

**Fonction irrationnelle**  
**Etude d'une suite récurrente**

**PROBLÈME 01**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$  ; (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  et  $(\Delta)$  la droite d'équation  $y = -2x$ .

**PARTIE A**

1. Préciser l'ensemble de définition de  $f$ .
2.
  - a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
  - b. Montrer que pour tout nombre réel  $x, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$   
En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3.
  - a. Montrer que pour  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = 0$ .
  - b. Montrer que pour tout réel  $x, f(x) > 0$ . En déduire le signe de  $(f(x) + 2x)$
  - c. Interpréter graphiquement tous ces résultats.
4.
  - a. Montrer que pour tout réel  $x, f'(x) = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$
  - b. Etudier le sens de variations de  $f$  puis dresser son tableau de variations
  - c. Déduire de ce qui précède que  $f$  définit une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $I$  que l'on précisera. Expliciter  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de  $I$ .
5. Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
6. Tracer  $(\Delta)$ , (T) et (C) (on prendra 1cm pour unité).
7. Tracer la courbe  $(\Gamma)$  de  $f^{-1}$  dans le même repère que (C).

**PARTIE B**

1. Démontrer que  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  est l'unique solution de l'équation  $f(x) = x$
2. Démontrer que pour tout  $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right], \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{4}$  et pour tout  $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right], |f'(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$ .
3. On considère la suite  $(U_n)$  définie par  $U_0 = \frac{1}{2}$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$  pour tout entier  $n$ .
  - a. Démontrer que pour tout entier  $n, U_n \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$
  - b. Démontrer que pour tout entier  $n, \left|U_{n+1} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}} \left|U_n - \frac{\sqrt{3}}{3}\right|$
  - c. En déduire que  $\left|U_n - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$
  - d. Démontrer que la suite  $(U_n)$  converge et calculer sa limite.

**PROBLEME 02**

**PARTIE A**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln x - x + 1 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2cm

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0 puis interpréter graphiquement les résultats obtenus
2. Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation sur  $[0; +\infty[$
3. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse  $e$
4. Tracer  $(T)$  et  $(\mathcal{C})$ . On admet que  $(\mathcal{C})$  est au dessus de  $(T)$

**PARTIE B**

On désigne par  $(\Gamma)$  la courbe de la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$g(x) = 2 - f(x).$$

1. Etudier les positions relatives de  $(\mathcal{C})$  et  $(\Gamma)$
2. Sans étudier  $g$  tracer  $(\Gamma)$  dans le même repère que  $(\mathcal{C})$ . Justifier
3. Soit  $\lambda$  un réel tel que  $0 < \lambda < 1$ . Calculer l'aire  $\mathcal{A}(\lambda)$  en  $\text{cm}^2$  du domaine plan délimité par  $(\mathcal{C})$ ,  $(\Gamma)$  et les droites d'équations  $x = \lambda$  et  $x = e$
4. Calculer  $\mathcal{A} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{A}(\lambda)$  et interpréter graphiquement ce résultat

**PARTIE C**

1. Dresser le tableau de variation de  $g$  sur  $[0; +\infty[$ .

En déduire que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$

2.
  - a. Vérifier que  $\alpha$  est dans l'intervalle  $I = [3; 4]$
  - b. Montrer pour tout réel  $x > 0$ ;  $g(x) = 0$  si et seulement si  $e^{1+\frac{1}{x}} = x$ .

Qu'en déduit-on ?

3. Soit  $\Phi$  la fonction définie sur  $I$  par  $\Phi(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$

- a. Etudier les variations de  $\Phi$
- b. Montrer que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $\Phi(x) \in I$
- c. Montrer que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $|\Phi'(x)| \leq \frac{4}{9}$

4. Soit  $(U_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \Phi(U_n) \end{cases}$

- a. Montrer par récurrence que pour tout entier  $n$ ,  $U_n$  appartient à l'intervalle  $I$
- b. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9} |U_n - \alpha|$ .

