par conséquent :

$\beta \in\ ]0\,;1[\ \subset \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right]$

$\Leftrightarrow f'(0) < f'(\beta) \leq f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow -1 < f'(\beta) \leq -e^{-\frac{\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{\pi}{2}} \leq |f'(\beta)| < 1$

On a donc : $\boldsymbol{|f'(\beta)|} < 1$ **Ce qui montre que :** $\boldsymbol{k} < 1$

D'autres parts :

$\forall\, x \in [\beta; 1]$, on a :

$f'(\beta) \leq f'(x) \leq f'(1) < 0$

$\Leftrightarrow\ |f'(x)| \leq |f'(\beta)|$

Donc $\forall\, \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{\beta}; \mathbf{1}], |\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x})| \leq \boldsymbol{k}$

c. Appliquons l'inégalité des accroissements finis à l'intervalle de bornes $(\alpha\,; U_n\,)$

On a :

$|f(U_n) - f(\alpha)| \leq k|U_n - \alpha|$.

Or $U_{n+1} = f(U_n)$ et $f(\alpha) = \alpha$

Donc $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$,
$|\boldsymbol{U_{n+1}} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \boldsymbol{k}|\boldsymbol{U_n} - \boldsymbol{\alpha}|$

En partant de cette inégalité, on a :

$n = 0 \Longrightarrow \quad |U_1 - \alpha| \leq k|U_0 - \alpha|$

$n = 1 \Longrightarrow \quad |U_2 - \alpha| \leq k|U_1 - \alpha|$

$n = 3 \Longrightarrow \quad |U_3 - \alpha| \leq k|U_2 - \alpha|$

$\vdots$

$n = n - 1 \Longrightarrow |U_n - \alpha| \leq k|U_{n-1} - \alpha|$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$|U_n - \alpha| \leq k^n|U_0 - \alpha|$

$|U_0 - \alpha| = |1 - \alpha|$

$0 < \ \alpha < 1$

$\Leftrightarrow -1 < U_0 - \ \alpha < 0$

$\Leftrightarrow |U_0 - \alpha| < 1$

$\Leftrightarrow |U_n - \alpha| \leq k^n|U_0 - \alpha| \leq 1 \times k^n$

On en déduit que :
$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, |\boldsymbol{U_n} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \boldsymbol{k^n}$

d. $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$ car $k < 1$

On n'en déduit que la suite $(\boldsymbol{U_n})$ est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} \boldsymbol{U_n} = \boldsymbol{\alpha}$

PROBLEME 12

PARTIE A

$u(x) = 2x - \sqrt{1 + x^2};\ D_u = \mathbb{R}$

1. $u(x) = 0 \ \Leftrightarrow 2x - \sqrt{1 + x^2} = 0$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{1 + x^2} = 2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ 1 + x^2 = 4x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\boldsymbol{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

2. $u(0) = -1 < 0$ d'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$u(x)$	$-$	0	$+$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \left]-\infty\,; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[,\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) < 0$

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \left]\frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ +\infty\right[, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) > 0$

PARTIE B

1. $g(x) = x - 2\sqrt{1 + x^2};\ D_g = \ \mathbb{R}$

a. Les fonctions $x \ \longmapsto x$ et $x \ \longmapsto 1 + x^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ car ce sont des fonctions polynômes

D'autres parts :

$\forall\, x \in \mathbb{R}, 1 + x^2 > 0$

Alors la fonction $x \ \longmapsto \sqrt{1 + x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

On conclut donc que :
$g\colon x \ \longmapsto x - 2\sqrt{1 + x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

b. $\boldsymbol{g'}(\boldsymbol{x}) = \frac{\sqrt{1+x^2}-2x}{\sqrt{1+x^2}} = \ -\frac{u(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

c. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \sqrt{1 + x^2} > 0$

Alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $-u(x)$

Par conséquent :

$\forall x \in \left]-\infty\,; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[, g'(x) \ > 0$

$\forall x \in \left]\frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ +\infty\right[, g'(x) \ < 0$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(1 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - 2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$

$$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \boldsymbol{g(x)} = -\infty;\ \lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{g(x)} = -\infty}$$

<u>Tableau de variations de g</u>

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$ ↗	- $\sqrt{3}$	↘ $-\infty$

3.

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \boldsymbol{\frac{g(x)}{x}} = \mathbf{3}$

Et $\lim\limits_{x \to -\infty} (g(x) - 3x)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-2x - 2\sqrt{1 + x^2}\right)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \boldsymbol{(g(x) - 3x) = 0}$

Alors la droite d'équation $\boldsymbol{y = 3x}$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - 2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{\frac{g(x)}{x}} = \mathbf{-1}$

Et $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) + x)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - 2\sqrt{1 + x^2}\right)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{(g(x) + x) = 0}$

Alors la droite d'équation $\boldsymbol{y = -x}$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$

b. $\forall\, x \leq 0, y = 3x$ et

$g(x) - y = \frac{-2}{-x+\sqrt{1+x^2}} < 0$

On n'en déduit que :

(C) est en dessous de l'asymptote d'équation $y = 3x$.

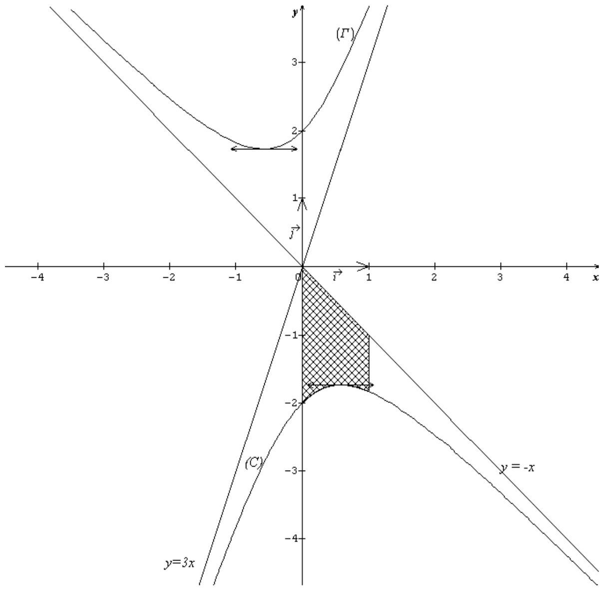
$\forall\, x \geq 0, y = -x$ et

$g(x) - y = \frac{-2}{x+\sqrt{1+x^2}} < 0$

On en déduit que :

(C) est en dessous de l'asymptote d'équation $y = -x$

c. Représentation graphique



PARTIE C

1. $h(-x) = -g(x)$

$\Leftrightarrow h(-x) = -x + 2\sqrt{1 + x^2}$

$\Leftrightarrow h(-x) = -x + 2\sqrt{1 + (-x)^2}$

$$\boxed{\textbf{D'où } \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{h(x) = x + 2\sqrt{1 + x^2}}}$$

2. (C) : $y = x - 2\sqrt{1 + x^2}$

$\Leftrightarrow y - x = -2\sqrt{1 + x^2} \leq 0$

$\Leftrightarrow (y - x)^2 = 4(1 + x^2)\ ;\ y - x \leq 0$

$\Leftrightarrow$ (C) : $(y - x)^2 = 4(1 + x^2);\ y \leq x$

(Γ) : $y = x + 2\sqrt{1 + x^2}$

$\Leftrightarrow y - x = 2\sqrt{1 + x^2} \geq 0$

$\Leftrightarrow (y - x)^2 = 4(1 + x^2)\ ;\ y - x \geq 0$

$\Leftrightarrow (\Gamma) : (y - x)^2 = 4(1 + x^2)\ ;\ y \geq x$

Or

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x \text{ ou } y \geq x\} = \mathbb{R}^2$.

D'où (C) ∪ (Γ): $(y - x)^2 = 4(1 + x^2)$

On a donc

(C) ∪ (Γ): $\boldsymbol{y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0}$

3. $\left(-y\right)^2 - 2(-x)(-y) - 3(-x)^2 - 4$
$= y^2 - 2xy - 3x^2 - 4.$
Donc si le point $M(x, y) \in (\mathrm{C}) \cup (\Gamma)$
alors le point $M'(-x, -y) \in (\mathrm{C}) \cup (\Gamma)$
On en déduit que :
L'origine O du repère est un centre de symétrie de $(\mathrm{C}) \cup (\Gamma)$

4. (Γ) est donc la réunion de (C) et de sa symétrique de par rapport à l'origine O du repère.

$$\boldsymbol{(\Gamma) = (\mathrm{C}) \cup \mathcal{S}_O\big((\mathrm{C})\big)}$$

(Voir le graphique)

PARTIE D

$f(x) = x\sqrt{1 + x^2} + \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

1.

a. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ 1 + x^2 > x^2$
$\Leftrightarrow\ \sqrt{1 + x^2} > \sqrt{x^2}$
Or $\sqrt{x^2} = |x|$

D'où $\boldsymbol{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sqrt{1 + x^2} > |x|}$

b. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x + \sqrt{1 + x^2} > 0\right\}$
$\forall\, x \in \mathbb{R}, \sqrt{1 + x^2} > |x| \geq -x$
$\Leftrightarrow\ x + \sqrt{1 + x^2} > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

On en déduit que : $\boldsymbol{D_f = \mathbb{R}}$

2. $f'(x) = \sqrt{1 + x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$
$= \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$
$f'(x) = 2\sqrt{1 + x^2}$
$g(x) = x - 2\sqrt{1 + x^2} = x - f'(x)$

D'où une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est par exemple la fonction G définie par : $\boldsymbol{G(x) = \frac{1}{2}x^2 - f(x)}$

3. $\mathcal{A} = ua \times \int_0^1 \big(-x - g(x)\big)\, dx$
$= ua \times \left[-\frac{1}{2}x^2 - G(x)\right]_0^1$
$ua = 4cm^2$
$\mathcal{A} = 4\big(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\big)cm^2$

PROBLEME 13
PARTIE A

$f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

1. $\forall\, x \in D_f$,
$-x + 2 - \frac{3}{x+2} = \frac{-x^2+4-3}{x+2} = \frac{1-x^2}{x+2} = f(x)$

D'où $\boldsymbol{\forall\, x \in D_f ,\ f(x) = -x + 2 - \frac{3}{x+2}}$

2. $\boldsymbol{f'(x) = \frac{-(x^2+4x+1)}{(x+2)^2}}$
$\forall\, x \in D_f , (x + 2)^2 > 0$
Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-x^2 - 4x - 1$
$-x^2 - 4x - 1 = 0$
$\Delta' = 3$
$x_1 = -2 - \sqrt{3}$; $x_2 = -2 + \sqrt{3}$
Par conséquent :
$\forall\, x \in \left]-\infty; -2 - \sqrt{3}\right[, f'(x) < 0$
$\forall x \in \left]-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}\right[, f'(x) > 0$
$\forall x \in \left]-2 + \sqrt{3}; +\infty\right[, f'(x) < 0$
On en déduit que :
Sur $\left]-\infty; -2 - \sqrt{3}\right[$,
f est décroissante
Sur $\left]-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}\right[$,
f est croissante
Sur $\left]-2 + \sqrt{3}\,; +\infty\right[$,
f est décroissante

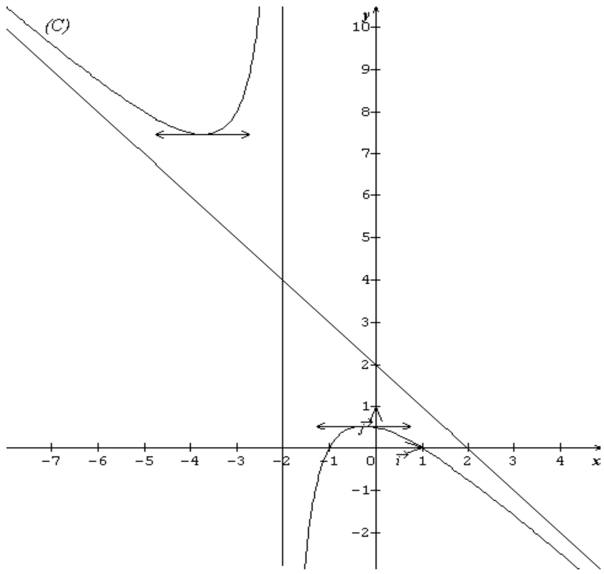
$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$
$$\boldsymbol{\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty}$$
$$\boldsymbol{\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty}$$
$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

<u>**Tableau de variation de f**</u>

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		-2		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↘	$4+2\sqrt{3}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$4-2\sqrt{3}$	↘	$-\infty$

La droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à (C)
D'autres parts :
Posons $y = -x + 2$
$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - y) = 0$

Alors la droite d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique de (C).
Tracer de (C)



3. Soit I le point d'intersection des 2 asymptotes :

$\begin{cases} x = -2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$

Alors $I(-2; 4)$

$f(2 \times (-2) - x) + f(x)$
$= f(-4 - x) + f(x)$
$= x + 4 + 2 - \frac{3}{-x-2} - x + 2 - \frac{3}{x+2} = 8$

$\boldsymbol{f(2 \times (-2) - x) + f(x) = 8 = 2 \times 4}$ **Alors $I(-2; 4)$ est un centre de symétrie de (C)**

4. $\mathcal{A} = ua \times \int_{-1}^{2} \big(y - f(x)\big)\, dx$

$\int_{-1}^{2} \big(y - f(x)\big)\, dx = \int_{-1}^{2} \frac{3}{x+2} dx$
$= [3 \ln(x + 2)]_{-1}^{2}$

$\int_{-1}^{2} \big(y - f(x)\big)\, dx = 6 \ln 2$

$ua = 1\ cm^2$

$\boldsymbol{\mathcal{A} = 6 \ln 2\ cm^2}$

PARTIE B

$\varphi(t) = \frac{1 - \sin^2 t}{2 + \sin t};\ D_\varphi = \mathbb{R}$

1. $\varphi(\pi - t) = \frac{1 - \sin^2(\pi - t)}{2 + \sin(\pi - t)} = \varphi(t)$

Car $\sin(\pi - t) = \sin t$

φ est périodique de période 2π donc l'étude de φ peut se faire sur un intervalle d'amplitude 2π et on complète la courbe représentative de φ par des translations de vecteur $k2\pi\vec{\imath}$; k étant un entier relatif.

D'autres parts :

$\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$

Or $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ et

$\forall\, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];\ (\pi - t) \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

D'où une étude des variations de $\boldsymbol{\varphi}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ permet de construire entièrement la courbe représentative de $\boldsymbol{\varphi}$

2.

a. $f''(x) = \frac{-6}{(x+2)^3} < 0, \forall\, x \in]-2; +\infty[$

Sur $]-2; +\infty[, f'$ est décroissante
On en déduit que :
Sur$[-1; 1], f'$ est décroissante
$f'([-1; 1]) = [f'(1); f'(-1)]$

Alors $\boldsymbol{f'([-1; 1]) = \left[-\frac{2}{3}\ ;\ 2\right]}$

b. $\varphi(t) = f(\sin t)$
$\Leftrightarrow\ \varphi'(t) = \cos t \times f'(\sin t)$

Donc $\boldsymbol{\forall\, t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f'(\sin t) \cos t}$

c. f' est continue car dérivable et est strictement décroissante sur $]-1; 1[$
Alors f' réalise une bijection de $]-1; 1[$ sur $\left]-\frac{2}{3}; 2\right[$et $0 \in \left]-\frac{2}{3}; 2\right[$

Donc l'équation $\boldsymbol{f'(t) = 0}$ admet une unique solution $\boldsymbol{t_0}$ dans $\boldsymbol{]-1; 1[}$.

$-1 < t_0 < 1$
$\Leftrightarrow\ \exists!\ \alpha\ \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\ /\ \sin \alpha = t_0$

On a donc :
$\varphi'(\alpha) = f'(\sin \alpha) \cos \alpha$
$= f'(t_0) \cos \alpha$
$\varphi'(\alpha) = 0$

Car $\forall\, \alpha\ \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\ \cos \alpha > 0$ et
$f'(t_0) = 0$

On conclut donc que :   **$\boldsymbol{\alpha}$ est l'unique solution de l'équation $\boldsymbol{\varphi'(t) = 0}$ dans $\boldsymbol{\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[}$**

d. $\varphi(\alpha) = \frac{1-\sin^2\alpha}{2+\sin\alpha}$

Or $\varphi'(\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow\ f'(\sin\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = -2+\sqrt{3}$

Car $-2-\sqrt{3} < -1$

D'où $\varphi(\alpha) = f(-2+\sqrt{3})$

On a donc $\boldsymbol{\varphi(\alpha) = 4-2\sqrt{3}}$

3.

a.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\varphi(t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4-\sqrt{2}}{14}$	$\frac{4-\sqrt{3}}{26}$

$\varphi'(0) = -\frac{1}{4}$

b. $\varphi'(t) = f'(\sin t)\cos t$

$\forall\, t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t \geq 0$ et d'après les variations de f,

$0 \leq \sin t \leq 1 \Longrightarrow f'(\sin t) < 0$

Car $[0;1] \subset \left]-2+\sqrt{3};+\infty\right[$

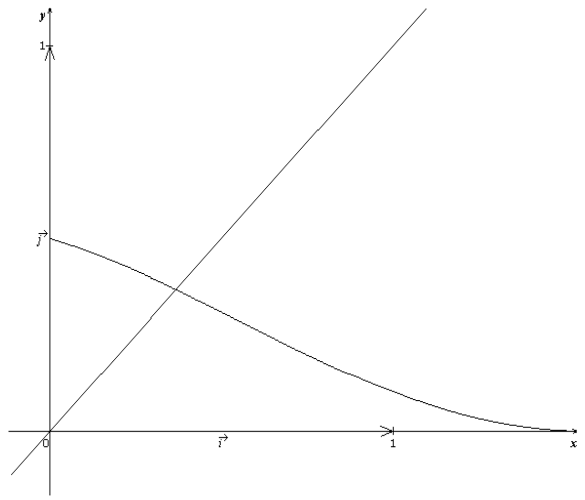
Par conséquent :

$\forall\, t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi'(t) \leq 0$

On en déduit que :

Sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, φ est décroissante

t	0 $\qquad\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$\varphi'(t)$	$-$
$\varphi(t)$	$\frac{1}{2}$ ↘



4. $h(t) = \varphi(t) - t$ et $D_h = \mathbb{R}$

$\boldsymbol{h'(t) = \varphi'(t) - 1} < 0\ \forall\, \boldsymbol{t} \in \left[\boldsymbol{0};\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\right]$

On en déduit que :

Sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, h est décroissante

h étant continue et strictement décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, alors

h réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{1}{4}\right]$ et $0 \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{1}{4}\right]$

Donc l'équation $\boldsymbol{h(t) = 0}$ admet une unique solution $\boldsymbol{\theta} \in \left[\boldsymbol{0};\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\right]$

$h(\theta) = 0 \ \Leftrightarrow\ \varphi(\theta) = \theta$

D'où $\boldsymbol{\theta}$ est aussi l'unique solution de l'équation $\boldsymbol{\varphi(t) = t}$ sur $\left[\boldsymbol{0};\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\right]$

PARTIE C

1. $U_0 = 0$ et $0 \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ donc $U_0 \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$

puis montrons que $U_{n+1} \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$

En effet :

$0 \leq U_n \leq \frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{2}$

$\Longrightarrow\ \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \varphi(U_n) \leq \varphi(0)$

Car φ est décroissante

On a alors $0 \leq \varphi(U_n) \leq \frac{1}{2}$

Or par définition $\varphi(U_n) = U_{n+1}$

D'où $U_{n+1} \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ si $U_n \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$

On conclut donc que :
$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{U_n} \in \left[\boldsymbol{0};\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\right]$

2. f'étant décroissante sur $]-2;+\infty[$ alors elle est décroissante sur $[0;\ 1]$

On a : $f'([0;\ 1]) = \left[-\frac{2}{3};-\frac{1}{4}\right]$

$\Leftrightarrow\ \forall\, x \in [0;\ 1],\ -\frac{2}{3} \leq\ f'(x) \leq -\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow\ \forall\, x \in [0;\ 1],\ \frac{1}{4} \leq\ |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

Donc $\forall\, \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{0};\ \boldsymbol{1}]$, $|\boldsymbol{f'(x)}| \leq \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}$

Par ailleurs :

$\varphi'(t) = \cos t \times f'(\sin t)$

$\Leftrightarrow |\varphi'(t)| \leq |f'(\sin t)|$

Car $\forall\, t \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right] \subset \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right], |\mathrm{Cos}\, t| \leq 1$

Or $\forall\, t \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right], \sin t \in [0;\ 1]$

D'où

$\forall\, t \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right], |\varphi'(t)| \leq |f'(\sin t)| \leq \frac{2}{3}$

On en déduit que :
$\boldsymbol{\forall\, t \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right], |\varphi'(t)| \leq \frac{2}{3}}$

3. $\forall\, t \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right];\ |\varphi'(t)| \leq \frac{2}{3}$ et

$\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right]$.

Appliquons l'inégalité des accroissements finis à l'intervalle de bornes $(\theta; U_n)$.

On a :

$|\varphi(U_n) - \varphi(\theta)| \leq \frac{2}{3}|U_n - \theta|$

Or $\varphi(U_n) = U_{n+1}$ et $\varphi(\theta) = \theta$

D'où $\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \theta| \leq \frac{2}{3}|U_n - \theta|}$

4. En partant de cette inégalité on a :

$n = 0 \Rightarrow \quad |U_1 - \theta| \leq \frac{2}{3}|U_0 - \theta|$

$n = 1 \Rightarrow \quad |U_2 - \theta| \leq \frac{2}{3}|U_1 - \theta|$

$n = 3 \Rightarrow \quad |U_3 - \theta| \leq \frac{2}{3}|U_2 - \theta|$

$\vdots$

$n = n - 1 \Rightarrow |U_n - \theta| \leq \frac{2}{3}|U_{n-1} - \theta|$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$|U_n - \theta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - \theta|$

$0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ et $U_0 = 0$

$\Leftrightarrow\ -\frac{1}{2} \leq U_0 - \theta \leq 0$

$\Leftrightarrow |U_0 - \theta| \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow |U_n - \theta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - \theta| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Donc $\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N}, |U_n - \theta| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Car $0 < \frac{2}{3} < 1$

On en déduit que la suite (U_n) converge vers θ

PROBLEME 14

PARTIE A

$(E): y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$

1. $g(x) = axe^{2x} + b$

$g'(x) = (2ax + a)e^{2x}$

$g'(x) - 2g(x) = 2(e^{2x} - 1)$

$\Leftrightarrow ae^{2x} - 2b = 2e^{2x} - 2$

<u>Par identification :</u>

$\begin{cases} \boldsymbol{a = 2} \\ \boldsymbol{b = 1} \end{cases}$ **et** $\boldsymbol{g(x) = 2xe^{2x} + 1}$

2. $y = z + g$

Supposons que y est solution de (E)

On a : $y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$

$\Rightarrow (z + g)' - 2(z + g) = 2(e^{2x} - 1)$

$\Rightarrow z' - 2z = 2(e^{2x} - 1) - (g' - 2g)$

$\Rightarrow z' - 2z = 0$

Car $g' - 2g = 2(e^{2x} - 1)$

Alors z est solution de (E') si y est solution de (E)

<u>Réciproquement</u>

Supposons que z est solution de (E')

On a : $g' - 2z = 0$

$\Rightarrow z' - 2z = 0$ et $g' - 2g = 2(e^{2x} - 1)$

$\Rightarrow z' + g' - 2(z + g) = 2(e^{2x} - 1)$

$\Rightarrow (z + g)' - 2(z + g) = 2(e^{2x} - 1)$

$\Rightarrow y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$

Alors y est solution de (E) si z est solution de (E')

On vient ainsi de montrer que :
y est solution de (E) si et seulement si z est solution de (E')

3. $z' - 2z = 0 \Leftrightarrow z' = 2z$

Alors $\boldsymbol{z = ke^{2x}; k \in \mathbb{R}}$

Déduction :

Soit y une solution de (E)

$y = z + g$

Alors $\boldsymbol{y = ke^{2x} + 2xe^{2x} + 1;\ k \in \mathbb{R}}$

4. $f(x) = ke^{2x} + 2xe^{2x} + 1$ et $f(0) = 0$

$f(0) = 0 \Leftrightarrow k = -1$

On a donc $\boldsymbol{f(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1}$

PARTIE B

$f(x) = (2x-1)e^{2x} + 1;\ D_f = \mathbb{R}$

1.

a. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\textbf{Alors } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1}$$

On en déduit que :
La courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote horizontale (Δ) d'équation $y = 1$ au voisinage de $-\infty$

b. $(\Delta): y = 1$

$f(x) - y = (2x-1)e^{2x}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{2x} > 0$; alors le signe dépend de celui de $(2x-1)$

Par conséquent :

$\forall\, x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[, f(x) - y < 0$

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[, f(x) - y > 0$

On en déduit que :

Sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$, $(\mathcal{C})$ **est en dessous de** (Δ)
Sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$, $(\mathcal{C})$ **est en dessus de** (Δ)

$(\mathcal{C}) = (\Delta) \Leftrightarrow f(x) = y$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ et $y = 1$

$$\boxed{\textbf{Alors } A\left(\tfrac{1}{2}; 1\right)}$$

2. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1) = +\infty \end{cases}$

$$\boxed{\textbf{Alors } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

D'autres parts :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-1}{x}\right) = 2 \end{cases}$

Alors la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

3. $\boldsymbol{f'(x) = 4xe^{2x}}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{2x} > 0$

Alors le signe dépend de celui de $4x$

Par conséquent :

$\forall\, x \in \left]-\infty; 0\right[, f'(x) < 0$

$\forall\, x \in \left]0; +\infty\right[, f'(x) > 0$

On en déduit que :

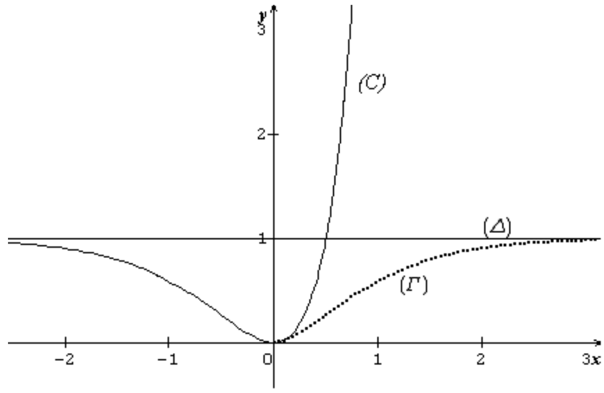
Sur $\left]-\infty; 0\right[$, f est décroissante

Sur $\left]0; +\infty\right[$, f est croissante

<u>**Tableau de variation de f**</u>

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	1 ↘	0	↗ $+\infty$

4. Tracer de $(\mathcal{C})$ et (Δ)



5.

a. I $= \int_0^{\frac{1}{2}} [1 - f(x)]dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2x)e^{2x}dx$

<u>**Intégration par parties**</u>

$\begin{cases} u(x) = 1 - 2x \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = -2 \\ v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

I $= \left[\frac{1}{2}(1-2x)e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x}dx$

I $= \left[(1-x)e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$$\boxed{\textbf{I} = \frac{e-2}{2}}$$

b. I est l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$

PARTIE C

1. J $=\int_{-1}^{0}(2x-1)e^{2x}dx = [(x-1)e^{2x}]_{-1}^{0}$
D'après PARTIE B5)

$\boxed{\textbf{Donc J} = 2e^{-2}-1}$

2. $K=\int_{-1}^{0}(2x-1)^2e^{4x}dx$

<u>1ère Intégration par parties</u>

$\begin{cases} u(x)=(2x-1)^2 \\ v'(x)=e^{4x} \end{cases} \Longrightarrow$

$\begin{cases} u'(x)=2(2x-1) \\ v(x)=\frac{1}{4}e^{4x} \end{cases}$

$K=\left[\frac{1}{4}(2x-1)^2e^{4x}\right]_{-1}^{0}-$
$\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(2x-1)e^{4x}\,dx$

<u>2ème Intégration par parties</u>

$\begin{cases} u(x)=2x-1 \\ v'(x)=e^{4x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x)=2 \\ v(x)=\frac{1}{4}e^{4x} \end{cases}$

$\int_{-1}^{0}(2x-1)e^{4x}$
$=\left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{4x}\right]_{-1}^{0}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}e^{4x}\,dx$

On a donc

$K=\left[\frac{1}{4}(2x-1)^2e^{4x}-\frac{1}{4}(2x-1)e^{4x}+\frac{1}{8}e^{4x}\right]_{-1}^{0}$

$K=\left[\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{8}\right)e^{4x}\right]_{-1}^{0}$

$\boxed{\boldsymbol{K=\frac{5-25e^{-4}}{8}}}$

3. $\mathcal{V}=uv\times\pi\int_{-1}^{0}f^2(x)dx$

$\int_{-1}^{0}f^2(x)dx$
$=\int_{-1}^{0}[(2x-1)^2e^{4x}+2(2x-$
$1)e^{2x}+1]dx$
$=\int_{-1}^{0}(2x-1)^{2e^{4x}}dx$
$+2\int_{-1}^{0}(2x-1)e^{2x}dx+\int_{-1}^{0}dx$
$\int_{-1}^{0}f^2(x)dx=K+2J+1$
$\int_{-1}^{0}f^2(x)dx=4e^{-2}-\frac{25}{8}e^{-4}-\frac{3}{8}$
$uv=8\ cm^3$

$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{V}=\pi(-25e^{-4}+32e^{-2}-3)cm^3}}$

PARTIE D

1. $x=\frac{\ln t}{2}\Leftrightarrow \ln t=2x$ et $t=e^{2x}$
On en déduit que :
$y=1-(2x+1)e^{-2x}$
D'autre part :
$t\geq 1\Longrightarrow \ln t\geq 0$
$\Longrightarrow \frac{\ln t}{2}\geq 0$
$\Longrightarrow x\geq 0$
$(\Gamma): y=-(2x+1)e^{-2x}+1;\ x\geq 0$

2. $(\Gamma): y=(-2x-1)e^{-2x}+1\ ;\ x\geq 0$
$\Leftrightarrow (\Gamma): y=f(-x);\ x\geq 0$
Construction
$\forall\ x\geq 0;\ -x\leq 0$
(Γ) est donc la symétrique de la partie de $(\mathcal{C})$ correspondant à $]-\infty;0]$ par rapport à l'axe des ordonnées

PROBLEME 15

$f(x) = 1 + e^{-x} - 2e^{-2x};\ D_f = \mathbb{R}$

PARTIE A

$P(X) = 1 + X - 2X^2;\ D_P = \mathbb{R}$

1. $\Delta = 9$

$X_1 = -\frac{1}{2};\ X_2 = 1$

$\forall\, \boldsymbol{X} \in \left]-\infty;\ -\frac{1}{2}\right[, \boldsymbol{P(X) < 0}$
$\forall\, \boldsymbol{X} \in \left]-\frac{1}{2}; 1\right[, \boldsymbol{P(X) > 0}$
$\forall\, \boldsymbol{X} \in]1;\ +\infty[, \boldsymbol{P(X) < 0}$

2. $P(X) = -2\left(X + \frac{1}{2}\right)(X - 1)$

$\Leftrightarrow P(X) = (2X + 1)(1 - X)$

Or $f(x) = P(e^{-x})$ d'où

$\boldsymbol{f(x) = (2e^{-x} + 1)(1 - e^{-x})}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, 2e^{-x} + 1 > 0$

Alors le signe de $f(x)$ dépend de celui de $1 - e^{-x}$

$1 - e^{-x} > 0 \Longrightarrow x > 0$

Par conséquent :

$\forall\, \boldsymbol{x} \in]-\infty; \boldsymbol{0}[, \boldsymbol{f(x)} < 0$
$\forall\, \boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{0};\ +\infty[, \boldsymbol{f(x)} > 0$

3. **On en déduit que :**

Sur $]-\infty; \boldsymbol{0}[, (\mathcal{C})$ est en dessous de l'axe des abscisses
Sur $]\boldsymbol{0};\ +\infty[, (\mathcal{C})$ est au dessus de l'axe des abscisses

PARTIE B

1. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0 \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x) = 1}$

On en déduit que :

$(\mathcal{C})$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$

2. $f(x) = 1 + e^{-x} - 2e^{-2x}$

$= e^{-2x}\left(\frac{1}{e^{-2x}} + \frac{e^{-x}}{e^{-2x}} - 2\right)$

Donc $\boldsymbol{f(x) = e^{-2x}(e^{2x} + e^{x} - 2)}$

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f(x)} = -\infty$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \end{cases}$

3.
a. $\boldsymbol{f'(x) = -e^{-x} + 4e^{-2x}}$

b. $f'(x) = e^{-2x}(-e^{x} + 4)$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{-2x} > 0$

Alors $\boldsymbol{f'(x)}$ a le même signe que $\boldsymbol{(4 - e^{x})}$

$4 - e^{x} > 0 \Longrightarrow x < 2\ln 2$

Par conséquent :

$\forall\, x \in]-\infty;\ 2\ln 2[, f'(x) > 0$

$\forall\, x \in]\ 2\ln 2\,;\ +\infty[, f'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty;\ 2\ln 2[, f$ est croissante

Sur $]\ 2\ln 2\,;\ +\infty[, f$ est décroissante

c. **Tableau de variation de $\boldsymbol{f}$**

x	$-\infty$		$2\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	1

$f(2\ln 2) = \frac{9}{8}$

4.
a. $(T_0): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

Alors $(\boldsymbol{T_0}): \boldsymbol{y = 3x}$

b. $(D): y = 1$

$(\mathcal{C}) = (D)$

$\Leftrightarrow e^{-x} - 2e^{-2x} = 0$

$\Leftrightarrow e^{-2x}(e^{x} - 2) = 0$

$\Leftrightarrow e^{x} = 2$ car $\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^{-2x} \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \ln 2$ et $y = f(\ln 2) = 1$

Et donc $\boldsymbol{A(\ln 2\,; 1)}$

c. $f(x) - y = e^{-2x}(e^{x} - 2)$

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^{-2x} > 0$

Alors le signe dépend de celui de $e^{x} - 2$

$e^{x} - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \ln 2$

Par conséquent :

$\forall\, x \in]-\infty; \ln 2[, f(x) - y < 0$

$\forall\, x \in]\ln 2\,;\ +\infty[, f(x) - y > 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; \ln 2[$, $(\mathcal{C})$ est en dessous de (D)

Sur $]\ln 2\,;\ +\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au dessus de (D)

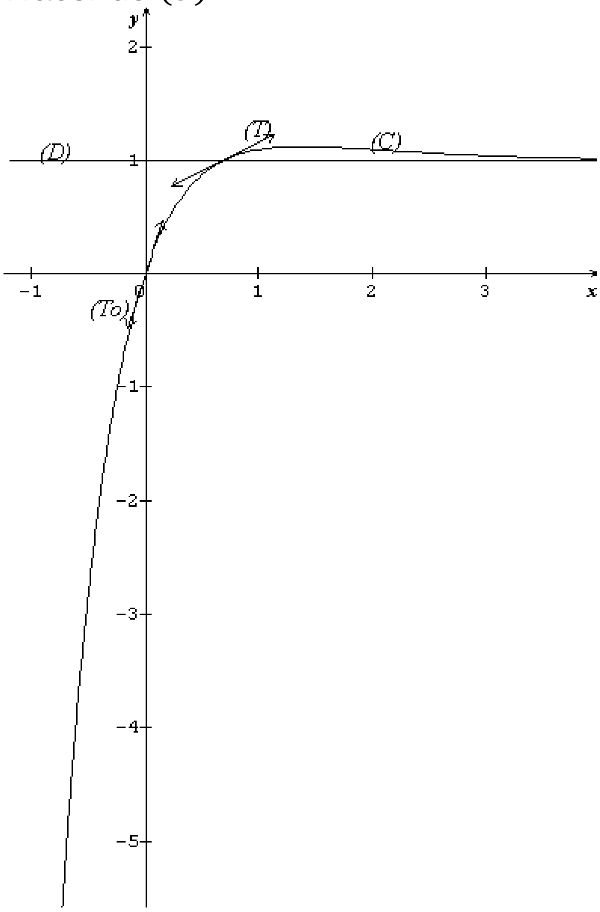
5. $(T): y = f'(\ln 2)(x - \ln 2) + f(\ln 2)$

Donc $\boldsymbol{(T): y = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{\ln 2}{2}}$

6. $f(-\ln 2) = -5$

$(\mathcal{C})$ passe par le point de coordonnées $(-\ln 2\,;\ -5)$

Tracer de $(\mathcal{C})$



PARTIE C

1. $\mathcal{A} = ua \times \int_0^{\ln 2}\big(1 - f(x)\big)\,dx$

$\int_0^{\ln 2}\big(1 - f(x)\big)\,dx \ = [e^{-x} - e^{-2x}]_0^{\ln 2}$

$\int_0^{\ln 2}\big(1 - f(x)\big)\,dx \ = \frac{1}{4}$

$ua = 4cm^2$

On a donc $\boldsymbol{\mathcal{A} = 1\ cm^2}$

2. $\lambda > \ln 2\,;\ \mathcal{A}(\lambda) = 4\int_{\ln 2}^{\lambda}[f(x) - 1]\,dx$

a. $\boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda)}$ **est l'aire en cm² du domaine plan délimité par la courbe** $\boldsymbol{(\mathcal{C})}$**, la droite** $\boldsymbol{(D)}$ **et les droites d'équations** $\boldsymbol{x = \ln 2}$ **et** $\boldsymbol{x = \lambda}$

b. $\mathcal{A}(\lambda) = 4[-e^{-x} + e^{-2x}]_{\ln 2}^{\lambda}$

$\boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda) = \left(1 - 4e^{-\lambda} + 4e^{-2\lambda}\right)cm^2}$

$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} = 0 \\ \lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-2\lambda} = 0 \end{cases}$

Alors $\boldsymbol{\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 1}$

3. $V = \pi\int_{-\ln 2}^{0} f^2(x)\,dx$

$f^2(x)$
$= (1 + 2e^{-x} - 3e^{-2x} - 4e^{-3x} + 4e^{-4x})dx$

$V = \pi\left[x - 2e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-2x} + \frac{4}{3}e^{-3x} - e^{-4x}\right]_{-\ln 2}^{0}$

$\boldsymbol{V = \pi\left(\frac{19}{6} + \ln 2\right)uv}$

PROBLEME 16

PARTIE A

$g(x) = -3 - \ln x + \frac{1}{x}$; $D_g =]0;\ +\infty[$

1. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$

2. $g'(x) = -\frac{x+1}{x^2}$

$\forall\ x \in]0;\ +\infty[, x^2 > 0$ et $x + 1 > 0$

Alors $\forall\ x \in]0;\ +\infty[, g'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]0;\ +\infty[, g$ est décroissante

Tableau de variation de g

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

3. Sur $]0;\ +\infty[, g$ est continue car dérivable et est strictement décroissante.

Alors g réalise une bijection de $]0;\ +\infty[$ sur $]-\infty;\ +\infty[$ et $0 \in]-\infty;\ +\infty[$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;\ +\infty[$

Montrons que $\alpha \in [0,4\ ;\ 0,5]$

$\begin{cases} g(0,4) = 0,4 > 0 \\ g(0,5) = -0,3 < 0 \end{cases}$

On a : $g(0,4) \times g(0,5) < 0$
Alors $\alpha \in [0,4\ ;\ 0,5]$

4. g est décroissante et $g(\alpha) = 0$

On en déduit que :

$\forall\ x \in]0;\ \alpha[, g(x) > 0$
$\forall\ x \in]\alpha;\ +\infty[, g(x) < 0$

5. $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\alpha} g(x)dx$

a. $\forall\ x \in \left[\frac{1}{4};\ \alpha\right], g(x) \geq 0$

On en déduit que :

I est l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{4}$ et $x = \alpha$

b. $I = [-3x + \ln x]_{\frac{1}{4}}^{\alpha} - \int_{\frac{1}{4}}^{\alpha} \ln x\, dx$

Calculons $\int_{\frac{1}{4}}^{\alpha} \ln x\, dx$

<u>**Intégration par parties**</u>

$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$

$\int_{\frac{1}{4}}^{\alpha} \ln x\, dx = [x \ln x]_{\frac{1}{4}}^{\alpha} - \int_{\frac{1}{4}}^{\alpha} dx$

Donc $I = [-2x + (1 - x)\ln x]_{\frac{1}{4}}^{\alpha}$

$I = -2\alpha + (1 - \alpha)\ln \alpha + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ln 2$

Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = -3 + \frac{1}{\alpha}$

D'où $I = \alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\ln 2$

PARTIE B

$f(x) = e^{-x}(3 + \ln x)$; $D_f =]0;\ +\infty[$

1.

a. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ e^0 = 1 \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

b. $f(x) = e^{-x}(3 + \ln x)$
$= 3e^{-x} + e^{-x}\ln x$
$= 3e^{-x} + \frac{1}{e^x} \cdot \ln x$

Donc $f(x) = 3e^{-x} + \frac{x}{e^x} \cdot \frac{\ln x}{x}$

ca $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

c. Déduction

$(\mathcal{C})$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$

2. $f'(x) = -e^{-x}(3 + \ln x) + \frac{e^{-x}}{x}$

$f'(x) = e^{-x}\left(-3 - \ln x + \frac{1}{x}\right)$

Donc on a : $f'(x) = e^{-x} \cdot g(x)$

3. $f(\alpha) = e^{-\alpha}(3 + \ln\alpha)$

Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = -3 + \frac{1}{\alpha}$

$$\boxed{\textbf{D'où } f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha e^{\alpha}}}$$

Encadrement de $f(\alpha)$

$0,4 \leq \alpha \leq 0,5$

$\Leftrightarrow 1,49 \leq e^{\alpha} \leq 1,64$

$\Leftrightarrow 0,59 \leq \alpha e^{\alpha} \leq 0,82$

$\Leftrightarrow 1,21 \leq \frac{1}{\alpha e^{\alpha}} \leq 1,69$

On en déduit que :
$1,2 \leq f(\alpha) \leq 1,7$ à 5×10^{-1} près

4. $\forall\, x \in]0; +\infty[, e^{-x} > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$

Par conséquent :

$\forall\, x \in]0;\ \alpha[, f'(x) > 0$

$\forall\, x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]0;\ \alpha[, f$ est croissante

Sur $]\alpha; +\infty[, f$ est décroissante

Tableau de variation de f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

5. $f(x) = 0$

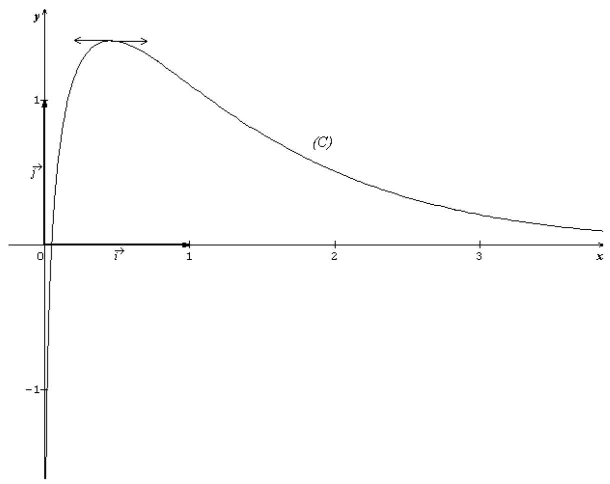
$\Leftrightarrow e^{-x}(3 + \ln x) = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = -3$ car $e^{-x} \neq 0$

$\Leftrightarrow x = e^{-3}$

Alors $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(e^{-3}; 0)$

6. Tracer de $(\mathcal{C})$



PARTIE C

$h(x) = \frac{1}{3+\ln x};\ D_h = [0,4\ ;\ 0,5]$

1. $g(x) = 0$

$\Leftrightarrow -3 - \ln x + \frac{1}{x} = 0$

$\Leftrightarrow 3 + \ln x = \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3+\ln x} = x$

$\Leftrightarrow h(x) = x$

On en déduit que :

α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$ d'après PARTIE A, α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$

2. $h'(x) = \frac{-1}{x(3+\ln x)^2} < 0\ \forall\, x \in [0,4\ ;\ 0,5]$

On en déduit que :

Sur $[0,4\ ;\ 0,5], h$ est décroissante

x	$0,4$		$0,5$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$0,47$	↘	$0,43$

Déduction

D'après les variations de h,

$\forall\, x \in [0,4\ ;\ 0,5], h(x) \in [0,43\ ;\ 0,47]$

Or $[0,43\ ;\ 0,47] \subset [0,4\ ;\ 0,5]$

D'où
$\forall\, \boldsymbol{x} \in [\mathbf{0,4}\ ;\ \mathbf{0,5}], \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \in [\mathbf{0,4}\ ;\ \mathbf{0,5}]$

3. $\forall\, x \in [0,4\ ;\ 0,5], 0,4 \leq x \leq 0,5$

$\Leftrightarrow -0,91 \leq \ln x \leq -0,69$

$\Leftrightarrow 2,09 \leq 3 + \ln x \leq 2,31$

$\Leftrightarrow 4,36 \leq (3 + \ln x)^2 \leq 5,33$

$\Leftrightarrow 1,74 \leq x(3 + \ln x)^2 \leq 2,66$

$\Leftrightarrow 0,37 \leq \frac{1}{x(3+\ln x)^2} \leq 0,57$

$\Leftrightarrow -0,57 \leq h'(x) \leq -0,37$

$\Leftrightarrow 0,37 \leq |h'(x)| \leq 0,57 \leq \frac{3}{5}$

Donc $\forall\, \boldsymbol{x} \in [\mathbf{0,4}\ ;\ \mathbf{0,5}], |\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{x})| \leq \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$

4. $U_0 = 0{,}45$ et $U_{n+1} = h(U_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

a. $U_0 = 0{,}45 \in [0{,}4\,;\ 0{,}5]$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, supposons que
$U_n \in [0{,}4\,;\ 0{,}5]$ et montrons que
$U_{n+1} \in [0{,}4\,;\ 0{,}5]$
$U_n \in [0{,}4\,;\ 0{,}5] \Longrightarrow h(U_n) \in [0{,}4\,;\ 0{,}5]$
Car $\forall\, x \in [0{,}4\,;\ 0{,}5], h(x) \in [0{,}4\,;\ 0{,}5]$
Or par définition $U_{n+1} = h(U_n)$
D'où $U_{n+1} \in [0{,}4\,;\ 0{,}5]$ si $U_n \in [0{,}4\,;\ 0{,}5]$

On conclut donc que :
$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{U_n} \in [\mathbf{0{,}4}\,;\ \mathbf{0{,}5}]$

b. $\alpha \in [0{,}4\,;\,0{,}5]$; $U_n \in [0{,}4\,;\ 0{,}5]$ et
On sait que
$\forall\, x \in [0{,}4\,;\ 0{,}5], |h'(x)| \leq \frac{3}{5}$
D'où d'après l'inégalité de la moyenne on a :
$\left|\int_\alpha^{U_n} h'(x)\,dx\right| \leq \frac{3}{5}|U_n - \alpha|$
$\Longrightarrow \left|[h(x)]_\alpha^{U_n}\right| \leq \frac{3}{5}|U_n - \alpha|$
$\Longrightarrow |h(U_n) - h(\alpha)| \leq \frac{3}{5}|U_n - \alpha|$
Or $U_{n+1} = h(U_n)$ et $h(\alpha) = \alpha$

Donc $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$,
$\boldsymbol{|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{5}|U_n - \alpha|}$

c. En partant de cette inégalité on a :
$n = 0 \Longrightarrow \quad |U_1 - \alpha| \leq \frac{3}{5}|U_0 - \alpha|$
$n = 1 \Longrightarrow \quad |U_2 - \alpha| \leq \frac{3}{5}|U_1 - \alpha|$
$n = 3 \Longrightarrow \quad |U_3 - \alpha| \leq \frac{3}{5}|U_2 - \alpha|$
$\vdots$
$n = n - 1 \Longrightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{3}{5}|U_{n-1} - \alpha|$
Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.
On obtient après simplification :
$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n |U_0 - \alpha|$
$|U_0 - \alpha| = |0{,}45 - \alpha|$
$0{,}4 \leq \alpha \leq 0{,}5$
$\Leftrightarrow -0{,}05 \leq U_0 - \alpha \leq 0{,}05$
$\Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{20}$
$\Leftrightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{20} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$

Donc $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{20} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n}$

d. Déduction

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{3}{5} < 1$

On en déduit que :
La suite $(\boldsymbol{U_n})$ est convergente et
$\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha}$

e. On sait que :
$\frac{1}{20} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \leq 10^{-5} \Longrightarrow |U_n - \alpha| \leq 10^{-5}$
Or $\frac{1}{20} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \leq 10^{-5}$
$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^n \leq 2 \times 10^{-5}$
$\Leftrightarrow -n \ln\left(\frac{5}{3}\right) \leq \ln 2 - 5 \ln 10$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{5 \ln 10 - \ln 2}{\ln 5 - \ln 3}$
$\Leftrightarrow n \geq 21{,}18$
D'où $|U_n - \alpha| \leq 10^{-5}\ \forall\, n \geq 22$
A partir de la valeur $\boldsymbol{n_0 = 22}$ de $\boldsymbol{n}$ on est sûr que $\boldsymbol{U_n}$ représente une valeur approchée de $\boldsymbol{\alpha}$ à $\boldsymbol{10^{-5}}$ près

PROBLEME 17

PARTIE A

$f(x) = x^2e^{-x};\ D_f = \mathbb{R}$

1. Calcul des limites

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

2. $\boldsymbol{f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}}$

3. $\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $(2x - x^2)$

$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Par conséquent :

$\forall\, x \in]-\infty; 0[, f'(x) < 0$

$\forall\, x \in]0; 2[, f'(x) > 0$

$\forall\, x \in]2;\ +\infty[, f'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 0[, f$ est croissante

Sur $]0; 2[, f$ est décroissante

Sur $]2;\ +\infty[, f$ est croissante

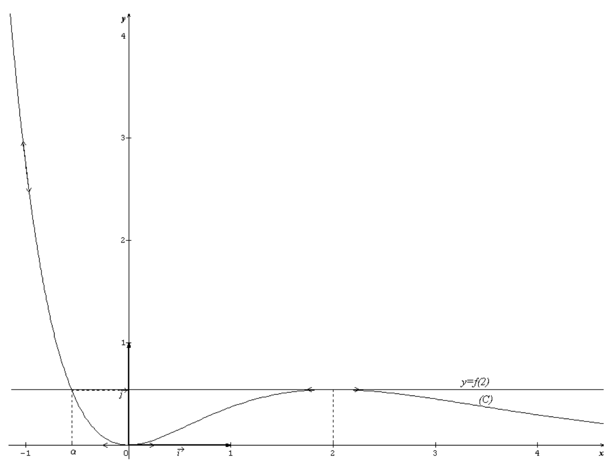
<u>Tableau de variation de f</u>

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

4. $(T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$$\boxed{\textbf{Alors } (T): y = e(3x - 2)}$$

5. Tracer de (T) et $(\mathcal{C})$



PARTIE B

1. $J = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$

<u>Intégration par parties</u>

$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$J = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx$

$J = [-(x+1)e^{-x}]_0^1$

$$\boxed{J = 1 - \frac{2}{e}}$$

2. $f'(x) + f(x) = (2x - x^2)e^{-x} + x^2e^{-x}$

$$\boxed{\textbf{On a donc } f'(x) + f(x) = 2xe^{-x}}$$

3. Déduction

$f'(x) + f(x) = 2xe^{-x}$

$\Leftrightarrow f(x) = 2xe^{-x} - f'(x)$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(2xe^{-x} - f'(x)\right)dx$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2xe^{-x}\,dx - \int_0^1 f'(x)\,dx$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 xe^{-x}\,dx - [f(x)]_0^1$

On en déduit que :

$$\boxed{\int_0^1 f(x)dx = 2J - f(1)}$$

Car $f(0) = 0$

4. $\mathcal{A} = ua \times \int_0^1 f(x)dx$

$\int_0^1 f(x)dx = 2 - \frac{5}{e}$

$ua = 16\ cm^2$

$$\boxed{\mathcal{A} = 16\left(2 - \frac{5}{e}\right)\ cm^2}$$

PARTIE C

1. La droite d'équation $y = f(2)$ coupe $(\mathcal{C})$ en deux points d'abscisses respectives 2 et α comme l'indique le graphique et on a : $\alpha \in I = [-1; 0]$

2. $g(x) = \left(-\frac{2}{e}\right)e^{\frac{x}{2}};\ D_g = I = [-1; 0]$

$g(x) = x$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{e}\right)e^{\frac{x}{2}} = x$

$\Leftrightarrow xe^{-\frac{x}{2}} = -\frac{2}{e}$

$\Leftrightarrow x^2e^{-x} = \frac{4}{e^2} = 4e^{-2}$

$\Leftrightarrow f(x) = f(2)$

On en déduit que :

α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ car d'après 1.), α est l'unique solution de l'équation $f(x) = f(2)$ sur I

3. $\forall\, x \in [-1;0], -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} \leq 0$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{x}{2}} \leq 1$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{e} \leq \left(-\frac{2}{e}\right) e^{\frac{x}{2}} \leq -\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}$

Or $\left[-\frac{2}{e}\ ;\ -\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}\right] \subset [-1;0]$

D'où $\forall\, \boldsymbol{x} \in [-\mathbf{1};\mathbf{0}], \boldsymbol{g(x)} \in [-\mathbf{1};\mathbf{0}]$

4. $g'(x) = \left(-\frac{1}{e}\right) e^{\frac{x}{2}}$

$\forall\, x \in [-1;0], -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} \leq 0$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{x}{2}} \leq 1$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{e} \leq \left(-\frac{1}{e}\right) e^{\frac{x}{2}} \leq -\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} \leq |g'(x)| \leq \frac{1}{e}$

Donc $\forall\, \boldsymbol{x} \in [-\mathbf{1};\mathbf{0}], |\boldsymbol{g'(x)}| \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}}$

5. Déduction

On sait que $\alpha \in [-1;0]$ et

$\forall\, x \in [-1;0], |g'(x)| \leq \frac{1}{e}$

D'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$\left|\int_\alpha^x g'(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{e}|x-\alpha|$

$\Rightarrow |[g(t)]_\alpha^x| \leq \frac{1}{e}|x-\alpha|$

$\Rightarrow |g(x)-g(\alpha)| \leq \frac{1}{e}|x-\alpha|$

Or $g(\alpha) = \alpha$ d'après PARTIEC 2.)

D'où

$\forall\, \boldsymbol{x} \in [-\mathbf{1};\mathbf{0}], |\boldsymbol{g(x)} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha}|$

6. $U_0 = -0{,}5$ et $U_{n+1} = g(U_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

a. $U_0 = -0{,}5 \in [-1;0]$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \in [-1;0]$ et montrons que $U_{n+1} \in [-1;0]$

En effet :

$U_n \in [-1;0] \Rightarrow g(U_n) \in [-1;0]$

Car $\forall\, x \in [-1;0], g(x) \in [-1;0]$

Or par définition $U_{n+1} = g(U_n)$

D'où $U_{n+1} \in [-1;0]$ si $U_n \in [-1;0]$

On conclut donc que :

$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{U_n} \in [-\mathbf{1};\mathbf{0}]$

b. On sait que :

$\forall\, x \in [-1;0], |g(x)-\alpha| \leq \frac{1}{e}|x-\alpha|$

Remplaçons x par U_n dans cette inégalité

On a : $|g(U_n)-\alpha| \leq \frac{1}{e}|U_n-\alpha|$

Or par définition $U_{n+1} = g(U_n)$

D'où $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$,

$|\boldsymbol{U_{n+1}} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}}|\boldsymbol{U_n} - \boldsymbol{\alpha}|$

c. En partant de cette inégalité on a :

$n = 0 \Rightarrow \quad |U_1-\alpha| \leq \frac{1}{e}|U_0-\alpha|$

$n = 1 \Rightarrow \quad |U_2-\alpha| \leq \frac{1}{e}|U_1-\alpha|$

$n = 3 \Rightarrow \quad |U_3-\alpha| \leq \frac{1}{e}|U_2-\alpha|$

$\vdots$

$n = n-1 \Rightarrow |U_n-\alpha| \leq \frac{1}{e}|U_{n-1}-\alpha|$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$|U_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n |U_0-\alpha|$

$|U_0-\alpha| = |-0{,}5-\alpha|$

$-1 \leq \alpha \leq 0$

$\Leftrightarrow -0{,}5 \leq U_0-\alpha \leq 0{,}5$

$\Leftrightarrow |U_0-\alpha| \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow |U_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n |U_0-\alpha| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{e}\right)^n$

Donc $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, |\boldsymbol{U_n} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{e^n}}$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2e^n} = 0$ car $0 < \frac{1}{e} < 1$

On en déduit que :

La suite $(\boldsymbol{U_n})$ est convergente et $\lim\limits_{\boldsymbol{n}\to+\infty} \boldsymbol{U_n} = \boldsymbol{\alpha}$

e. On sait que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |U_n-\alpha| \leq \frac{1}{2e^n}$

Donc $\frac{1}{2e^n} \leq 10^{-6} \Rightarrow |U_n-\alpha| \leq 10^{-6}$

Or $\frac{1}{2e^n} \leq 10^{-6}$

$\Leftrightarrow -n \leq -6\ln 10 + \ln 2$

$\Leftrightarrow n \geq 6\ln 10 - \ln 2$

$\Leftrightarrow n \geq 13{,}12$

D'où $|U_n-\alpha| \leq 10^{-6}\ \forall n \geq 14$

On conclut donc que :

La plus petite valeur de $\boldsymbol{n}$ cherché est donc $\boldsymbol{n_0} = \mathbf{14}$

PROBLEME 18

PARTIE A

$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$;
$D_g =]0;\ +\infty[$

1. $\boldsymbol{g'(x) = -4x^2 \ln x}$
$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, 4x^2 > 0$
Alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $-\ln x$
$-\ln x > 0 \Leftrightarrow x < 1$
Par conséquent :
$\forall\, x \in]0;\ 1[, g'(x) > 0$
$\forall\, x \in]1;\ +\infty[, g'(x) < 0$
<u>**Calcul des limites**</u>

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

<u>**Tableau de variations de g**</u>

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ 1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

2. Sur $]0;\ 1]$, $g(x) > 0$ car $g(x) \in]1;\ 2]$
Sur $]1;\ +\infty[$, g est continue car dérivable et est strictement décroissante.
Alors g réalise une bijection de $]1;\ +\infty[$ sur $]-\infty; 2[$ et $0 \in]-\infty; 2[$.
Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]1;\ +\infty[$
$\begin{cases} g(1{,}89) = 0{,}02 > 0 \\ g(1{,}90) = -0{,}02 < 0 \end{cases}$

On a : $g(1{,}89) \times g(1{,}90) < 0$
Donc $1{,}89 < \alpha < 1{,}90$

3. Signe de $g(x)$

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall\, x \in]0;\ \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall\, x \in]\alpha;\ +\infty[, g(x) < 0 \end{array}}$$

PARTIE B

$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$; $D_f =]0;\ +\infty[$

1. Calcul des limites

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2+1} = 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{1+x^2}$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x^2+1} = 0 \end{cases}$

Déduction
$(\mathcal{C})$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$

2. $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x \ln x}{(1+x^2)^2}$
$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2 \ln x}{x(1+x^2)^2}$

$$\boxed{\textbf{Alors } f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}}$$

D'après PARTIE A
$\forall\, x \in]0;\ \alpha[,\ f'(x) > 0$
$\forall\, x \in]\alpha;\ +\infty[, f'(x) < 0$
On en déduit que :
Sur $]0;\ \alpha[$, f est croissante
Sur $]\alpha;\ +\infty[$, f est décroissante
<u>**Tableau de variations de f**</u>

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3. $f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{1+\alpha^2}$
Or $g(\alpha) = 0$
$\Leftrightarrow 1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \alpha = 0$
$\Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$

$$\boxed{\textbf{D'où } f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}}$$

Encadrement de $f(\alpha)$

$1{,}89 < \alpha < 1{,}90$

$\Leftrightarrow 7{,}1442 < 2\alpha^2 < 7{,}22$

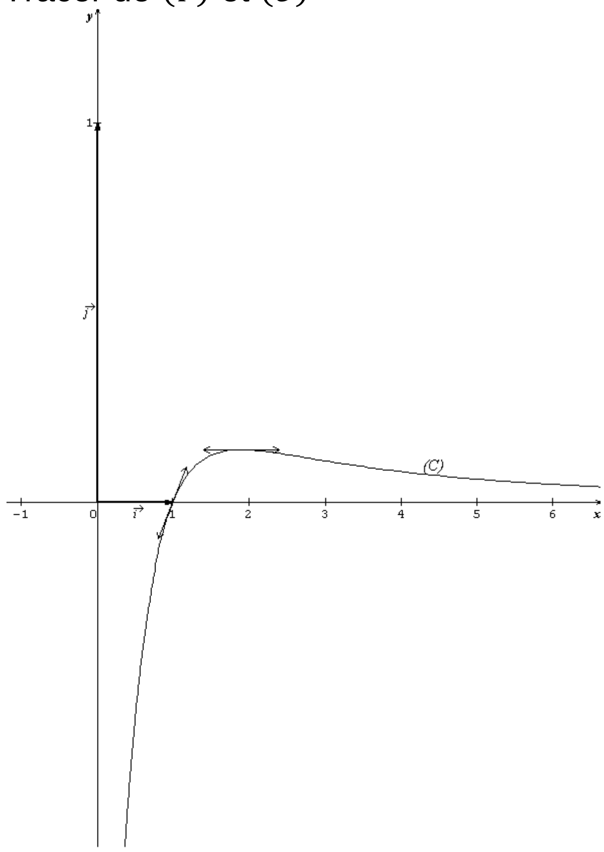
$\Leftrightarrow 0{,}1385 < \frac{1}{2\alpha^2} < 0{,}1399$

Donc à 2×10^{-3} près on a :
$\boldsymbol{0,138 < f(\alpha)} < 0{,}140$

4. $(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

Alors $(T): y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

5. Tracer de (T) et $(\mathcal{C})$



PARTIE C

$F(x) = \int_1^x f(t)dt\,;\ D_F =]0;\ +\infty[$

1. F est la primitive de f sur $]0;\ +\infty[$ qui s'annule en 1.

Donc F est dérivable sur $]0;\ +\infty[$
$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, F'(x) = f(x)$

2. $\forall\, t \geq 1, (1+t)^2 = 1 + 2t + t^2$

$\Leftrightarrow t^2 \leq 1 + t^2 \leq (1+t)^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$

$\Leftrightarrow \frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq \frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{t^2}$

Car $\forall\, t \geq 1, \ln t \geq 0$

Donc $\forall\, t \geq 1, \frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$

3. $I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt$ et $J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2}dt$

a. Calcul de $I(x)$

Intégration par parties

$\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = \frac{1}{t^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = -\frac{1}{t} \end{cases}$

$I(x) = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}dt$

$I(x) = \left[-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t}\right]_1^x$

$\boldsymbol{I(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}}$

b. Calcul de $J(x)$

Intégration par parties

$\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = -\frac{1}{1+t} \end{cases}$

$J(x) = \left[-\frac{\ln t}{1+t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t(1+t)}dt$

Or $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$ et $t > 0$

D'où $J(x) = \left[-\frac{\ln t}{1+t} + \ln\left(\frac{t}{1+t}\right)\right]_1^x$

$\boldsymbol{J(x) = \ln 2 + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\ln x}{1+x}}$

c. On sait que :

$\forall\, t \geq 1, \frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$

$\Leftrightarrow \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2}dt \leq \int_1^x f(t)dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt$

$\Leftrightarrow J(x) \leq F(x) \leq I(x)$

On en déduit que : $\forall\, x > 1$
$\boldsymbol{\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\ln x}{1+x} \leq F(x)}$
$\boldsymbol{\leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}}$

4. Soit $x > 1$

a. **Interprétation graphique de $F(x)$**

$F(x)$ est l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $t = 1$ et $t = x$

b. $\mathcal{A} = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

$J(x) \leq F(x) \leq I(x)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} J(x) \leq \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \leq \lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} J(x) = \ln 2$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1+x} = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} I(x) = 1$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

On en déduit que :
$\boldsymbol{\ln 2 \leq \mathcal{A} \leq 1}$

PARTIE D

1. $G'(x) = -\frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right) - F'(x);\ x > 0$

$\Leftrightarrow G'(x) = -\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)$

$\Leftrightarrow G'(x) = -\frac{1}{x^2}\left[f\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 f(x)\right]$

Donc $\forall\, \boldsymbol{x} > 0;\ \boldsymbol{G'(x) = 0}$

Car $f\left(\frac{1}{x}\right) = -x^2 f(x)$

2. $G'(x) = 0 \Leftrightarrow G(x) = K; K \in \mathbb{R}$

On a $G(1) = K = F(1) - F(1) = 0$

Donc $\forall\, \boldsymbol{x} > 0;\ G(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$

3. $\forall\, x > 0;\ G(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$

Posons $X = \frac{1}{x}$

Si $x \to 0^+$, $X \to +\infty$

Alors $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}^+} \boldsymbol{F(x)} = \lim\limits_{\boldsymbol{X} \to +\infty} \boldsymbol{F(X)} = \boldsymbol{\mathcal{A}}$

PROBLEME 19

PARTIE A

$g(x) = x - e^{x-1};\ D_g = \mathbb{R}$

1.

a. $\boldsymbol{g'(x) = 1 - e^{x-1}}$

$1 - e^{x-1} > 0 \Leftrightarrow x < 1$

$\forall\, x \in]-\infty; 1[, g'(x) > 0$

$\forall\, x \in]1; +\infty[, g'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 1[$, g est croissante

Sur $]1; +\infty[$, g est décroissante

b. $\boldsymbol{g(1) = 0}$

$g(1)$ est le maximum de g sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) \le g(1) = 0$

Donc $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{g(x) \le 0}$

c. $\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) \le 0$

$\Leftrightarrow x - e^{x-1} \le 0$

$\Leftrightarrow xe^{-x} - e^{-1} \le 0$

Donc $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{xe^{-x} \le \frac{1}{e}}$

D'autres parts :

$xe^{-x} \le \frac{1}{e} \Leftrightarrow xe^{-x} \le \frac{1}{e} < 1$

D'où $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{1 - xe^{-x}} > 0$

2. $f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$;

a. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - xe^{-x} \neq 0\}$

$1 - xe^{-x} \neq 0$ est toujours vrai car

$\forall\, x \in \mathbb{R}, 1 - xe^{-x} > 0$

Et donc $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{e^x}}$

Donc $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}}$

b. Calcul des limites

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to -\infty} \boldsymbol{f(x) = 0}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to \infty} -x = +\infty \end{cases}$

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to +\infty} \boldsymbol{f(x) = 1} \textbf{ car } \lim_{\boldsymbol{x} \to +\infty} \boldsymbol{xe^{-x} = 0}$$

c. $\boldsymbol{f'(x) = \frac{e^{-x}(1-x)}{(1 - xe^{-x})^2}}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ et $(1 - xe^{-x})^2 > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $1 - x$

$1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

Par conséquent :

$\forall\, x \in]-\infty; 1[, f'(x) > 0$

$\forall\, x \in]1; +\infty[, f'(x) < 0$

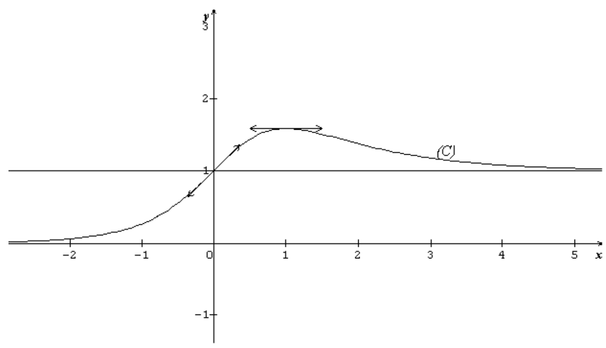
On en déduit que :
Sur $]-\infty;1[, f$ est croissante
Sur $]1;+\infty[, f$ est décroissante
Tableau de variation de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

d. $(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$

Alors $(T): y = x + 1$

e. Tracer de (T) et $(\mathcal{C})$



3.
a. Image de $[0;1]$ et $[1;+\infty[$ par f

$$\boldsymbol{f([0;1]) = \left[1;\frac{e}{e-1}\right]}$$
$$\boldsymbol{f([1;+\infty[) = \left]1;\frac{e}{e-1}\right]}$$

b. Déduction
$\forall x \in [0;1], 1 \le f(x) \le \frac{e}{e-1}$
$\forall x \in [1;+\infty[, 1 < f(x) \le \frac{e}{e-1}$

On en déduit que :
$\boldsymbol{\forall x \in [0;+\infty[, 1 \le f(x) \le \frac{e}{e-1}}$

PARTIE B

1. $I = \int_0^1 f(x)\,dx$
Interprétation graphique
I est l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

2. $J_n = \int_0^1 x^n e^{-nx}\,dx; n$ entier non nul

a. $J_1 = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$
Intégration par parties
$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$
$J_1 = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx$
$J_1 = [-(x+1)e^{-x}]_0^1$

$$\boldsymbol{J_1 = 1 - \frac{2}{e}}$$

b. $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$
$h(x) = x^2e^{-2x}$
$H'(x) = [-2ax^2 + (2a-2b)x + b - 2c]e^{-2x}$
$H'(x) = h(x)$
$\Leftrightarrow -2ax^2 + (2a-2b)x + b - 2c = x^2$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Et $\boldsymbol{H(x) = -\frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1)e^{-2x}}$

Déduction
$J_2 = \int_0^1 x^2e^{-2x}\,dx = \int_0^1 h(x)\,dx$
$J_2 = [H(x)]_0^1$

On en déduit que :
$$\boldsymbol{J_2 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{5}{e^2}\right)}$$

3. $U_n = 1 + J_1 + J_2 + \cdots + J_n; \forall n \in \mathbb{N}^*$
a. $\forall x \in \mathbb{R}$,
$1 + xe^{-x} + x^2e^{-2x} + \cdots + x^ne^{-nx}$
$= 1 + xe^{-x} + (xe^{-x})^2 + \cdots + (xe^{-x})^n$
Or $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\boldsymbol{1 + xe^{-x} + x^{2e^{-2x}} + \cdots + x^ne^{-nx} = \frac{1-(xe^{-x})^{n+1}}{1-xe^{-x}}}$$

b. Déduction
$1 + xe^{-x} + x^2e^{-2x} + \cdots + x^ne^{-nx}$
$= \frac{1}{1-xe^{-x}} - \frac{x^{n+1}e^{-(n+1)x}}{1-xe^{-x}}$
$= f(x) - x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x)$
D'après la linéarité de l'intégrale, on a :
$\int_0^1 dx + \int_0^1 xe^{-x}dx + \int_0^1 x^2e^{-2x}dx + \cdots + \int_0^1 x^ne^{-nx}dx$
$= \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x)dx$
$\Leftrightarrow 1 + J_1 + J_2 + \cdots + J_n$
$= I - \int_0^1 x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x)dx$
$\Leftrightarrow U_n = I - \int_0^1 x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x)\,dx$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\boldsymbol{I - U_n = \int_0^1 x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x)\,dx}$$

c. D'après A 1.c, on a :

$\forall\, x \geq 0,\ 0 \leq xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$

$\Leftrightarrow 0 \leq x^{n+1}e^{-(n+1)x} \leq \frac{1}{e^{n+1}}$

Et D'après A 3.b, on a :

$1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$

$\Leftrightarrow 0 \leq x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x) \leq \frac{e}{e^{n+1}(e-1)}$

Donc $\forall\, \boldsymbol{x \geq 0}$,
$$\boldsymbol{0 \leq x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x) \leq \frac{1}{e^n(e-1)}}$$

d. Déduction

$0 \leq x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x) \leq \frac{1}{e^n(e-1)}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^1 x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x)dx \leq \int_0^1 \frac{1}{e^n(e-1)}dx$

On en déduit que :
$$\boldsymbol{0 \leq I - U_n \leq \frac{1}{e^n(e-1)}}$$

Convergence de la suite (U_n)

$0 \leq I - U_n \leq \frac{1}{e^n(e-1)}$

$\Leftrightarrow I - \frac{1}{e^n(e-1)} \leq U_n \leq I$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{e^n(e-1)} = 0$ car $0 < \frac{1}{e} < 1$

On conclut donc que la suite $(\boldsymbol{U_n})$ converge vers $\boldsymbol{I}$

4. $0 \leq I - U_2 \leq \frac{1}{e^2(e-1)}$

Alors $\boldsymbol{U_2 \leq I \leq U_2 + \frac{1}{e^2(e-1)}}$

PROBLEME 20

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{1-x} & si\ x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2}{x} - \ln x & si\ x > 1 \end{cases} ;\ D_f = \mathbb{R}$$

PARTIE A

1. Continuité en 1

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x+1)e^{1-x} = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2}{x} - \ln x = 2$

$f(1) = 2$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)}$$
Alors $\boldsymbol{f}$ est continue en 1

Dérivabilité en 1

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{(x+1)e^{1-x}-2}{x-1}$

Posons $X = 1 - x$

Si $x \to 1^-$ alors $X \to 0^+$ et

$\lim\limits_{X \to 0^+} \frac{(2-X)e^X-2}{-X} = e^X - 2 \cdot \frac{e^X-1}{X} = -1$

Car $\begin{cases} e^0 = 1 \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \frac{e^X-1}{X} = 1 \end{cases}$

$$\textbf{Donc } \boldsymbol{\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1}$$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\frac{2}{x} - \ln x - 2}{x-1}$

Posons $X = x - 1$

Si $x \to 1^+$ alors $X \to 0^+$ et

$\lim\limits_{X \to 0^+} \frac{2-(X+1)\ln(X+1)-2(X+1)}{X(X+1)}$

$= \lim\limits_{X \to 0^+} -\frac{2}{X+1} - \frac{\ln(X+1)}{X} = -3$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{X \to 0^+} \frac{2}{X+1} = 2 \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1 \end{cases}$

$$\textbf{Donc } \boldsymbol{\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -3}$$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Alors $\boldsymbol{f}$ n'est pas dérivable en 1

<u>Interprétation graphique</u>

Au point $(1; 2)$, $(\mathcal{C})$ admet deux demi-tangentes d'équations :

$(T_g): y = -x + 3$

$(T_d): y = -3x + 5$

Le point $(1; 2)$ est donc un point anguleux pour $(\mathcal{C})$

2.

a. Calcul des limites

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) e^{1-x}$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

Interprétation graphique

$(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$ et une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

3. Cas où $x < 1$

$$\boxed{f'(x) = -xe^{1-x}}$$

$\forall\, x \in]-\infty; 1[, e^{1-x} > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-x$

$-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Par conséquent :

$\forall\, x \in]-\infty; 0[, f'(x) > 0$

$\forall\, x \in]0; 1[, f'(x) < 0$

Cas où $x > 1$

$f'(x) = -\frac{2+x}{x^2}$

$\forall\, x \in]1; +\infty[, x^2 > 0$ et $2 + x > 0$

Par conséquent :

$\forall\, x \in]1; +\infty[, f'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 0[, f$ est croissante

Sur $]0; 1[, f$ est décroissante

Sur $]1; +\infty[, f$ est décroissante

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	-1 ‖ -3	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

4. Sur $]1; +\infty[, f$ est continue car dérivable et est strictement décroissante.

Alors f réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur $]-\infty; 2[$ et $0 \in]-\infty; 2[$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]1; +\infty[$

$\begin{cases} f(2{,}3) = 0{,}03 > 0 \\ f(2{,}4) = -0{,}04 < 0 \end{cases}$

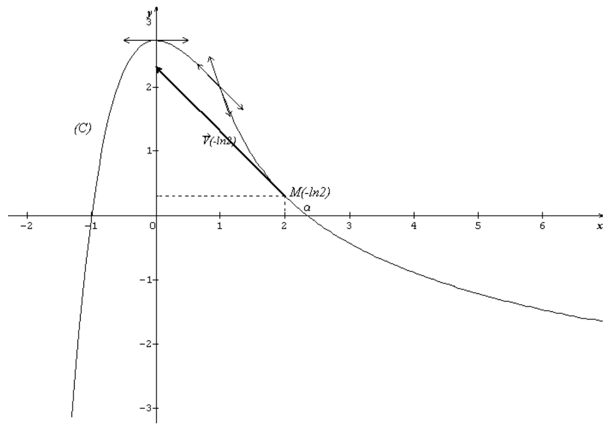
$$\boxed{\begin{array}{c} \textbf{On a : } f(2,3) \times f(2,4) < 0 \\ \textbf{Donc } 2,3 < \alpha < 2{,}4 \end{array}}$$

D'autres parts :

Sur $]-\infty; 1]; f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Donc l'autre point d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses est le point de coordonnées $(-1; 0)$

5. Tracer de $(\mathcal{C})$



PARTIE B

1.

a. $\mathcal{A} = \int_1^\alpha f(x)dx$

$\Leftrightarrow \mathcal{A} = \int_1^\alpha \left(\frac{2}{x} - \ln x\right) dx$

$\Leftrightarrow \mathcal{A} = \int_1^\alpha \frac{2}{x} dx - \int_1^\alpha \ln x\, dx$

Intégration par parties

$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$

$\int_1^\alpha \ln x\, dx = [x\ln x]_1^\alpha - \int_1^\alpha dx$
$\Leftrightarrow \mathcal{A} = [(2-x)\ln x + x]_1^\alpha$

On a donc :
$\boldsymbol{\mathcal{A} = \alpha - 1 + (2-\alpha)\ln\alpha}$

b. On sait que :
$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = \frac{2}{\alpha}$

D'où $\boldsymbol{\mathcal{A} = \alpha - 3 + \frac{4}{\alpha}}$
Avec $\boldsymbol{p = 1; q = -3}$ **et** $\boldsymbol{r = 4}$

c. $2{,}3 < \alpha < 2{,}4$
$\Leftrightarrow -0{,}7 < \alpha - 3 < -0{,}6$ et
$1{,}66 < \frac{4}{\alpha} < 1{,}73$

Donc on a : $\boldsymbol{0{,}9 < \mathcal{A} < 1{,}1}$

2. $\mathcal{V} = \pi\int_{-1}^0 f^2(x)dx$
$\int_{-1}^0 f^2(x)dx = \int_{-1}^0 (x+1)^2 e^{2-2x}dx$

<u>1ère intégration par parties</u>

$\begin{cases} u(x) = (x+1)^2 \\ v'(x) = e^{2-2x} \end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} u'(x) = 2(x+1) \\ v(x) = -\frac{1}{2}e^{2-2x} \end{cases}$

$\int_{-1}^0 f^2(x)dx = \left[-\frac{1}{2}(x+1)^2 e^{2-2x}\right]_{-1}^0 +$
$\int_{-1}^0 (x+1)e^{2-2x}dx$

<u>2ème Intégration par parties</u>

$\begin{cases} u(x) = (x+1) \\ v'(x) = e^{2-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{2}e^{2-2x} \end{cases}$

$\int_{-1}^0 (x+1)e^{2-2x}dx$
$= \left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{2-2x}\right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \frac{1}{2}e^{2-2x}dx$

Donc on a : $\int_{-1}^0 f^2(x)dx$
$= \left[-\frac{1}{4}(2x^2+6x+5)e^{2-2x}\right]_{-1}^0$
$\Leftrightarrow \int_{-1}^0 f^2(x)dx = \frac{e^4-5e^2}{4}$

Donc : $\boldsymbol{\mathcal{V} = \frac{\pi e^2}{4}(e^2-5)uv}$

PARTIE C

$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \\ y(t) = t + 2e^t \end{cases}, t < 0$

1. $x = e^{-t} \Leftrightarrow t = -\ln x$ et
$y = -\ln x + 2e^{-\ln x} = -\ln x + \frac{2}{x}$

Par ailleurs :
$t < 0 \Leftrightarrow -t > 0$
$\Leftrightarrow e^{-t} > 1$
$\Leftrightarrow x > 1$