En déduire que pour toute entier naturel  $n$  on a :  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$

- c. Démontrer que la suite  $(U_n)$  est convergente et préciser sa limite
- d. Déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $U_n$  soit une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près

**PROBLEME 03**

**PARTIE A**

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par:

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$$

On note  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 4 cm

1. Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0 ; que peut-on en conclure pour la courbe  $(\mathcal{C})$ ?
2. Montrer que pour  $x > 0$ ;  $f'(x) = \left(\frac{1-2x}{2x}\right) \times f(x)$ . En déduire le sens de variations de  $f$ .
3. Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Que peut-on en conclure pour la courbe  $(\mathcal{C})$  de  $f$  ?
4. Tracer soigneusement la courbe  $(\mathcal{C})$ .
5. On considère le domaine  $\mathcal{D}$  délimité par la courbe  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \lambda$  où  $\lambda$  est un réel positif.

a. Calculer le volume  $\mathcal{V}(\lambda)$  en  $\text{cm}^3$  du solide de révolution engendré par rotation de  $\mathcal{D}$  autour de l'axe des abscisses.

b. Déterminer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(\lambda)$

**PARTIE B**

Le but de cette partie est la résolution de l'équation  $f(x) = x$  sur  $]0 ; +\infty[$

1. On pose  $g(x) = \ln x + 2x$ 
  - a. Montrer que sur  $]0 ; +\infty[$ , les équations  $f(x) = x$  et  $g(x) = 0$  sont équivalentes.
  - b. Étudier les variations de  $g$  et en déduire que l'équation  $g(x) = 0$  admet une seule solution sur  $]0 ; +\infty[$  que l'on notera  $\alpha$ .
  - c. Montrer que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $[0,4 ; 0,5]$ .
2. En utilisant la courbe  $(\mathcal{C})$  donner une interprétation de  $\alpha$
3. a. Montrer que si  $x \in [0,4 ; 0,5]$  on a  $f(x) \in [0,4 ; 0,5]$ .
  - b. Montrer que pour  $x \in [0,4 ; 0,5]$ , on a  $|f'(x)| \leq \frac{1}{8}$
4. On définit la suite  $(U_n)$  par  $U_0 = 0,4$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = f(U_n)$ 
  - a. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_n \in [0,4 ; 0,5]$ .
  - b. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{8} |U_n - \alpha|$
  - c. En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $|U_n - \alpha| \leq 0,1 \times \left(\frac{1}{8}\right)^n$
  - d. En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente et préciser sa limite.
5. A partir de quelle valeur  $n_0$  de  $n$  est-on sûr que  $U_n$  représente une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-5}$  près?

**PARTIE C**

Soit  $F$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $F(x) = \int_0^x \sqrt{t} \cdot e^{-t} dt$

On ne cherchera pas à calculer  $F$ .

1. Calculer  $F'(x)$  pour tout  $x \geq 0$ . En déduire le sens de variation de  $F$ .
2. a. Montrer que pour  $t \geq 0$  on a :  $\sqrt{t} \leq t + \frac{1}{4}$ 
  - b. En déduire que  $F(x) \leq \int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) \cdot e^{-t} dt$
  - c. Calculer  $\int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) \cdot e^{-t} dt$
  - d. En déduire que  $F(x) \leq \frac{5}{4}$

**Fonction logarithme népérien**  
**Calcul d'aire – Equations différentielles**

**PROBLEME 04**

Toutes les représentations graphiques demandées seront effectuées sur la même figure, dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 4 cm).

**PARTIE A**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. a. Etudier la continuité de  $f$  en 0  
b.  $f$  est-elle dérivable en 0 ?  
c. Trouver la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . On pourra poser  $X = \frac{2}{x}$  ( $x > 0$ )
2. a. Pour  $x$  appartenant à  $]0, +\infty[$ , calculer  $f'(x)$  et vérifier que  $f''(x) = -\frac{4}{x(x+2)^2}$   
b. Étudier le sens de variation de  $f'$  et trouver la limite de  $f'(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . En déduire le signe de  $f'(x)$ .  
c. Dresser le tableau des variations de  $f$
3. On appelle (C) la représentation graphique de  $f$  dans le plan (P) rapporté au repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Tracer (C) en indiquant la tangente au point O et le point A d'abscisse 2.
4. a. Pour  $x$  appartenant à  $]0, +\infty[$ , résouds l'équation  $f(x) = x$   
b. Tracer soigneusement la courbe (C') de la réciproque  $f^{-1}$  de  $f$  sur  $]0, +\infty[$

**PARTIE B**

Soit  $\alpha$  un réel tel que  $0 < \alpha \leq 2$ . On désigne par  $\mathcal{D}$  le domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = \alpha$  et  $x = 2$ .

1. A l'aide d'une intégration par parties Calculer l'aire  $\mathcal{A}(\alpha)$  de  $\mathcal{D}$  en unité d'aire. On pourra remarquer que  $\frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$
2. Calculer  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{A}(\alpha)$ . Interpréter graphiquement ce dernier résultat

**PARTIE C**

Soit  $u$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $u(x) = \frac{2x}{x+2}$

On se propose de déterminer l'ensemble (E) des fonctions  $g$ , définies et dérivables sur  $]0, +\infty[$ , et possédant la propriété (P) suivante :

$$g(x) - xg'(x) = u(x)$$

1. Vérifier que la fonction  $f$  possède la propriété (P)
2.  $g$  étant une fonction définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$ , on pose pour tout  $x$  appartenant à  $]0, +\infty[$ ,  $G(x) = \frac{g(x)}{x}$ .