On a : $(\Gamma): y = f(x);\ x > 1$

On conclut donc que :
$\boldsymbol{(\Gamma)}$ **est la partie de** $(\mathcal{C})$
correspondant à $\boldsymbol{x > 1}$

2. $\vec{V}(t)\begin{cases} x'(t) = -e^{-t} \\ y'(t) = 1 + 2e^t \end{cases}, t < 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'(-\ln 2) = -2 \\ y'(-\ln 2) = 2 \end{cases}$

$\boldsymbol{\vec{V}(-\ln 2)\binom{-2}{2}}$

<u>Représentation graphique</u>

$M(-\ln 2)(2; 1-\ln 2)$
(Voir graphique)

PROBLEME 21

$\begin{cases} f(x) = (x+1)\ln\left(\frac{x+1}{2}\right) & si\ x > -1 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$;

$D_f = [-1;\ +\infty[$

PARTIE A

1. **Continuité en -1**

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x+1)\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$

Posons $X = \frac{x+1}{2}$

Si $x \to\ -1^+$, alors $X \to\ 0^+$ et

$\lim\limits_{X\to 0^+} 2X\ln X = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 0$

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \\ \text{Alors } f \text{ est continue en } -1\end{array}}$$

Dérivabilité en -1

$\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$

$\lim\limits_{x\to -1^+} \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) = \lim\limits_{X\to 0^+} \ln X = -\infty$

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\infty \\ \text{Alors } f \text{ n'est pas dérivable en } -1\end{array}}$$

Interprétation graphique

Au point de coordonnées $(-1; 0)$, (C) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas

2. $\forall\ x > -1, f'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) + 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) = -1$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = e^{-1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{e} - 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) > -1$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2} > e^{-1}$

$\Leftrightarrow x > \frac{2}{e} - 1$

Par conséquent :

$\forall\ x \in \left]-1;\ \frac{2}{e} - 1\right[, f'(x) < 0$

$\forall\ x \in \left]\frac{2}{e} - 1;\ +\infty\right[, f'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $\left]-1;\ \frac{2}{e} - 1\right[$, f est décroissante

Sur $\left]\frac{2}{e} - 1;\ +\infty\right[$, f est croissante

3.

a. $(T_0): y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$$\boxed{\text{Alors } (T_0): y = (1 - \ln 2)x - \ln 2}$$

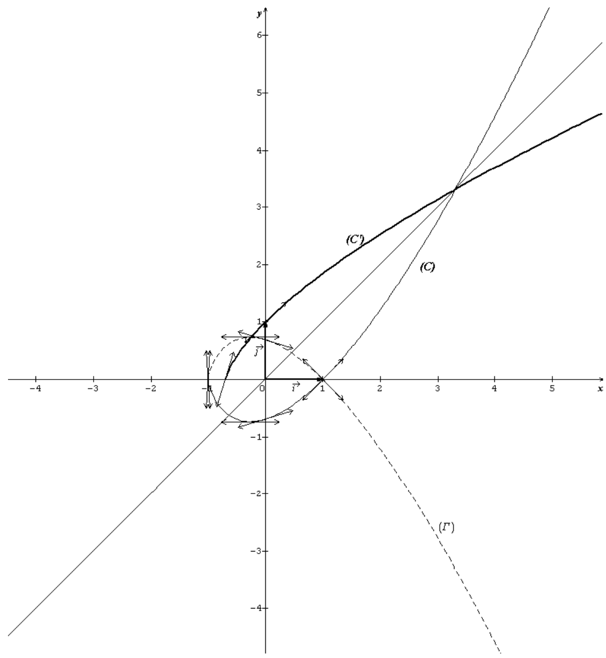
$(T_1): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$\boxed{\text{Alors } (T_1): y = x - 1}$$

b. **Tableau de variation de f**

x	-1		$\frac{2}{e} - 1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Tracer de (C)



PARTIE B

$\forall t > -1,$

On pose $\mathcal{A}(t) = \int_0^t f(x)dx$

1. Intégration par parties

$\begin{cases} u(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ v'(x) = x+1 \end{cases} \Longrightarrow$

$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x+1} \\ v(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \end{cases}$

$\mathcal{A}(t) = \left[\frac{1}{2}(x+1)^2\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]_0^t - \int_0^t \frac{1}{2}(x+1)dx$

$= \left[\frac{1}{2}(x+1)^2 \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{4}(x+1)^2\right]_0^t$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2}(t+1)^2 \ln\left(\frac{t+1}{2}\right) - \frac{1}{4}(t+1)^2 + \frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2}}$$

2. Posons $u = \frac{t+1}{2}$

Si $t \to -1^+$ alors $u \to 0^+$ et

$\lim\limits_{u \to 0^+} 2u^2 \ln u - u^2 + \frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2}$

Car $\lim\limits_{u \to 0^+} u^2 \ln u = 0$ et $\lim\limits_{u \to 0^+} u^2 = 0$

Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} \mathcal{A}(t) = \frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2}}$

3.

a. $\mathcal{A}_1 = ua \times \left(\lim\limits_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} - \int_t^1 f(x)dx\right)$

$\lim\limits_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} - \int_t^1 f(x)dx$

$= \lim\limits_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} \left(-\int_t^0 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx\right)$

$= \lim\limits_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} \left(\int_0^t f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx\right)$

$= \lim\limits_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} \left(\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(1)\right)$

$ua = 4\ cm^2$

Donc on a :

$$\boldsymbol{\mathcal{A}_1 = 4\left(\lim\limits_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} \mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(1)\right)}$$

b. $\lim\limits_{\substack{t \to -1 \\ t > -1}} \mathcal{A}(t) = \frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2}$

$\mathcal{A}(1) = -\frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2}$

On en déduit que :

$\boldsymbol{\mathcal{A}_1 = 4\ cm^2}$

PARTIE C

1. Sur $[0;\ +\infty[$, g est continue car dérivable et est strictement croissante.

Alors g réalise une bijection de $[0;\ +\infty[$ sur $I = [-\ln 2\ ;\ +\infty[$

2. (C') est la symétrique de la partie de (C) correspondant à $[0;\ +\infty[$ par rapport à la droite d'équation $y = x$ (Voir le graphique)

3. $\mathcal{A}_2 = ua \times \int_{-\ln 2}^0 \left(g^{-1}(x) - f(x)\right)dx$

$\Leftrightarrow \mathcal{A}_2 = 4\left(-\int_{-\ln 2}^0 f(x)dx + \int_{-\ln 2}^0 g^{-1}(x)\,dx\right)$

$\Leftrightarrow \mathcal{A}_2 = 4\left(\int_0^{-\ln 2} f(x)dx + \int_{-\ln 2}^0 g^{-1}(x)\,dx\right)$

Or par symétrie :

$\int_{-\ln 2}^0 g^{-1}(x)\,dx = -\int_0^1 f(x)\,dx$

D'où

$\mathcal{A}_2 = 4\left(\int_0^{-\ln 2} f(x)dx - \int_0^1 f(x)\,dx\right)$

On a donc :

$\boldsymbol{\mathcal{A}_2 = 4\left(\mathcal{A}(-\ln 2) - \mathcal{A}(1)\right)}$

PARTIE D

$\begin{cases} x(t) = 2e^{-t} - 1 \\ y(t) = -2te^{-t} \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$

1. $x = 2e^{-t} - 1 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{x+1}{2}$ et

$\Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$

Par conséquent :

$y = -(x+1)\ln\left(\frac{x+1}{2}\right) = -f(x)$

Par ailleurs :

$t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^{-t} > 0$

$\Leftrightarrow 2e^{-t} - 1 > -1$

$\Leftrightarrow x > -1$

En conclusion :

$\boldsymbol{(\Gamma): y = -f(x);\ x > -1}$

(Γ) et (C) sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses

2. Pour la construction, voir graphique

PROBLEME 22
PARTIE A

1. $g(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$; $D_g = \mathbb{R}$

a. $\boldsymbol{g'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, (1+x^2)^2 > 0$

Alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $1 - x^2$

$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Par conséquent :

$\forall\, x \in\,]-\infty; -1[,\ g'(x) < 0$

$\forall\, x \in\,]-1; 1[,\ g'(x) > 0$

$\forall\, x \in\,]1; +\infty[,\ g'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; -1[, g$ est décroissante

Sur $]-1; 1[, g$ est croissante

Sur $]1; +\infty[, g$ est décroissante

<u>Tableau de variations de g</u>

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

b. D'après ce tableau de variation

0 est le minimum de g sur $\mathbb{R}$

2 est le maximum de g sur $\mathbb{R}$

Par conséquent :
$\boldsymbol{\forall\, x \in \mathbb{R}, 0 \leq g(x) \leq 2}$

c. $g''(x) = \frac{4x(x^4-2x^2-3)}{(1+x^2)^4}$

$$\boldsymbol{g''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}}$$

$\forall\, x \in [1; +\infty[, 4x > 0$ et $(1+x^2)^3 > 0$

Alors le signe de $g''(x)$ dépend de celui de $x^2 - 3$

$x^2 - 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Par conséquent :

$\forall\, x \in \left[1; \sqrt{3}\right[, g''(x) < 0$

$\forall\, x \in \left]\sqrt{3}; +\infty\right[, g''(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $\left[1; \sqrt{3}\right[, g'$ est décroissante

Sur $\left]\sqrt{3}; +\infty\right[, g'$ est croissante

d. Déduction

<u>Tableau de variations de g'</u>

x	1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

D'après ce tableau :

$\forall\, x \in [1; +\infty[, -\frac{1}{4} \leq g'(x) \leq 0$

On en déduit que :
$\boldsymbol{\forall\, x \in [1; +\infty[, |g'(x)| \leq \frac{1}{4}}$

2. $f(x) = 1 + \ln[g(x)]$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

a. $\boldsymbol{f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)(x+1)^2}}$

$\forall\, x \in D_f, (1+x^2) > 0$ et $(x+1)^2 > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $1 - x^2$

$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Par conséquent :

$\forall\, x \in\,]-\infty; -1[,\ f'(x) < 0$

$\forall\, x \in\,]-1; 1[,\ f'(x) > 0$

$\forall\, x \in\,]1; +\infty[,\ f'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; -1[, f$ est décroissante

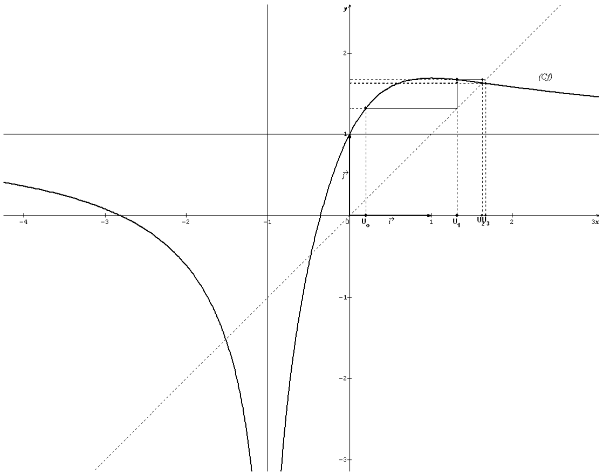
Sur $]-1; 1[, f$ est croissante

Sur $]1; +\infty[, f$ est décroissante

<u>Tableau de variations de f</u>

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$1 + \ln 2$	$\searrow$	1

b. Tracer de $(\mathcal{C}_f)$



c. Sur $[0;\ +\infty[$,
1 est le minimum de f
$1+\ln 2$ est le maximum de f

Donc $\forall\, \boldsymbol{x} \in [\mathbf{0};\ +\infty[$,
$\mathbf{1} \leq \boldsymbol{f(x)} \leq \mathbf{1} + \mathbf{ln\,2}\ < 2$
car $\mathbf{ln\,2} < 1$

d. $\boldsymbol{f'(x)} = \frac{\boldsymbol{g'(x)}}{\boldsymbol{g(x)}}$
D'après 1.) $\forall\, x \in [1;2]$,
On a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$ et $1 \leq g(x) \leq 2$
$\Leftrightarrow\ |g'(x)| \leq \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{g(x)} \leq 1$
$\Leftrightarrow \left|\frac{g'(x)}{g(x)}\right| \leq \frac{1}{4}$

Donc $\forall\, \boldsymbol{x} \in [\mathbf{1};\mathbf{2}], |\boldsymbol{f'(x)}| \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

e. L'équation $f(x) = m$ admet :
Deux solutions si $m \in]-\infty; 1[$
Une solution si $m = 1$
Deux solutions si $m \in]1; 1+\ln 2[$
Une solution si $m = 1+\ln 2$
Zéro solution si $m \in]1+\ln 2\,;\ +\infty[$

PARTIE B

$U_0 = \frac{1}{5}$ et $U_{n+1} = f(U_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

1. Voir figure

2. $U_1 = 1 + \ln\left(\frac{18}{13}\right) \simeq 1{,}32$
On a : $1 < U_1 < 2$
$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $1 < U_n < 2$
et montrons que $1 < U_{n+1} < 2$
$1 < U_n < 2 \Longrightarrow 1 < f(U_n) < 2$
Car $\forall\, x \in [1;2] \subset [0;\ +\infty[$,
$1 < f(x) < 2$
Or par définition $U_{n+1} = f(U_n)$
D'où $1 < U_{n+1} < 2$ si $1 < U_n < 2$

On conclut donc que :
$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*, \mathbf{1} < \boldsymbol{U_n} < 2$

3. $h(x) = f(x) - x;\ D_h = [1;2]$

a. $\boldsymbol{h'(x)} = \boldsymbol{f'(x)} - \mathbf{1}$
$\forall\, x \in [1;2], f'(x) < 0$
$\Leftrightarrow f'(x) - 1 < 0$
Par conséquent :
$\forall\, x \in [1;2], h'(x) < 0$
On en déduit que :
Sur $[1;2]$, h est décroissante

b. Déduction
$f(x) = x \Leftrightarrow h(x) = 0$
Sur $[1;2]$, h est continue car dérivable et est strictement décroissante
$\begin{cases} h(1) = \ln 2 > 0 \\ h(2) = -0{,}4 < 0 \end{cases}$

On a : $\boldsymbol{h(1)} \times \boldsymbol{h(2)} < 0$
Alors l'équation $\boldsymbol{h(x)} = \mathbf{0}$ **admet une unique solution** $\boldsymbol{\alpha}$ **comprise entre 1 et 2 ce qui montre aussi que** $\boldsymbol{\alpha}$ **est l'unique solution de l'équation** $\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{x}$

4. On sait que :
$\forall\, x \in [1;2], |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$; $\alpha \in [1;2]$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, U_n \in [1;2]$
D'où d'après l'inégalité de la moyenne on a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:
$\left|\int_{\alpha}^{U_n} f'(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$
$\Longrightarrow \left|[f(x)]_{\alpha}^{U_n}\right| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$
$\Longrightarrow |f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$
Or $f(\alpha) = \alpha$ et $f(U_n) = U_{n+1}$

D'où $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$,
$|\boldsymbol{U_{n+1}} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}|\boldsymbol{U_n} - \boldsymbol{\alpha}|$

Déduction
En partant de cette inégalité on a :
$n = 1 \Longrightarrow \quad |U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_1 - \alpha|$
$n = 2 \Longrightarrow \quad |U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_2 - \alpha|$
$n = 3 \Longrightarrow \quad |U_4 - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_3 - \alpha|$
$\vdots$
$n = n \Longrightarrow \quad |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_{n-1} - \alpha|$

Faisons le produit membre à membre de ces $(n-1)$ inégalités.
On obtient après simplification :

$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |U_1 - \alpha|$

$|U_1 - \alpha| = \left|1 + \ln\left(\frac{18}{13}\right) - \alpha\right|$

$1 < \alpha < 2$

$\Leftrightarrow -1 + \ln\left(\frac{18}{13}\right) < U_1 - \alpha < \ln\left(\frac{18}{13}\right)$

$\Leftrightarrow -0{,}68 < U_1 - \alpha < 0{,}32 < 0{,}68$

$\Leftrightarrow |U_1 - \alpha| < 0{,}68 \leq 1$

$\Leftrightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |U_1 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \times 1$

On en déduit que :

$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*, |\boldsymbol{U_n} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)^{\boldsymbol{n-1}}$

Par ailleurs :

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ car $0 < \frac{1}{4} < 1$

Alors la suite (U_n) converge vers α et on a :

$\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{U_n} = \boldsymbol{\alpha}$

PROBLEME 23

PARTIE A

$g(x) = 1 + (1-x)e^{-x};\ D_g = \mathbb{R}$

1. $\boldsymbol{g'(x) = (x-2)e^{-x}}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$

Alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $x - 2$

Par conséquent :

$\forall\, x \in]-\infty; 2[, g'(x) < 0$

$\forall\, x \in]2; +\infty[, g'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 2[, g$ est décroissante

Sur $]2; +\infty[, g$ est croissante

<u>**Tableau de variation de g**</u>

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$1-e^{-2}$	↗	1

Calcul des limites

$\lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{g(x)} = +\infty$

Car $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} (1-x) = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{g(x) = 1}$

Car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0 \end{cases}$

2. g décroît sur $]-\infty; 2[$ et croît sur $]2; +\infty[$ alors $g(2)$ est le minimum de g sur $\mathbb{R}$

Par conséquent :

$\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) \geq g(2)$

Or $g(2) = 1 - e^{-2} > 0$

Alors $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{g(x)} > 0$

PARTIE B

$f(x) = x - 1 + xe^{-x};\ D_f = \mathbb{R}$

1. $f'(x) = g(x)$

Donc d'après PARTIE A :

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $\mathbb{R}, g$ est croissante

2. Calcul des limites

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} x-1 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} xe^{-x} = -\infty \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} x-1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x} = 0 \end{cases}$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3. Sur $\mathbb{R}, f$ est continue car dérivable et est strictement croissante
Alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty;\ +\infty[$ et $0\in\ ]-\infty;\ +\infty[$
Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$
Vérification
$\begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = e^{-1} > 0 \end{cases}$

On a : $f(0) \times f(1) < 0$
Alors $0 < \alpha < 1$

4. $(D): y = x - 1$
$\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x} = 0$

Alors la droite (D) est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$

Position de (C) et (D)
$f(x) - y = xe^{-x}$
$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$
Alors le signe de $f(x) - y$ dépend de celui de x
Par conséquent :
$\forall\, x \in\ ]-\infty; 0[, f(x) - y < 0$
$\forall\, x \in\ ]0;\ +\infty[, f(x) - y > 0$
On en déduit que :

Sur $]-\infty; 0[, (C)$ est en dessous de (D)
Sur $]0;\ +\infty[, (C)$ est au dessus de (D)

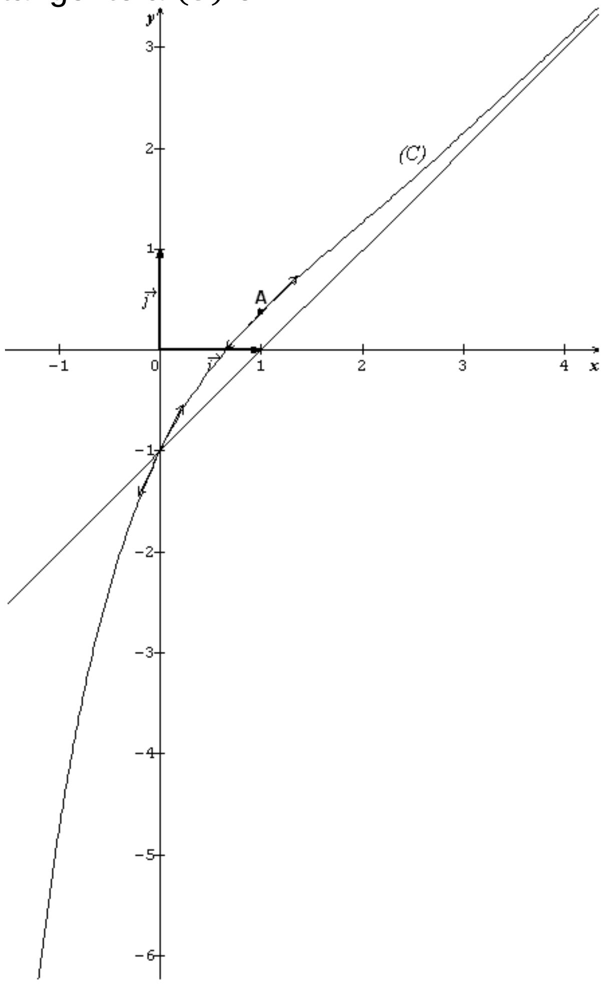
5. Coordonnées de A
La tangente en A à (C) a pour coefficient directeur $f'(x_A)$ (D) a pour coefficient directeur 1
On a donc :
$f'(x_A) = 1$
$\Leftrightarrow (1 - x_A)e^{-x_A} = 0$
$\Leftrightarrow x_A = 1$ car $e^{-x_A} > 0$
$y_A = f(1) = e^{-1}$

Donc $A(1;\ e^{-1})$

6. $(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

Alors $(T): y = 2x - 1$

7. Tracer de (D), (T) et (C) ainsi que la tangente à (C) en A



8. $\mathcal{A}(\lambda) = ua\int_0^\lambda [f(x) - y]\,dx$

$\int_0^\lambda [f(x) - y]\,dx = \int_0^\lambda xe^{-x}\,dx$

<u>Intégration par parties</u>

$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$\int_0^\lambda xe^{-x}\,dx = [-xe^{-x}]_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{-x}dx$

$\Leftrightarrow \int_0^\lambda xe^{-x}\,dx = [-(x+1)e^{-x}]_0^\lambda$

$\Leftrightarrow \int_0^\lambda xe^{-x}\,dx = 1 - (\lambda+1)e^{-\lambda}$

$ua = 4cm^2$

Donc $\boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda) = 4[1 - (\lambda+1)e^{-\lambda}]\, cm^2}$

$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda e^{-\lambda} = 0 \\ \lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} = 0 \end{cases}$

Alors $\boldsymbol{\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 4}$

PARTIE C

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

$\Leftrightarrow\ x - 1 + xe^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow\ xe^{x} - e^{x} + x = 0$

$\Leftrightarrow e^{x} = x(e^{x} + 1)$

$\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x+1} = x$

Alors $\boldsymbol{\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x+1} = x}$

2. $h(x) = \frac{e^x}{e^x+1};\ D_h = [0\,;\,1]$

a. $\boldsymbol{h'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}} > 0\ \forall\, x \in [\mathbf{0}\,;\,\mathbf{1}]$

On en déduit que :

Sur $[0\,;\,1], h$ est croissante

x	0	1
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	$\frac{1}{2}$ ↗	$\frac{e}{e+1}$

b. Déduction

D'après ce tableau de variation,

$\forall\, x \in [0\,;\,1], h(x) \in \left[\frac{1}{2};\ \frac{e}{e+1}\right]$

Or $\left[\frac{1}{2};\ \frac{e}{e+1}\right] \subset [0\,;\,1]$

D'où $\boldsymbol{\forall\, x \in [0\,;\,1], h(x) \in [0\,;\,1]}$

3. $\boldsymbol{h''(x) = \frac{e^x(1-e^{2x})}{(e^x+1)^4}}$

$\forall\, x \in [0\,;\,1], \frac{e^x}{(e^x+1)^4} > 0$

$0 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq e^{2x} \leq e^2$

$\Leftrightarrow 1 - e^2 \leq 1 - e^{2x} \leq 0$

Par conséquent :

$\forall\, x \in [0\,;\,1], h''(x) \leq 0$

On en déduit que :

Sur $[0\,;\,1], h'$ est décroissante

Et $\forall\, x \in [0\,;\,1], h'(1) \leq h'(x) \leq h'(0)$

$\Leftrightarrow \frac{e}{(e+1)^2} \leq h'(x) \leq \frac{1}{4}$

Donc $\boldsymbol{\forall\, x \in [0\,;\,1], 0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{4}}$

4. $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$

a. $U_0 = 0 \in [0\,;\,1]$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \in [0\,;\,1]$ et montrons que $U_{n+1} \in [0\,;\,1]$

En effet :

$U_n \in [0\,;\,1] \Longrightarrow\ h(U_n) \in [0\,;\,1]$

Car $\forall\, x \in [0\,;\,1], h(x) \in [0\,;\,1]$

Or par définition $U_{n+1} = h(U_n)$

D'où $U_{n+1} \in [0\,;\,1]$ si $U_n \in [0\,;\,1]$

On conclut donc que :
$\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \in [0\,;\,1]}$

b. On sait que :

$\forall\, x \in [1; 2], |h'(x)| \leq \frac{1}{4}$; $\alpha \in [0; 1]$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, , U_n \in [0; 1]$

D'où d'après l'inégalité de la moyenne on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$\left|\int_\alpha^{U_n} h'(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$

$\Longrightarrow \left|[h(x)]_\alpha^{U_n}\right| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$

$\Longrightarrow |h(U_n) - h(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$

Or $h(\alpha) = \alpha$ d'après 1.) et $U_{n+1} = h(U_n)$

D'où $\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N}}$,
$\boldsymbol{|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|}$

c. Déduction

En partant de cette inégalité on a :

$n = 0 \Longrightarrow \quad |U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_0 - \alpha|$

$n = 1 \Longrightarrow \quad |U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_1 - \alpha|$

$n = 2 \Longrightarrow \quad |U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_2 - \alpha|$

$\vdots$

$n = n - 1 \Longrightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_{n-1} - \alpha|$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |U_0 - \alpha|$

$|U_0 - \alpha| = |-\alpha|$

$0 \leq \alpha \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq -\alpha \leq 0$

$\Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq 1$

$\Leftrightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Par ailleurs :

$\lim_{n\to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{4} < 1$

Alors la suite (U_n) converge et $\lim_{n\to +\infty} U_n = \alpha$
Ceci montre que la suite (U_n) converge vers α

d. D'après ce qui précède,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^p \leq 10^{-6} \Rightarrow \left| U_p - \alpha \right| \leq 10^{-6}$$

Or $\left(\frac{1}{4}\right)^p \leq 10^{-6}$

$\Leftrightarrow -p\ln 4 \leq -6\ln 10$

$\Leftrightarrow p \geq \frac{3\ln 10}{\ln 2}$

$\Leftrightarrow p \geq 9{,}96$

Donc $\left| U_p - \alpha \right| \leq 10^{-6}\ \forall p \geq 10$

Par exemple, pour $p = 10$, U_p est une valeur approchée à 10^{-6} près de α

PROBLEME 24

PARTIE A

$f(x) = e^{-x}\sin x\ ;\ D_f = \mathbb{R}$

1. On sait que :

$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$ et $e^{-x} > 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :
$-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$

Déduction

$\lim_{x\to +\infty} (-e^{-x}) = \lim_{x\to +\infty} e^{-x} = 0$
Alors $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$

2. $f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$

Or $\cos x - \sin x$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :
$f'(x) = \sqrt{2}e^{-x}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

3. $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right], \sqrt{2}e^{-x} > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right], x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ et

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Par conséquent :

$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right], f'(x) \geq 0$

$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right], f'(x) \leq 0$

On en déduit que :

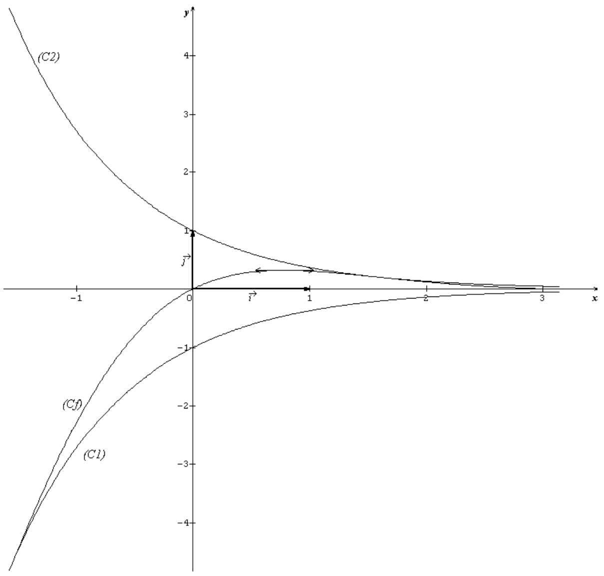
Sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$, f est croissante

Sur $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$, f est décroissante

<u>Tableau de variations de f</u>

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-e^{\frac{\pi}{2}}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$	$\searrow$	0

4. Tracer des courbes $(\mathcal{C}_f), (\mathcal{C}_1)$ et$(\mathcal{C}_2)$



5.

a. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$
$\Leftrightarrow x = k\pi$

Sur $\mathbb{R}$, les points communs de $(\boldsymbol{\mathcal{C}_f})$ et l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $(\boldsymbol{k\pi}; \mathbf{0}), \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$

Sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, les points communs de $(\boldsymbol{\mathcal{C}_f})$ et l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $(\mathbf{0}; \mathbf{0})$ et $(\boldsymbol{\pi}; \mathbf{0})$

b. $f(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow \sin x = -1$
$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Sur $\mathbb{R}$, les points communs de $(\boldsymbol{\mathcal{C}_f})$ et $(\boldsymbol{\mathcal{C}_1})$ sont les points de coordonnées $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; -e^{\frac{\pi}{2}-2k\pi}\right), \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$

Sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, le point commun de $(\boldsymbol{\mathcal{C}_f})$ et $(\boldsymbol{\mathcal{C}_1})$ est le point de coordonnées $\left(-\frac{\pi}{2}; -e^{\frac{\pi}{2}}\right)$

c. $f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow \sin x = 1$
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Sur $\mathbb{R}$, les points communs de $(\boldsymbol{\mathcal{C}_f})$ et $(\boldsymbol{\mathcal{C}_2})$ sont les points de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}\right), \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$

Sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, le point commun de $(\boldsymbol{\mathcal{C}_f})$ et $(\boldsymbol{\mathcal{C}_2})$ est le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}; e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$

6. $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |e^{-x}\sin x| \leq e^{-x}$
Donc $e^{-x} \leq 10^{-2} \Longrightarrow |f(x)| \leq 10^{-2}$
Or $e^{-x} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow x \geq 2\ln 10$

D'où $\forall \boldsymbol{x} \geq \mathbf{2}\ln\mathbf{10}, |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \leq \mathbf{10^{-2}}$
On en déduit que : $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{2}\ln\mathbf{10}$

PARTIE B

1. $f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$
$f''(x) = -2e^{-x}\cos x$
$f^{(3)}(x) = 2e^{-x}(\cos x + \sin x)$
$f^{(4)}(x) = -4e^{-x}\sin x$
On a donc :
$f^{(4)}(x) = -4f(x)$
$\Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{4}f^{(4)}(x)$

2. $f(x) = -\frac{1}{4}f^{(4)}(x)$
$\Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{4}\left[f^{(3)}(x)\right]'$

On en déduit que :
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4}\boldsymbol{f}^{(3)}(\boldsymbol{x})$$

3. $I = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\, dx$
$I = \left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x)\right]_0^{\pi}$

$$\boldsymbol{I} = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$$

PARTIE C

$I_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x)dx$

1. $I_0 = \int_0^{\pi} f(x)dx = I$

<u>**Interprétation graphique**</u>

I_0 est l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$

2. $I_n = \left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x)\right]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}$
$I_n = \frac{e^{-(2n+1)\pi}+e^{-2n\pi}}{2}$

Donc $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{I_n} = \frac{e^{-2n\pi}}{2}(\ e^{-\pi} + \mathbf{1})$

3. $I_{n+1} = \frac{e^{-2(n+1)\pi}}{2}(\ e^{-\pi} + 1)$

$\frac{I_{n+1}}{I_n} = e^{-2\pi} \Leftrightarrow I_{n+1} = e^{-2\pi} \times I_n$

Alors la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $e^{-2\pi}$ et de premier terme $I_0 = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$

4. $0 < e^{-\pi} < 1$

Alors la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

PROBLEME 25

PARTIE A

$g(x) = (x-1)e^x + x^2;\ D_g = \mathbb{R}$

1. $g'(x) = x(e^x + 2)$

$\forall\ x \in \mathbb{R}, e^x + 2 > 0$

Alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de x

Par conséquent :

$\forall\ x \in]-\infty; 0[, g'(x) < 0$

$\forall\ x \in]0; +\infty[, g'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 0[, g$ est décroissante

Sur $]0; +\infty[, g$ est croissante

<u>Tableau de variations de g</u>

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$

2. Sur $[0; +\infty[, g$ est continue car dérivable et est strictement croissante.

Alors g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[-1; +\infty[$ et $0 \in [0; +\infty[$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur l'intervalle $[0; +\infty[$

$\begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}57 < 0 \\ g(1) = 1 > 0 \end{cases}$

On a : $g\left(\frac{1}{2}\right) \times g(1) < 0$

Donc α est dans l'intervalle $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

3. Signe de $g(x)$

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0};\ \boldsymbol{\alpha}[, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) < 0$$
$$\forall\, \boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{\alpha};\ +\infty[, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) > 0$$

PARTIE B

$f(x) = \frac{e^x}{e^x+x}; D_f = [0;\ +\infty[$

1. $\forall\, x \geq 0, f(x) = x$

$\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x+x} = x$

$\Leftrightarrow (x-1)e^x + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow g(x) = 0$

Donc les équations $\boldsymbol{f(x) = x}$ et $\boldsymbol{g(x) = 0}$ sont équivalentes sur $[\mathbf{0};\ +\infty[$

D'après PARTIE A 2, α est la seule solution de l'équation $g(x) = 0$ sur $[0;\ +\infty[$

Par conséquent :
$\boldsymbol{\alpha}$ est aussi la seule solution de l'équation $\boldsymbol{f(x) = x}$

2.

a. $\boldsymbol{f'(x)} = \frac{(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})\boldsymbol{e^x}}{(\boldsymbol{e^x}+\boldsymbol{x})^2}$

$\forall\, x \in [0;\ +\infty[, e^x > 0, (e^x + x)^2 > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $x - 1$

Par conséquent :

$\forall\, x \in [0;\ 1[, f'(x) < 0$

$\forall\, x \in [1;\ +\infty[, f'(x) > 0$

b. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{1+xe^{-x}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x)} = \mathbf{1} \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{xe^{-x}} = \mathbf{0}$$

c. **<u>Tableau de variations de f</u>**

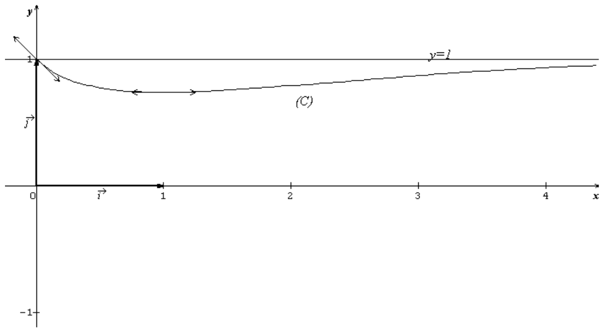
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{e}{e+1}$	↗	1

d. Construction de $(\mathcal{C})$

$(T_0): y = f'(0)(x-0) + f(0)$

Alors $\boldsymbol{(T_0): y = -x + 1}$

$$\boldsymbol{(T_1): y = \frac{e}{e+1}}$$



PARTIE C

1. f décroît sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

$\forall\, x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], \frac{e}{e+1} \leq f(x) \leq \frac{2\sqrt{e}}{2\sqrt{e}+1}$

$\Leftrightarrow 0{,}73 \leq f(x) \leq 0{,}76$

$\Leftrightarrow f(x) \in [0{,}73; 0{,}76] \subset \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Donc $\forall\, \boldsymbol{x} \in \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}; \mathbf{1}\right], \boldsymbol{f(x)} \in \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}; \mathbf{1}\right]$

2. $\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n)\ ,\ \ \forall\, n > 1 \end{cases}$

a. $U_1 = \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $U_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et montrons que $U_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

En effet :

$U_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Longrightarrow f(U_n) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Car $\forall\, x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], f(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Or par définition, $U_{n+1} = f(U_n)$

D'où $U_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ si $U_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

On conclut donc que :
$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*, \boldsymbol{U_n} \in \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}; \mathbf{1}\right]$

b. $\boldsymbol{f'(x)} = -\frac{(\mathbf{1}-\boldsymbol{x})\boldsymbol{e^x}}{(\boldsymbol{e^x}+\boldsymbol{x})^2}$

$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - x \leq \frac{1}{2}$ et $\sqrt{e} \leq e^x \leq e$

$\Leftrightarrow 0 \leq (1-x)e^x \leq \frac{e}{2}$

Par ailleurs :

$\frac{2\sqrt{e}+1}{2} \leq e^x + x \leq e + 1$

$\Leftrightarrow \frac{\left(2\sqrt{e}+1\right)^2}{4} \leq (e^x + x)^2 \leq (e+1)^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(e+1)^2} \leq \frac{1}{(e^x+x)^2} \leq \frac{4}{\left(2\sqrt{e}+1\right)^2}$

D'où on a :

$0 \leq \frac{(1-x)e^x}{(e^x+x)^2} \leq \frac{2e}{\left(2\sqrt{e}+1\right)^2} \leq \frac{2e}{\left(2\sqrt{e}\right)^2}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$

Donc $x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c. On sait que $x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$; $\alpha \in I$ et $\forall\, n > 1, U_{n-1} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

D'après l'inégalité de la moyenne on a $\forall\, n > 1$,

$\left|\int_{\alpha}^{U_{n-1}} f'(x)\, dx\right| \leq \frac{1}{2}|U_{n-1} - \alpha|$

$\Longrightarrow \left|[f(x)]_{\alpha}^{U_{n-1}}\right| \leq \frac{1}{2}|U_{n-1} - \alpha|$

$\Longrightarrow |f(U_{n-1}) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|U_{n-1} - \alpha|$

Or $f(\alpha) = \alpha$ d'après PARTIE B1et $U_n = f(U_{n-1})$

Donc $\forall\, n > 1$,
$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_{n-1} - \alpha|$

d. **<u>Démonstration par récurrence</u>**

$|U_1 - \alpha| = \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$

$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq U_1 - \alpha \leq 0$

$\Leftrightarrow |U_1 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1$

$\forall\, n > 1$, supposons que $|U_{n-1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et montrons que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

En effet :

$|U_{n-1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}|U_{n-1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Or $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_{n-1} - \alpha|$ d'où

$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_{n-1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'où $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ si $|U_{n-1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

On conclut donc que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$

Alors la suite (U_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$
Ceci montre que (U_n) converge vers α

f. On sait que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-7} \Longrightarrow |U_n - \alpha| \leq 10^{-7}$

Or $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-7} \Leftrightarrow n \geq \frac{7\ln 10}{\ln 2}$

$\Leftrightarrow n \geq 23{,}25$

Donc $|U_n - \alpha| \leq 10^{-7}\ \forall\, n \geq 24$

A priori il suffit de calculer les 24 premiers termes de la suite pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-7} près

PROBLEME 26

PARTIE A

$g(x) = x^2 - 2\ln x\,;\ D_g =]0;\ +\infty[$

1. $\boldsymbol{g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x}}$

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, x > 0$

Alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $x^2 - 1$

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ et $-1 \notin]0;\ +\infty[$

Par conséquent :

$\forall\, x \in]0;\ 1[, g'(x) < 0$

$\forall\, x \in]1;\ +\infty[, g'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $]0;\ 1[, g$ est décroissante

Sur $]1;\ +\infty[, g$ est croissante

2. g croît sur $]0;\ 1[$ et décroît sur $]1;\ +\infty[$

Alors $g(1)$ est le minimum de g sur $]0;\ +\infty[$

Par conséquent :

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, g(x) \geq g(1)$

Or $g(1) = 1 > 0$

$$\boxed{\textbf{D'où } \forall\, \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0};\ +\infty[, \boldsymbol{g(x)} > 0}$$

PARTIE B

$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x};\ D_f =]0;\ +\infty[$

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{2} + \frac{1}{x}(1 + \ln x)$

$$\boxed{\lim_{\boldsymbol{x}\to \mathbf{0}^+} \boldsymbol{f(x)} = -\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$

Interprétation graphique

L'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$

2.

a. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$

$$\boxed{\lim_{\boldsymbol{x}\to +\infty} \boldsymbol{f(x)} = +\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

b. $(\Delta): y = \frac{x}{2}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to +\infty} [\boldsymbol{f(x) - y}] = \mathbf{0} \\ \textbf{Alors la droite } (\Delta) \textbf{ est une} \\ \textbf{asymptote oblique à la courbe } (\boldsymbol{\mathcal{C}})\end{array}}$$

c. **<u>Position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ)</u>**

$f(x) - y = \frac{1+\ln x}{x}$

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, x > 0$

Alors le signe de $f(x) - y$ dépend de celui de $1 + \ln x$

$1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$

Par conséquent :

$\forall\, x \in \left]0;\ \frac{1}{e}\right[, f(x) - y < 0$

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{e};\ +\infty\right[, f(x) - y > 0$

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{On en déduit que :} \\ \textbf{Sur } \left]\mathbf{0};\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}}\right[, (\boldsymbol{\mathcal{C}}) \textbf{ est en dessous} \\ \textbf{de } (\Delta) \\ \textbf{Sur } \left]\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}};\ +\infty\right[, (\boldsymbol{\mathcal{C}}) \textbf{ est au dessus} \\ \textbf{de } (\Delta)\end{array}}$$

$(\mathcal{C}) = (\Delta) \Leftrightarrow f(x) = y$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

Et $y = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e}$

$$\boxed{\textbf{Donc } \boldsymbol{A}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}};\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{e}}\right)}$$

3. $\forall\, x \in]0;\ +\infty[, f'(x) = \frac{x^2 - 2\ln x}{2x^2}$

$$\boxed{\textbf{Alors } \forall\, \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0};\ +\infty[, \boldsymbol{f'(x)} = \frac{\boldsymbol{g(x)}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}^2}}$$

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, 2x^2 > 0$ et d'après PARTIE A, $g(x) > 0$ donc

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, f'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $]0;\ +\infty[, f$ est croissante

<u>Tableau de variation de f</u>

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$

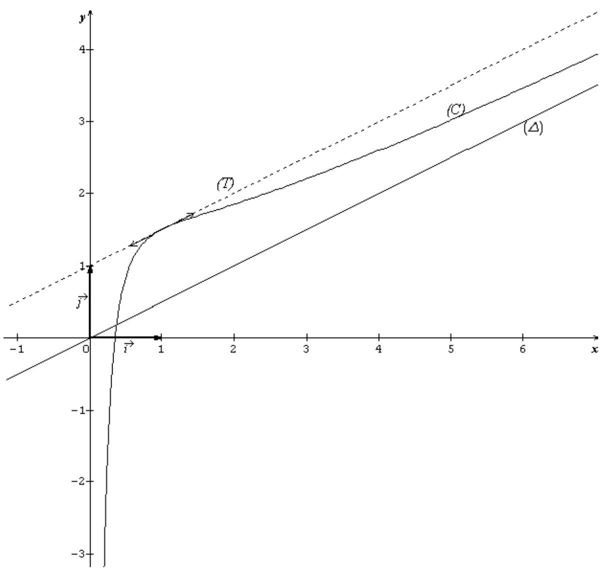
4. La tangente (T) en B a pour coefficient directeur $f'(x_B)$
(Δ) a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$
$(T)//(\Delta) \Leftrightarrow f'(x_B) = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \frac{x_B{}^2 - 2\ln x_B}{2x_B{}^2} = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \ln x_B = 0$
$\Leftrightarrow x_B = 1$ et $y_B = f(1) = \frac{3}{2}$

Donc $B\left(1; \frac{3}{2}\right)$

5. Sur $]0; +\infty[$, f est continue car dérivable et est strictement croissante.
Alors f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]-\infty; +\infty[$ et $0 \in]-\infty; +\infty[$.
Donc l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique $\alpha \in]0; +\infty[$
<u>Justification de l'encadrement</u>
$\begin{cases} g(0{,}34) = -0{,}06 < 0 \\ g(0{,}35) = 0{,}03 > 0 \end{cases}$

On a $g(0{,}34) \times g(0{,}35) < 0$
Donc $0{,}34 < \alpha < 0{,}35$

6. Traçons $(\mathcal{C})$ et les droites (Δ) et (T)



PARTIE C

$x_n = e^{\frac{n-2}{2}}; n \in \mathbb{N}$

1.

a. $x_{n+1} = e^{\frac{n-1}{2}}$
$\frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

On a $x_{n+1} = x_n\sqrt{e}$
Alors (x_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{e}$ et de premier terme $x_0 = \frac{1}{e}$

b. $\sqrt{e} > 1$ alors la suite (x_n) est croissante

2. $a_n = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) dx\,;\ n \in \mathbb{N}$

a. **<u>Interprétation graphique</u>**
a_n est l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_n$ et $x = x_{n+1}$

b. $a_n = 4\int_{e^{\frac{n-2}{2}}}^{e^{\frac{n-1}{2}}} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) dx$

$a_n = 4\left[\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{e^{\frac{n-2}{2}}}^{e^{\frac{n-1}{2}}}$

$a_n = 4\left[\left(\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{n-2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)^2\right)\right]$

$a_n = 4\left(\frac{2n+1}{8}\right)$

Donc $a_n = \frac{2n+1}{2}$

On en déduit que :
$a_{n+1} - a_n = 1$

On a $a_{n+1} = a_n + 1$
Alors (a_n) est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $a_0 = \frac{1}{2}$

PROBLEME 27

$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$; $D_f =]0;\ +\infty[$

PARTIE A

1. $f_1(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} \times \ln x$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = -\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f_1(x) = 0}$$

On en déduit que :
L'axe des ordonnées et l'axe des abscisses sont des asymptotes à $(\mathcal{C}_1)$

2. $\forall\, x \in]0;\ +\infty[,\ f_1'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, x^3 > 0$

Alors le signe de $f_1'(x)$ dépend de celui de $1 - 2\ln x$

$1 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow x < \sqrt{e}$

Par conséquent :

$\forall\, x \in \left]0;\ \sqrt{e}\right[, f_1'(x) > 0$

$\forall\, x \in \left]\sqrt{e};\ +\infty\right[, f_1'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $\left]0;\ \sqrt{e}\right[$, f_1 est croissante

Sur $\left]\sqrt{e};\ +\infty\right[$, f_1 est décroissante

<u>Tableau de variation de f_1</u>

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

3. $(T_1): y = f_1'(1)(x-1) + f_1(1)$

$$\boxed{\textbf{Alors } (T_1): y = x - 1}$$

4. $f_2(x) = \frac{(\ln x)^2}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} \times (\ln x)^2$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f_2(x) = +\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f_2(x) = 0 \textbf{ car } \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$$

On en déduit que :
L'axe des ordonnées et l'axe des abscisses sont des asymptotes à $(\mathcal{C}_2)$

5. $\forall\, x \in]0;\ +\infty[,\ f_2'(x) = \frac{2\ln x(1-\ln x)}{x^3}$

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, x^3 > 0$

Alors le signe de $f_2'(x)$ dépend de celui de $\ln x\,(1 - \ln x)$

$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow x < e$

Par conséquent :

$\forall\, x \in]0;\ 1[, f_2'(x) < 0$

$\forall\, x \in]1;\ e[, f_2'(x) > 0$

$\forall\, x \in]\,e;\ +\infty[, f_2'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]0;\ 1[$, f_2 est décroissante

Sur $]1;\ e[$, f_2 est croissante

Sur $]\,e;\ +\infty[$, f_2 est décroissante

<u>Tableau de variations de f_2</u>

x	0		1		e		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_2(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{e^2}$	↘	0

PARTIE B

1. $f_1(x) - f_2(x) = \frac{\ln x(1-\ln x)}{x^2}$

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, x^2 > 0$

Alors le signe de $f_1(x) - f_2(x)$ dépend de celui de $\ln x\,(1 - \ln x)$

D'après PARTIE A5, on a :

$\forall\, x \in]0;\ 1[, f_1(x) - f_2(x) < 0$

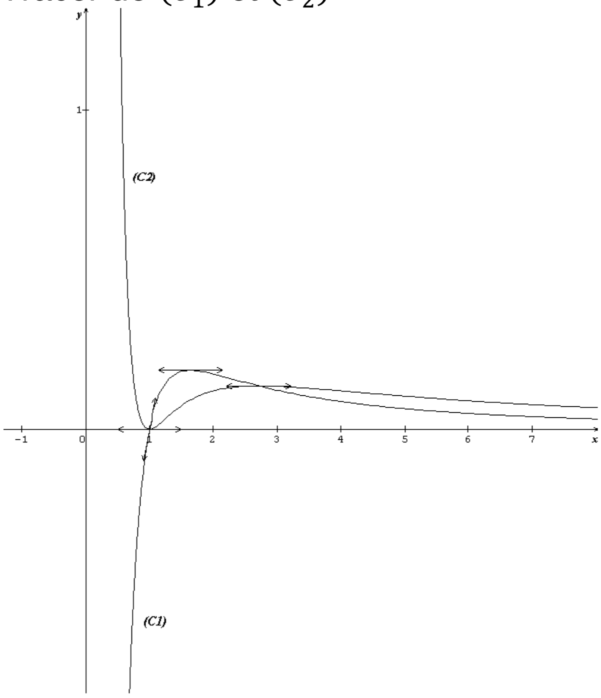
$\forall\, x \in]1;\ e[, f_1(x) - f_2(x) > 0$

$\forall\, x \in]\,e;\ +\infty[, f_1(x) - f_2(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]0;\ 1[$,
$(\mathcal{C}_1)$ est en dessous de $(\mathcal{C}_2)$
Sur $]1;\ e[$,
$(\mathcal{C}_1)$ est au dessus de $(\mathcal{C}_2)$
Sur $]\,e;\ +\infty[$,
$(\mathcal{C}_1)$ est en dessous de $(\mathcal{C}_2)$

2. Tracer de $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$



PARTIE C

$I_n = \int_1^e f_n(x)\mathrm{d}x\,; n \in \mathbb{N}$

1. $F(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

$$\boldsymbol{F'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}}$$

Déduction

$I_1 = \int_1^e f_1(x)\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$

D'après 1),

$x \longmapsto F(x)$ est une primitive de $x \longmapsto -\frac{\ln x}{x^2}$

On a donc $I_1 = -\int_1^e F'(x)\mathrm{d}x$

$I_1 = \left[-\frac{1+\ln x}{x}\right]_1^e$

$$\boldsymbol{I_1 = 1 - \frac{2}{e}}$$

2. $I_{n+1} = \int_1^e \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}\mathrm{d}x$

<u>Intégration par parties</u>

$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = (n+1)\frac{(\ln x)^n}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$I_{n+1} = \left[-\frac{(\ln x)^{n+1}}{x}\right]_1^e + (n+1)\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}\mathrm{d}x$

$$\textbf{Alors } \boldsymbol{I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n}$$

3. $I_2 = -\frac{1}{e} + 2I_1$

$$\textbf{D'où } \boldsymbol{I_2 = 2 - \frac{5}{e}}$$

$\mathcal{A} = ua \times \int_1^e \big(f_1(x) - f_2(x)\big)\,dx$

D'après la linéarité :

$\mathcal{A} = ua \times (I_1 - I_2)$

$ua = 20cm^2$

$$\boldsymbol{\mathcal{A} = 20\left(-1 + \frac{3}{e}\right) cm^2}$$

PARTIE D

1. Démonstration par récurrence

$\frac{1}{1!}I_1 = I_1 = 1 - \frac{2}{e} = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!}\right)$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$ et montrons que $\frac{1}{(n+1)!}I_{n+1} = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right)$

On sait que : $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$

Par conséquent :

$\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$

$\Longrightarrow I_n = n!\left[1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right]$

$\Longrightarrow (n+1)I_n = (n+1)n!\left[1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right]$

$\Longrightarrow -\frac{1}{e} + (n+1)I_n = -\frac{1}{e} + (n+1)!\left[1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right]$

$\Longrightarrow I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)!\left[1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right]$

$\Longrightarrow \frac{1}{(n+1)!}I_{n+1} = -\frac{1}{e} \times \frac{1}{(n+1)!} + 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$

$\Longrightarrow \frac{1}{(n+1)!}I_{n+1} = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right)$

si $\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$

On conclut donc que : $\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N}^*}$,

$$\boldsymbol{\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)}$$

2. $\forall\, x \in [1;e], 0 \leq \ln x \leq 1$
$\Leftrightarrow 0 \leq (\ln x)^n \leq 1$
$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{(\ln x)^n}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$
$\Leftrightarrow 0 \leq \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx \leq \int_1^e \frac{1}{x^2} dx$
Or $\int_1^e \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = 1 - \frac{1}{e}$
D'où $0 \leq I_n \leq 1 - \frac{1}{e} \leq 1$

On conclut donc que :
$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*,\ \boldsymbol{0 \leq I_n \leq 1}$

3. $0 \leq I_n \leq 1$
$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{n!} I_n \leq \frac{1}{n!}$
$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \leq \frac{1}{n!}$
$\Leftrightarrow e - \frac{e}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq e$
On a $\lim\limits_{n \to +\infty} e - \frac{e}{n!} = e$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{n!} = 0$

On en déduit que :
$$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e}$$

PROBLEME 28
PARTIE A

$(E): y' + y = x - 1$

1. Calcul de $\int_1^x (t-1)e^t dt$
<u>Intégration par parties</u>
$\begin{cases} u(t) = t - 1 \\ v'(t) = e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = e^t \end{cases}$
$\int_1^x (t-1)e^t dt$
$= [(t-1)e^t]_1^x - \int_1^x e^t dt$
$\int_1^x (t-1)e^t dt = [(t-2)e^t]_1^x$

$$\boldsymbol{\int_1^x (t-1)e^t dt = (x-2)e^x + e}$$

2.
a. $f(x) = z(x)e^{-x} \Leftrightarrow z(x) = f(x)e^x$ et
$f'(x) = z'(x)e^{-x} - z(x)e^{-x}$
Supposons que f est solution de (E), on a :
$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = x - 1$
$\Rightarrow z'(x)e^{-x} - z(x)e^{-x} + z(x)e^{-x} = x - 1$
$\Rightarrow z'(x)e^{-x} = x - 1$
$\Rightarrow z'(x) = (x-1)e^x$
Alors : $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{z'(x) = (x-1)e^x}$ **si** $\boldsymbol{f}$ **est solution de** $\boldsymbol{(E)}$
<u>Réciproquement</u>
Supposons que $\forall\, x \in \mathbb{R}$,
$z'(x) = (x-1)e^x$,
On a : $[f(x)e^x]' = (x-1)e^x$
$\Rightarrow f'(x)e^x + f(x)e^x = (x-1)e^x$
$\Rightarrow f'(x) + f(x) = x - 1$
Alors $\boldsymbol{f}$ **est solution de** $\boldsymbol{(E)}$ **si**
$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{z'(x) = (x-1)e^x}$

En conclusion :
$\boldsymbol{f}$ **est solution de** $\boldsymbol{(E)}$ **si, et seulement si, pour tout** $\boldsymbol{x}$ **de** $\mathbb{R}$,
$\boldsymbol{z'(x) = (x-1)e^x}$

b. D'après 1),
$z'(x) = (x-1)e^x$
$\Leftrightarrow z(x) = \int_1^x (t-1)e^t dt + K, K \in \mathbb{R}$

Donc $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, **on a :**
$\boldsymbol{z(x) = (x-2)e^x + e + K, K} \in \mathbb{R}$

3.
a. $f(x) = z(x)e^{-x}$

On en déduit que :
$\boldsymbol{f(x) = x - 2 + e^{1-x} + Ke^{-x}, K} \in \mathbb{R}$

b. $f(x) = x - 2 + e^{1-x} + Ke^{-x}$ et
$f(1) = 0$
$\Longrightarrow Ke^{-1} = 0$
$\Longrightarrow K = 0$

$\boxed{\textbf{Donc } \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x - 2 + e^{1-x}}$

PARTIE B

$f(x) = x - 2 + e^{1-x};\ D_f = \mathbb{R}$

1.

a. $\boldsymbol{f'(x) = 1 - e^{1-x}}$
$1 - e^{1-x} > 0 \Leftrightarrow x > 1$
Par conséquent :
$\forall\, x \in]-\infty; 1[, f'(x) < 0$
$\forall\, x \in]1; +\infty[, f'(x) > 0$
On en déduit que :
Sur $]-\infty; 1[, f$ est décroissante
Sur $]1; +\infty[, f$ est croissante

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
$= \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x}(xe^{x} - 2e^{x} + e)$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \end{cases}$

<u>**Tableau de variations de f**</u>

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

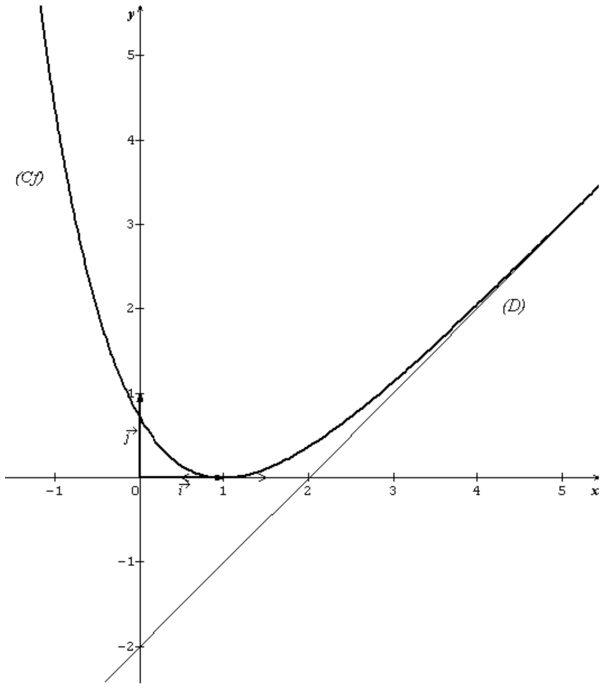
2.

a. $y = x - 2$
$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x \to +\infty} e \cdot e^{-x} = 0$
Alors la droite (D), d'équation $y = x - 2$, est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

b. $f(x) - y = e^{1-x} > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

On en déduit que :
Sur $\mathbb{R}$, $(\mathcal{C}_f)$ est au dessus de (D)

3. Tracer de (D) et $(\mathcal{C}_f)$



PARTIE C

Soit x_0 un nombre réel strictement positif.

1. $S_1 = \int_0^{x_0} (f(x) - y)\, dx = \int_0^{x_0} e^{1-x}\, dx$
$S_1 = [-e^{1-x}]_0^{x_0}$

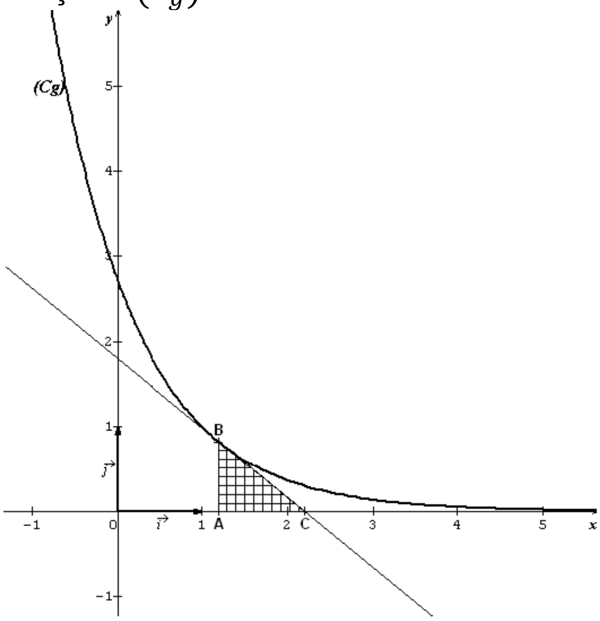
$$\boxed{S_1 = e - e^{1-x_0}}$$

2. $g(x) = e^{1-x};\ D_g = \mathbb{R}$

a. $\boldsymbol{g'(x) = -e^{1-x} < 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}}$
On en déduit que :
Sur $\mathbb{R}$, g est décroissante

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0

Traçons $(\mathcal{C}_g)$



b. $S_1 = \int_0^{x_0} e^{1-x}\,dx = \int_0^{x_0} g(x)\,dx$

<u>Interprétation géométrique</u>

S_1 est donc l'aire en unité d'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C}_g)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = x_0$

3. $A(x_0; 0)$; $B(x_0; g(x_0))$

$(T): y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$

Coordonnées du point C

$g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0) = 0$

$\Leftrightarrow x = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 1 + x_0$

Donc $C(1 + x_0; 0)$

4. $\mathcal{A}ire(ABC) = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{g(x_0)\times 1}{2}$

Car ABC est un triangle rectangle en A

$$\boldsymbol{\mathcal{A}ire(ABC) = \frac{e^{1-x_0}}{2}}$$

<u>Vérification</u>

$S_1 + 2S_2 = e - e^{1-x_0} + 2 \times \frac{e^{1-x_0}}{2}$

Donc on a bien : $S_1 + 2S_2 = e$

PROBLEME 29

PARTIE A

1. $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$;

$D_g =]1;\ +\infty[$

a. $\lim_{x \to 1} g(x)$

$= \lim_{x \to 1^+} 2x - (x-1)\ln(x-1)$

Posons $X = x - 1$

Si $x \to 1^+$, $X \to 0^+$ et

$\lim_{X \to 0^+} 2X + 2 - X\ln X = 2$

Car $\begin{cases} \lim_{X \to 0^+} 2X + 2 = 2 \\ \lim_{X \to 0^+} X\ln X = 0 \end{cases}$

Alors $\lim_{x \to 1} g(x) = 2$

b. $\forall\, x \in]1;\ +\infty[$,

$\boldsymbol{g'(x) = 1 - \ln(x-1)}$

c. $1 - \ln(x-1) > 0 \Leftrightarrow x < e + 1$

$$\boldsymbol{S_{]1;\,+\infty[} =]1;\ e+1[}$$

d. $\forall\, x \in]1;\ e+1[, g'(x) > 0$

$\forall\, x \in]e+1;\ +\infty[, g'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]1;\ e+1[$, g est croissante

Sur $]e+1;\ +\infty[$, g est décroissante

e. Sur $[e+1;\ e^3+1]$, g est continue car dérivable et est strictement décroissante puis on a :

$g(e+1) \times g(e^3+1) = -e^4 < 0$

Alors l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α dans l'intervalle $[e+1;\ e^3+1]$

Signe de $g(x)$:

$\forall\, x \in]1;\ \alpha[, g(x) > 0$

$\forall\, x \in]\alpha;\ +\infty[, g(x) < 0$

2. $\varphi(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$; $D_\varphi =]1;\ +\infty[$

a. $\lim_{x \to 1} \varphi(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln(x^2-1)}{x}$

Posons $X = x^2 - 1$

Si $x \to 1^+$, $X \to 0^+$ et

$\lim_{X \to 0^+} \frac{\ln X}{\sqrt{X+1}} = -\infty$

Car $\begin{cases} \lim_{X \to 0^+} \ln X = -\infty \\ \lim_{X \to 0^+} \sqrt{X+1} = 1 \end{cases}$

Alors $\lim_{x \to 1} \varphi(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2+\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x}$

$= \lim_{x\to+\infty} 2\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \times \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0}$$

Car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$

b. $\varphi'(x) = \frac{\frac{2x^2}{x^2-1} - \ln(x^2-1)}{x^2}$

$\Leftrightarrow \varphi'(x) = \frac{2x^2-(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)}$

On a donc :

$\forall\, \boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{1};\, +\infty[, \boldsymbol{\varphi'(x)} = \frac{\boldsymbol{g(x^2)}}{\boldsymbol{x^2(x^2-1)}}$

Et comme

$x^2(x^2-1) > 0$

Alors $\boldsymbol{\varphi'(x)}$ est du même signe que $\boldsymbol{g(x^2)}$

c. $\forall\, x \in \left]1;\, \sqrt{\alpha}\right[, x^2 \in]1;\, \alpha[$

$\forall\, x \in \left]\sqrt{\alpha};\, +\infty\right[, x^2 \in]\alpha;\, +\infty[$

Par conséquent :

$\forall\, x \in \left]1;\, \sqrt{\alpha}\right[, \varphi'(x) > 0$

$\forall\, x \in \left]\sqrt{\alpha};\, +\infty\right[, \varphi'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $\left]1;\, \sqrt{\alpha}\right[, \varphi$ est croissante

Sur $\left]\sqrt{\alpha};\, +\infty\right[, \varphi$ est décroissante

PARTIE B

$f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}; D_f =]0;\, +\infty[$

1. $\forall\, x \in]0;\, +\infty[, e^x \in]1;\, +\infty[$ et

$\varphi(e^x) = \frac{\ln((e^x)^2-1)}{e^x} = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$

Donc $\forall\, \boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{0};\, +\infty[, \boldsymbol{f(x) = \varphi(e^x)}$

2. Déduction des limites

a. Posons $X = e^x$

Si $x \to 0, X \to 1$ et $\lim_{X\to 1} \varphi(X) = -\infty$

Alors $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty}$

Si $x \to +\infty, X \to +\infty$ et

$\lim_{X\to+\infty} \varphi(X) = 0$

Alors $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

b. $\boldsymbol{f'(x) = e^x\varphi'(e^x)}$

$\forall\, x \in]0;\, +\infty[, e^x > 0$

Alors le signe de $\boldsymbol{f'(x)}$ dépend de celui de $\boldsymbol{\varphi'(e^x)}$

$\forall\, x \in \left]0;\, \ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right[, e^x \in \left]1;\, \sqrt{\alpha}\right[$

$\forall\, x \in \left]\ln\left(\sqrt{\alpha}\right);\, +\infty\right[, e^x \in \left]\sqrt{\alpha};\, +\infty\right[$

Par conséquent :

$\forall\, x \in \left]0;\, \ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right[, f'(x) > 0$

$\forall\, x \in \left]\ln\left(\sqrt{\alpha}\right);\, +\infty\right[, f'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $\left]0;\, \ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right[, f$ est croissante

Sur $\left]\ln\left(\sqrt{\alpha}\right);\, +\infty\right[, f$ est décroissante

Et comme $\boldsymbol{f}$ croît sur $\left]\boldsymbol{0};\, \boldsymbol{\ln}\left(\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}\right)\right[$ et décroît sur $\left]\boldsymbol{\ln}\left(\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}\right);\, +\infty\right[$, alors $\boldsymbol{f}$ admet un maximum en $\boldsymbol{\ln}\left(\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}\right)$

3. Par suite, on a :

$\forall\, x \in]0;\, +\infty[, f(x) \leq f\left(\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right)$

$\Leftrightarrow\ f(x) \leq \frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$

Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha-1) = \frac{2\alpha}{\alpha-1}$

D'où $\forall\, \boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{0};\, +\infty[, \boldsymbol{f(x)} \leq \frac{\boldsymbol{2\sqrt{\alpha}}}{\boldsymbol{\alpha-1}}$

4. Représentation graphique de $(\mathcal{C}_f)$

<u>Tableau de variations de f</u>

x	0		$\ln(\sqrt{\alpha})$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	||	$-\infty$ ↗	$\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$	↘	0

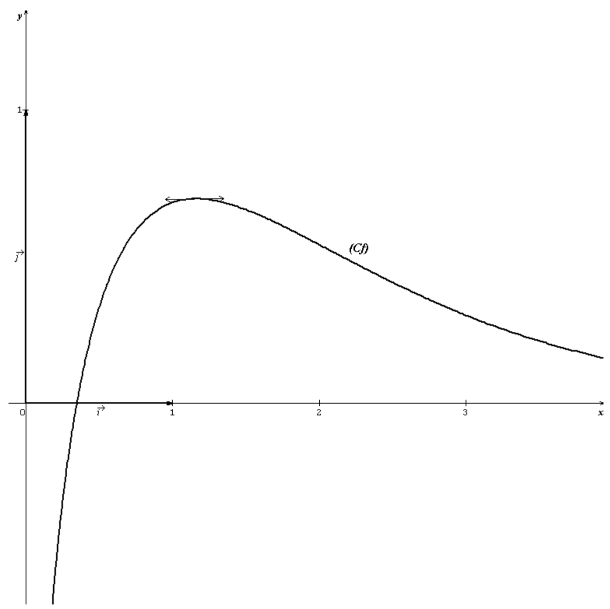
$\alpha \simeq 10$ et $f(\alpha) \simeq 0{,}70$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 1) = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} = 2$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln(\sqrt{2})$

$(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\ln(\sqrt{2})\,;0\right)$



PARTIE C

1. $f'(x) + f(x)$

$= e^x \times \frac{2e^{2x} - (e^{2x}-1)\ln(e^{2x}-1)}{e^{2x}(e^{2x}-1)} + \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$

$f'(x) + f(x) = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}$

Or

$\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{e^{2x}-1} = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}$

D'où $f'(x) + f(x) = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$
Ce qui montre bien que f est solution de l'équation différentielle : $y' + y = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$

2. $h(x) = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$

a. Une primitive H de h sur $]0;\,+\infty[$ est par exemple la fonction définie par :

$$\boldsymbol{H(x) = \ln(e^x - 1) - \ln(e^x + 1)}$$
Soit $H(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$

b. Déduction

$f'(x) + f(x) = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1} = h(x)$

$\Leftrightarrow f(x) = h(x) - f'(x)$

On en déduit qu'une primitive F de f sur $]0;\,+\infty[$ est par exemple la fonction définie par :

$$\boldsymbol{F(x) = H(x) - f(x)}$$
Soit $F(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) - \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$

3. $\mathcal{A} = ua \times \int_{\ln(\sqrt{2})}^{\ln(\sqrt{\alpha})} f(x)\,dx$

$\int_{\ln(\sqrt{2})}^{\ln(\sqrt{\alpha})} f(x)\,dx = [F(x)]_{\ln(\sqrt{2})}^{\ln(\sqrt{\alpha})}$

$\int_{\ln(\sqrt{2})}^{\ln(\sqrt{\alpha})} f(x)\,dx$

$= \ln 3 - \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1} + \ln\left(\frac{\sqrt{\alpha}-1}{\sqrt{\alpha}+1}\right)$

$$\boldsymbol{\mathcal{A} = \left[\ln 3 - \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1} + \ln\left(\frac{\sqrt{\alpha}-1}{\sqrt{\alpha}+1}\right)\right] ua}$$

PROBLEME 30

PARTIE A

$g(x) = x\ln x - x + 1;\ D_g =]0;\ +\infty[$

1. **Calcul des limites**

$$\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = 1}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} -x + 1 = 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} x\left(\ln x - 1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$

2. $\boldsymbol{g'(x) = \ln x}$

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Par conséquent :

$\forall\, x \in]0;\ 1[, g'(x) < 0$

$\forall\, x \in]1;\ +\infty[, g'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $]0;\ 1[$, g est décroissante

Sur $]1;\ +\infty[$, g est croissante

<u>Tableau de variation de g</u>

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| 1	↘	0	↗	$+\infty$

Déduction

D'après ce tableau de variation, g atteint son minimum en 1 et $g(1) = 0$

Par conséquent :

$$\boxed{\forall\, x \in]0;\ +\infty[, g(x) \geq 0}$$

3. $(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}') \Leftrightarrow g(x) = \ln x$

$\Leftrightarrow x\ln x - x + 1 - \ln x = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(\ln x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $\ln x = 1$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e$

Alors $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et e

Par ailleurs :

$x\ln x - x + 1 \leq \ln x$

$\Leftrightarrow g(x) - \ln x \leq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(\ln x - 1) \leq 0$

Tableau de signe

x	0		1		e		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\ln x - 1$	||	$-$	|	$-$	0	$+$	
$g(x) - \ln x$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signe, on a :

$\forall\, \boldsymbol{x \in [1; e], x\ln x - x + 1 \leq \ln x}$

4.

a. $J = \int_1^e (x-1)\ln x\, dx$

<u>Intégration par parties</u>

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \end{cases}$$

$$J = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{2}x - 1\right) dx$$

$$J = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\ln x - \frac{1}{4}x^2 + x\right]_1^e$$

$$\boxed{\boldsymbol{J = \frac{e^2 - 3}{4}}}$$

b. $\mathcal{A}ire(\Delta) = ua \times \int_1^e (\ln x - g(x))dx$

car sur $[1; e]$, $(\mathcal{C})$ est en dessous de $(\mathcal{C}')$

$\int_1^e (\ln x - g(x))dx$

$= \int_1^e -(x-1)(\ln x - 1)dx$

$= -\int_1^e (x-1)\ln x\, dx + \int_1^e (x-1)dx$

$= -J + \left[\frac{1}{2}(x-1)^2\right]_1^e = \frac{e^2 - 4e + 5}{4}$

$ua = 4\ cm^2$

$$\boxed{\textbf{Donc } \mathcal{A}ire(\Delta) = (\boldsymbol{e^2 - 4e + 5})\ \boldsymbol{cm^2}}$$

PARTIE B

$f(x) = \frac{1}{x-1}\ln x\,;\ D_f =]1\,;\,+\infty[$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} \times \frac{\ln x}{x}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1}$$

2. $f'(x) = \frac{\frac{x-1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{g(x)}{x(x-1)^2}}$$

$\forall\, x \in]1;\,+\infty[, x(x-1)^2 > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-\,g(x)$

Par conséquent :

$\forall\, x \in]1;\,+\infty[, f'(x) \leq 0$

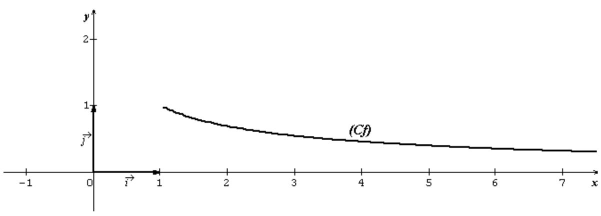
On en déduit que :

Sur $]0;\,+\infty[, f$ est décroissante

<u>Tableau de variation de f</u>

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1	0

3. Tracer de la courbe $(\mathcal{C}_f)$



PARTIE C

1. Sur $]1;\,+\infty[, f$ est continue car dérivable et est strictement décroissante.

Alors f réalise une bijection de $]1;\,+\infty[$ sur $]0;1[$ et $\frac{1}{2} \in]0;1[$.

Donc l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution notée α

<u>Montrons que $3,5 < \alpha < 3,6$</u>

$f(]3,5;3,6[) =]0,492;0,501[$ et $\frac{1}{2} \in]0,492;0,501[$

$$\boxed{\textbf{Alors on a : } 3,5 < \alpha < 3,6}$$

2. $h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,;\ D_h =]1;\,+\infty[$

a. $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1}\ln x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + x = 0 + x$

$\Leftrightarrow \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = x$

$$\boxed{\textbf{Donc } f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h(x) = x}$$

Déduction

α étant solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ alors α est aussi solution de l'équation $h(x) = x$ car ces deux équations sont équivalentes

b. $h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} > 0\ \forall\, x \in]1;\,+\infty[$

On en déduit que :

Sur $]1;\,+\infty[, h$ est croissante

c. $I = [3;4]$

$h([3;4]) = [3{,}09;3{,}88]$ et $[3{,}09;3{,}88] \subset [3;4]$

$$\boxed{\textbf{Donc } \forall\, x \in I, h(x) \in I}$$

D'autres parts :

$3 \leq x \leq 4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \leq \frac{5}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq h'(x) \leq \frac{5}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq |h'(x)| \leq \frac{5}{6}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{Donc on a aussi :}\\ \forall\, x \in I, |h'(x)| \leq \frac{5}{6}\end{array}}$$

3. $U_0 = 3$ et pour tout $n \geq 0$, $U_{n+1} = h(U_n)$

a. On sait que :

$\forall\, x \in [3;4], |h'(x)| \leq \frac{5}{6}$

D'où d'après l'inégalité de la moyenne on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$\left|\int_\alpha^{U_n} h'(x)\,dx\right| \leq \frac{5}{6}|U_n - \alpha|$

$\Rightarrow \left|[h(x)]_\alpha^{U_n}\right| \leq \frac{5}{6}|U_n - \alpha|$

$\Longrightarrow |h(U_n) - h(\alpha)| \leq \frac{5}{6}|U_n - \alpha|$
Or $h(\alpha) = \alpha$ d'après 1.) et $U_{n+1} = h(U_n)$

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}$,
$$\boldsymbol{|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6}|U_n - \alpha|}$$

b. En partant de cette inégalité on a :
$n = 0 \Longrightarrow \quad |U_1 - \alpha| \leq \frac{5}{6}|U_0 - \alpha|$
$n = 1 \Longrightarrow \quad |U_2 - \alpha| \leq \frac{5}{6}|U_1 - \alpha|$
$n = 2 \Longrightarrow \quad |U_3 - \alpha| \leq \frac{5}{6}|U_2 - \alpha|$
$\vdots$
$n = n - 1 \Longrightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{5}{6}|U_{n-1} - \alpha|$
Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.
On obtient après simplification :
$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n |U_0 - \alpha|$
$|U_0 - \alpha| = |3 - \alpha|$
$3 \leq \alpha \leq 4$
$\Leftrightarrow -4 \leq -\alpha \leq -3$
$\Leftrightarrow -1 \leq U_0 - \alpha \leq 0$
$\Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq 1$
$\Leftrightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \times 1$

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, |\, U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$

c. $\forall\, n \in \mathbb{N}, |\, U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$ et
$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{5}{6} < 1$

Alors la suite (U_n) converge et on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha$

4. On sait que $\left|\, U_p - \alpha\right| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^p$ donc
$\left(\frac{5}{6}\right)^p \leq 10^{-3} \Longrightarrow \left|\, U_p - \alpha\right| \leq 10^{-3}$
Or $\left(\frac{5}{6}\right)^p \leq 10^{-3}$
$\Leftrightarrow -p \ln\left(\frac{6}{5}\right) \leq -3 \ln 10$
$\Leftrightarrow p \geq \frac{3 \ln 10}{\ln\left(\frac{6}{5}\right)}$
$\Leftrightarrow p \geq 37{,}88$
On a donc $\left|\, U_p - \alpha\right| \leq 10^{-3}\ \forall\, p \geq 38$
U_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près pour $p = 38$ par exemple.