Montrer que  $g$  possède la propriété (P) si et seulement si : pour tout  $x$  appartenant

$$\text{à } ]0, +\infty[, G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$$

3. En déduire l'ensemble (E).

**Suites de fonctions exponentielles**  
**Calcul d'aire - Etude de suites numériques**

**PROBLEME 05**

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{e^x+1}$   
 On désigne par  $(C_n)$  la courbe représentative de  $f_n$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2cm). On considère en outre la suite  $(U_n)$  définie par :  $U_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

**PARTIE A**

**Étude de la fonction  $f_n$**

1. On suppose  $n = 0$ 
  - a. Étudier les limites de  $f_0$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
  - b. Étudier le sens de variation de  $f_0$  puis dresser son tableau de variations.
  - c. Montrer que le point  $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$  est centre de symétrie de  $(C_0)$
  - d. Tracer la courbe  $(C_0)$  en précisant sa tangente en  $I$ .

2. On suppose que  $n \geq 1$

- a. Étudier les limites de  $f_n$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- b. Montrer que  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et vérifier que, pour tout  $x$ , on a :
 
$$f_n'(x) = \frac{-e^{-nx}(n+(n+1)e^x)}{(e^x+1)^2}.$$
- c. Étudier le sens de variation de  $f_n$  puis dresser son tableau de variations.
- d. Vérifier que le point  $I$  appartient à toutes les courbes  $(C_n)$ .
- e. Tracer  $(C_1)$  dans le même repère que  $(C_0)$ , en précisant sa tangente en  $I$ .

3. Interpréter géométriquement  $U_n$  puis démontrer que  $U_0 = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$ .

On remarquera que  $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

**PARTIE B**

**Étude de la suite  $(U_n)$**

Dans cette partie,  $n$  et  $p$  désignent des entiers naturels non nuls.

1. Étude d'une suite auxiliaire  $(V_n)$

Pour tout  $n$ , on pose  $V_n = \int_0^1 e^{-nx} dx$

- a. Calculer  $V_n$ .
- b. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nV_n$

2. Comparaison de  $(U_n)$  à  $(V_n)$

- a. Établir que, pour tout  $x$  appartenant à  $[0; 1]$ , on a :  $2 \leq e^x + 1 \leq 2e^x$ .
- b. En déduire que, pour tout  $n$ , on a :  $\frac{1}{2}V_{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{2}V_n$
- c. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n$ .

3. Étude d'une suite associée à  $(U_n)$

On pose :  $S_n = \sum_{p=1}^n U_p$  et  $t_n = \sum_{p=1}^n V_p$

- a. Montrer que :  $0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{1}{e-1}$ . (On observera que, pour tout  $p$ , on a :  $\frac{e^{-p}}{p} \leq e^{-p}$ )

- b. En utilisant l'inégalité de la moyenne sur l'intervalle  $[p; p+1]$ , montrer qu'on a :

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{p} \text{ et par suite } \frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln p \leq \frac{1}{p}$$

- c. En déduire que, pour tout  $n$ , on a :  $\ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq \ln n + 1$

- d. Montrer, en utilisant a. et c. que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$ , puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_n}{\ln n}$ .

- e. Que peut-on en déduire pour  $S_n$ ?

**Fonction exponentielle**  
**Calcul d'aires - Etude d'une suite numérique**

**PROBLEME 06**

**PARTIE A**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (2x + 1)e^{-2x} + 1$

1. Calculer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et  $+\infty$
2. Etudier les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$
3. En déduire que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  et que  $-1 < \alpha < 0$
4. Etudier le signe de  $g(x)$  pour tout réel  $x$

**PARTIE B**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (1 + x)e^{-2x} + 1 - x$

On appelle  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 2 cm

1. Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$
2. Démontrer que la droite  $(\Delta): y = -x + 1$  est une asymptote à la courbe  $(\mathcal{C})$  en  $+\infty$ .  
Etudier la position de  $(\mathcal{C})$  par rapport à  $(\Delta)$
3. Démontrer que  $f'(x) = -g(x)$ . En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  puis dresser son tableau de variations
4. Établir que l'équation  $f(x) = 0$  admet sur  $[0; +\infty[$  une solution et une seule. On note  $\beta$  cette solution. Justifier l'encadrement  $1 \leq \beta \leq \frac{3}{2}$
5. Démontrer que  $f(-\beta) = 0$ . Que peut-on en déduire ?
6. Tracer  $(\Delta)$  et  $(\mathcal{C})$ . On prendra  $\alpha = -0,64$  et  $f(\alpha) = 2,92$

**PARTIE C**

Soit  $t$  un réel strictement supérieur à  $-1$ .