PROBLEME 31
PARTIE A

$f(x) = \ln(x + 1)$ et $g(x) = \frac{2x}{x+2}$;
$D_f = D_g = [0;\, +\infty[$

1. Variations de f
$f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0\ \forall\, x \in [0;\, +\infty[$
On en déduit que :
Sur $[0;\, +\infty[$, f est croissante
<u>Tableau de variation de f</u>

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

Variations de g
$g'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} > 0\ \forall\, x \in [0;\, +\infty[$
On en déduit que :
Sur $[0;\, +\infty[$, g est croissante
<u>Tableau de variation de g</u>

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	0 ↗	2

2. $h(x) = f(x) - g(x)$; $D_h = [0;\, +\infty[$
a. $\boldsymbol{h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} \geq 0}$
$\forall\, x \in [0;\, +\infty[$
On en déduit que :
Sur $[0;\, +\infty[$, h est croissante
b. $h(0) = 0$
c. h étant croissante sur $[0;\, +\infty[$ et $h(0) = 0$ alors
$\forall\, x \in [0;\, +\infty[, h(x) \geq 0$
$\Leftrightarrow \ln(x + 1) - \frac{2x}{x+2} \geq 0$

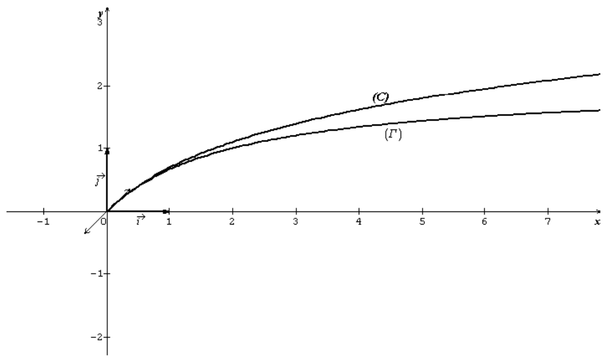
D'où l'inégalité :
$$\mathbf{(1)} \qquad \boldsymbol{\frac{2x}{x+2} \leq \ln(x + 1)\ \forall\, x \in [0;\, +\infty[}$$

d. **<u>Interprétation graphique</u>**
Sur $[0;\, +\infty[$, la courbe $(\mathcal{C})$ est en dessous de la courbe (Γ)

3. Traçons $(\mathcal{C})$ et (Γ)

$f'(0) = g'(0) = 1$ et $f(0) = g(0) = 0$

Alors à l'origine $\boldsymbol{O}$ du repère, les courbes $(\mathcal{C})$ et (Γ) admettent une même tangente $(\mathfrak{D})$ d'équation :
$(\mathfrak{D})$: $\boldsymbol{y = x}$



PARTIE B

1. $\varphi(x) = \ln(x+1) - x;\ D_\varphi = [0;\ +\infty[$

$\boldsymbol{\varphi'(x) = -\frac{x}{x+1} \leq 0\ \forall\ x \in [0;\ +\infty[}$

On en déduit que :

Sur $[0;\ +\infty[$, φ est décroissante

2. $\varphi(x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x;\ x > 0$

$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1\right)$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$

$$\boldsymbol{\varphi(0) = 0}$$

Déduction

φ étant décroissante sur $[0;\ +\infty[$ et $\varphi(0) = 0$

Alors $\forall\ x \in [0;\ +\infty[, \varphi(x) \leq 0$

On en déduit l'inégalité :
$$\boldsymbol{(2)\quad \ln(x+1) \leq x\ \ \forall\ x \in [0;\ +\infty[}$$

3. $I = \int_0^1 \ln(x+1)\,dx$

<u>Intégration par parties</u>

$\begin{cases} u(x) = \ln(x+1) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x+1} \\ v(x) = x \end{cases}$

$I = [x\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx$

En remarquant que $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

On a : $I = [(x+1)\ln(x+1) - x]_0^1$

Donc $\boldsymbol{I = 2\ln 2 - 1}$

4. Déduction

$J = \int_0^1 (x - \ln(x+1))dx$

$J = \int_0^1 x dx - \int_0^1 \ln(x+1)\,dx$

$J = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 - I$

On en déduit que : $\boldsymbol{J = -2\ln 2}$

D'autres parts :

$K = \int_0^1 \left(\frac{2x}{x+2} - \ln(x+1)\right)dx$

$K = \int_0^1 \frac{2x}{x+2}dx - \int_0^1 \ln(x+1)\,dx$

En remarquant que : $\frac{2x}{x+2} = 2 - \frac{4}{x+2}$

On a : $K = [2x - 4\ln(x+2)]_0^1 - I$

On en déduit que : $\boldsymbol{K = 3 + \ln\left(\frac{4}{81}\right)}$

5. <u>Interprétation géométrique de J et K</u>

J est l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, la tangente $(\mathfrak{D})$ et les droites d'équations :
$x = 0$ et $x = 1$

K est l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par les courbes $(\mathcal{C})$ et (Γ) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$

PARTIE C

1. $u(0) = 1$ et si $x \neq 0$, $u(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$;

$D_u = [0; 1]$

<u>Continuité sur $]0; 1]$</u>

La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est continue sur $]-1;\ +\infty[$ donc continue sur $]0; 1]$

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc continue sur $]0; 1]$

On en déduit que :

La fonction $x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0; 1]$ comme produit de deux fonctions continues sur $]0; 1]$

Etudions la continuité de u en 0

$\lim_{x \to 0} u(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} u(x) = u(0)$

Alors u est continue en 0

La fonction u étant continue sur $]0;1]$ et continue en 0, alors elle est continue sur $[0;1]$

2. On pose : $L = \int_0^1 u(x)dx$

(1) $\frac{2x}{x+2} \leq \ln(x+1)$

(2) $\ln(x+1) \leq x$

De ces deux inégalités on a :

$\frac{2x}{x+2} \leq \ln(x+1) \leq x;\ \ x \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{x+2} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1\ \forall\ x \neq 0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{2}{x+2}dx \leq \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx \leq \int_0^1 dx$

Donc on a bien :
$$\int_0^1 \frac{2}{x+2}dx \leq L \leq 1$$

Déduction

$[2\ln(x+2)]_0^1 \leq L \leq 1$

$$2\ln\left(\frac{3}{2}\right) \leq L \leq 1$$

PROBLEME 32

PARTIE A

$f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - 1)\ ;\ D_f =]0;\ +\infty[$

1. Calcul des limites

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

Car $\begin{cases} \lim_{x \to 0} \sqrt{1+x} - 1 = 0^+ \\ \lim_{X \to 0^+} \ln X = -\infty \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+x} - 1 = +\infty \\ \lim_{X \to +\infty} \ln X = -\infty \end{cases}$

2. Dérivée

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x}+1}{2x\sqrt{1+x}}$$

$\forall\ x \in]0;\ +\infty[, 2x > 0$ et $\sqrt{1+x} > 0$

Alors $\forall\ x \in]0;\ +\infty[, f'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $]0;\ +\infty[, f$ est croissante

Tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

3. Ordonnée de A

$x_A = 3$ alors $y_A = f(3) = 0$

Donc $A(3;0)$

Coordonnées de B, P et H

$x_B = \frac{5}{4}$ et $y_B = f\left(\frac{5}{4}\right) = -\ln 2$

Donc $B\left(\frac{5}{4}; -\ln 2\right)$

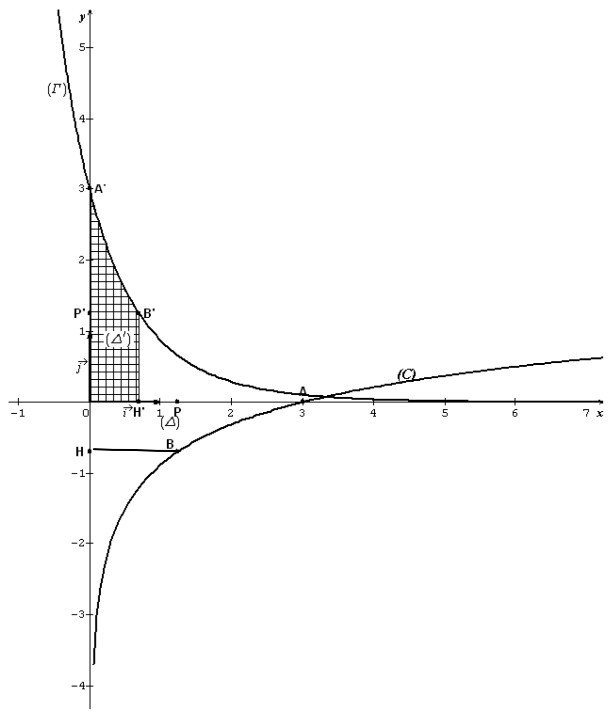
$x_P = x_B = \frac{5}{4}$ et $y_P = 0$

Donc $P\left(\frac{5}{4}; 0\right)$

$x_H = 0$ et $y_H = y_B = -\ln 2$

Donc $H(0; -\ln 2)$

Tracer de $(\mathcal{C})$



PARTIE B

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$; $r(M) = M'$

1. $r(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$

a. $z' = iz$

b. $x' + iy' = i(x + iy) = -y + ix$

On en déduit que :
$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ **et par suite** $\begin{cases} x = y' \\ y = -x' \end{cases}$

c. D'après ce qui précède :
Si $M(x;y)$ alors son image $M'(-y;\ x)$

Par conséquent :
$\boldsymbol{A'(0;\ 3)}$; $\boldsymbol{B'\left(\ln 2\,;\ \frac{5}{4}\right)}$; $\boldsymbol{P'\left(0;\ \frac{5}{4}\right)}$

2. $g(x) = e^{-2x} + 2e^{x}$; $D_g = \mathbb{R}$

a. $M(x;y) \in (\mathcal{C})$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ y = f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ -x' = f(y') \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ -x' = \ln\left(\sqrt{1+y'} - 1\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ e^{-x'} = \sqrt{1+y'} - 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ e^{-x'} + 1 = \sqrt{1+y'} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ \left(e^{-x'} + 1\right)^2 = 1 + y' \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ y' = e^{-2x'} + 2e^{-x'} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x' \in D_g = \mathbb{R} \\ y' = g(x') \end{cases}$

Car $e^{-2x'} + 2e^{-x'} > 0\ \forall\, x' \in \mathbb{R}$

Alors le point M' image de M par r appartient à la courbe (Γ) si M appartient à la courbe $(\mathcal{C})$

b. Tracer de (Γ)
(Voir figure)

PARTIE C

1. $\int_0^{\ln 2} g(x)dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} - 2e^{-x}\right]_0^{\ln 2}$

$\int_0^{\ln 2} g(x)dx = \frac{11}{8}$

2.

a. Le domaine (Δ) a même aire que le domaine plan (Δ') délimité par les segments $[A'O]$, $[OH']$ et $[H'B']$ et l'arc de courbe (Γ) d'extrémités B' et A'

On a donc :
$\boldsymbol{\mathcal{A} = ua\int_0^{\ln 2} g(x)dx}$
Soit $\boldsymbol{\mathcal{A} = \frac{11}{8} \times ua}$

b. $I = \int_{\frac{5}{4}}^{3} \ln\left(\sqrt{1+x} - 1\right)dx = \int_{\frac{5}{4}}^{3} f(x)\,dx$

$\mathcal{A} = \mathcal{A}ire(OHBP) - \int_{\frac{5}{4}}^{3} f(x)\,dx$

Car sur $\left[\frac{5}{4}; 3\right]$, la courbe $(\mathcal{C})$ est en dessous de l'axe des abscisses

$\mathcal{A} = OH \times OP - I$

$\boldsymbol{\mathcal{A} = \frac{5}{4}\ln 2 - I}$

Déduction

$I = \frac{5}{4}\ln 2 - \mathcal{A}$

Donc on a : $\boldsymbol{I = \frac{10\ln 2 - 11}{8}}$

PROBLEME 33

PARTIE A

$h(x) = xe^x - 2e^x + 2;\ D_h = [0;\ +\infty[$

1. **Dérivée**

$$\boxed{\boldsymbol{h'(x) = (x-1)e^x}}$$

$\forall\, x \in [0;\ +\infty[, e^x > 0$
Alors le signe de $h'(x)$ dépend de celui de $(x-1)$
$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
Par conséquent :
$\forall\, x \in [0; 1[, h'(x) < 0$
$\forall\, x \in]1;\ +\infty[, h'(x) > 0$
On en déduit que :
Sur $[0; 1[, h$ est décroissante
Sur $]1;\ +\infty[, h$ est croissante

<u>Tableau de variation de h</u>

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$2-e$	$\nearrow$	$+\infty$

2. $h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(4 - e^{\frac{3}{2}}\right)$
Sur $I = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$, h est continue car dérivable et est strictement croissante puis on a :
$h\left(\frac{3}{2}\right) \times h(2) = 4 - e^{\frac{3}{2}} < 0$

> **Alors l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution a dans $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$**
> **C'est-à-dire qu'il existe un unique réel a appartenant à l'intervalle $I = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ tel que $h(a) = 0$**

3. On déduit de ce qui précède que :

> $\forall\, \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{0}; \boldsymbol{a}[, \boldsymbol{h(x)} < 0$
> $\forall\, \boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{a};\ +\infty[, \boldsymbol{h(x)} > 0$

PARTIE B

$f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2};\ D_f =]0;\ +\infty[$

1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \times \frac{e^x - 1}{x}$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \boldsymbol{f(x)} = +\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x)} = +\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \end{cases}$

2. $f'(x) = \frac{x^2e^x - 2xe^x + 2x}{x^4}$

> **Donc $\forall\, \boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{0};\ +\infty[$,**
> $\boldsymbol{f'(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 2}{x^3}}$

Déduction
$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$
$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, x^3 > 0$
Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$
Par conséquent :
$\forall\, x \in [0; a[, f'(x) < 0$
$\forall\, x \in]a;\ +\infty[, f'(x) > 0$
On en déduit que :
Sur $[0; a[, f$ est décroissante
Sur $]a;\ +\infty[, f$ est croissante

<u>Tableau de variations de f</u>

x	0		a		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert\ +\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

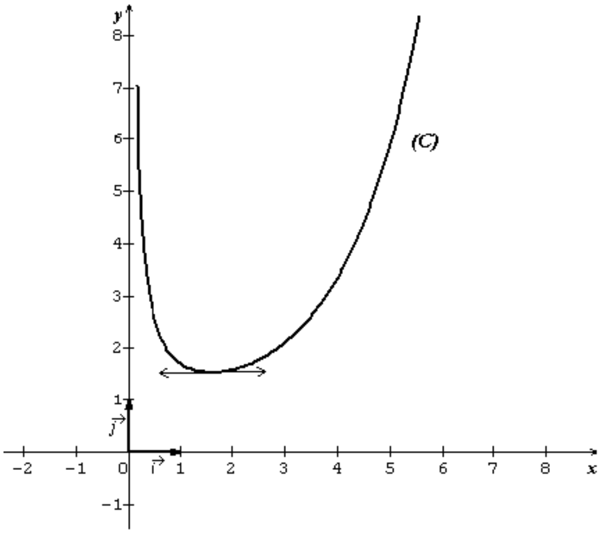
3. $f(a) = \frac{e^a - 1}{a^2}$
Or $h(a) = 0 \Leftrightarrow e^a = -\frac{2}{a-2}$
D'où $f(a) = \frac{-\frac{2}{a-2} - 1}{a^2}$

> **On a donc : $\boldsymbol{f(a) = \frac{-1}{a(a-2)}}$**

Déduction
$a \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ donc $a > 0$ et $a - 2 < 0$

> **On en déduit que : $\boldsymbol{f(a) > 0}$**

4. Tracer de $(\mathcal{C})$



PARTIE C

1. $\forall\, x \in [0;\ +\infty[, h(x) = 0$
$\Leftrightarrow 2e^x - 2 = xe^x$
$\Leftrightarrow 2e^x(1 - e^{-x}) = xe^x$
$\Leftrightarrow 2(1 - e^{-x}) = x$
Car $\forall\, x \in [0;\ +\infty[, e^x \neq 0$

Alors $\forall\, x \in [0;\ +\infty[, h(x) = 0$ équivaut à $2(1 - e^{-x}) = x$

2. $g(x) = 2(1 - e^{-x})$; $D_g = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$
$g'(x) = 2e^{-x}$
$\frac{3}{2} \leq x \leq 2$
$\Leftrightarrow 2e^{-2} \leq 2e^{-x} \leq 2e^{-\frac{3}{2}}$
$\Leftrightarrow 0{,}27 \leq g'(x) \leq 0{,}45$
$\Leftrightarrow 0{,}27 \leq |g'(x)| \leq 0{,}45 \leq 0{,}5$

Donc $\forall\, x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right], |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

3. $\begin{cases} x_0 = \frac{3}{2} \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$
On admet que, pour tout entier n, x_n appartient à I

a. On sait que :
$\forall\, x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right], |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
$\alpha \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, x_n \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$
D'où d'après l'inégalité de la moyenne on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$:
$\left|\int_a^{x_n} g'(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{2}|x_n - a|$
$\Longrightarrow \left|[g(x)]_a^{x_n}\right| \leq \frac{1}{2}|x_n - a|$
$\Longrightarrow |g(x_n) - g(a)| \leq \frac{1}{2}|x_n - a|$

Or $g(a) = a$ d'après 1.) et par définition $g(x_n) = x_{n+1}$

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|x_n - a|$

Par ailleurs :
En partant de cette inégalité on a :
$n = 0 \Longrightarrow \quad |x_1 - a| \leq \frac{1}{2}|x_0 - a|$
$n = 1 \Longrightarrow \quad |x_2 - a| \leq \frac{1}{2}|x_1 - a|$
$n = 2 \Longrightarrow \quad |x_3 - a| \leq \frac{1}{2}|x_2 - a|$
$\vdots$
$n = n - 1 \Longrightarrow |x_n - a| \leq \frac{1}{2}|x_{n-1} - a|$
Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.
On obtient après simplification :
$|x_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - a|$
$|x_0 - a| = \left|\frac{3}{2} - a\right|$
$\frac{3}{2} \leq a \leq 2$
$\Leftrightarrow -2 \leq -a \leq -\frac{3}{2}$
$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x_0 - a \leq 0$
$\Leftrightarrow |x_0 - a| \leq \frac{1}{2} \leq 1$
$\Leftrightarrow |x_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 1$

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, |\, x_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$

b. $\forall\, n \in \mathbb{N}, |\, x_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$ et
$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$

Alors la suite (x_n) converge et on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$

c. On sait que $\left|\, x_p - a\right| \leq \frac{1}{2^p}$ donc
$\frac{1}{2^p} \leq 10^{-3} \Longrightarrow \left|\, x_p - a\right| \leq 10^{-3}$
Or $\frac{1}{2^p} \leq 10^{-3}$
$\Leftrightarrow -p \ln 2 \leq -3 \ln 10$
$\Leftrightarrow p \geq \frac{3 \ln 10}{\ln 2}$
$\Leftrightarrow p \geq 9{,}96$

On a donc :
$\left|\, x_p - a\right| \leq 10^{-3}\ \forall\, p \geq 10$

x_p est une valeur approchée de a à 10^{-3} près pour $p = 10$ par exemple

PROBLEME 34

PARTIE A

$f(x) = (x+3)e^{-\frac{x}{2}}\,;\ D_f = \mathbb{R}$

1. **Calcul des limites**

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (x+3) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = 0 \end{cases}$

2. **Dérivée**

$$\boxed{f'(x) = -(x+1)e^{-\frac{x}{2}}}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{-\frac{x}{2}} > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-x-1$.

$-x-1 > 0 \Leftrightarrow x < -1$

Par conséquent :

$\forall\, x \in\,]-\infty;\ -1[, f'(x) > 0$

$\forall\, x \in\,]-1;\ +\infty[, f'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty;\ -1[, f$ est croissante

Sur $]-1;\ +\infty[, f$ est décroissante

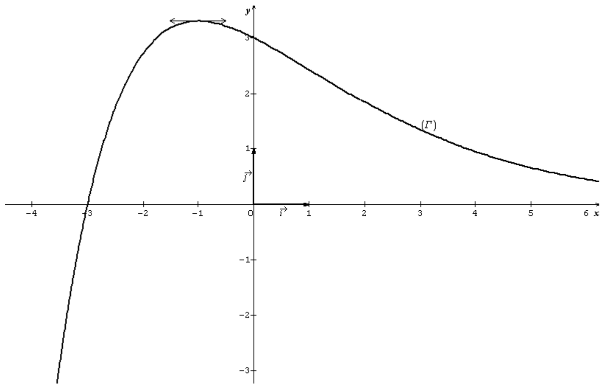
<u>Tableau de variation de f</u>

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2\sqrt{e}$	$\searrow$	0

3. Construction de la courbe (Γ) de f

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Alors (Γ) coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(-3; 0)$



4. $I = \int_{-3}^{0} xe^{-\frac{x}{2}} dx$

<u>Intégration par parties</u>

$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-\frac{x}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{cases}$

$I = \left[-2xe^{-\frac{x}{2}}\right]_{-3}^{0} + 2\int_{-3}^{0} e^{-\frac{x}{2}} dx$

$I = \left[-2(x+2)e^{-\frac{x}{2}}\right]_{-3}^{0}$

$$\boxed{I = -4 - 2e^{\frac{3}{2}}}$$

Déduction

$\mathcal{A} = ua \times \int_{-3}^{0} f(x)\, dx$

$\int_{-3}^{0} f(x)\, dx = \int_{-3}^{0} xe^{-\frac{x}{2}} dx + 3\int_{-3}^{0} e^{-\frac{x}{2}} dx$

$\int_{-3}^{0} f(x)\, dx = I + 3\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_{-3}^{0}$

$\int_{-3}^{0} f(x)\, dx = 4e^{\frac{3}{2}} - 10$

$$\boxed{\mathcal{A} = \left(4e^{\frac{3}{2}} - 10\right) \times ua}$$

5.

a. Graphiquement, la droite d'équation $y = 3$ coupe (Γ) au point d'abscisse 0 et en un deuxième point dont l'abscisse $\alpha \in\,]-2;\ -1[$

Alors l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont 0 et α

Montrons que $-2 < \alpha < -\frac{3}{2}$

$$\begin{cases} f(-2) = e \\ f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}e^{-\frac{9}{4}} \simeq 3{,}17 \end{cases}$$

Comme $3 \in]e; 3{,}17[$
Alors on a bien : $-2 < \alpha < -\frac{3}{2}$

b. Discussion suivant les valeurs de m du nombre de solution de l'équation $f(x) = m$

Si $m \in]-\infty; 0]$, il y a une solution
Si $m \in \left]0; 2\sqrt{e}\right[$, il y a deux solutions
Si $m = 2\sqrt{e}$, il y a une solution
Si $m \in \left]2\sqrt{e}; +\infty\right[$, il n'y a pas de solution

PARTIE B

$g(x) = 3\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$; $D_g = \mathbb{R}$

1. $f(x) = 3 \Leftrightarrow (x+3)e^{-\frac{x}{2}} = 3$
$\Leftrightarrow x + 3 = 3e^{\frac{x}{2}}$
$\Leftrightarrow 3\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right) = x$

Donc $f(x) = 3 \Leftrightarrow g(x) = x$

2.
a. Dérivée première et seconde

$$g'(x) = \frac{3}{2}e^{\frac{x}{2}} \text{ et } g''(x) = \frac{3}{4}e^{\frac{x}{2}}$$

Vérification

$g'(\alpha) = \frac{3}{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$

Or $f(\alpha) = 3 \Leftrightarrow e^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\alpha+3}{3}$

D'où $g'(\alpha) = \frac{\alpha+3}{2}$

b. $\forall\, x \in \mathbb{R}, g''(x) > 0$
On en déduit que :
Sur $\mathbb{R}$, g' est croissante
D'autres parts :
$\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$
On en déduit que :
Sur $\mathbb{R}$, g est croissante

3. $I = [-2;\ \alpha]$

a. $g([-2;\ \alpha]) = [-1{,}9;\ \alpha]$
Or $[-1{,}9;\ \alpha] \subset [-2;\ \alpha]$

Donc pour tout x appartenant à I, $g(x)$ appartient à I

b. $-2 \le x \le \alpha$
$\Leftrightarrow g'(-2) \le g'(x) \le g'(\alpha)$
$\Leftrightarrow 0{,}55 \le g'(x) \le \frac{\alpha+3}{2}$

Or $-2 < \alpha < -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{\alpha+3}{2} \le \frac{3}{4}$
D'où $0{,}5 \le 0{,}55 \le g'(x) \le \frac{\alpha+3}{2} \le \frac{3}{4}$

On conclut donc que : pour tout x appartenant à I, $\frac{1}{2} \le g'(x) \le \frac{3}{4}$

c. On en déduit que : $\forall\, x \in [-2;\ \alpha]$,
$\int_x^\alpha \frac{1}{2}dt \le \int_x^\alpha g'(t)dt \le \int_x^\alpha \frac{3}{4}dt$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[t]_x^\alpha \le [g(t)]_x^\alpha \le \frac{3}{4}[t]_x^\alpha$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\alpha - x) \le g(\alpha) - g(x) \le \frac{3}{4}(\alpha - x)$
Or $-2 \le x \le \alpha$ d'où $\alpha - x \ge 0$

On a donc pour tout x de l'intervalle I,
$0 \le \frac{1}{2}(\alpha - x) \le g(\alpha) - g(x) \le \frac{3}{4}(\alpha - x)$

4. $U_0 = -2$ et $U_{n+1} = g(U_n); n \in \mathbb{N}$

a. <u>Démonstration par récurrence</u>
$U_0 = -2 \in I = [-2;\ \alpha]$
Supposons que $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \in I$
et montrons que $U_{n+1} \in I$
En effet :
$U_n \in I \Longrightarrow g(U_n) \in I$
Or par définition $U_{n+1} = g(U_n)$
D'où $U_{n+1} \in I$ si $U_n \in I$

On conclut donc que pour tout entier n, U_n appartient à l'intervalle I

<u>Justification des inégalités :</u>
En prenant $x = U_n$ dans l'inégalité 3c), on a :
$0 \le g(\alpha) - g(U_n) \le \frac{3}{4}(\alpha - U_n)$
Or $U_{n+1} = g(U_n)$

D'où pour tout entier n,
$0 \le \alpha - U_{n+1} \le \frac{3}{4}(\alpha - U_n)$

Par ailleurs :
$n = 0 \Longrightarrow 0 \le \alpha - U_1 \le \frac{3}{4}(\alpha - U_0)$
$n = 1 \Longrightarrow 0 \le \alpha - U_2 \le \frac{3}{4}(\alpha - U_1)$
$n = 2 \Longrightarrow 0 \le \alpha - U_3 \le \frac{3}{4}(\alpha - U_2)$
$\vdots$
$n = n - 1 \Longrightarrow 0 \le \alpha - U_n \le \frac{3}{4}(\alpha - U_{n-1})$
Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.
On obtient après simplification :

$0 \leq \alpha - U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (\alpha - U_0)$

$-2 < \alpha < -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 0 < \alpha - U_0 < \frac{1}{2} \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 < \alpha - U_0 \leq 1$

$0 \leq \alpha - U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (\alpha - U_0) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times 1$

Donc pour tout entier n, on a :
$$\mathbf{0 \leq \alpha - U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

b. $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{3}{4} < 1$

Alors la suite (U_n) est convergente et on a $\lim_{n \to +\infty} U_n = \alpha$

c. On sait que $0 \leq \alpha - U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$\Leftrightarrow |\alpha - U_n| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Donc $\left(\frac{3}{4}\right)^p \leq 10^{-2} \Longrightarrow |\alpha - U_n| \leq 10^{-2}$

Or $\left(\frac{3}{4}\right)^p \leq 10^{-2}$

$\Leftrightarrow p \geq \frac{-2\ln 10}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$

$\Leftrightarrow p \geq 16{,}007$

Donc $|\alpha - U_n| \leq 10^{-2}$ $\forall$ $p \geq 17$

Le plus petit entier cherché est donc $p = 17$
U_{17} représente une valeur approchée de α à 10^{-2} près

PROBLEME 35
PARTIE A

$f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$; $D_f = [0; +\infty[$

1.

a. $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} (e^x + e^{-x}) = +\infty \\ \lim_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$

Alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b. $\forall\, x \in [0; +\infty[$,

$f(x) = \ln e^x(1 + e^{-2x})$

$= \ln e^x + \ln(1 + e^{-2x})$

Or $\ln e^x = x$

D'où pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ on a :
$$\boldsymbol{f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})}$$

c. Soit (D): $y = x$

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-2x})$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y) = 0}$$

Car $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0 \\ \ln 1 = 0 \end{cases}$

Alors $(\mathcal{C})$ admet comme asymptote oblique la droite (D) d'équation $y = x$

d. $f(x) - y = \ln(1 + e^{-2x})$

$\forall\, x \in [0; +\infty[$, $e^{-2x} > 0$

$\Leftrightarrow 1 + e^{-2x} > 1$

$\Leftrightarrow \ln(1 + e^{-2x}) > \ln 1 = 0$

Donc $\forall\, x \in [0; +\infty[$, $f(x) - y > 0$

On en déduit que sur $[0; +\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au dessus de (D)

2. Dérivée

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x + e^{-x}}}$$

$\forall\, x \in [0; +\infty[$, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $1 - e^{-2x}$

$1 - e^{-2x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Par conséquent :

$\forall\, x \in [0; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$

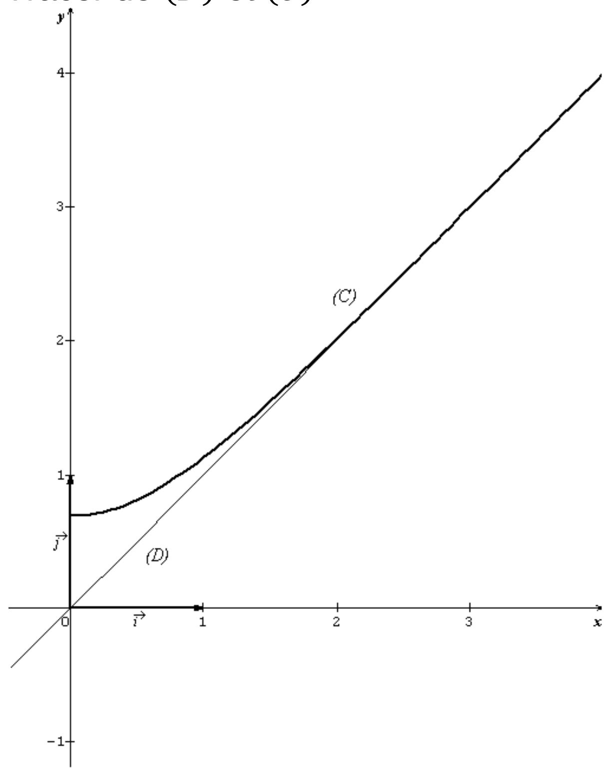
On en déduit que :

Sur $[0; +\infty[$, f est croissante

Tableau de variation de f

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\ln 2$ $\nearrow$ $+\infty$

3. Tracer de (D) et $(\mathcal{C})$



PARTIE B

$F(x) = \int_0^x \ln(1+e^{-2t})\,dt$;
$x \in [0;\ +\infty[$

1. **Interprétation géométrique de $F(x)$**

$\forall\, x > 0,\ F(x) = \int_0^x (f(t) - t)\,dt$

Alors $F(x)$ est l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $t = 0$ et $t = x$

2. **Dérivée**

$F'(x) = \ln(1+e^{-2x})$ car par définition F est la primitive sur $[0;\ +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \ln(1+e^{-2x})$ qui s'annule en 0.
$\forall\, x \in [0;\ +\infty[, 1 + e^{-2x} > 1$
Par conséquent :
$\forall\, x \in [0;\ +\infty[, F'(x) > 0$
On en déduit que :
Sur $[0;\ +\infty[, F$ est croissante

3. Soit $a > 0$

a. $t \in [1; 1+a] \Leftrightarrow 1 \le t \le 1+a$

Donc pour tout t appartenant à l'intervalle $[1; 1+a]$, on a :
$$\frac{1}{a+1} \le \frac{1}{t} \le 1$$

b. **Inégalité des accroissements finis**

$\frac{1}{a+1} \le \frac{1}{t} \le 1$
$\Leftrightarrow \int_1^{1+a} \frac{1}{a+1}\,dt \le \int_1^{1+a} \frac{1}{t}\,dt \le \int_1^{1+a} dt$
$\Leftrightarrow \frac{1}{a+1}[t]_1^{1+a} \le [\ln t]_1^{1+a} \le [t]_1^{1+a}$

Donc on a : $\frac{a}{a+1} \le \ln(a+1) \le a$

4. Soit $x > 0$

Prenons $a = e^{-2t}$ dans l'inégalité précédente, on a :
$\frac{e^{-2t}}{e^{-2t}+1} \le \ln(e^{-2t}+1) \le e^{-2t}$
$\Leftrightarrow \int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\,dt \le \int_0^x \ln(1+e^{-2t})\,dt \le \int_0^x e^{-2t} dt$
Or $\int_0^x \ln(1+e^{-2t})\,dt = F(x)$

D'où $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\,dt \le F(x) \le \int_0^x e^{-2t} dt$

Et par suite :
$\left[-\frac{1}{2}\ln(1+e^{-2t})\right]_0^x \le F(x) \le \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x$

Donc on a bien :
$$\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \le F(x) \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

5. **D'après le théorème des gendarmes on a :**

$\frac{1}{2}\ln 2 \le \lim_{x\to+\infty} F(x) \le \frac{1}{2}$
Car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-2x}) = \ln 1 = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0 \end{cases}$
Or $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ell$

D'où $\frac{1}{2}\ln 2 \le \ell \le \frac{1}{2}$

6. $U_n = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t})\,dt, n \in \mathbb{N}$

a. Soit $h(t) = \ln(1+e^{-2t})$;
$D_h = [0;\ +\infty[$

$$h'(t) = \frac{-2e^{-2t}}{1+e^{-2t}} < 0\ \forall\, t \in [0;\ +\infty[$$

On en déduit que :
Sur $[0;\ +\infty[, h$ est décroissante et $h(0) = \ln 2 > 0$

Donc $\forall\, t \in [0;\ +\infty[, h(t) > 0$

Par conséquent :
$\forall\, t \in [n; n+1]$,
$0 \leq h(n+1) \leq h(t) \leq h(n)$
L'inégalité de la moyenne donne :
$\Leftrightarrow\ 0 \leq \int_n^{n+1} h(t)\,dt \leq h(n)$
Or $\int_n^{n+1} h(t)\,dt = U_n$

D'où pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq U_n \leq \ln(1+e^{-2n})$

b. On a en passant à la limite :
$0 \leq \lim_{n\to+\infty} U_n \leq 0$
Car $\lim_{n\to+\infty} \ln(1+e^{-2n}) = \ln 1 = 0$

Donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

7. $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n, n \in \mathbb{N}$

a. $S_n = \int_0^1 \ln(1+e^{-2t})\,dt + \int_1^2 \ln(1+e^{-2t})\,dt + \cdots + \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t})\,dt$
D'après la relation de Chasles,
$S_n = \int_0^{n+1} \ln(1+e^{-2t})\,dt$

Donc on a : $S_n = F(n+1)$

b. $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} F(n+1) = \lim_{n\to+\infty} F(n)$

On sait que $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ existe
Alors la suite (S_n) est convergente

Par ailleurs :
On a $\frac{1}{2}\ln 2 \leq \lim_{x\to+\infty} F(x) \leq \frac{1}{2}$ en passant à la limite

On en déduit que :
$\frac{1}{2}\ln 2 \leq \lim_{n\to+\infty} S_n \leq \frac{1}{2}$

PROBLEME 36
PARTIE A

$g(t) = \ln(1+t) - \frac{2t}{1+t}$;
$D_g =]-1; +\infty[$

1. Dérivée

$$g'(t) = \frac{t-1}{(1+t)^2}$$

$\forall$ t $\in]-1. +\infty[, (1+t)^2 > 0$
Alors le signe de $g'(t)$ dépend de celui de $t-1$
Par conséquent :
$\forall$ t $\in]-1; 1[, g'(t) < 0$
$\forall$ t $\in]1; +\infty[, g'(t) > 0$
On en déduit que :
Sur $]-1; 1[$, g est décroissante
Sur $]1; +\infty[$, g est croissante

2. $\lim_{t\to-1} g(t)$
$= \lim_{t\to-1^+} \frac{1}{1+t}\left((1+t)\ln(1+t) - 2t\right)$

$$\lim_{t\to-1} g(t) = +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim_{t\to-1^+} \frac{1}{1+t} = +\infty \\ \lim_{t\to-1^+} (1+t)\ln(1+t) = 0 \end{cases}$

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim_{t\to+\infty} \ln(1+t) = +\infty \\ \lim_{t\to+\infty} \frac{2t}{1+t} = 2 \end{cases}$

3. Sur $[1; +\infty[$, g est continue car dérivable et est strictement croissante.
Alors g réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur $[\ln 2 - 1; +\infty[$ et
$0 \in [\ln 2 - 1; +\infty[$

Donc l'équation $g(t) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$
C'est-à-dire qu'il existe un réel α et un seul dans l'intervalle $[1; +\infty[$ tel que : $g(\alpha) = 0$

Encadrement de α

$\begin{cases} g(3) = -0{,}1 < 0 \\ g(4) = 0{,}009 > 0 \end{cases}$

On a $g(3) \times g(4) < 0$
Alors $3 < \alpha < 4$

$\begin{cases} g(3{,}9) = -0{,}002 < 0 \\ g(4{,}0) = 0{,}009 > 0 \end{cases}$

On a $g(3,9) \times g(4,0) < 0$
Alors à 10^{-1} près, $3,9 < \alpha < 4,0$

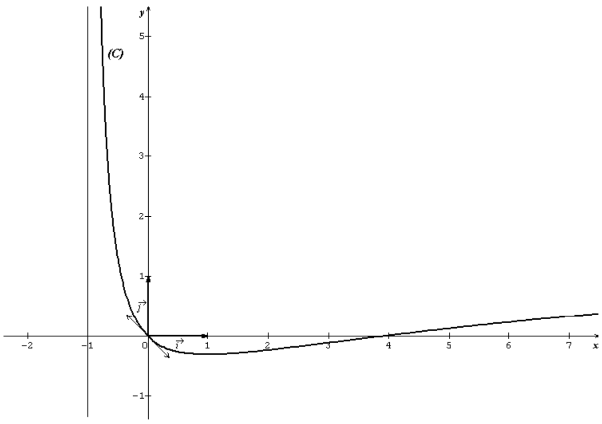
4. Tangente à $(\mathcal{C})$ en l'origine O du repère

$(T): y = g'(0)(t-0) + g(0)$

$(\boldsymbol{T}): \boldsymbol{y} = -\mathbf{t}$

Tableau de variation de g

t	-1		1		$+\infty$
$g'(t)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(t)$	‖ $+\infty$	↘	$\ln 2 - 1$	↗	$+\infty$



5.

a. $\frac{t}{1+t} = a + \frac{b}{1+t} \Leftrightarrow \frac{t}{1+t} = \frac{at+a+b}{1+t}$

$\forall\, t \in]-1;\ +\infty[$, on a : $t = at + a + b$

Par identification :
$\begin{cases} \boldsymbol{a = 1} \\ \boldsymbol{a + b = 0} \end{cases}$
Donc $\boldsymbol{a = 1, b = -1}$ et $\boldsymbol{\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}}$

b. $\int_0^x g(t)dt$

$= \int_0^x \ln(1+t)\,dt - 2\int_0^x \frac{t}{1+t}dt$

Calculons $\int_0^x \ln(1+t)\,dt$

Intégration par parties

$\begin{cases} u(t) = \ln(1+t) \\ v'(t) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{1+t} \\ v(t) = 1 + t \end{cases}$

$\int_0^x \ln(1+t)\,dt$

$= [(1+t)\ln(1+t)]_0^x - \int_0^x dt$

Donc $\int_0^x \ln(1+t)\,dt$

$= [(1+t)\ln(1+t) - t]_0^x$

Par suite :

$\int_0^x g(t)dt = [(3+t)\ln(1+t) - 3t]_0^x$

$\boldsymbol{\int_0^x g(t)dt = (3+x)\ln(1+x) - 3x}$

c. $\mathcal{A} = ua \times \int_0^\alpha -g(t)dt$

$\int_0^\alpha -g(t)dt = -\int_0^\alpha g(t)dt$

$\int_0^\alpha -g(t)dt = 3\alpha - (3+\alpha)\ln(1+\alpha)$

$ua = 4\ cm^2$

Donc
$\boldsymbol{\mathcal{A} = 4[3\alpha - (3+\alpha)\ln(1+\alpha)]cm^2}$

Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$

D'où $\mathcal{A} = 4\left[3\alpha - (3+\alpha) \times \frac{2\alpha}{1+\alpha}\right]$

On a donc bien : $\boldsymbol{\mathcal{A} = \frac{4\alpha(\alpha-3)}{\alpha+1}}$

d. **Encadrement de $\mathcal{A}$**

$3{,}9 < \alpha < 4{,}0$

$\Leftrightarrow 0{,}9 < \alpha - 3 < 1$ et

$15{,}6 < 4\alpha < 16$

$\Leftrightarrow 14{,}04 < 4\alpha(\alpha-3) < 16$

D'autres parts :

$4{,}9 < \alpha + 1 < 5{,}0$

$\Leftrightarrow 0{,}2 < \frac{1}{\alpha+1} < 0{,}204$

On a donc : $\boldsymbol{2,8 < \mathcal{A} < 3,2}$

PARTIE B

$f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{2x})\,;\ D_f = \mathbb{R}$

1. La fonction $x \longmapsto \ln(1+e^{2x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \longmapsto 1 + e^{2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}, 1 + e^{2x} > 0$. On sait par ailleurs que la fonction $x \longmapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Alors la fonction $\boldsymbol{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = -e^{-x}\ln(1+e^{2x}) + \frac{2e^x}{1+e^{2x}}$

$f'(x) = -e^{-x}\left[\ln(1+e^{2x}) - \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\right]$

$\boldsymbol{f'(x) = -e^{-x}g(e^{2x})}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$,

Alors $f'(x)$ et $g(e^{2x})$ sont de signes opposés

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow\ g(e^{2x}) = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} = \alpha$

$\boldsymbol{f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln\sqrt{\alpha}}$

2. Posons $t = e^{2x}$

Si $x \longmapsto -\infty, t \longmapsto 0$ et

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0}\sqrt{t}\times\frac{\ln(1+t)}{t} = 0$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0}\sqrt{t} = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \end{cases}$

$$\boxed{\textbf{Alors } \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0}$$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

$$= \lim_{x\to +\infty} e^{-x}\ln e^{2x}(1+e^{-2x})$$
$$= \lim_{x\to +\infty} e^{-x}\ln e^{2x} + e^{-x}\ln(1+e^{-2x})$$
$$= \lim_{x\to +\infty} 2xe^{-x} + e^{-x}\ln(1+e^{-2x})$$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} e^{-2x} = 0 \end{cases}$

4. D'après PARTIE A,

$\forall\, t \in \,]0;\ \alpha[, g(t) < 0$

$\forall\, t \in \,]\alpha;\ +\infty[, g(t) > 0$

Or $e^{2x} \in \,]0;\ \alpha[\iff x \in \left]-\infty;\ \ln\sqrt{\alpha}\right[$ et

$e^{2x} \in \,]\alpha;\ +\infty[\iff x \in \left]\ln\sqrt{\alpha}\,; +\infty\right[$

Par conséquent :

$x \in \left]-\infty;\ \ln\sqrt{\alpha}\right[, f'(x) > 0$

$x \in \left]\ln\sqrt{\alpha}\,; +\infty\right[, f'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $\left]-\infty;\ \ln\sqrt{\alpha}\right[, f$ est croissante

Sur $\left]\ln\sqrt{\alpha}\,; +\infty\right[, f$ est décroissante

<u>**Tableau de variations de f**</u>

x	$-\infty$	$\ln\sqrt{\alpha}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 ↗	$f\left(\ln\sqrt{\alpha}\right)$	↘ 0

5. f atteint son maximum pour $\ln\sqrt{\alpha}$ et ce maximum est

$f\left(\ln\sqrt{\alpha}\right) = \frac{\ln(1+\alpha)}{\sqrt{\alpha}}$

Or d'après PARTIE A5,

$\ln(1+\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$

D'où $f\left(\ln\sqrt{\alpha}\right) = \frac{2\alpha}{(1+\alpha)\sqrt{\alpha}}$

$$\boxed{\textbf{On a bien } f\left(\ln\sqrt{\alpha}\right) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}}$$

6. $3{,}9 < \alpha < 4{,}0$

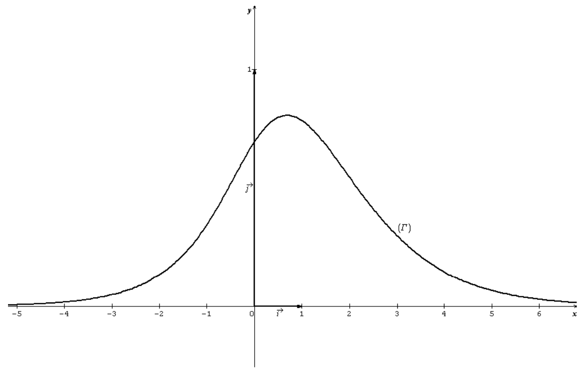
$\iff 0{,}2 < \frac{1}{\alpha+1} < 0{,}204$ et

$1{,}9 < \sqrt{\alpha} < 2{,}0$

$\iff 0{,}7 < \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} < 0{,}8$

Alors une valeur approchée de ce maximum par excès est donc $\mathbf{0{,}8}$

7. Tracer de (Γ)



PROBLEME 37

PARTIE A

$f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$;

$D_f = [0;\ +\infty[$

1. **Continuité en 0**

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1 \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)}$$

Alors f est continue en 0

Dérivabilité en 0

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x+1} = -\infty$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1 \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty}$$

Alors f n'est pas dérivable en 0

2. $g(x) = \ln x + x + 1$; $D_g =]0;\ +\infty[$

a. **Dérivée**

$$\boxed{g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0\ \forall\, x \in]0;\ +\infty[}$$

On en déduit que :

Sur $]0;\ +\infty[$, g est croissante

<u>Tableau de variation de g</u>

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$\vert\vert$	$+$
$g(x)$	$\vert\vert$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

b. Sur $]0;\ +\infty[$, g est continue car dérivable et est strictement croissante.