On désigne par  $\mathcal{A}(t)$  l'aire en  $\text{cm}^2$  du domaine plan délimité par la courbe  $(\mathcal{C})$  la droite  $(\Delta)$  et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = t$

1. Hachurée sur la figure le domaine plan dont l'aire en  $\text{cm}^2$  est  $\mathcal{A}(\beta)$
2. A l'aide d'une intégration par parties calculer  $\mathcal{A}(t)$  pour tout  $t > -1$
3. Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(t)$

**PARTIE D**

On considère la fonction  $h$  définie sur  $I = \left[1; \frac{3}{2}\right]$  par  $h(x) = (1 + x)e^{-2x} + 1$ .

1. Vérifier que  $\beta$  est l'unique solution de l'équation  $h(x) = x$
2. Étudier les variations de  $h$ .  
En déduire que pour tout  $x \in I$  on a  $h(x) \in I$
3. Montrer que pour  $x \in I$  on a :  $|h'(x)| \leq \frac{4}{e^2}$ .  
En déduire que pour tout  $x \in I$ ,  $|h(x) - \beta| \leq \frac{4}{e^2} |x - \beta|$
4. On définit la suite  $(U_n)$  par  $U_0 = 1$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = h(U_n)$ 
  - a. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_n \in I$
  - b. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{4}{e^2} |U_n - \beta|$
  - c. En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $|U_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^{2n}$
  - d. Montrer que la suite  $(U_n)$  est convergente et préciser sa limite.
  - e. A partir de quelle valeur  $n_0$  de  $n$  est-on sûr que  $U_n$  représente une valeur approchée de  $\beta$  à  $10^{-3}$  près?

**Fonctions rationnelles et fonction logarithme népérien**  
**Calcul intégral - Calcul d'aire**

**PROBLEME 07**

**PARTIE A**

1. Soit  $g$  la fonction  $x \mapsto g(x) = \frac{1+x^2}{3x^2-1}$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}$ 
  - a. Etudier les variations de  $g$  et préciser les asymptotes éventuelles de sa courbe
  - b. Tracer sa courbe représentative ( $\mathcal{C}$ ) dans un repère orthonormé d'unité 2 cm
2. Tracer dans le même repère, la courbe représentative ( $\mathcal{C}'$ ) de la fonction  $x \mapsto \ln x$  (la fonction  $\ln$  désigne le logarithme népérien). On tracera les tangentes à ( $\mathcal{C}'$ ) aux points d'abscisses respectives 1 et  $e$
3. Soit  $h$  la fonction  $x \mapsto h(x) = \ln x - g(x)$ .  
Préciser l'ensemble de définition de  $h$  et étudier ses variations.
4. Montrer qu'il existe deux réels  $x_1$  et  $x_2$  tels que :  $h(x_1) = h(x_2) = 0$   
et que l'on a :  $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$ .
5. Déterminer le signe de  $h(x)$  en fonction de  $x$ .

**PARTIE B**

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ . Calculer sa dérivée  $f'$  et montrer que :
$$f'(x) = \frac{(1-3x^2)h(x)}{(x^2+1)^3}$$
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  ainsi que les limites de  $f(x)$  et de  $\frac{f(x)}{x}$  lorsque  $x$  tend vers zéro par valeurs positives.
3. En déduire les variations de  $f$ .
4. Donner l'allure de la courbe représentative ( $\Gamma$ ) de  $f$ .  
On donne  $f(x_1) \simeq -0,31$  et  $f(x_2) \simeq 0,06$ ; unité graphique 4 cm.
5. Vérifier que :  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ;  $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{(x^2+1)}$  et en déduire une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}$  définie sur  $]0; +\infty[$ .
6. On pose, pour  $\alpha \in ]0; 1[$ ,  $J(\alpha) = \int_{\alpha}^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$ . A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $J(\alpha)$ .
7. En déduire de  $J(\alpha)$ , l'aire en  $\text{cm}^2$  du domaine limité par ( $\Gamma$ ), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = \alpha$  et  $x = 1$ . Calculer la limite de  $A(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers 0 et interpréter ce dernier résultat.

**Fonction logarithme népérien**  
**Calcul d'aire - Etude d'une suite récurrente**

**PROBLEME 08**

**PARTIE A**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$f(x) = x - 4 + \frac{1}{4}\ln|x|$$

1. Etudier les variations de  $f$  (on ne demande pas sa représentation graphique, mais on précisera les limites de  $f$  aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition)
2. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet, une solution  $\alpha$  tel que  $3 < \alpha < 4$ .
3. Dédire de ce qui précède le signe de  $f(x)$  sur chacun des intervalles  $]-\infty; 0[; ]0; \alpha[; ]\alpha; +\infty[$ .

**PARTIE B**

On considère la fonction numérique  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) = x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2\ln|x| \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $h$  en 0.
2. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^* : h'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ .
3. Etudier en utilisant A-3), le signe de  $h'(x)$ .
4. Tracer la représentation graphique  $(C_h)$  de  $h$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  et préciser la tangente à  $(C_h)$  au point de cette courbe d'abscisse 0.
5. On appelle  $\mathcal{A}(\lambda)$  l'aire en unité d'aire du domaine limité par  $(C_h)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = \lambda$ , où  $\lambda$  est un élément de  $]0; 1[$ .
  - a) Calculer  $\mathcal{A}(\lambda)$  en fonction de  $\lambda$ .
  - b)  $\mathcal{A}(\lambda)$  admet-elle une limite lorsque  $\lambda$  tend vers 0 par valeurs supérieures ? Si oui, calculer cette limite.

**PARTIE C**

On se propose de calculer une valeur approchée 0,01 près du nombre  $\alpha$  défini au A- 2)

1. Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $g(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln|x|$ 
  - a. Etudier les variations de  $g$ . Montrer que l'image par  $g$  de l'intervalle  $[3; 4]$  est contenu dans l'intervalle  $[3; 4]$ .
  - b. Montrer que  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $g(x) = x$
2. On considère la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$$
  - a. Démontrer que, pour tout  $x$ , on a :  $3 \leq U_n \leq 4$ .
  - b. Démontrer que pour tout  $x$  de  $[3; 4]$ , on a :  $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$ . En déduire que pour tout  $x$  réel de  $[3; 4]$ , on a :  $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{12}|x - \alpha|$ .
  - c. Montrer que, pour tout  $n$  :  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12}|U_n - \alpha|$  et  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n$ .
  - d. Montrer que  $\alpha$  est compris entre deux termes consécutifs de la suite  $(U_n)$ .
  - e. En déduire une valeur approchée de  $\alpha$  à 0,01 près.

## Fonction logarithme népérien

### Courbe associée - Calcul intégral - Calcul d'aire - Etude d'une suite récurrente

#### PROBLEME 09

##### PARTIE A

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $f(x) = 2 + \frac{\ln x}{x+1}$  et on désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité graphique 2cm).

- Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $g(x) = 1 + x - x \ln x$ 
  - Etudier les variations de  $g$ .
  - Prouver que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $x_0$  et que :  
 $x_0 \in ]3,5 ; 3,6[$ .
  - Déterminer le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Etudier les variations de  $f$  et montrer que  $f(x_0) = 2 + \frac{1}{x_0}$   
En déduire un encadrement de  $f(x_0)$  à  $10^{-2}$  près
  - Etudier la position de  $(\mathcal{C})$  et de la droite  $(D) : y = 2$  et construire  $(\mathcal{C})$ .
  - En déduire le tracé de la courbe  $(\Gamma)$  de la fonction  $F(x) = 2 + \frac{\ln|x|}{1+|x|}$ .  
On tracera  $(\Gamma)$  dans le même repère que  $(\mathcal{C})$ .

##### PARTIE B

- Pour tout réel  $t$  de  $[1; +\infty[$  on pose  $I(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x+1} dx$ .
  - Interpréter graphiquement  $I(t)$ .
  - Calculer  $J(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx$  où  $t \geq 1$ .
  - Calculer  $K(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$  où  $t \geq 1$ . Etudier les variations de la fonction  $t \mapsto K(t)$  sur  $[1; +\infty[$  et en déduire que  $\forall t \geq 1, 0 \leq K(t) \leq 1$ .
- Vérifier que pour tout  $x \geq 1 ; 0 \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x^2}$ .  
En déduire que  $0 \leq J(t) - I(t) \leq K(t)$ .
- Déterminer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(t)}{(\ln t)^2}$ .