Alors g réalise une bijection de $]0;\ +\infty[$ sur $]-\infty;\ +\infty[$ et $0 \in]-\infty;\ +\infty[$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution β et une seule dans $]0;\ +\infty[$

$\begin{cases} g(0{,}27) = -0{,}03 < 0 \\ g(0{,}28) = 0{,}007 > 0 \end{cases}$

On a $g(0{,}27) \times g(0{,}28) < 0$

Alors $0{,}27 \le \beta \le 0{,}28$

3. **Dérivée**

$\forall\, x > 0, f'(x) = \frac{(\ln x+1)(x+1) - x\ln x}{(x+1)^2}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{\ln x + x + 1}{(x+1)^2}$

$$\boxed{\textbf{Donc } \forall\, x > 0, f'(x) = \frac{g'(x)}{(x+1)^2}}$$

Déduction

$\forall\, x > 0, (x+1)^2 > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g'(x)$

D'après 2b)

Sur $]0;\ +\infty[$, g croît et $g(\beta) = 0$

On a donc :

$\forall\, x \in]0;\ \beta[, g(x) < 0$

$\forall\, x \in]\beta;\ +\infty[, g(x) > 0$

Par conséquent :

$\forall\, x \in]0;\ \beta[, f'(x) < 0$

$\forall\, x \in]\beta;\ +\infty[, f'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $]0;\ \beta[$, f est décroissante

Sur $]\beta;\ +\infty[$, f est croissante

<u>Tableau de variations de g</u>

x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\beta$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\beta) = \frac{\beta\ln\beta}{\beta+1}$

Or $g(\beta) = 0 \Leftrightarrow \ln\beta = -\beta - 1$

D'où $f(\beta) = \frac{-\beta(\beta+1)}{\beta+1}$

$$\boxed{\textbf{On a bien } f(\beta) = -\beta}$$

4. **Limite**

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} [\ln x - f(x)] = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x+1} = 0$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} [\ln x - f(x)] = 0}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

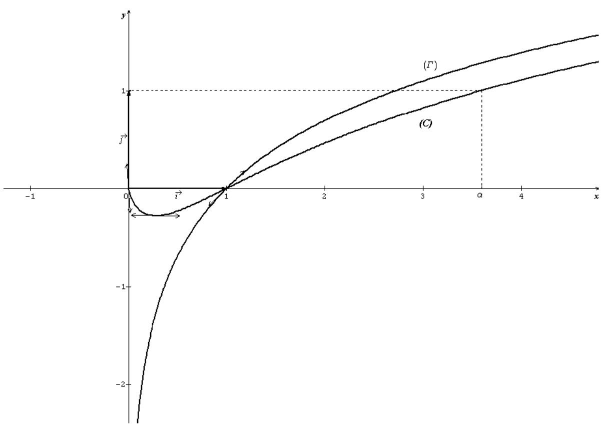
Interprétation graphique

$(\mathcal{C})$ et (Γ) sont asymptotes au voisinage de $+\infty$

5. Traçons $(\mathcal{C})$ et (Γ)

Tableau de $x \longmapsto \ln x$

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$\ln'(x)$	$+$
$\ln(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$



PARTIE B

$h(x) = e.e^{\frac{1}{x}}$; $D_h =]0;\ +\infty[$

1. Sur $[0;\ \beta], f(x) \in [-\beta; 0]$ donc $f(x) \neq 1$

Sur $]\beta;\ +\infty[, f$ est continue car dérivable et est strictement croissante.

Alors f réalise une bijection de $]\beta;\ +\infty[$ sur $]-\beta;\ +\infty[$ et $1 \in]-\beta;\ +\infty[$

Donc l'équation $\boldsymbol{f(x) = 1}$ admet une solution $\boldsymbol{\alpha}$ et une seule dans $\boldsymbol{[0;\ +\infty[}$ et $\boldsymbol{\alpha \in]\beta;\ +\infty[}$

$f([3{,}5; 3{,}7]) = [0{,}97; 1{,}02]$

On a $\boldsymbol{1 \in [0,97; 1,02]}$
D'où $\boldsymbol{3,5 \leq \alpha \leq 3,7}$

Pour la représentation du point d'abscisse $\boldsymbol{\alpha}$, voir le graphique

2. $f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x \ln x}{x+1} = 1$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = \ln x$

$\Leftrightarrow e^{1+\frac{1}{x}} = e.e^{\frac{1}{x}} = x$

$\Leftrightarrow h(x) = x$

Donc les équations $\boldsymbol{f(x) = 1}$ et $\boldsymbol{h(x) = x}$ sont équivalentes

3. $\boldsymbol{h'(x) = -\frac{1}{x^2} \times h(x)} < 0$

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[$

On en déduit que :

Sur $]0;\ +\infty[, h$ est décroissante

4. Pour tout élément x de $[3{,}5; 3{,}7]$,

a. $h(x) \in [h(3{,}7); h(3{,}5)] = [3{,}56; 3{,}61]$

Or $[3{,}56; 3{,}61] \subset [3{,}5; 3{,}7]$

Donc $\boldsymbol{h(x)}$ appartient aussi à $\boldsymbol{[3,5; 3,7]}$

b. $h'(x) = -\frac{1}{x^2} \times h(x)$

$h''(x) = \frac{2x+1}{x^4} \times h(x) > 0$

On en déduit que h' est croissante

Par conséquent :

$h'(3{,}5) \leq h'(x) \leq h'(3{,}7) < 0$

$\Leftrightarrow |h'(3{,}7)| \leq |h'(x)| \leq |h'(3{,}5)|$

Or $|h'(3{,}5)| = 0{,}29 \leq \frac{1}{3}$

D'où $\boldsymbol{|h'(x)| \leq |h'(3,5)| \leq \frac{1}{3}}$

c. On sait que $|h'(x)| \leq \frac{1}{3}$ et $\alpha \in [3{,}5; 3{,}7]$

Alors d'après l'inégalité de la moyenne on a :

$\left|\int_\alpha^x h'(t)dt\right| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$

$\Longrightarrow |[h(t)]_\alpha^x| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$

$\Longrightarrow |h(x) - h(\alpha)| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$

Or $h(\alpha) = \alpha$ d'après 2)

D'où $\boldsymbol{|h(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|}$

5. $U_{n+1} = h(U_n)$ et $U_0 = 3{,}5$

a. Pour tout $n \geq 0$, prenons $x = U_n$ dans l'inégalité 4c)

On a : $|h(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_n - \alpha|$

Or $h(U_n) = U_{n+1}$

D'où pour tout entier $\boldsymbol{n \geq 0}$,
$\boldsymbol{|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_n - \alpha|}$

b. En partant de cette inégalité on a :

$n = 0 \Longrightarrow \quad |U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_0 - \alpha|$

$n = 1 \Longrightarrow \quad |U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_1 - \alpha|$

$n = 2 \Longrightarrow \quad |U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_2 - \alpha|$

$\vdots$

$n = n - 1 \Longrightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_{n-1} - \alpha|$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.
On obtient après simplification :

$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |U_0 - \alpha|$

$|U_0 - \alpha| = |3{,}5 - \alpha|$

$3{,}5 \leq \alpha \leq 3{,}7$

$\Leftrightarrow -3{,}7 \leq -\alpha \leq -3{,}5$

$\Leftrightarrow -0{,}2 \leq U_0 - \alpha \leq 0$

$\Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq 0{,}2 = \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{5}$

On en déduit donc que pour tout entier $n \geq 0$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{3} < 1$

Alors la suite (U_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha$

d. On sait que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Donc

$\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^p \leq 10^{-3} \Longrightarrow |U_p - \alpha| \leq 10^{-3}$

Or $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^p \leq 10^{-3}$

$\Leftrightarrow -\ln 5 - p \ln 3 \leq -3 \ln 10$

$\Leftrightarrow p \geq \frac{3 \ln 10 + \ln 5}{\ln 3}$

$\Leftrightarrow p \geq 7{,}75$

Donc $|U_p - \alpha| \leq 10^{-3}$ $\forall\, p \geq 8$

On en déduit que U_p est une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel α pour $p = 8$ par exemple

PROBLEME 38

$f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$; $D_f = \mathbb{R}$

PARTIE A

1.

a. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(-x) + f(x)$

$= \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

$= \frac{3 - e^x}{1 + e^x} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

$= \frac{2(e^x + 1)}{e^x + 1}$

Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(-x) + f(x) = 2$

Déduction

$f(-x) + f(x) = 2$

$f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times 1$

On n'en déduit que le point $A(0; 1)$ est un centre de symétrie de (Γ)

b. Calcul des limites

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{3X - 1}{X + 1} = 3 \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

c. Dérivée

$f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $\mathbb{R}$, f est croissante

<u>Tableau de variation de f</u>

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3

2.

a. $(\mathrm{T}): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

Alors $(\mathrm{T}): y = x + 1$

b. $\varphi(x) = f(x) - (x + 1)$; $D_\varphi = \mathbb{R}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = f'(x) - 1$

$\Leftrightarrow \varphi'(x) = \frac{-e^{2x} - 2e^x - 1}{(e^x + 1)^2} = -\frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}$

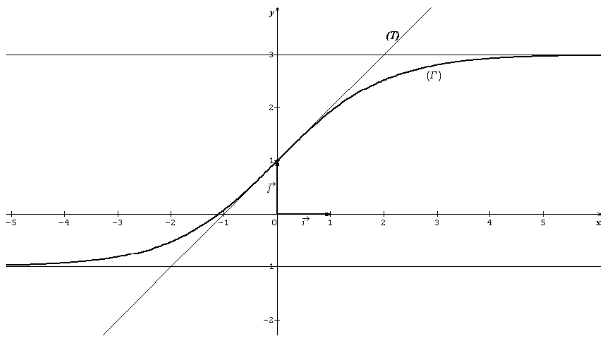
Donc on a bien :
$\boldsymbol{\varphi'(x) = -\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \ \forall x \in \mathbb{R}}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) \leq 0$
On en déduit que :
Sur $\mathbb{R}$, φ est croissante
$\varphi(0) = 0$
Par conséquent :
$\forall x \in]-\infty; 0[, \varphi(x) < 0$
$\forall x \in]0; +\infty[, \varphi(x) > 0$

c. $(\mathrm{T}): y = x + 1$ et $f(x) - y = \varphi(x)$

D'après ce qui précède :
Sur $]-\infty; \mathbf{0}[$,
$(\boldsymbol{\Gamma})$ **est en dessous de** $(\mathbf{T})$
Sur $]\mathbf{0}; +\infty[$,
$(\boldsymbol{\Gamma})$ **est au dessus de** $(\mathbf{T})$

3. Tracer de (T) et (Γ)



PARTIE B

1.

a. $f(x) = x$
$\Leftrightarrow f(x) - x = 0$
$\Leftrightarrow f(x) - x - 1 = -1$
$\Leftrightarrow f(x) - (x + 1) = -1$
Or $\varphi(x) = f(x) - (x + 1)$

D'où $f(x) = x$ si et seulement si $\varphi(x) = -1$

b. Sur $\mathbb{R}, \varphi$ est continue car dérivable et est strictement décroissante
Alors φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x); \lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)\right[=]-\infty; +\infty[$
et $-1 \in]-\infty; +\infty[$

Donc l'équation $\varphi(x) = -1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et par équivalence α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$

$\varphi(]2; 3[) =]-0{,}47; -1{,}18[$ et
$-1 \in]-0{,}47; -1{,}18[$

D'où $\alpha \in]2; 3[$
Tout ceci montre bien que la droite (D) d'équation $y = x$ coupe la courbe (Γ) en un seul point dont l'abscisse α est comprise entre 2 et 3

2.

a. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{4e^x - e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{4e^x - (e^x + 1)}{e^x + 1}$

Donc $\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -1 + \frac{4e^x}{e^x + 1}}$

On en déduit qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est par exemple la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\boldsymbol{F(x) = -x + 4\ln(e^x + 1)}$

b. $\mathcal{A} = ua \times \int_0^\alpha (f(x) - y)\,dx$ car sur $[0; \alpha]$, (Γ) est au dessus de (D)
$\int_0^\alpha (f(x) - y)\,dx$
$= \left[-x - \frac{1}{2}x^2 + 4\ln(e^x + 1)\right]_0^\alpha$
$\boldsymbol{\int_0^\alpha (f(x) - y)\,dx}$
$\boldsymbol{= -\frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha - 4\ln 2 + 4\ln(e^\alpha + 1)}$
$f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{1+\alpha}{3-\alpha}$

Donc
$\boldsymbol{\mathcal{A} = \left[4\ln 2 - \frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha - 4\ln(3 - \alpha)\right] ua}$

PARTIE C

$I = [2; 3]$

1.

a. $\forall x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{a}{e^x+1} + \frac{b}{(e^x+1)^2}$
$\Leftrightarrow \frac{ae^x + a + b}{(e^x+1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$
$\Leftrightarrow ae^x + a + b = 4e^x$
Ce qui donne par identification :
$\begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \end{cases}$

Donc $\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}}$,
$\boldsymbol{f'(x) = 4\left(\frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{(e^x+1)^2}\right)}$

b. Déduction
$2 \leq x \leq 3$
$\Leftrightarrow e^2 + 1 \leq e^x + 1 \leq e^3 + 1$
$\Leftrightarrow 0{,}04 \leq \frac{1}{e^x+1} \leq 0{,}12$ et
$-0{,}0144 \leq -\frac{1}{(e^x+1)^2} \leq -0{,}0016$

$\Leftrightarrow 0,025 \leq \frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{(e^x+1)^2} \leq 0,118$
$\Leftrightarrow 0,1 \leq f'(x) \leq 0,47$
$\Leftrightarrow |f'(x)| \leq 0,47 \leq \frac{1}{2}$

Donc $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c. On sait que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et $\alpha \in I$
Alors d'après l'inégalité de la moyenne on a : $\forall x \in I$,
$\left|\int_\alpha^x f'(t)dt\right| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$
$\Longrightarrow |[f(t)]_\alpha^x| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$
$\Longrightarrow |f(x)-f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$
Or $f(\alpha)=\alpha$ d'après PARTIE B1)

D'où $\forall x \in I$,
$|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

2. $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \ \ pour\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a. Pour tout entier naturel n, prenons $x = U_n$ dans l'inégalité précédente
On a : $|f(U_n)-\alpha| \leq \frac{1}{3}|U_n-\alpha|$
Or $f(U_n) = U_{n+1}$

D'où pour tout entier naturel n,
$|U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{3}|U_n-\alpha|$

En partant de cette inégalité on a :
$n=0 \Longrightarrow \quad |U_1-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_0-\alpha|$
$n=1 \Longrightarrow \quad |U_2-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_1-\alpha|$
$n=2 \Longrightarrow \quad |U_3-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_2-\alpha|$
$\vdots$
$n=n-1 \Longrightarrow |U_n-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_{n-1}-\alpha|$
Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.
On obtient après simplification :
$|U_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0-\alpha|$

Donc pour tout entier naturel n,
$|U_n-\alpha| \leq \frac{1}{2^n}|3-\alpha|$

b. $2 \leq \alpha \leq 3$
$\Longrightarrow 0 \leq 3-\alpha \leq 1$
$\Longrightarrow |3-\alpha| \leq 1$
$\Longrightarrow |U_n-\alpha| \leq \frac{1}{2^n}|3-\alpha| \leq \frac{1}{2^n} \times 1$

On en déduit que pour tout entier naturel n, $|U_n-\alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

On sait que $\left|U_p-\alpha\right| \leq \frac{1}{2^p}$
Donc $\frac{1}{2^p} \leq 10^{-3} \Longrightarrow \left|U_p-\alpha\right| \leq 10^{-3}$
Or $\frac{1}{2^p} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow -p\ln 2 \leq -3\ln 10$
$\Leftrightarrow p \geq \frac{3\ln 10}{\ln 2}$
$\Leftrightarrow p \geq 9,96$

D'où on a $\left|U_p-\alpha\right| \leq 10^{-3}\ \forall p \geq 10$

U_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près pour $p=10$ par exemple

PROBLEME 39

$f(0) = \frac{3}{2}$ et

$f(x) = 2x\ln x - \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2}$;

$D_f = [0;\ +\infty[$

PARTIE A

$g(x) = 2\ln x - x + 1;\ D_g =]0;\ +\infty[$

1. **Calcul des limites**

$\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty}$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} x\left(2\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right)$

$\boxed{\lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty}$

Car $\begin{cases} \lim_{x\to +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$

Dérivée

$\boxed{g'(x) = \frac{2-x}{x}}$

$\forall\ x \in]0;\ +\infty[, x > 0$

Alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $2 - x$

Par conséquent :

$\forall\ x \in]0;\ 2[, g'(x) > 0$

$\forall\ x \in]2;\ +\infty[, g'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]0;\ 2[$, g est croissante

Sur $]2;\ +\infty[$, g est décroissante

Tableau de variation de g

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1 + 2\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

2. Sur $]0;\ 2[$, g est continue car dérivable et est strictement croissante.

Alors g réalise une bijection de $]0;\ 2[$ sur $]-\infty;\ -1 + 2\ln 2[$ et $0 \in]-\infty;\ -1 + 2\ln 2[$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0;\ 2[$
$1 \in]0;\ 2[$ et $g(1) = 0$ alors 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur $]0;\ 2[$

Par ailleurs :

Sur $[2;\ +\infty[$, g est continue car dérivable et est strictement décroissante.

Alors g réalise une bijection de $[2;\ +\infty[$ sur $]-\infty;\ -1 + 2\ln 2]$ et $0 \in]-\infty;\ -1 + 2\ln 2]$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[2;\ +\infty[$

Déduction

$g(1) = g(\alpha) = 0$ d'où d'après le tableau de variation de g, on a :

$\forall\ x \in]0;\ 1[, g(x) < 0$
$\forall\ x \in]1;\ \alpha[, g(x) > 0$
$\forall\ x \in]\alpha;\ +\infty[, g(x) < 0$

3. $\begin{cases} g(3{,}5) = 0{,}005 > 0 \\ g(4) = -0{,}227 < 0 \end{cases}$

On a $g(3,5) \times g(4) < 0$
Alors 3,5$\leq \alpha \leq 4$

PARTIE B

1. $\forall\ x > 0, f'(x) = 2\ln x + 2 - x - 1$

Alors $\forall\ x > 0, f'(x) = g(x)$

D'après PARTIE A 2)

$\forall\ x \in]0;\ 1[, f'(x) < 0$

$\forall\ x \in]1;\ \alpha[, f'(x) > 0$

$\forall\ x \in]\alpha;\ +\infty[, f'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]0;\ 1[$, f est décroissante

Sur $]1;\ \alpha[$, f est croissante

Sur $]\alpha;\ +\infty[$, f est décroissante

2.

a. $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

$= \lim_{x\to +\infty} x^2\left(2\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{x^2}\right)$

$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty}$

Car $\begin{cases} \lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$

b. $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{3}{2}$ car $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$
Alors f est continue en 0

c. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 2\ln x - \frac{x}{2} - 1$

$$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty}$$

Car $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

Conclusion :
La courbe $(\mathcal{C})$ de f admet au point de coordonnées $\left(0;\ \frac{3}{2}\right)$ une demi-tangente verticale dirigée vers le bas

3.

a. $f(\alpha) = 2\alpha\ln\alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \alpha + \frac{3}{2}$

Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = \frac{\alpha-1}{2}$

D'où $f(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 4\alpha + 3)$

Et donc $f(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha-1)(\alpha-3)$

3,5$\leq \alpha \leq 4 \Leftrightarrow \frac{5}{8} \leq f(\alpha) \leq \frac{3}{2}$

Sur $]0;\ \alpha], f(x) \in \left[0;\ \frac{3}{2}\right]$ et $f(1) = 0$
Donc 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]0;\ \alpha]$

Par ailleurs :
Sur $]\alpha;\ +\infty[, f$ est continue car dérivable et est strictement décroissante.
Alors f réalise une bijection de $]\alpha;\ +\infty[$ sur $]-\infty; f(\alpha)[$ et $0 \in\ ]-\infty; f(\alpha)[$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans $]\alpha;\ +\infty[$

b. $\begin{cases} f(5) = 0{,}09 > 0 \\ f(6) = -0{,}9 < 0 \end{cases}$

On a $f(5) \times f(6) < 0$
D'où $5 \leq \beta \leq 6$

4.

a. $(\boldsymbol{D}): \boldsymbol{y = h(x) = (2\ln 5 - 4)x + 4}$

$\Delta(x) = f(x) - h(x);\ D_\Delta = [5;\ +\infty[$

$\boldsymbol{\Delta'(x) = f'(x) - f'(5) = g(x) - g(5)}$

$\forall\, x \in [5;\ +\infty[, \Delta'(x) < 0$

Car sur $[5;\ +\infty[, g$ est décroissante

On en déduit que :
Sur $[5;\ +\infty[, \Delta$ est décroissante

Par conséquent :
Pour tout $x \geq 5, \Delta(x) \leq \Delta(5)$
$\Leftrightarrow\ f(x) - h(x) \leq 0$

Donc pour tout $x \geq 5, f(x) \leq h(x)$

b. $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{2-\ln 5}$

Alors (D) coupe l'axe (Ox) au point d'abscisse $\lambda = \frac{2}{2-\ln 5}$

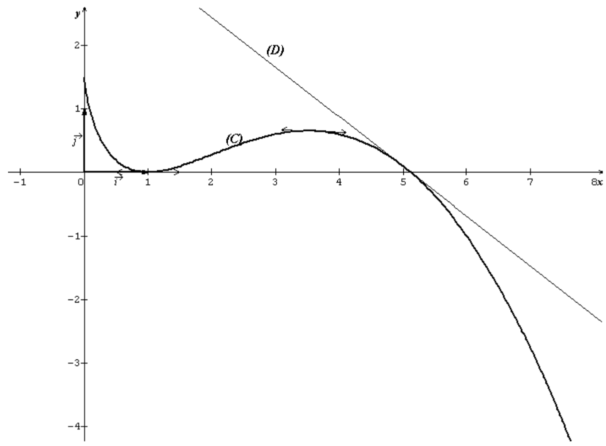
D'après ce qui précède :
Sur$[5;\ +\infty[, (\mathcal{C})$ est en dessous de (D)

Et par ailleurs :
$(\mathcal{C})$ et (D) coupent l'axe (Ox) respectivement aux points d'abscisses β et λ.

Donc on a bien $\beta \leq \lambda$

5. **<u>Tableau de variation de f</u>**

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$



PARTIE C

$F(x) = x^2\ln x - \frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$;
$D_F =]0;\ +\infty[$

1. $F'(x) = 2x\ln x + x - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2}$

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, F'(x) = f(x)$ et $F(1) = 0$

Donc F est sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ la primitive de f qui s'annule au point 1
C'est-à-dire que $\forall\, x \in]0;\ +\infty[$,
$\boldsymbol{F(x) = \int_1^x f(t)dt}$

2. On pose $\mathcal{A} = \int_1^\beta f(t)dt$

a. $F'(x) = f(x) \geq 0\ \forall\, x \in [5;\ \beta]$

On en déduit que :
Sur $[5;\ \beta]$, F est croissante

Par conséquent :
$\boldsymbol{F(5) \leq F(\beta)} \qquad (1)$

b. $\mathcal{A} = \int_1^\beta f(t)dt$

D'après la relation de Chasles, on a :
$\mathcal{A} = \int_1^5 f(t)dt + \int_5^\beta f(t)dt$
Or $\int_1^5 f(x)dx = F(5)$ par définition et
$\int_5^\beta f(t)dt \leq \int_5^\beta h(t)dt$ d'après PARTIE B 4a)

D'où $\boldsymbol{\mathcal{A} \leq F(5) + \int_5^\beta h(t)dt}$

D'autres parts :
$\beta \leq \lambda$ et sur $[\beta;\ \lambda]$, (D) est au dessus de l'axe (Ox)

Alors $\boldsymbol{\int_\beta^\lambda h(t)dt \geq 0}$ **car c'est une aire**

Déduction
$\int_5^\lambda h(t)dt = \int_5^\beta h(t)dt + \int_\beta^\lambda h(t)dt$
$\Leftrightarrow \int_5^\lambda h(t)dt \geq \int_5^\beta h(t)dt$
Car $\int_\beta^\lambda h(t)dt \geq 0$
On a alors :
$F(5) + \int_5^\beta h(t)dt \leq F(5) + \int_5^\lambda h(t)dt$
Or $\mathcal{A} \leq F(5) + \int_5^\beta h(t)dt$

D'où $\boldsymbol{\mathcal{A} \leq F(5) + \int_5^\lambda h(t)dt} \qquad (2)$

3. Les inégalités (1) et (2) montrent que

$\boldsymbol{F(5) \leq \mathcal{A} \leq F(5) + \int_5^\lambda h(t)dt}$

Car $F(\beta) = \int_1^\beta f(t)dt = \mathcal{A}$
$\int_5^\lambda h(t)dt = [(\ln 5 - 2)x^2 + 4x]_5^{\frac{2}{2-\ln 5}}$
$\int_5^\lambda h(t)dt = \frac{4}{2-\ln 5} - 25\ln 5 + 30$
$F(5) = 25\ln 5 - \frac{116}{3}$

Donc on a :
$\boldsymbol{25\ln 5 - \frac{116}{3} \leq \mathcal{A} \leq \frac{4}{2-\ln 5} - \frac{26}{3}}$

Ce qui donne :
$\boldsymbol{1,56 \leq \mathcal{A} \leq 1,57}$ **à** $\boldsymbol{10^{-2}}$ **près**

PROBLEME 40
PARTIE A

$f(x) = e^x - 2e^{\frac{x}{2}};\ D_f = \mathbb{R}$

1. Dérivée

$\boldsymbol{f'(x) = e^x - e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{\frac{x}{2}} > 0$
Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $e^{\frac{x}{2}} - 1$
$e^{\frac{x}{2}} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$
Par conséquent :
$\forall\, x \in]-\infty; 0[, f'(x) < 0$
$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, f'(x) > 0$
On en déduit que :
Sur $]-\infty; 0[$, f est décroissante
Sur $]0;\ +\infty[$, f est croissante
<u>Tableau de variation de f</u>

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0}$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} e^{\frac{x}{2}} = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 2\right)$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$ **car** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty}$

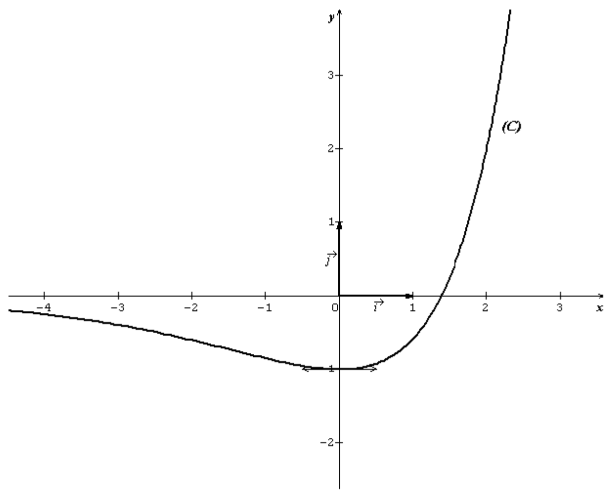
2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 2\right) = 0$
$\Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} \neq 0$ et $e^{\frac{x}{2}} = 2$
$\Leftrightarrow x = 2\ln 2$

Alors $(\mathcal{C})$ **coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées** $\boldsymbol{(2\ln 2\,;\,0)}$

Par ailleurs :
$f(0) = -1$

Alors $(\mathcal{C})$ **coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées** $\boldsymbol{(0;\ -1)}$

3. Tracer de $(\mathcal{C})$



4. Soit $\lambda < 0$

a. $\mathcal{A}(\lambda) = ua \times \int_\lambda^0 -f(x)dx$

$\int_\lambda^0 -f(x)dx = \left[-e^x + 4e^{\frac{x}{2}}\right]_\lambda^0$

$\int_\lambda^0 -f(x)dx = 4 + e^\lambda - 4e^{\frac{\lambda}{2}}$

$ua = 4\ cm^2$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda) = 4\left(4 + e^\lambda - 4e^{\frac{\lambda}{2}}\right)\ cm^2}$$

Déduction

$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to -\infty} e^\lambda = 0 \\ \lim\limits_{\lambda \to -\infty} e^{\frac{\lambda}{2}} = 0 \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 16$

b. $\mathcal{V}(\lambda) = uv \times \pi \int_\lambda^0 f^2(x)\, dx$

$\int_\lambda^0 f^2(x)\, dx$

$= \int_\lambda^0 \left(e^{2x} - 4e^{\frac{3x}{2}} + 4e^x\right) dx$

$\int_\lambda^0 f^2(x)\, dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{8}{3}e^{\frac{3x}{2}} + 4e^x\right]_\lambda^0$

$\int_\lambda^0 f^2(x)\, dx$

$= \frac{11}{3} - \left(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{8}{3}e^{\frac{3x}{2}} + 4e^x\right)$

$$\boldsymbol{\mathcal{V}(\lambda) = \pi\left[\frac{11}{3} - \left(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{8}{3}e^{\frac{3x}{2}} + 4e^x\right)\right] uv}$$

$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to -\infty} e^{2\lambda} = 0 \\ \lim\limits_{\lambda \to -\infty} e^{\frac{3\lambda}{2}} = 0 \\ \lim\limits_{\lambda \to -\infty} e^\lambda = 0 \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{V}(\lambda) = \frac{11\pi}{3}$

PARTIE B

1. $f'(x) = 1 \Leftrightarrow e^x - e^{\frac{x}{2}} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{\frac{x}{2}} > 0 \\ X^2 - X - 1 = 0 \end{cases}$

$\Delta = 5$

$X_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0\ ;\ X_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$

$e^{\frac{x}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Donc $\boldsymbol{\beta = 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$ est l'unique solution de l'équation $\boldsymbol{f'(x) = 1}$

$f(\beta) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

D'où on a : $\boldsymbol{f(\beta) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

2.

a. $g(x) = f(x) - x;\ D_g = \mathbb{R}$

$g(\beta) = f(\beta) - \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) > 0$

$\Leftrightarrow -2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) < 0$

$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) < 0$

On en déduit que : $\boldsymbol{g(\beta) < 0}$

$g'(x) = f'(x) - 1$

D'après la question 1)

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \beta$

Par conséquent :

$\forall\ x \in]-\infty;\ \beta[, g'(x) < 0$

$\forall\ x \in]\beta;\ +\infty[, g'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty;\ \beta[, g$ est décroissante

Sur $]\beta;\ +\infty[, g$ est croissante

b. Sur $]-\infty;\ \beta[, g$ est continue car dérivable et est strictement décroissante.

Alors g réalise une bijection de $]-\infty;\ \beta[$ sur $]g(\beta);\ +\infty[$ et $0 \in]g(\beta);\ +\infty[$

Donc l'équation $\boldsymbol{g(x) = 0}$ admet une unique solution $\boldsymbol{a}$ dans $\boldsymbol{]-\infty;\ \beta[}$
$\boldsymbol{g(0) = -1 < g(a) = 0 \Leftrightarrow a < 0}$

Par ailleurs :

Sur $]\beta;\ +\infty[, g$ est continue car dérivable et est strictement croissante.