##### PARTIE C

- Soit la fonction  $h$  définie sur  $[1; +\infty[$  par :  $h(x) = f(x) - x$ .
  - Etablir que  $h$  est décroissante sur  $]x_0; +\infty[$ .
  - Montrer que pour tout  $x$  de  $[1; x_0]$ ,  $0 \leq f'(x) \leq \frac{g(1)}{4}$ .
  - En déduire le sens de variation de  $h$  sur  $[1; x_0]$
- Prouver que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[1; +\infty[$  et que  $2 \leq \alpha \leq 3$ .
  - Prouver que  $\forall x \in [2; 3], f(x) \in [2; 3]$
  - Etablir que  $\forall x \in [2; 3], 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{9}$ .
  - Montre que  $\forall x \in [2; 3], |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{9}|x - \alpha|$
- Soit la suite  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ 
  - Prouver que  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [2; 3]$  et  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_n - \alpha|$
  - Montre que  $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n$
  - Déduire que la suite  $(U_n)$  converge et donner sa limite.

**PROBLEME 10**

**PARTIE A**

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  
 $f(x) = \sqrt{x} e^{1-x}$ .

Elle est dérivable sur  $]0; +\infty[$ . On note  $f'$  sa dérivée et  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Montrer que pour tout réel  $x$  strictement positif on a :  $f(x) = \frac{e}{\sqrt{x}} \times \frac{x}{e^x}$ .

En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$  et interpréter graphiquement ce résultat.

2. Pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$  ; calculer  $f'(x)$ .
3. Dédire des questions précédentes le tableau de variations de  $f$ .
4. Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$ . (unité 2cm)
5. Soit  $\mathcal{D}$  la partie du plan comprise entre la courbe  $(\mathcal{C})$  ; l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=1$ .
  - a. Hachurer le domaine  $\mathcal{D}$  sur le graphique.
  - b. Calculer en  $cm^3$  le volume du solide de révolution engendré par la rotation de  $\mathcal{D}$  autour de l'axe des abscisses. (On pourra s'aider d'une intégration par parties)

**PARTIE B**

On considère la suite  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par :

$$U_n = \int_n^{n+1} f(t) dt .$$

1. Interpréter graphiquement  $U_n$ .
2. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul et pour tout  $t$  de l'intervalle  $[n; n+1]$  ; on a :  $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$  et que  $f(n+1) \leq U_n \leq f(n)$ .
3. En déduire que la suite  $(U_n)$  est décroissante
4. Justifier la convergence de la suite  $(U_n)$  et calculer sa limite.

**PARTIE C**

On considère la fonction numérique  $F$  de la variable réelle  $x$  définie sur  $[1; +\infty[$  par :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt$$

1.
  - a. Que représente la fonction  $F$  pour  $f$ ?
  - b. En déduire  $F'(x)$  et par suite le sens de variation de  $F$ .
2.
  - a. Démontrer que pour tout réel  $t$  positif :  $(t+2) \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}$   
 (On pourra remarquer que pour tout réel  $t$  positif,  $(\sqrt{t} - \sqrt{2})^2 \geq 0$ ).
  - b. En déduire que pour réel  $x$  de l'intervalle  $[1; +\infty[$  :  $F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^x (t+2) e^{1-t} dt$ .
  - c. A l'aide d'une intégration par parties ; montrer que pour tout  $x$  de  $[1; +\infty[$  on a :  
 $\int_1^x (t+2) e^{1-t} dt = 4 - (x+3)e^{1-x}$ .
  - d. En déduire que pour tout  $x$  de  $[1; +\infty[$  ;  $0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$ .
3. On pose pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$ 
  - a. Exprimer  $S_n$  à l'aide d'une intégrale.
  - b. Montrer que la suite  $(S_n)$  est convergente.  
 On note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l$ . Donner un encadrement de  $l$

**Fonctions exponentielles et circulaire**  
**Calcul de aire-Etude d'une suite récurrente**

**PROBLEME 11**

**PARTIE A**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  avec pour unité de longueur 5cm. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^{-x} \cos x$ .

1. Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x)$  est du signe opposé de  $\cos x + \sin x$ .
2. Montrer que  $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  et étudier le sens de variation de  $f$  sur  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .
3. Tracer la courbe représentative  $(\Gamma)$  de  $f$  sur cet intervalle.  
(Préciser les coefficients directeurs des tangentes à  $(\Gamma)$  aux points d'abscisses respectives  $x = 0; x = -\frac{\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{4}; x = \frac{\pi}{2}$ )
4.
  - a. Trouver deux réels  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  
 $F(x) = (a \cos x + b \sin x)e^{-x}$  soit une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - b. Calculer l'aire du domaine limité par  $(\Gamma)$ , les droites d'équations  $x = -\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2}$  et l'axe des abscisses. Exprimer le résultat en  $\text{cm}^2$ .

**PARTIE B**

On se propose d'étudier l'intersection de la courbe  $(\Gamma)$  avec la droite  $(\Delta) : y = x$

1. Existe-t-il de point d'intersection de  $(\Gamma)$  et  $(\Delta)$  dont l'abscisse appartient à l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$  ?
2.  $\varphi$  est la fonction définie sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$  par :  $\varphi(x) = e^{-x} \cos x - x$ 
  - a. Calculer  $\varphi(0)$  et  $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .
  - b. Etudier les variations de  $\varphi$ .
  - c. Dédire de ce qui précède qu'il existe un réel unique  $\alpha$  de l'intervalle  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$  tel que  $\varphi(\alpha) = 0$  c'est-à-dire que  $f(\alpha) = \alpha$ .
  - d. On pose  $\beta = f(1) = e^{-1} \cos 1$ . Prouver d'abord l'inégalité :  $\alpha < 1$  puis en utilisant le sens de variation de  $f$  sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$  montrer l'encadrement :  $\beta < \alpha < 1$ .
3. On considère la suite  $(U_n)$  définie par son premier terme  $U_0 = 1$  et par la relation de récurrence vérifiée pour tout naturel  $n : U_{n+1} = f(U_n)$ 
  - a. Montrer par récurrence que :  $\beta \leq U_n \leq 1$
  - b. On pose  $k = |f'(\beta)|$ . En étudiant le signe de  $f''$  sur l'intervalle  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$  prouver que sur cet intervalle  $f'(0) \leq f'(x) \leq f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ . En déduire l'inégalité stricte :  $k < 1$
  - c. Prouver que pour tout réel  $x$  de  $[\beta; 1] : |f'(x)| \leq k$
  - d. Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout naturel  $n : |U_{n+1} - \alpha| \leq k|U_n - \alpha|$ . En déduire que :  $|U_n - \alpha| \leq k^n$
  - e. Montrer alors que la suite  $(U_n)$  est convergente et préciser sa limite.

On donne  $e^{\frac{\pi}{4}} \approx 2,19; \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,70$ .

**Fonction irrationnelle  
Courbe associée et Calcul d'aire**

**PROBLEME 12**

**PARTIE A**

Soit  $u$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par  $u(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$ .

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $u(x) = 0$ .
2. Déterminer le signe de  $u(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

**PARTIE B**

Soit  $g$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par :  $g(x) = x - 2\sqrt{1+x^2}$ .

1.
  - a. Justifier que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
  - b. Calculer la dérivée  $g'$  de la fonction  $g$ .
  - c. En déduire le signe de  $g'(x)$ .
2. Déterminer les limites de  $g$  aux bornes de son ensemble de définition  $D$  puis dresser le tableau de variation de  $g$ .
3.
  - a. Déterminer les équations des asymptotes à la courbe  $(C)$  de  $g$ .
  - b. Préciser la position de la courbe  $(C)$  par rapport à ses asymptotes.
4. Construire la courbe  $(C)$  de  $g$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
(Unité graphique 2cm)

**PARTIE C**

1. Déterminer la fonction numérique  $h$  telle que pour tout réel  $x$ ,  $h(-x) + g(x) = 0$
2. Soit  $(\Gamma)$  la courbe représentative de  $h$ . Montrer que  $(C) \cup (\Gamma)$  est la courbe d'équation :  $y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0$ .
3. En déduire que le point  $O$  est un centre de symétrie de la courbe  $(C) \cup (\Gamma)$ .
4. Construire alors  $(\Gamma)$  dans le repère précédent.

**PARTIE D**

Soit la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .

1.
  - a. Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $\sqrt{1+x^2} > |x|$ .
  - b. En déduire l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$  puis en déduire une primitive de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Calculer en centimètre carré l'aire de l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan qui vérifie les inégalités  $0 \leq x \leq 1$  et  $g(x) \leq y \leq -x$ .

**Fonction rationnelle et circulaire**  
**Calcul d'aire et Etude d'une suite récurrente**

**PROBLEME 13**

**PARTIE A**

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}$ .

1. Pour tout  $x$  réel différent de  $-2$ , vérifier l'égalité :  $f(x) = -x + 2 - \frac{3}{x+2}$ .
2. Etudier les variations de  $f$ , et tracer la courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormal ainsi que ses asymptotes. (l'unité de longueur choisie étant 1cm).
3. Démontrer que la courbe (C) admet un centre de symétrie.
4. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), son asymptote oblique et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 2$ .