Alors g réalise une bijection de $]\beta;\ +\infty[$ sur $]g(\beta);\ +\infty[$ et $0 \in\ ]g(\beta);\ +\infty[$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution b dans $]\beta;\ +\infty[$
$g(\beta) < 0 = g(b) \Leftrightarrow \beta < b$

Conclusion :
Les équations $g(x) = 0$ et $f(x) = x$ étant équivalentes, alors l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions a et b avec $a < 0 < \beta < b$

3. Dérivée seconde

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\right)$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{\frac{x}{2}} > 0$

Alors le signe de $f''(x)$ dépend de celui de $e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$

$e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow x > -2\ln 2$

Par conséquent :
$\forall\, x \in\ ]-\infty;\ -2\ln 2[, f''(x) < 0$
$\forall\, x \in\ ]-2\ln 2\,;\ +\infty[, f''(x) > 0$

On en déduit que :
Sur $]-\infty;\ -2\ln 2[$,
f' est décroissante
Sur $]-2\ln 2\,;\ +\infty[$,
f' est croissante

<u>Tableau de variation de f'</u>

x	$-\infty$		$-2\ln 2$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. D'après le tableau précédent, f' atteint son minimum pour $x = -2\ln 2$ et $f'(-2\ln 2) = -\frac{1}{4}$

Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq -\frac{1}{4}$

Déduction
D'après PARTIE A,
$\forall\, x \in\ ]-\infty; 0], f'(x) \leq 0$
On en déduit que :

$$\forall\, x \in\ ]-\infty; 0],\ -\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq 0$$

5. $x_0 = \beta$ et $x_{n+1} = f(x_n)\ \forall\, n\ \in \mathbb{N}$

a. D'après PARTIE A,
$\forall\, x \in\ ]-\infty; 0], f(x) \in\ ]-1\,; 0]$
Or $]-1\,; 0] \subset\ ]-\infty; 0]$

D'où $\forall\, x \in\ ]-\infty; 0], f(x) \in\ ]-\infty\,; 0]$

Déduction
$x_1 = f(x_0) = f(\beta) = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq 0$
Supposons que $\forall\, n \geq 1, x_n \leq 0$ et montrons que $x_{n+1} \leq 0$
En effet :
$x_n \leq 0 \Rightarrow f(x_n) \leq 0$
Car $\forall\, x \in\ ]-\infty; 0], f(x) \in\ ]-\infty\,; 0]$
Or $x_{n+1} = f(x_n)$ par définition
D'où $x_{n+1} \leq 0$ si $x_n \leq 0$

On peut donc conclure que :
$\forall\, n \geq 1, x_n \leq 0$

b. On sait que $\forall\, x \in\ ]-\infty; 0]$,
$|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$; $a < 0$ et $\forall\, n \geq 1, x_n \leq 0$
Alors d'après l'inégalité de la moyenne on a :
$\forall\, n \geq 1, \left|\int_a^{x_n} f'(t)dt\right| \leq \frac{1}{4}|x_n - a|$
$\Rightarrow \left|[f(t)]_a^{x_n}\right| \leq \frac{1}{4}|x_n - a|$
$\Rightarrow |f(x_n) - f(a)| \leq \frac{1}{4}|x_n - a|$
Or $f(a) = a$ et $f(x_n) = x_{n+1}$

D'où $\forall\, n \geq 1$,
$$|x_{n+1} - a| \leq \frac{1}{4}|x_n - a|$$

Déduction
En partant de cette inégalité, on a :
$n = 1 \Rightarrow \quad |x_2 - a| \leq \frac{1}{4}|x_1 - a|$
$n = 2 \Rightarrow \quad |x_3 - a| \leq \frac{1}{4}|x_2 - a|$
$n = 3 \Rightarrow \quad |x_4 - a| \leq \frac{1}{4}|x_3 - a|$
$\vdots$
$n = n - 1 \Rightarrow |x_n - a| \leq \frac{1}{4}|x_{n-1} - a|$
Faisons le produit membre à membre de ces $(n-1)$ inégalités.
On obtient après simplification :
$|x_n - a| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |x_1 - a|$
$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$a < 0$
$\Leftrightarrow -a > 0$
$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x_1 - a < 0$

$\Leftrightarrow |x_1 - a| < \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|$

$\Leftrightarrow |x_1 - a| \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Donc $\forall\, \boldsymbol{n \geq 1}$,
$\boldsymbol{|x_n - a| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |x_1 - a| \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$

c. $\forall\, n \geq 1,\ |x_n - a| \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\lim\limits_{n\to +\infty} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ car $0 < \frac{1}{4} < 1$

Donc la suite $(|x_n - a|)$ converge vers 0 et par conséquent, la suite (x_n) converge vers a

PROBLEME 41
PARTIE A

$f(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$ pour $x > 0$

et $f(0) = \frac{1}{2}$; $D_f = [0;\ +\infty[$

1. $g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$;

$D_g =]0;\ +\infty[$

a. Dérivée

$\boldsymbol{g'(x) = -\frac{4}{(x+2)^2}} < 0\ \forall\, x \in]\mathbf{0};\ +\infty[$

On en déduit que :

Sur $]0;\ +\infty[$, g est décroissante

b. $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x\left(1 + \frac{2}{x}\right) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \frac{1}{4}}$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{x+2} = 0 \end{cases}$

c. $g(]0;\ +\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to +\infty} g(x);\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)\right[$

$\boldsymbol{g(]0;\ +\infty[) = \left]\frac{1}{4};\ +\infty\right[}$

Par conséquent :
$\forall\, \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0};\ +\infty[, \boldsymbol{g(x)} > 0$

d. $g([2;\ 3]) = [g(3);\ g(2)]$

$g([2;\ 3]) = [0{,}36; 0{,}44]$

Par conséquent : $\forall\, x \in [2;\ 3]$,

$0{,}36 \leq g(x) \leq 0{,}44$

Or $0{,}44 < \frac{1}{2}$

D'où $\forall\, \boldsymbol{x} \in [\mathbf{2};\ \mathbf{3}], \boldsymbol{g(x) < \frac{1}{2}}$

2.

a. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

Posons $X = \frac{2}{x}$

Si $x \to 0^+,\ X \to +\infty$ et

$\lim\limits_{X\to +\infty} \frac{2}{X}\ln(1+X)$

$= \lim\limits_{X\to +\infty} \frac{2(X+1)}{X} \cdot \frac{\ln(1+X)}{1+X} = 0$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{X\to +\infty} \frac{2(X+1)}{X} = 2 \\ \lim\limits_{X\to +\infty} \frac{\ln(1+X)}{1+X} = 0 \end{cases}$

On conclut que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0$

On en déduit que :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$$

Et par suite :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

Alors f est continue en 0

b. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{1}{4}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{X\to +\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$

Alors f n'est pas dérivable en 0

<u>Interprétation graphique</u>

La courbe $(\mathcal{C})$ de f admet au point $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ une demi-tangente dirigée vers le haut

c. $f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + x\left[\frac{-2}{x(x+2)}\right] + \frac{1}{4}$

$$f'(x) = g(x) > 0 \ \forall\, x \in]0; +\infty[$$

On en déduit que :

Sur $]0; +\infty[, f$ est croissante

3.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$

Posons $X = \frac{2}{x}$

Si $x \to +\infty$, $X \to 0$ et

$\lim\limits_{X\to +\infty} \frac{2}{X}\ln(1+X) = \lim\limits_{X\to +\infty} 2\frac{\ln(1+X)}{X} = 2$

Car $\lim\limits_{X\to +\infty} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

On conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2$

b. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{4} + \frac{1}{2} = +\infty \end{cases}$

c. $(\Delta): y = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - 2$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y) = 0$$

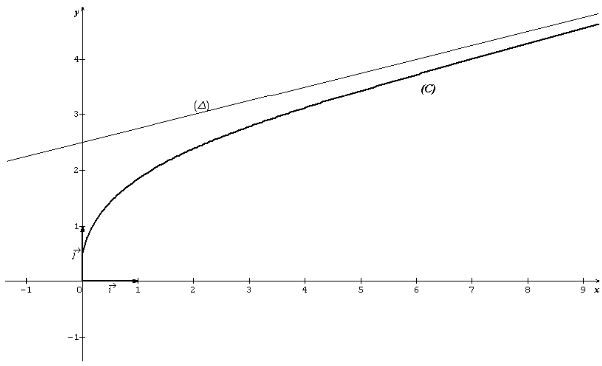
Car $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2$

Alors la droite (Δ) est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$

4. Tracer de $(\mathcal{C})$

<u>Tableau de variation de f</u>

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↗	$+\infty$



PARTIE B

$I = [2; 3]$

1.

a. $h(x) = f(x) - x$; $D_h = I$

$$h'(x) = f'(x) - 1 = g(x) - 1$$

Car $f'(x) = g(x)$

On sait que : $\forall\, x \in [2; 3], g(x) < \frac{1}{2}$

Par conséquent :

$$\forall\, x \in [2; 3], h'(x) < -\frac{1}{2} < 0$$

b. On en déduit que :

Sur $[2; 3], h$ est décroissante

h étant continue car dérivable et strictement décroissante telle que $h(2) \times h(3) = -0{,}08 < 0$

Alors l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans I

2.

a. On sait que $\forall\, x \in [2; 3], 0 < g(x) < \frac{1}{2}$

Or $f'(x) = g(x)$

D'où $\forall\, x \in I, 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$

b. On sait que $\forall\, x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et $\alpha \in I$

Alors d'après l'inégalité de la moyenne on a : $\forall\, x \in I$,

$\left|\int_{\alpha}^{x} f'(t)dt\right| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

$\Rightarrow |[f(t)]_{\alpha}^{x}| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

$\Rightarrow |f(x)-f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

Or $f(\alpha)=\alpha$ d'après 1b)

D'où $\boldsymbol{\forall\, x \in I,}$
$\boldsymbol{|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|}$

3. $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

a. Par hypothèse, $U_n \in I\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Prenons $\forall\, n \in \mathbb{N}, x = U_n$ dans l'inégalité précédente

On a : $|f(U_n)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$

Or $U_{n+1} = f(U_n)$

D'où
$\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N}, |U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n-\alpha|\ (1)}$

En partant de cette inégalité, on a :

$n=0 \Rightarrow \quad |U_1-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_0-\alpha|$

$n=1 \Rightarrow \quad |U_2-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_1-\alpha|$

$n=2 \Rightarrow \quad |U_3-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_2-\alpha|$

$\vdots$

$n=n-1 \Rightarrow |U_n-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_{n-1}-\alpha|$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$|U_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0-\alpha|$

$2 \leq \alpha \leq 3$

$\Rightarrow -1 \leq 2-\alpha \leq 0$

$\Rightarrow |2-\alpha| \leq 1$

$\Rightarrow |U_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 1$

On en déduit que pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$**,** $\boldsymbol{|U_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad (2)}$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$

Alors la suite $(|\boldsymbol{U_n-\alpha}|)$ **converge vers 0 et par conséquent, la suite** $\boldsymbol{(U_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ **converge vers** $\boldsymbol{\alpha}$

c. On sait que $|U_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-3} \Rightarrow |U_n-\alpha| \leq 10^{-3}$

Or $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-3} \Leftrightarrow -n\ln 2 \leq -3\ln 10$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{3\ln 10}{\ln 2}$

$\Leftrightarrow n \geq 9{,}96$

D'où on a $\boldsymbol{|U_n-\alpha| \leq 10^{-3}\ \forall\, n \geq 10}$

$\boldsymbol{U_{n_0}}$ **est une valeur approchée de** $\boldsymbol{\alpha}$ **à** $\boldsymbol{10^{-3}}$ **près pour** $\boldsymbol{n_0 = 10}$ **par exemple**

PROBLEME 42

$f(x) = e^{x-1} - 1;\ D_f = \mathbb{R}$

PARTIE A

1. Dérivée

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = e^{x-1} > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}}}$$

On en déduit que :

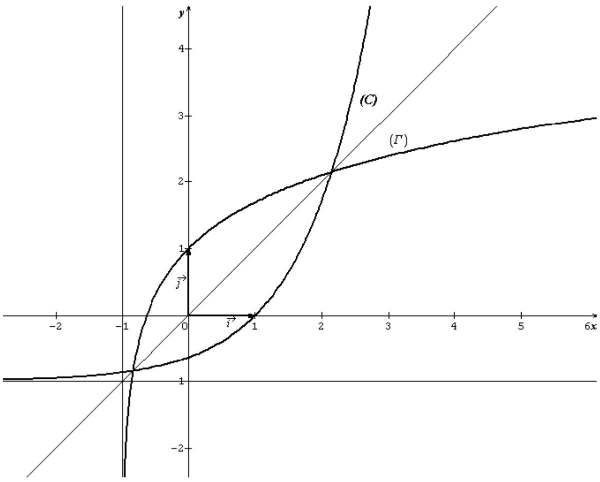
Sur $\mathbb{R}$, f est croissante

<u>Tableau de variation de f</u>

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow +\infty$

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1 \text{ car } \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty\end{array}}$$

<u>Tracer de la courbe $(\mathcal{C})$ de f</u>



2.

a. Sur $\mathbb{R}$, f est continue car dérivable et est strictement croissante.

$$\boxed{\text{Alors } f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } J =]-1;\ +\infty[}$$

b. $\forall\, y \in]-1;\ +\infty[, f(x) = y$

$\Leftrightarrow e^{x-1} = y + 1$

$\Leftrightarrow x = 1 + \ln(y+1) = f^{-1}(y)$

$$\boxed{\text{Donc } f^{-1}(x) = 1 + \ln(x+1)\,;\, x > -1}$$

c. Tracer la courbe (Γ) de f^{-1}

(Γ) et $(\mathcal{C})$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

(Voir le graphique)

3. $\varphi(x) = f(x) - x$

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^x(e^{-1} - e^{-x} - xe^{-x})$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{\varphi(x)} = +\infty}$$

Car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0\end{cases}$

b. $\boldsymbol{\varphi'(x) = e^{x-1} - 1}$

$e^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Par conséquent :

$\forall\, x \in]-\infty; 1[, \varphi'(x) < 0$

$\forall\, x \in]1;\ +\infty[, \varphi'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 1[$, φ est décroissante

Sur $]1;\ +\infty[$, φ est croissante

<u>Tableau de variation de φ</u>

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$+\infty \searrow$	-1	$\nearrow +\infty$

D'après ce tableau :

Sur $\mathbb{R}$, φ est continue car dérivable et est strictement monotone sur chacun des intervalles $]-\infty; 1[$ et $]1;\ +\infty[$

Alors φ réalise une bijection de chacun de ces deux intervalles sur $]-1;\ +\infty[$ et $0 \in]-1;\ +\infty[$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Donc l'équation } \varphi(x) = 0 \text{ admet} \\ \text{deux solutions telles que} \\ a \in]-\infty; 1[\text{ et } b \in]1;\ +\infty[. \\ \text{On a bien } a < b\end{array}}$$

c. Déduction

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les deux équations } \varphi(x) = 0 \text{ et} \\ f(x) = x \text{ étant équivalentes, on} \\ \text{déduit de ce qui précède que } a \text{ et} \\ b \text{ sont les seules solutions de} \\ \text{l'équation } f(x) = x\end{array}}$$

$\begin{cases} \varphi(2) = -0{,}28 < 0 \\ \varphi\left(\frac{5}{2}\right) = 0{,}98 > 0 \end{cases}$

On a $\boldsymbol{\varphi(2)} \times \boldsymbol{\varphi}\left(\frac{5}{2}\right) < 0$ donc $\mathbf{2} < b < \frac{5}{2}$

4. $\mathcal{A} = ua \times \int_a^b \left(f^{-1}(x) - f(x)\right) dx$ ou encore $\mathcal{A} = 2ua \times \int_a^b \left(x - f(x)\right) dx$ à cause de la symétrie du domaine par rapport à la droite d'équation $y = x$

$\int_a^b \left(x - f(x)\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - e^{x-1} + x\right]_a^b$

$\int_a^b \left(x - f(x)\right) dx$

$= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + b - a + e^{a-1} - e^{b-1}$

Or $\begin{cases} f(a) = a \\ f(b) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{a-1} = a + 1 \\ e^{b-1} = b + 1 \end{cases}$

D'où $\int_a^b \left(x - f(x)\right) dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

$ua = 4\ cm^2$

$\boldsymbol{\mathcal{A} = 4(b^2 - a^2)cm^2}$

PARTIE B

$g(x) = \ln(x + 1) + 1;\ x \in I = \left[2;\ \frac{5}{2}\right]$

1. $\forall\, x \in I, f(x) = x$

$\Leftrightarrow e^{x-1} = x + 1$

$\Leftrightarrow x = \ln(x + 1) + 1$

$\Leftrightarrow g(x) = x$

Alors sur $\boldsymbol{I}$, l'équation $\boldsymbol{f(x) = x}$ équivaut à l'équation $\boldsymbol{g(x) = x}$

2.

a. $2 \leq x \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow 3 \leq x + 1 \leq \frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow 1{,}09 \leq \ln(x + 1) \leq 1{,}25$

$\Leftrightarrow 2{,}09 \leq g(x) \leq 2{,}25$

Or $[2{,}09;\ 2{,}25] \subset \left[2;\ \frac{5}{2}\right]$

D'où $\forall\, \boldsymbol{x \in I, g(x) \in I}$

b. $\forall\, x \in I, g'(x) = \frac{1}{x+1}$

$2 \leq x \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow 3 \leq x + 1 \leq \frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{2}{7} \leq g'(x) \leq \frac{1}{3}$

Donc $\forall\, \boldsymbol{x \in I, 0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{3}}$

c. On sait que $\forall\, x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{3}$ et $b \in I$

Alors d'après l'inégalité de la moyenne on a : $\forall\, x \in I$,

$\left|\int_b^x g'(t)dt\right| \leq \frac{1}{2}|x - b|$

$\Rightarrow \left|[g(t)]_b^x\right| \leq \frac{1}{2}|x - b|$

$\Rightarrow |g(x) - g(b)| \leq \frac{1}{2}|x - b|$

Or $g(b) = b$ d'après 1)

D'où $\forall\, \boldsymbol{x \in I}$,

$\boldsymbol{|g(x) - b| \leq \frac{1}{2}|x - b|}$

3. $w_0 = 2$ et $w_{n+1} = g(w_n)\ \forall\, n \geq 0$

a. $w_0 = 2 \in I$

$\forall\, n \geq 0$, supposons que $w_n \in I$ et montrons que $w_{n+1} \in I$

En effet :

$w_n \in I \Longrightarrow\ g(w_n) \in I$

Car $\forall\, x \in I, g(x) \in I$

Or $w_{n+1} = g(w_n)$ par définition

D'où $w_{n+1}\ \in I$ si $w_n\ \in I$

On peut donc conclure que $\forall\, \boldsymbol{n \geq 0, w_n \in I}$

b. Prenons $x = w_n\ \forall\, n \geq 0$ dans l'inégalité 2c)

On a : $|g(w_n) - b| \leq \frac{1}{2}|w_n - b|$

Or $w_{n+1} = g(w_n)$

D'où $\forall\, \boldsymbol{n \geq 0}$,

$\boldsymbol{|w_{n+1} - b| \leq \frac{1}{3}|w_n - b|}$

c. En partant de l'inégalité précédente, on a :

$n = 0 \Longrightarrow \quad |w_1 - b| \leq \frac{1}{3}|w_0 - b|$

$n = 1 \Longrightarrow \quad |w_2 - b| \leq \frac{1}{3}|w_1 - b|$

$n = 2 \Longrightarrow \quad |w_3 - b| \leq \frac{1}{3}|w_2 - b|$

$\vdots$

$n = n - 1 \Longrightarrow |w_n - b| \leq \frac{1}{3}|w_{n-1} - b|$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$|w_n - b| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |w_0 - b|$

$2 \leq b \leq \frac{5}{2}$ et $w_0 = 2$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq w_0 - b \leq 0$

$\Leftrightarrow |w_0 - b| \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow |w_n - b| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |w_0 - b| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{2}$

Donc $\forall\, \boldsymbol{n \geq 0}$,

$\boldsymbol{|w_n - b| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{3} < 1$

Alors la suite $(|w_n - b|)$ converge vers 0 et par conséquent la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b
$$\lim_{n\to+\infty} w_n = b$$

e. On sait que $\left|w_q - b\right| \leq \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^q$ et par conséquent :

$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^q \leq 10^{-2} \Rightarrow \left|w_q - b\right| \leq 10^{-2}$

Or $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^q \leq 10^{-2}$

$\Leftrightarrow -\ln 2 - q\ln 3 \leq -2\ln 10$

$\Leftrightarrow q \geq \frac{2\ln 10+\ln 2}{\ln 3}$

$\Leftrightarrow q \geq 4{,}82$

D'où $\left|w_q - b\right| \leq 10^{-2}\ \forall q \geq 5$

Par exemple pour $q = 5$, w_q est une valeur approchée de b à 10^{-2} près

PROBLEME 43

PARTIE A

$(E): y' - 2y = \frac{2}{1+e^{-2x}}$

1. $y' - 2y = 0$

$\Leftrightarrow y' = 2y$

$\Leftrightarrow y = ke^{2x}; k \in \mathbb{R}$

$y(0) = 1 \Leftrightarrow k = 1$

Donc la solution de l'équation $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $y = e^{2x}$

2. $f(x) = e^{2x}g(x);\ D_f = \mathbb{R}$

et $f(0) = \ln 2$

a. $g(x) = e^{-2x}f(x)$

$$\boldsymbol{g(0) = f(0) = \ln 2}$$

b. $f'(x) = 2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x)$

Donc $f'(x) = e^{2x}[g'(x) + 2g(x)]$

c. f est solution de (E)

$\Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = \frac{2}{1+e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow e^{2x}[g'(x) + 2g(x)] - 2e^{2x}g(x)$
$= \frac{2}{1+e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow e^{2x}g'(x) = \frac{2}{1+e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

Alors f est solution de (E) si, et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

d. Déduction

$g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Avec $u(x) = 1 + e^{-2x}$

Par conséquent :

$g(x) = \ln(1 + e^{-2x}) + K; K \in \mathbb{R}$

$g(0) = \ln 2 \Leftrightarrow K = 0$

Et donc $g(x) = \ln(1 + e^{-2x})$

D'autres parts :

$f(x) = e^{2x}g(x)$

Alors $f(x) = e^{2x}\ln(1 + e^{-2x})$

PARTIE B

$f(x) = e^{2x}\ln(1 + e^{-2x})\ ;\ D_f = \mathbb{R}$

1. $h(x) = \ln(1 + e^{-2x}) - \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

a. Limite en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$$

b. Dérivée

$$\boldsymbol{h'(x)} = -\frac{2e^{-4x}}{(1+e^{-2x})^2} < 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

On en déduit que :
Sur $\mathbb{R}, h$ est décroissante

c. On déduit du sens de variation h

$h(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to+\infty} h(x);\ \lim_{x\to-\infty} h(x)\right[$

$\boldsymbol{h(\mathbb{R}) = \left]0;\ \lim_{x\to-\infty} h(x)\right[}$

Par conséquent :
$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{h(x)} > 0$

2. $f'(x) = 2e^{2x}\left[\ln(1+e^{-2x}) - \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right]$

$$\boldsymbol{f'(x) = 2e^{2x}h(x)}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, 2e^{2x} > 0$
Alors $f'(x)$ est du même signe que $h(x)$

Par conséquent :
$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f'(x)} > 0$

3. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{-2x})}{e^{-2x}}$
Posons $X = e^{-2x}$
Si $x \to +\infty, X \to 0$ et
$\lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

On conclut donc que $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$

D'autres parts :
$f(x) = e^{2x}\ln(1+e^{-2x})$
$= e^{2x}\ln e^{-2x}(e^{2x}+1)$
$= e^{2x}[\ln e^{-2x} + \ln(e^{2x}+1)]$

$$\boldsymbol{f(x) = e^{2x}[-2x + \ln(1+e^{2x})]}$$

Déduction
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$
$= \lim_{x\to-\infty} -2xe^{2x} + e^{2x}\ln(1+e^{2x})$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$$

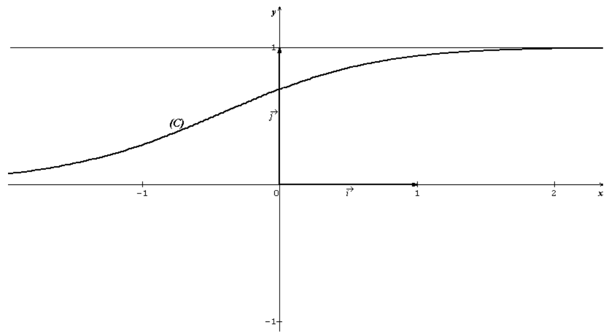
Car $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0 \end{cases}$

4. <u>**Tableau de variation de f**</u>
Sur $\mathbb{R}, f$ est croissante

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	1

5. Représentation de $(\mathcal{C})$
Tangente à l'origine du repère

$$\boldsymbol{(T): y = (2\ln 2 - 1)x + \ln 2}$$



PARTIE C

1. On remarque que :
$\frac{1}{1+e^{-2x}} = \frac{1}{e^{-2x}(1+e^{-2x})} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$
Avec $u(x) = 1 + e^{2x}$

D'où une primitive sur $\mathbb{R}$, de la fonction $\boldsymbol{x \mapsto \frac{1}{1+e^{-2x}}}$ est par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})}$

$\mathcal{A} = ua \times \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$
On sait que $f'(x) - 2f(x) = \frac{2}{1+e^{-2x}}$
Donc $f(x) = \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{1+e^{-2x}}$

Par conséquent :
$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})\right]_{-1}^{0}$
$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = 1 - \frac{1}{2}(1-e^{-2})\ln(1+e^{2})$
$ua = 25\ cm^2$

$$\boldsymbol{\mathcal{A} = 25\left[1 - \frac{1}{2}(1-e^{-2})\ln(1+e^{2})\right] cm^2}$$

PARTIE D
$U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

1. $f([0;1]) = [f(0); f(1)] = [\ln 2\,; 0{,}93]$
Par conséquent :
$\forall\, x \in [0;1], f(x) \in [\ln 2\,; 0{,}93]$
Or $[\ln 2\,; 0{,}93] \subset [0;1]$

D'où $\forall\, \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{0}; \boldsymbol{1}], \boldsymbol{f(x)} \in [\boldsymbol{0}; \boldsymbol{1}]$

Déduction

$U_0 = 0 \in [0;1]$

$\forall\, n \geq 0$, supposons que $U_n \in [0;1]$ et montrons que $U_{n+1} \in [0;1]$

On déduit de ce qui précède que :

$U_n \in [0;1] \Longrightarrow f(U_n) \in [0;1]$

Or $f(U_n) = U_{n+1}$

D'où $U_{n+1} \in [0;1]$ si $U_n \in [0;1]$

On peut donc conclure que :
$\forall\, \boldsymbol{n \geq 0, U_n \in [0;1]}$

2. **Démonstration par récurrence**

$U_0 = 0$ et $U_1 = f(U_0) = \ln 2$

On a donc $U_1 > U_0$

$\forall\, n \geq 0$, supposons que $U_{n+1} > U_n$ et montrons que $U_{n+2} > U_{n+1}$

On déduit du sens de variation de f que :

$U_{n+1} > U_n \Longrightarrow f(U_{n+1}) > f(U_n)$

Or $f(U_{n+1}) = U_{n+2}$ et $f(U_n) = U_{n+1}$

D'où $U_{n+2} > U_{n+1}$ si $U_{n+1} > U_n$

On peut donc conclure que :
$\forall\, \boldsymbol{n \geq 0, U_{n+1} > U_n}$ **et que la suite** $\boldsymbol{(U_n)}$ **est croissante**

Déduction

On sait que $\forall\, n \geq 0, U_n \in [0;1]$

(U_n) étant croissante et majorée, par exemple par 1, alors elle converge

3. Soit $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

On a :

$f(\alpha) = f\left(\lim\limits_{n \to +\infty} U_n\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n)$

Car f est continue sur $\mathbb{R}$

Donc $f(\alpha) = \lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha$

D'où $\boldsymbol{f(\alpha) = \alpha}$

D'autres parts :

$\forall\, n \geq 0, 0 \leq U_n \leq 1$

En passant à la limite, on a :
$\boldsymbol{0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} U_n \leq 1}$
C'est-à-dire que $\boldsymbol{\alpha \in [0;1]}$

PROBLEME 44

$f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ et $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

$D_f = D_g = \mathbb{R}$

PARTIE A

1.

a. Dérivée

$\boldsymbol{f'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}} < 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

On en déduit que :

Sur $\mathbb{R}$, f est décroissante

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$ **car** $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0}$
$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1}$ **car** $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0}$

On déduit de ces résultats que : $\boldsymbol{(\mathcal{C})}$ **admet deux asymptotes horizontales d'équation** $\boldsymbol{y = 0}$ **au voisinage de** $+\infty$ **et d'équation** $\boldsymbol{y = 1}$ **au voisinage de** $-\infty$

c. $\Omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$

$f(2 \times 0 - x) + f(x) = f(-x) + f(x)$

$= \frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{1}{1+e^x} = 1$

$\boldsymbol{f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times \frac{1}{2}}$
Alors $\boldsymbol{\Omega\left(0; \frac{1}{2}\right)}$ **est un centre de symétrie de** $\boldsymbol{(\mathcal{C})}$

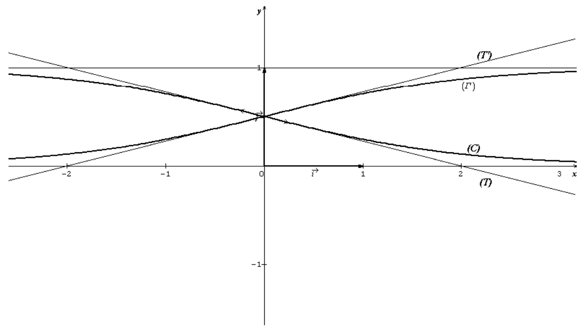
d. On note (T) la tangente à $(\mathcal{C})$ au point $\Omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$

Le coefficient directeur de $\boldsymbol{(T)}$ **est** $\boldsymbol{f'(0) = -\frac{1}{4}}$

e. Tracer de (T)et $(\mathcal{C})$

<u>Tableau de variation de f</u>

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$



2.

a. $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ et $f(-x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

Donc $g(x) = f(-x)$

On en déduit que :
La courbe (Γ) de g est l'image de la courbe $(\mathcal{C})$ de f par rapport à la symétrie orthogonale d'axe $(O; \vec{j})$

b. $f(x) + g(x) = f(x) + f(-x) = 1$ d'après 1c)

On a : $\frac{f(x)+g(x)}{2} = \frac{1}{2}$

Alors la courbe (Γ) de g est l'image de la courbe $(\mathcal{C})$ de f par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$

c. (T') est la tangente à (Γ) au point $\Omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$

On a $g'(x) = -f'(x)$

Donc le coefficient directeur de (T') est : $g'(0) = -f'(0) = \frac{1}{4}$

d. Représentation de (T') et (Γ)
(Voir la figure)

PARTIE B

On note $I = \int_0^1 f(t)\,dt$ et
$J = \int_0^1 g(t)\,dt$

1. $I + J = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^1 g(t)\,dt$

$I + J = \int_0^1 \big(f(t) + g(t)\big) = \int_0^1 dt$

Donc on a : $I + J = 1$

2.

a. $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+e^{-t}} = \frac{1}{e^{-t}\left(\frac{1}{e^{-t}}+1\right)}$

Or $\frac{1}{e^{-t}} = e^t$ d'où $\frac{1}{1+e^{-t}} = \frac{e^t}{e^t+1}$

b. $\frac{1}{1+e^{-t}} = \frac{e^t}{e^t+1} = \frac{u'(t)}{u(t)}$

Avec $u(t) = e^t + 1$

On en déduit qu'une primitive de g sur $\mathbb{R}$, est par exemple la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(t) = \ln(e^t + 1)$

Par conséquent :

$J = \int_0^1 g(t)\,dt = [\ln(e^t + 1)]_0^1$

$$\boldsymbol{J = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}$$

3. On sait que $I + J = 1$

D'où $I = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$

4.

a. $\forall\, x \in [0; +\infty[, -x \leq 0 \leq x$

$\Leftrightarrow e^{-x} \leq e^x$

$\Leftrightarrow 0 < 1 + e^{-x} \leq 1 + e^x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{1+e^{-x}}$

Donc $\forall\, x \in [0; +\infty[, f(x) \leq g(x)$

b. $\mathcal{A} = ua \times \int_0^1 \big(g(x) - f(x)\big)dx$

$\int_0^1 \big(g(x) - f(x)\big)dx$

$= \int_0^1 g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$

$\int_0^1 \big(g(x) - f(x)\big)dx = J - I$

$ua = 16\, cm^2$

Donc $\mathcal{A} = 16(J - I)\, cm^2$

On en déduit que :

$$\boldsymbol{\mathcal{A} = 16\left[-1 + 2\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)\right] cm^2}$$

PARTIE C

$h(x) = e^{-x}\ln(1+e^{-x})$

et $H(x) = \int_0^x h(t)dt$

$D_h = D_H = [0;\ +\infty[$

1.

a. **H est la primitive de h sur $[0;\ +\infty[$ qui s'annule en 0**

b. On en déduit que :

$$\boldsymbol{H'(x) = h(x)}$$

$\forall\ x \in [0;\ +\infty[, e^x > 0$ et

$1 + e^{-x} > 1 \Leftrightarrow \ln(1+e^{-x}) > 0$

Par conséquent :

$\forall\ x \in [0;\ +\infty[, H'(x) = h(x) > 0$

On en déduit que :

Alors sur $[0;\ +\infty[$, H est croissante

2.

a. $h'(x) = e^x\ln(1+e^{-x}) + e^x \times \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$h'(x) = h(x) - \frac{1}{1+e^{-x}} = h(x) - g(x)$

Donc $h(x) = h'(x) + g(x)$

b. $H(x) = \int_0^x h(t)dt$

$H(x) = \int_0^x \big(h'(t) + g(t)\big)dt$

$H(x) = [h(t) + G(t)]_0^x$

Don on a :
$\boldsymbol{H(x) = (e^x+1)\ln(e^x+1) - xe^x - 2\ln 2}$

PROBLEME 45

PARTIE A

$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} + x - 1;\ D_f =]0;\ +\infty[$

1. $g(x) = x^3 - 2\ln x + 1;\ D_g =]0;\ +\infty[$

a. Dérivée

$$\boldsymbol{g'(x) = 3x^2 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3-2}{x}}$$

$\forall\ x \in]0;\ +\infty[, x > 0$

Alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $3x^3 - 2$

$3x^3 - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

Par conséquent :

$\forall\ x \in \left]0;\ \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right[, g'(x) < 0$

$\forall\ x \in \left]\sqrt[3]{\frac{2}{3}};\ +\infty\right[, g'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $\left]0;\ \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right[$, g est décroissante

Sur $\left]\sqrt[3]{\frac{2}{3}};\ +\infty\right[$, g est croissante

b. On déduit de ce qui précède que g atteint son minimum pour $x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

Par conséquent :

$\forall\ x \in]0;\ +\infty[, g(x) \geq g\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$

Or $g\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}\left(1 - \ln\frac{2}{3}\right) + 1 > 0$

D'où $\forall\ x \in]0;\ +\infty[, g(x) > 0$

2.

a. $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\ln x}{x^4} + 1$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{x^3 - 2\ln x + 1}{x^3}}$$

On a donc $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

$\forall\ x \in]0;\ +\infty[, x^3 > 0$

Alors $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe

b. Calcul des limites

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x - 1 = 1 \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x - 1 = +\infty \end{cases}$

Tableau de variation de f

D'après 1), $\forall\, x \in]0;\ +\infty[, f'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $]0;\ +\infty[, f$ est croissante

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

c. $(\Delta): y = x - 1$

$$\lim_{x\to +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

Alors la droite (Δ): $y = x - 1$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$

Position de $(\mathcal{C})$ et (Δ)

$f(x) - y = \frac{\ln x}{x^2}$

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, x^2 > 0$

Alors le signe de $f(x) - y$ dépend de celui de $\ln x$

$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Par conséquent :

$\forall\, x \in]0;\ 1\ [, f(x) - y\ < 0$

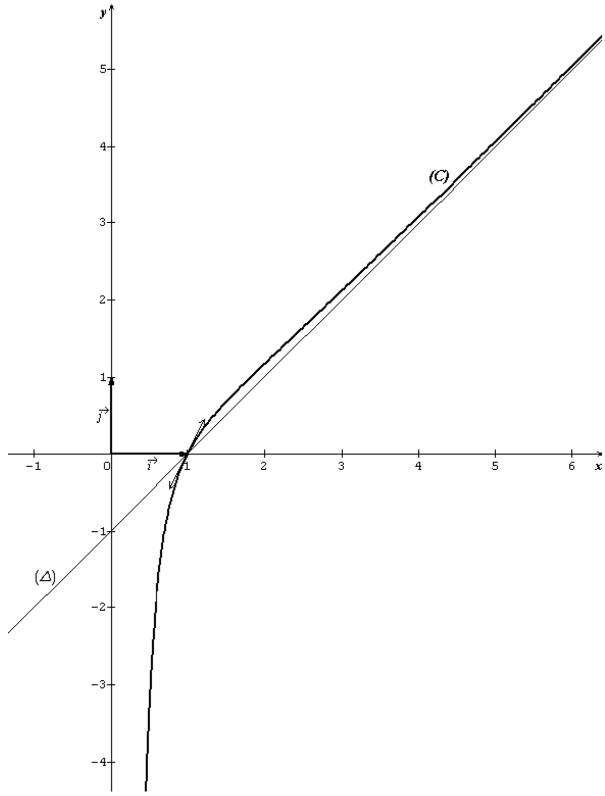
$\forall\, x \in]1;\ +\infty\ [, f(x) - y > 0$

On en déduit que :
Sur $]0;\ 1\ [$,
$(\mathcal{C})$ est en dessous de (Δ)
Sur $]1;\ +\infty\ [$,
$(\mathcal{C})$ est au dessus de (Δ)

d. $(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

D'où $(T): y = 2x - 2$

3. Tracer de (T) et (Δ) puis $(\mathcal{C})$



PARTIE B

Soit $\lambda > 1$

1. $\mathcal{A}(\lambda) = ua \times \int_1^{\lambda} (f(x) - y)\, dx$

$\int_1^{\lambda} (f(x) - y)\, dx = \int_1^{\lambda} \frac{\ln x}{x^2} dx$

Intégration par parties

$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$\int_1^{\lambda} (f(x) - y)\, dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^{\lambda} + \int_1^{\lambda} \frac{1}{x^2} dx$

$\int_1^{\lambda} (f(x) - y)\, dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^{\lambda}$

$\int_1^{\lambda} (f(x) - y)\, dx = 1 - \frac{\ln \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}$

$$\boxed{\mathcal{A}(\lambda) = \left(1 - \frac{\ln \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right) ua}$$

2. $\begin{cases} \lim\limits_{\lambda\to +\infty} \frac{\ln \lambda}{\lambda} = 0 \\ \lim\limits_{\lambda\to +\infty} \frac{1}{\lambda} = 0 \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{\lambda\to +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 1$
Et donc $L = 1$

3. $\mathcal{A}(\lambda) = \frac{L}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{\ln \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\lambda - 2\ln \lambda - 2 = \lambda$

$\Leftrightarrow -2\ln \lambda + \lambda - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\ln \lambda - \lambda + 2 = 0 \quad (E)$

Donc l'équation : $\mathcal{A}(\lambda) = \frac{L}{2}$ est équivalente à l'équation (E)

4. Soit h la fonction définie sur $[1;\ +\infty[$ par : $h(\lambda) = 2\ln\lambda - \lambda + 2$
$\boldsymbol{h'(\lambda) = \frac{2}{\lambda} - 1 = \frac{2-\lambda}{\lambda}}$
$\forall\, \lambda \in [1;\ +\infty[, \lambda > 0$
Alors le signe de $h'(\lambda)$ dépend de celui de $2 - \lambda$
$2 - \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 2$
Par conséquent :
$\forall\, \lambda \in [1;\ 2[, h'(\lambda) > 0$
$\forall\, \lambda \in]2;\ +\infty[, h'(\lambda) < 0$
On en déduit que :
Sur $[1;\ 2[, h$ est croissante
Sur $]2;\ +\infty[, h$ est décroissante
<u>Tableau de variation de h</u>

λ	1		2		$+\infty$
$h'(\lambda)$		$+$	0	$-$	
$h(\lambda)$	1	$\nearrow$	$2\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} h(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda\left(2\frac{\ln\lambda}{\lambda} - 1 + \frac{2}{\lambda}\right)$

$\boldsymbol{\lim\limits_{\lambda\to+\infty} h(\lambda) = -\infty}$

Sur $[1;\ 2], h(\lambda) \in [1; 2\ln 2]$ donc $h(\lambda) \neq 0$
Sur $]2;\ +\infty[, h$ est continue car dérivable et est strictement décroissante.
Alors h réalise une bijection de $]2;\ +\infty[$ sur $]-\infty; 2\ln 2[$ et $0 \in]-\infty; 2\ln 2[$

Donc l'équation $h(\lambda) = 0$ admet une unique solution a dans $]2;\ +\infty[$
On conclut alors que a est l'unique solution sur $[1;\ +\infty[$ de l'équation (E)

$\begin{cases} h(5) = 0{,}21 > 0 \\ h(6) = -0{,}41 < 0 \end{cases}$

On a $h(5) \times h(6) < 0$
Alors $5 < a < 6$

PARTIE C
$U_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \varphi(U_n)$ où $\varphi(x) = 2\ln x + 2;\ D_\varphi =]0;\ +\infty[$

1.
a. $U_0 = 5 \in [5; 6]$
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \in [5; 6]$ et montrons que $U_{n+1} \in [5; 6]$
$U_n \in [5; 6] \Longrightarrow 5 \le U_n \le 6$
$\Longrightarrow 2\ln 5 + 2 \le 2\ln U_n + 2 \le 2\ln 6 + 2$
$\Longrightarrow 5{,}21 \le \varphi(U_n) \le 5{,}58$
Or $\varphi(U_n) = U_{n+1}$ et
$[5{,}21; 5{,}58] \subset [5; 6]$
D'où $U_{n+1} \in [5; 6]$ si $U_n \in [5; 6]$

On conclut donc que :
$\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \in [5; 6]}$

b. $\boldsymbol{\varphi'(x) = \frac{2}{x}} > 0\ \forall\, x \in]\mathbf{0};\ +\infty[$
On en déduit que :
Sur $]0;\ +\infty[, \varphi$ est croissante
$U_0 = 5;\ U_1 = \varphi(U_0) = 5{,}21$
On a donc $U_1 > U_0$
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_{n+1} > U_n$ et montrons que $U_{n+2} > U_{n+1}$
$U_{n+1} > U_n \Longrightarrow \varphi(U_{n+1}) > \varphi(U_n)$
Or $\varphi(U_{n+1}) = U_{n+2}$ et $\varphi(U_n) = U_{n+1}$
D'où $U_{n+2} > U_{n+1}$ si $U_{n+1} > U_n$

On conclut donc que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}, U_{n+1} > U_n$ et par conséquent la suite (U_n) est croissante

c. **La suite (U_n) étant croissante et majorée par exemple par 6, alors elle est convergente**

2.
a. $\forall\, x \in [5; 6], \frac{2}{6} \le \frac{2}{x} \le \frac{2}{5}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \le \varphi'(x) \le \frac{2}{5}$
Par conséquent :
$\forall\, x \in [5; 6], |\varphi'(x)| \le \frac{2}{5}$

b. On sait que $a \in [5; 6]$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \in [5; 6]$
Alors d'après l'inégalité de la moyenne on a :
$\forall\, n \in \mathbb{N}, \left|\int_a^{U_n} \varphi'(t)dt\right| \le \frac{2}{5}|U_n - a|$
$\Longrightarrow \left|[\varphi(t)]_a^{U_n}\right| \le \frac{2}{5}|U_n - a|$
$\Longrightarrow |\varphi(U_n) - \varphi(a)| \le \frac{2}{5}|U_n - a|$

Or $\varphi(a) = a$ car les équations $\varphi(x) = x$ et (E) sont équivalentes et $\varphi(U_n) = U_{n+1}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$|U_{n+1} - a| \leq \frac{2}{5}|U_n - a|$$

c. En partant de cette inégalité on a :

$n = 0 \Longrightarrow \quad |U_1 - a| \leq \frac{2}{5}|U_0 - a|$

$n = 1 \Longrightarrow \quad |U_2 - a| \leq \frac{2}{5}|U_1 - a|$

$n = 2 \Longrightarrow \quad |U_3 - a| \leq \frac{2}{5}|U_2 - a|$

$\vdots$

$n = n - 1 \Longrightarrow |U_n - a| \leq \frac{2}{5}|U_{n-1} - a|$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.
On obtient après simplification :

$|U_n - a| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n |U_0 - a|$

$5 \leq a \leq 6$

$\Longrightarrow -1 \leq U_0 - a \leq 0$

$\Longrightarrow |U_0 - a| \leq 1$

$\Longrightarrow |U_n - a| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n |U_0 - a| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n \times 1$

On en déduit que pour tout entier naturel n, $|U_n - a| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$

d. $\lim\limits_{n\to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{2}{5} < 1$

Alors la suite $(|U_n - a|)$ converge vers 0 et par conséquent, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a

3. On sait que $|U_n - a| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$

Donc

$\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq 10^{-3} \Longrightarrow |U_n - a| \leq 10^{-3}$

Or $\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq 10^{-3}$

$\Leftrightarrow -n\ln\left(\frac{5}{2}\right) \leq -3\ln 10$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{3\ln 10}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}$

$\Leftrightarrow n \geq 7{,}53$

D'où on a $|U_n - a| \leq 10^{-3}$ $\forall n \geq 8$

U_n est une valeur approchée de a à 10^{-3} près pour $n = 10$ par exemple

PROBLEME 46

PARTIE A

$$\begin{cases} f(x) = 2x(1 - \ln x) \text{ pour } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$D_f = [0; +\infty[$

1. Continuité en 0

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$
Alors f est continue en 0

Dérivabilité en 0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

Alors f n'est pas dérivable en 0

<u>Interprétation graphique</u>

A l'origine O du repère, $(\mathcal{C})$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

2.

a. Dérivée

$f'(x) = -\ln x$

$\forall x \in]0; +\infty[, -\ln x > 0$

$\Leftrightarrow 0 < x < 1$

Par conséquent :

$\forall x \in]0; 1[, f'(x) > 0$

$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]0; 1[$, f est croissante

Sur $]1; +\infty[$, f est décroissante

b. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} 2x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

c. <u>Tableau de variation de f</u>

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

3.

a. Coordonnées de N

$x_N = 1;\ y_N = f(1) = 2$

Donc $N(1; 2)$ et la tangente à $(\mathcal{C})$ au point N a pour coefficient directeur $f'(1) = 0$

Coordonnée de R

$f(x) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln x = 1$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = e$

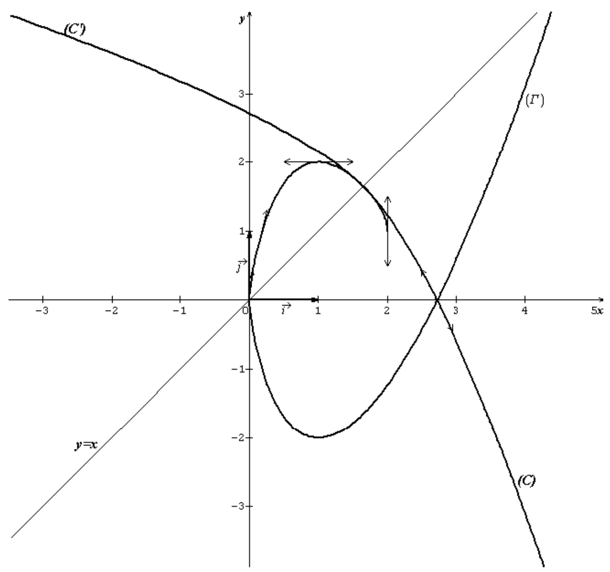
Donc $R(e; 0)$ et la tangente à $(\mathcal{C})$ au point R a pour coefficient directeur $f'(e) = -1$

Coordonnées de Q

$f'(x_Q) = 2$
$\Leftrightarrow -\ln x_Q = 2$
$\Leftrightarrow x_Q = e^{-2}$ et $y_Q = 6e^{-2}$

Donc $Q(e^{-2}; 6e^{-2})$ et la tangente à $(\mathcal{C})$ au point Q a pour coefficient directeur $f'(e^{-2}) = 2$

b. Tracer de $(\mathcal{C})$



PARTIE B

1. $\varphi(x) = f(x);\ D_\varphi = [1; +\infty[$

a. D'après les variations de f:
Sur $[1; +\infty[, \varphi$ est continue car dérivable et est strictement décroissante.

Alors φ réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur $J =]-\infty; 2]$

b. **$(\mathcal{C}')$ et la partie de $(\mathcal{C})$ correspondant à $[1; +\infty[$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$**
(Voir le graphique)

2. $g(x) = 2x(\ln x - 1);\ D_g = [0; +\infty[$
$g(x) = -f(x)$ et $D_f = D_g$

Alors (Γ) et $(\mathcal{C})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (Voir le graphique)

PARTIE C

1. Soit $\lambda \in]0; e[$
$I(\lambda) = \int_\lambda^e x \ln x\, dx$

<u>**Intégration par parties**</u>

$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

$I(\lambda) = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_\lambda^e - \int_\lambda^e \frac{1}{2} x dx$

$I(\lambda) = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_\lambda^e$

$$\boldsymbol{I(\lambda) = \frac{e^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} - \frac{1}{2}\lambda^2 \ln \lambda}$$

2. Déduisons $\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^e f(x)\, dx$
$\mathcal{A}(\lambda) = 2\int_\lambda^e x\, dx - 2\int_\lambda^e x \ln x\, dx$
$\mathcal{A}(\lambda) = [x^2]_\lambda^e - 2I$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda) = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}\lambda^2 + \lambda^2 \ln \lambda}$$

<u>**Interprétation géométrique**</u>

$\mathcal{A}(\lambda)$ représente l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = e$

3. $\lim_{a \to 0} \mathcal{A}(\lambda) = \frac{e^2}{2}$

Car $\begin{cases} \lim_{a \to 0^+} a^2 \ln a = 0 \\ \lim_{a \to 0^+} a^2 = 0 \end{cases}$

$$\textbf{Donc } \boldsymbol{\mathcal{A} = \frac{e^2}{2}}$$

4. Déduction

$(\mathcal{C})$ et (Γ) étant symétrique, on a :
$\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ en unité d'aire
Or $ua = 4\ cm^2$

$$\textbf{D'où } \boldsymbol{\mathcal{A}' = 2e^2\ cm^2}$$

PROBLEME 47

PARTIE A

1. $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$;
$D_g = [0;\ +\infty[$

a. Dérivée

$$\boldsymbol{g'(x) = \frac{2x(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}}$$

$\forall\ x \in [0;\ +\infty[, 2x \geq 0;\ (x^2+1)^2 > 0$ et $1 + x > 0$

Alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $1 - x$

$1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

Par conséquent :

$\forall\ x \in [0;\ 1[, g'(x) > 0$
$\forall\ x \in]1;\ +\infty[, g'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $[0;\ 1[, g$ est croissante
Sur $]1;\ +\infty[, g$ est décroissante

<u>Tableau de variation de g</u>

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$1-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x^2+1 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to +\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$

b. Sur $[1;\ +\infty[, g$ est continue car dérivable et est strictement décroissante.
Alors g réalise une bijection de $[1;\ +\infty[$ sur $]-\infty; 1-\ln 2]$ et $0 \in]-\infty; 1-\ln 2]$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1;\ +\infty[$

$\begin{cases} g\left(\frac{7}{4}\right) = 0{,}105 > 0 \\ g(2) = -0{,}009 < 0 \end{cases}$

On a : $g\left(\frac{7}{4}\right) \times g(2) < 0$
Alors $\frac{7}{4} \leq \alpha \leq 2$

2. D'après le tableau de variation de g, on a :

$\forall\ \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{0};\ \boldsymbol{\alpha}\ [, \boldsymbol{g(x)} > 0$
$\forall\ \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{\alpha};\ +\infty\ [, \boldsymbol{g(x)} < \boldsymbol{0}$

PARTIE B

$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1 \end{cases}$

Alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$

<u>Interprétation graphique</u>

A l'origine O du repère, $(\mathcal{C})$ admet une tangente d'équation de coefficient directeur $f'(0) = 1$ et d'équation $y = x$

2. $f(-x) = -f(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

Alors f est une fonction impaire
<u>Déduction</u>
La courbe $(\mathcal{C})$ de f est symétrique par rapport à l'origine du repère

3. $\forall\ x \in [0;\ +\infty[$,
$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f'(0) = 1$
$\forall\ x \in]0;\ +\infty[, x^2 > 0$
Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$

Par conséquent :

$\forall\ x \in [0;\ \alpha\ [, f'(x) > 0$
$\forall\ x \in [\alpha;\ +\infty\ [, f'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $[0;\ \alpha\ [, f$ est croissante
Sur $[\alpha;\ +\infty\ [, f$ est décroissante

<u>Tableau de variation de f</u>

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} 2\times\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\times\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

Car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$

4. $\varphi(x) = \ln(x+1) - x$;
$D_\varphi =]-1;\ +\infty[$

a. $\boldsymbol{\varphi'(x)} = \frac{-x}{x+1}$
$\forall\ x \in]-1;\ +\infty[, x+1 > 0$
Alors le signe de $\varphi'(x)$ dépend de celui de $-x$
Par conséquent :
$\forall\ x \in]-1;\ 0[, \varphi'(x) > 0$
$\forall\ x \in]0;\ +\infty[,\ \varphi'(x) < 0$
On en déduit que :
Sur $]-1;\ 0[, \varphi$ est croissante
Sur $]0;\ +\infty[, \varphi$ est décroissante
<u>Tableau de variations de φ</u>

x	-1		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to-1^+} \varphi(x) = -\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim_{x\to-1^+} (x+1) = 0^+ \\ \lim_{X\to0^+} \ln X = -\infty \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty}$$

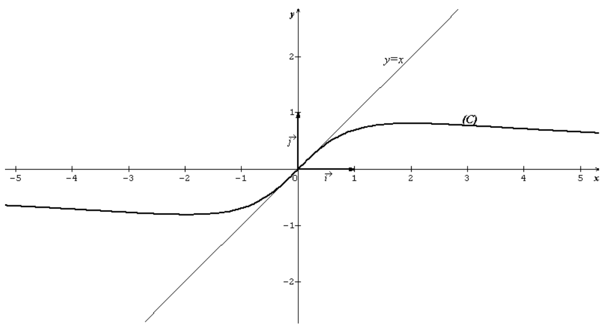
Car
$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x}\times\frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \end{cases}$

b. On déduit de ce qui précède que :
φ atteint son maximum en 0 et
$\varphi(0) = 0$

Donc $\forall\ \boldsymbol{x} \in]-\mathbf{1};\ +\infty[, \boldsymbol{\varphi(x)} \le \mathbf{0}$
Ceci montre bien que :
$\forall\ \boldsymbol{x} > -\mathbf{1}, \ln(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}) \le \boldsymbol{x}$

c. La tangente en 0 a pour équation
$y = x$
$f(x) - y = \frac{\ln(x^2+1)-x^2}{x}$
$\forall\ x \in \mathbb{R}, x^2 \ge 0 > -1$
Alors $\ln(1+x^2) \le x^2$ d'après 4b)
Par conséquent :
$\forall\ x \in]-\infty;\ 0[, f(x) - y > 0$
$\forall\ x \in]0;\ +\infty[, f(x) - y < 0$
On en déduit que :
Sur $]-\infty;\ 0[$, $(\mathcal{C})$ est au dessus de sa tangente en 0
Sur $]0;\ +\infty[, (\mathcal{C})$ est en dessous de sa tangente en 0

5. Tracer de $(\mathcal{C})$



PARTIE C
$F(x) = \int_0^x f(t)dt$; $D_F = \mathbb{R}$

1. Soit $r > 0$
$F(r) = \int_0^r f(t)dt$ est l'aire en unité d'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = r$
Par ailleurs :
$F(-r) = \int_0^{-r} f(t)dt = -\int_{-r}^0 f(t)dt$
est l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -r$ et $x = 0$

Or ces deux domaines sont symétriques par rapport à l'origine du repère

D'où $F(r)$ et $F(-r)$ sont les aires de domaines isométriques du plan

Déduction

Deux domaines isométriques du plan ont même aire.

D'où $F(-r) = F(r)$
On en déduit que F est une fonction paire

2. F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0

Par conséquent :

$\forall\, x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$

Et d'après les variations de f:

$\forall\, x \in]-\infty;\ 0[, F'(x) < 0$

$\forall\, x \in]0;\ +\infty[, F'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty;\ 0[, F$ est décroissante

Sur $]0;\ +\infty[, F$ est croissante

3.

a. $\forall\, x \in [0;\ 1],\ 0 \leq f(x) \leq x$

$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^1 f(x)\, dx \leq \int_0^1 x dx$

Or $\int_0^1 f(x)\, dx = F(1)$ et

$\int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

D'où on a bien : $\mathbf{0 \leq F(1) \leq \frac{1}{2}}$

b. $\forall\, t \geq 1,$ on a : $t^2 \geq 1$et donc :

$t^2 \leq t^2 + 1 \leq t^2 + t^2$

$\Leftrightarrow t^2 \leq t^2 + 1 \leq 2t^2$

$\Leftrightarrow \ln(t^2) \leq \ln(t^2 + 1) \leq \ln(2t^2)$

Donc $\forall\, t \geq 1$, $\frac{\ln(t^2)}{t} \leq \frac{\ln(t^2+1)}{t} \leq \frac{\ln(2t^2)}{t}$

c. $\forall\, x \geq 1, \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\, dt = \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^x$

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

Déduction : $\forall\, t \geq 1,$

$\int_1^x \frac{\ln(t^2)}{t} dt \leq \int_1^x \frac{\ln(t^2+1)}{t} dt \leq \int_1^x \frac{\ln(2t^2)}{t} dt$

$\Leftrightarrow \int_1^x \frac{\ln(t^2)}{t} dt \leq \int_1^x f(t)\, dt \leq \int_1^x \frac{\ln(2t^2)}{t} dt$

Or $\int_1^x f(t)\, dt = \int_1^0 f(t)\, dt + \int_0^x f(t)\, dt$

$= -\int_0^1 f(t)\, dt + \int_0^x f(t)\, dt$

$= F(x) - F(1)$

D'où on a $\forall\, t \geq 1$,
$$\int_1^x \frac{\ln(t^2)}{t} dt \leq F(x) - F(1) \leq \int_1^x \frac{\ln(2t^2)}{t} dt$$

Posons

$\begin{cases} u = t^2 \\ v = 2t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2tdt = 2\sqrt{u}\, dt \\ dv = 4tdt = 2\sqrt{2}\sqrt{v}\, dt \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} dt = \frac{du}{2\sqrt{u}} \\ dt = \frac{\sqrt{2}dv}{2\sqrt{v}} \end{cases}$

On en déduit que :

$\int_1^x \frac{\ln(t^2)}{t} dt = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\ln(u)}{u} du = \frac{1}{16}(\ln x)^2$

Et $\int_1^x \frac{\ln(2t^2)}{t} dt = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\ln(v)}{v} dv = \frac{1}{8}(\ln x)^2$

Et par conséquent : $\forall\, x \geq 1$,
$$F(1) + \frac{1}{16}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) + \frac{1}{8}(\ln x)^2$$

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $0 \leq F(1) \leq \frac{1}{2}$

Alors $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

D'autres parts : $\forall\, x \geq 1,$

$\frac{F(1)}{x} + \frac{1}{16}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{F(1)}{x} + \frac{1}{8}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(1)}{x} = 0$

Alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

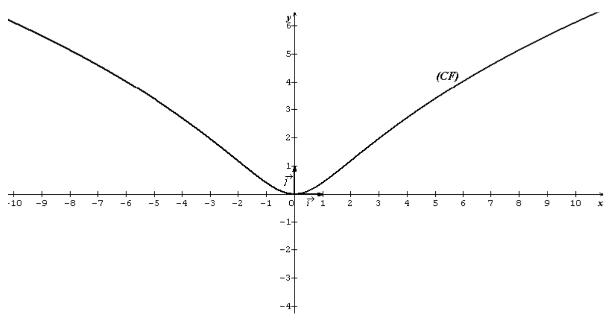
<u>Interprétation graphique</u>

La courbe de F admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

4. <u>Tableau de variations de F</u>

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$F'(x)$	$+$
$F(x)$	$0 \nearrow +\infty$

F étant une fonction paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées



PROBLEME 48

PARTIE A

$g(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{2};\ D_g =]0;\ +\infty[$

1. **Dérivée**

$$\boldsymbol{g'(x) = 1 + \frac{1}{2x}} > 0\ \forall\ x \in \boldsymbol{]0;\ +\infty[}$$

On en déduit que :

Sur $]0;\ +\infty[$, g est croissante

Tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} \boldsymbol{g(x)} = -\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} x - 1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$

$$\lim_{x\to +\infty} \boldsymbol{g(x)} = +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} x - 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

2. $g(1) = 0$

Déduction :

g étant croissante et $g(1) = 0$ alors :

$$\forall\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{]0;\ 1[,\ g(x) < 0}$$
$$\forall\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{]1;\ +\infty[,\ g(x) > 0}$$

PARTIE B

$f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}};\ D_f =]0;\ +\infty[$

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \ln x$

$$\lim_{x\to 0^+} \boldsymbol{f(x)} = +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$

$$\lim_{x\to +\infty} \boldsymbol{f(x)} = +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \end{cases}$

2. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{x}\times\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\times \ln x}{2x}$

$f'(x) = \frac{2x - 2 + \ln x}{4x\sqrt{x}} = \frac{x - 1 + \frac{\ln x}{2}}{2x\sqrt{x}}$

Or $g(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{2}$

$$\textbf{D'où } \boldsymbol{f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}}$$

3. $\forall\ x \in]0;\ +\infty[, 2x\sqrt{x} > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$

Par conséquent :

$\forall\ x \in]0;\ 1[, f'(x) < 0$

$\forall\ x \in]1;\ +\infty[, f'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $]0;\ 1[, f$ est croissante

Sur $]1;\ +\infty[, f$ est décroissante

Tableau de variation de f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{[f(x) - \sqrt{x}]} = \lim\limits_{x\to +\infty} -\boldsymbol{\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}} = \boldsymbol{0}$

Déduction
Au voisinage de $+\infty$, $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}_0)$ sont asymptotes

5. $f(x) - \sqrt{x} = -\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

$\forall\ x \in]0;\ +\infty[, 2\sqrt{x} > 0$

Alors le signe de $f(x) - \sqrt{x}$ dépend de celui de $-\ln x$.

$-\ln x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

Par conséquent :

$\forall\ x \in]0;\ 1[, f(x) - \sqrt{x} > 0$

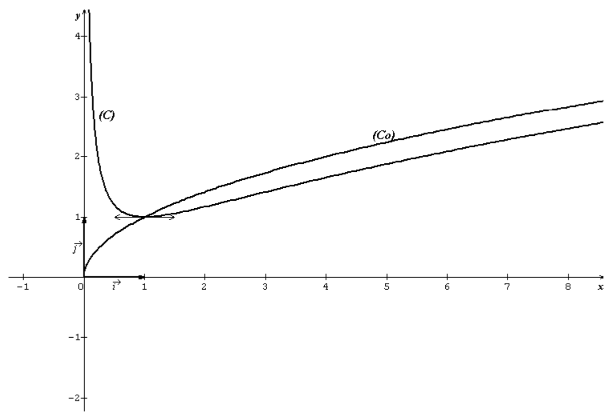
$\forall\ x \in]1;\ +\infty[, f(x) - \sqrt{x} < 0$

On en déduit que :

Sur $]0;\ 1[$, $(\mathcal{C})$ est au dessus de $(\mathcal{C}_0)$

Sur $]1;\ +\infty[$, $(\mathcal{C})$ est en dessous de $(\mathcal{C}_0)$

6. Tracer de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}_0)$



PARTIE C

$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right); n > 0$

1. $J = \int_1^2 f(x)dx$

a. Interprétation géométrique

J est l'aire en unité d'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

b. Calcul de $\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$

Intégration par parties

$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$

$\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx = \left[\sqrt{x}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx = \left[\sqrt{x}\ln x - 2\sqrt{x}\right]_1^2$

$$\boxed{\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx = 2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2}\ln 2}$$

c. $J = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \sqrt{x}dx - \int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$

$J = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$

$$\boxed{J = \frac{10\sqrt{2}-8}{3} - \sqrt{2}\ln 2}$$

2. Démonstration par récurrence

Soit $k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n-1$

On sait que f est croissante sur $[1; +\infty[$

Vérifions la propriété au rang 1

Pour $n = 1, k = 0$ et on a :

$\forall x \in [1;2], f(1) \leq f(x) \leq f(2)$

Et d'après l'inégalité de la moyenne on a : $f(1) \leq \int_1^2 f(x)\,dx \leq f(2)$

Par conséquent :

$f\left(1+\frac{0}{1}\right) \leq \int_1^2 f(x)\,dx \leq f\left(1+\frac{1}{1}\right)$

$\forall n > 0$, supposons que $\forall k$, $0 \leq k \leq n-1$,

$f\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_1^2 f(x)dx \leq f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$

et montrons que $\forall k,\ 0 \leq k \leq n$

$f\left(1+\frac{k}{n+1}\right) \leq \int_1^2 f(x)dx \leq f\left(1+\frac{k+1}{n+1}\right)$

En effet : $\forall k,\ 0 \leq k \leq n$

Si $0 \leq k \leq n-1$, on a par hypothèse

$f\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_1^2 f(x)dx \leq f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$

Or $1 \leq 1 + \frac{k}{n+1} \leq 1 + \frac{k}{n}$

D'où l'inégalité $(\mathbf{1})$:

$f\left(1+\frac{k}{n+1}\right) \leq f\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_1^2 f(x)dx$

D'autres parts :

Si $1 \leq k \leq n$, alors $0 \leq k-1 \leq n-1$ et on a par hypothèse

$f\left(1+\frac{k-1}{n}\right) \leq \int_1^2 f(x)dx \leq f\left(1+\frac{k}{n}\right)$

Or $1 \leq 1 + \frac{k}{n} \leq 1 + \frac{k+1}{n+1}$

D'où l'inégalité $(\mathbf{2})$ **:**

$\int_1^2 f(x)dx \leq f\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq f\left(1+\frac{k+1}{n+1}\right)$

Les inégalités $(\mathbf{1})$ et $(\mathbf{2})$ montrent que

$\forall k,\ 0 \leq k \leq n$,

$f\left(1+\frac{k}{n+1}\right) \leq \int_1^2 f(x)dx \leq f\left(1+\frac{k+1}{n+1}\right)$

Si $\forall k,\ 0 \leq k \leq n-1$,

$f\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_1^2 f(x)dx \leq f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$

On peut donc conclure que :

$\forall \boldsymbol{n} > 0$ **et** $\forall \boldsymbol{k},\ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{n} - \mathbf{1},$

$$\boldsymbol{f\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_1^2 f(x)dx \leq f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)}$$

3. On déduit de ce qui précède que :

$\frac{1}{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\int_1^2 f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq n \times \frac{1}{n}\int_1^2 f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$

Or $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(1+\frac{n}{n}\right)$; $\int_1^2 f(x)dx = J$ et

$U_n = \frac{1}{n} f\left(1+\frac{0}{n}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$

D'où on a bien :

$$\boldsymbol{U_n - \frac{f(2)}{n} \leq J \leq U_n - \frac{f(1)}{n}}$$

4. $U_n - \frac{f(2)}{n} \leq J \leq U_n - \frac{f(1)}{n}$

$\Leftrightarrow -\frac{f(2)}{n} \leq J - U_n \leq -\frac{f(1)}{n}$

$\Leftrightarrow -J - \frac{f(2)}{n} \leq -U_n \leq -J - \frac{f(1)}{n}$

Donc $\boldsymbol{J + \frac{f(1)}{n} \leq U_n \leq J + \frac{f(2)}{n}}$

Déduction

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(1)}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(2)}{n} = 0$

Alors en passant à la limite, on a :

$J \leq \lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq J$

On en déduit que : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = J}$

PROBLEME 49

PARTIE A

$f_1(x) = (x+1)e^{-x}$,

$f_2(x) = -xe^{-x}$,

$f_3(x) = (x-1)e^{-x}$

$D_{f_1} = D_{f_2} = D_{f_3} = \mathbb{R}$

1.

a. Dérivée

$$\boldsymbol{f_1'(x) = -xe^{-x}}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$

Alors le signe de $f_1'(x)$ dépend de celui de $-x$.

Par conséquent :

$\forall\, x \in]-\infty; 0[, f_1'(x) > 0$

$\forall\, x \in]0; +\infty[, f_1'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 0[$, f_1 est croissante

Sur $]0; +\infty[$, f_1 est décroissante

b. Calcul des limites

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0 \end{cases}$

c. <u>Tableau de variations de f_1</u>

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2. Dérivée

$f_2'(x) = (x-1)e^{-x}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$

Alors le signe de $f_2'(x)$ dépend de celui de $x - 1$.

Par conséquent :

$\forall\, x \in]-\infty; 1[, f_2'(x) < 0$

$\forall\, x \in]1; +\infty[, f_2'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 1[$, f_2 est décroissante

Sur $]1; +\infty[$, f_2 est croissante

Tableau de variation de f_2

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_2{}'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e^{-1}	$\nearrow$	0

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} f_1(x) = +\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f_1(x) = 0 \text{ car } \lim_{x\to +\infty} xe^{-x} = 0}$$

3.

a. Dérivée

$$\boxed{f_3'(x) = (2-x)e^{-x}}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$

Alors le signe de $f_1'(x)$ dépend de celui de $2 - x$.

Par conséquent :

$\forall\, x \in\,]-\infty; 2[, f_3'(x) > 0$

$\forall\, x \in\,]2; +\infty[, f_3'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 2[$, f_3 est croissante

Sur $]2; +\infty[$, f_3 est décroissante

b. Calcul des limites

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} f_3(x) = -\infty}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} (x-1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f_3(x) = 0}$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x} = 0 \end{cases}$

c. Tableau de variation de f_3

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f_3{}'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_3(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	0

4. Position de $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$

$f_1(x) - f_2(x) = (2x+1)e^{-x}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$

Alors le signe de $f_1(x) - f_2(x)$ dépend de celui de $2x + 1$.

Par conséquent :

$\forall\, x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[, f_1(x) - f_2(x) < 0$

$\forall\, x \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[, f_1(x) - f_2(x) > 0$

> **On en déduit que :**
> **Sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$,**
> **$(\mathcal{C}_1)$ est en dessous de $(\mathcal{C}_2)$**
> **Sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$,**
> **$(\mathcal{C}_1)$ est au dessus de $(\mathcal{C}_3)$**

Positions de $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_3)$

$f_1(x) - f_3(x) = 2e^{-x} > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

> **Alors sur $\mathbb{R}$,**
> **$(\mathcal{C}_1)$ est au dessus de $(\mathcal{C}_3)$**

Positions de $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$

$f_2(x) - f_3(x) = (1-2x)e^{-x}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$

Alors le signe de $f_2(x) - f_3(x)$ dépend de celui de $1 - 2x$.

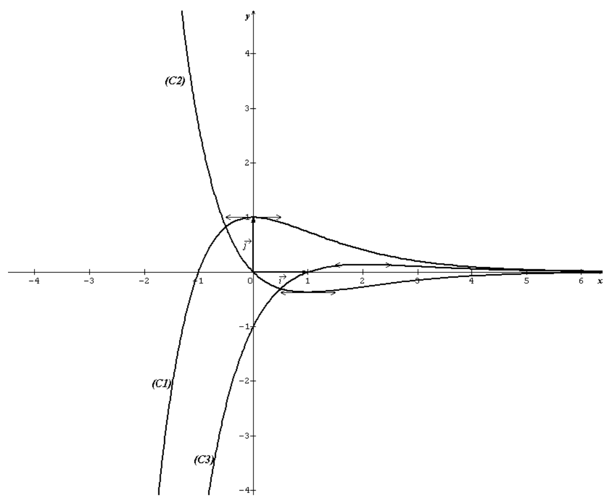
Par conséquent :

$\forall\, x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[, f_2(x) - f_3(x) > 0$

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[, f_2(x) - f_3(x) < 0$

> **On en déduit que :**
> **Sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$,**
> **$(\mathcal{C}_2)$ est au dessus de $(\mathcal{C}_3)$**
> **Sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$,**
> **$(\mathcal{C}_2)$ est en dessous de $(\mathcal{C}_3)$**

5. Tracer de $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$



PARTIE B

Soit $\lambda > -1$

1. $f_1'(x) + f_1(x) = -xe^{-x} + (x+1)e^{-x}$

$$\boldsymbol{f_1'(x) + f_1(x) = e^{-x}}$$

Alors f_1 est une solution de l'équation différentielle $y' + y = e^{-x}$

Déduction

$f_1(x) = e^{-x} - f_1'(x)$

On en déduit qu'une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$ est par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{F_1(x) = -e^{-x} - f_1(x) = -(x+2)e^{-x}}$$

2. $\mathcal{A}(\lambda) = ua \times \int_{-1}^{\lambda} f_1(x)\,dx$

$\int_{-1}^{\lambda} f_1(x)\,dx = [-(x+2)e^{-x}]_{-1}^{\lambda}$

$\int_{-1}^{\lambda} f_1(x)\,dx = e - (\lambda+2)e^{-\lambda}$

$ua = 4\ cm^2$

Donc $\mathcal{A}(\lambda) = 4[e - (\lambda+2)e^{-\lambda}]\ cm^2$

Déduction

$$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{-\lambda} = 0 \\ \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda e^{-\lambda} = 0 \end{cases}$$

Alors $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 4e$

3. $\mathcal{B}(\lambda) = ua \times \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} \big(f_3(x) - f_2(x)\big)\,dx$

$\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} \big(f_3(x) - f_2(x)\big)\,dx$

$= \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} (2x-1)e^{-x}\,dx$

<u>**Intégration par parties**</u>

$$\begin{cases} u(x) = 2x-1 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} \big(f_3(x) - f_2(x)\big)\,dx$

$= [-(2x-1)e^{-x}]_{\frac{1}{2}}^{\lambda} + 2\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} e^{-x}\,dx$

$= [-(2x+1)e^{-x}]_{\frac{1}{2}}^{\lambda}$

$\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} \big(f_3(x) - f_2(x)\big)\,dx$

$= 2e^{-\frac{1}{2}} - (2\lambda+1)e^{-\lambda}$

$ua = 4\ cm^2$

Donc

$$\boldsymbol{\mathcal{B}(\lambda) = 4\left[2e^{-\frac{1}{2}} - (2\lambda+1)e^{-\lambda}\right] cm^2}$$

Déduction

$$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{-\lambda} = 0 \\ \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda e^{-\lambda} = 0 \end{cases}$$

Alors $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathcal{B}(\lambda) = 8e^{-\frac{1}{2}}$

PARTIE C

$f(x) = f_1(x) - f_3(x) = 2e^{-x}\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

1. $U_n = \int_{n\ln 2}^{(n+1)\ln 2} f(x)\,dx$

$U_n = [-2e^{-x}]_{n\ln 2}^{(n+1)\ln 2}$

$$\boldsymbol{U_n = \frac{1}{2^n}}$$

2. $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$

$$\boldsymbol{S_n = 1 - \frac{1}{2^n}}$$

En passant à la limite, on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$

Car $0 < \frac{1}{2} < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

Alors la suite (S_n) converge vers 1

PROBLEME 50

$f(x) = e^{-x}\sin x\,;\ D_f = \mathbb{R}$

PARTIE A

1.

a. Dérivée

$f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$

Vérification

$f'(x) = \sqrt{2}e^{-x}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$

$= \sqrt{2}e^{-x}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$

Donc $f'(x) = \sqrt{2}e^{-x}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b. $x \in [0; 2\pi] \Leftrightarrow \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right]$

Par conséquent :

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ou $x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

$\boldsymbol{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0\ \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}; 2\pi\right]}$

Déduction

$\forall x \in [0; 2\pi], \sqrt{2}e^{-x} > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

D'après ce qui précède :

$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], f'(x) > 0$

$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right], f'(x) < 0$

$\forall x \in \left[\frac{5\pi}{4}; 2\pi\right], f'(x) > 0$

c. Tableau de variation de f sur $[0; 2\pi]$

Sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et sur $\left[\frac{5\pi}{4}; 2\pi\right]$,

f est croissante

Sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right], f$ est décroissante

Tableau de variation de f

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}$	↗	0

Tangente à $(\mathcal{C})$ en 0 et 2π

$(T_0): y = x$

$(T_{2\pi}): y = e^{-2\pi}(x - 2\pi)$

2.

a. <u>Points de rencontre de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}_1)$</u>

$(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}_1)$

$\Leftrightarrow \sin x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Alors sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, $(\mathcal{C})$ rencontre $(\mathcal{C}_1)$ aux points d'abscisse $\frac{\pi}{2}$

<u>Points de rencontre de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}_2)$</u>

$(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}_2)$

$\Leftrightarrow \sin x = -1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Alors sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, $(\mathcal{C})$ rencontre $(\mathcal{C}_2)$ au point d'abscisse $\frac{3\pi}{2}$

b. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}}\cos\frac{3\pi}{4} = -e^{-\frac{\pi}{2}}$ et

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2} = e^{-\frac{\pi}{2}}$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}$
Alors $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}_1)$ ont une même tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$

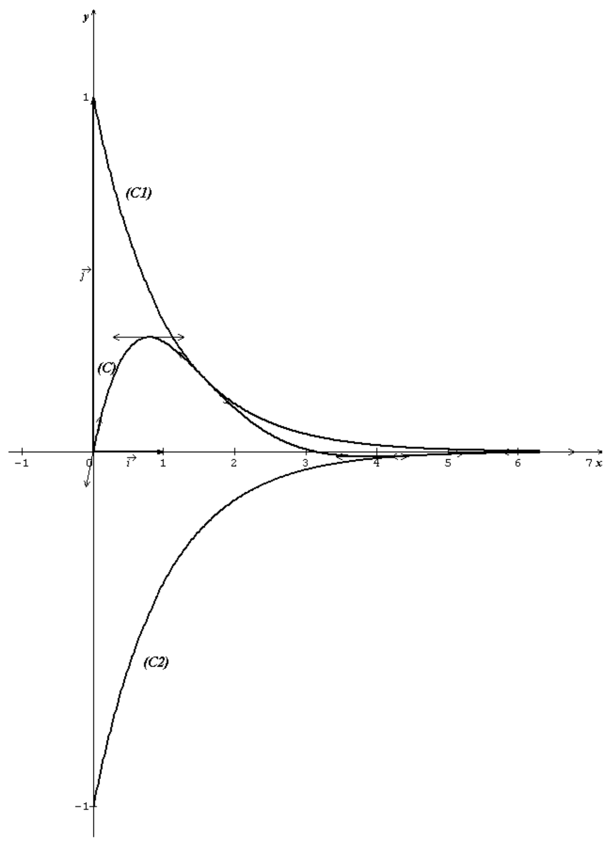
D'autres parts

$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{2}}\cos\frac{7\pi}{4} = e^{-\frac{3\pi}{2}}$ et

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{-\frac{3\pi}{2}}\sin\frac{3\pi}{2} = -e^{-\frac{3\pi}{2}}$

$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{-\frac{3\pi}{2}}$ et $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{3\pi}{2}}$
Alors $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}_2)$ ont une même tangente au point d'abscisse $\frac{3\pi}{2}$

c. Représentons $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$



3. $\Phi(x) = e^{-2\pi} f(x-2\pi);\ D_\Phi = \mathbb{R}$
$= e^{-2\pi}[e^{-x+2\pi}\sin(x-2\pi)]$
$= e^{-x}\sin(x-2\pi)$
$\Phi(x) = e^{-x}\sin x$
Car $\sin(x+2k\pi) = \sin x\ \forall\, k \in \mathbb{Z}$

On a donc $\boldsymbol{\Phi(x) = f(x)}$ et $\boldsymbol{D_\Phi = D_f}$
Alors les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ coïncident

PARTIE B

1.

a. On sait que :
$f''(x) = -2e^{-x}\cos x$
$f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$
$f(x) = e^{-x}\sin x$
Par conséquent :
$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$

On conclut donc que f est solution de l'équation différentielle : $\boldsymbol{y'' + 2y' + 2y = 0}$

Déduction
$2f(x) = -2f'(x) - f''(x)$

D'où $\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{2}\left(2f'(x) + f''(x)\right)}$

b. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{x \mapsto -\frac{1}{2}\left(2f(x) + f'(x)\right)}$

c. $F(x) = \int_0^x f(t)dt$
$F(x) = \left[-\frac{1}{2}\left(2f(t) + f'(t)\right)\right]_0^x$
$F(x) = \left[-\frac{e^{-t}}{2}(\cos t + \sin t)\right]_0^x$

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x)}$$

2. $B_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt\,; k \in \mathbb{N}$
Soit $S_n = B_0 + B_1 + \cdots + B_n$

a. $S_n = \int_0^{\pi} f(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)dt + \cdots + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)dt$
D'après la relation de Chasles :
$S_n = \int_0^{(n+1)\pi} f(t)dt$
Or $\int_0^x f(t)dt = F(x)$

D'où $\boldsymbol{S_n = F\left((n+1)\pi\right)}$

b. Déduction
$S_n = \frac{1}{2} - \frac{e^{-(n+1)\pi}}{2}(\cos(n+1)\pi + \sin(n+1)\pi)$
$\Leftrightarrow S_n = \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{e^{-(n+1)\pi}}{2}$
Car $\cos(n+1)\pi = (-1)^{n+1} = -(-1)^n$
$\Leftrightarrow \left|S_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{e^{-(n+1)\pi}}{2}$
$\Leftrightarrow \left|S_n - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{e^{-n\pi}}{2}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{-n\pi}}{2} = 0$ car $0 < e^{-\pi} < 1$

Alors la suite (S_n) admet une limite et $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}}$

3.

a. $f(t) = e^{-t}\sin t$
$\forall\, t \in \mathbb{R}, e^{-t} > 0$
Alors le signe de $f(t)$ dépend de celui de $\sin t$
$\sin t \geq 0$
$\Leftrightarrow t \in [2k\pi;\ (2k+1)\pi], k \in \mathbb{Z}$
$\sin t \leq 0$
$\Leftrightarrow t \in [(2k+1)\pi;\ 2(k+1)\pi], k \in \mathbb{Z}$
Par conséquent :
$\forall\, t \in [k\pi;\ (k+1)\pi]$
On a : $f(t) \geq 0$ si k est pair
$\Rightarrow \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt \geq 0$
$\Rightarrow B_k \geq 0$

Et on a : $f(t) \leq 0$ si k est impair

$\Longrightarrow \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt \leq 0$

$\Longrightarrow B_k \leq 0$

On conclut donc que :
$B_k \geq 0$, si k est pair
$B_k \leq 0$, si k est impair

b. $B_0 = \int_0^{\pi} f(t)dt = F(\pi)$

$$\boldsymbol{B_0 = \frac{1 + e^{-\pi}}{2}}$$

$B_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt$

$= \int_0^{(k+1)\pi} f(t)dt - \int_0^{k\pi} f(t)dt$

$= F\big((k+1)\pi\big) - F(k\pi)$

$= (-1)^k \frac{e^{-(k+1)\pi}}{2} + (-1)^k \frac{e^{-k\pi}}{2}$

$B_k = (-1)^k e^{-k\pi}\left(\frac{1+e^{-\pi}}{2}\right)$

On a bien : $B_k = (-1)^k e^{-k\pi} B_0$

c. $T_n = |B_0| + |B_1| + \cdots + |B_n|$

On sait que :

$|B_k| = e^{-k\pi} B_0$ car $|(-1)^k| = 1$

Par conséquent :

$T_n = B_0 + e^{-\pi}B_0 + \cdots + e^{-n\pi}B_0$

$= B_0(1 + e^{-\pi} + \cdots + e^{nk\pi})$

$= B_0 \times \frac{1- e^{-(n+1)\pi}}{1 - e^{-\pi}}$

Donc

$$\boldsymbol{T_n = \frac{B_0}{1 - e^{-\pi}}\left(1 - e^{-(n+1)\pi}\right)}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-(n+1)\pi} = 0$ car $0 < e^{-\pi} < 1$

Alors T_n admet une limite lorsque n tend vers l'infini et on a :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{B_0}{1 - e^{-\pi}} = \frac{1 + e^{-\pi}}{2(1 - e^{-\pi})}}$$

d. $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $T = \lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

Vérification

$\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = 2 + \frac{2(1 - e^{-\pi})}{1+ e^{-\pi}} = \frac{4}{1+ e^{-\pi}}$

Or $B_0 = \frac{1 + e^{-\pi}}{2}$

D'où on a bien :

$$\boldsymbol{\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = \frac{2}{B_0}}$$