**PARTIE B**

Soit  $\varphi$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $\varphi(t) = \frac{1-\sin^2 t}{2+\sin t}$

1. Pour tout  $t$  réel, montrer que :  $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$ . Expliquer comment l'étude des variations de  $\varphi$  sur l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  permet de construire la courbe représentative de  $\varphi$ .
2. Le but de cette question est de prouver que l'équation  $\varphi'(t) = 0$  admet une solution notée  $\alpha$ , dans l'intervalle ouvert  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .
  - a. Montrer que la dérivée  $f'$  de  $f$  est strictement décroissante sur  $[-1; 1]$ . Calculer l'image de  $[-1; 1]$  par  $f'$ .
  - b. Soit  $\varphi'$  la dérivée de  $\varphi$ . Pour tout  $t$  réel, prouver l'égalité :  $\varphi'(t) = f'(\sin t) \cos t$
  - c. Prouver l'existence et l'unicité de  $\alpha$ .
  - d. Calculer les valeurs exactes de  $\varphi(\alpha)$ .
3.
  - a. Calculer les valeurs exactes de  $\varphi(0)$ ;  $\varphi(\frac{\pi}{6})$ ;  $\varphi(\frac{\pi}{4})$ ;  $\varphi(\frac{\pi}{3})$  et  $\varphi'(0)$ .
  - b. Etudier les variations de  $\varphi$  sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ . Tracer la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (l'unité de longueur étant 10cm)
4. En utilisant la fonction  $h$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $h(t) = \varphi(t) - t$ . Prouver que l'équation  $\varphi(t) = t$  admet une solution unique  $\theta$  dans l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}]$ .

**PARTIE C**

Soit la suite  $(U_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \varphi(U_n); \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Prouver par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [0; \frac{1}{2}]$
2. Montrer que pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$   
En déduire que pour tout  $t$  de  $[0; \frac{1}{2}]$ ,  $|\varphi'(t)| \leq \frac{2}{3}$
3. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, prouver l'inégalité :  
 $|U_{n+1} - \theta| \leq \frac{2}{3} |U_n - \theta|$
4. Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \theta| \leq (\frac{2}{3})^n |U_0 - \theta|$   
En déduire que la suite  $(U_n)$  converge vers  $\theta$ . On donne :  $\sqrt{3} \approx 1,73$

**Equations différentielles - Fonctions exponentielles**  
**Calcul d'aire et de volume et Courbe paramétrée**

**PROBLEME 14**

**PARTIE A :**

On se propose de résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :  $(E): y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$

1. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  telles que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  
 $g(x) = axe^{2x} + b$  soit solution de l'équation différentielle  $(E)$ .
2. On pose  $y = z + g$ . Montrer que  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $z$  est solution de l'équation différentielle  $(E') : z' - 2z = 0$
3. Résoudre l'équation différentielle  $(E')$  et en déduire les solutions de  $(E)$ .
4. Démontrer qu'il existe une solution et une seule de  $(E)$  s'annulant en 0. Elle sera appelée  $f$  et étudiée dans la partie B.

**PARTIE B :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$f(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1$ . On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On prendra 2cm pour unité graphique.

1.
  - a. Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$ . En déduire que la courbe représentative  $(C)$  de  $f$  admet une asymptote  $(\Delta)$  dont on précisera l'équation.
  - b. Etudier la position relative de  $(C)$  et  $(\Delta)$  et préciser les coordonnées du point A intersection de  $(C)$  et  $(\Delta)$
2. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et étudier la branche infinie si nécessaire
3. Etudier le sens de variation de  $f$  et présenter son tableau de variations.  
En déduire le signe de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
4. Tracer  $(\Delta)$  et  $(C)$ . On prendra 2cm pour unité graphique.
5. a. Calculer l'intégrale :  $I = \int_0^{\frac{1}{2}} [1 - f(x)] dx$ .  
(On pourra s'aider d'une intégration par parties)
  - b. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

**PARTIE C :**

1. Calculer  $J = \int_{-1}^0 (2x - 1)e^{2x} dx$
2. A l'aide d'une double intégration par parties, calcul  $K = \int_{-1}^0 (2x - 1)2e^{4x} dx$
3. Soit  $\mathcal{D}$  l'ensemble des points du plan tels que  $-1 \leq x \leq 0$  et  $0 \leq y \leq f(x)$ . Calculer en  $cm^3$  le volume  $\mathcal{V}$  du solide de révolution engendré par la rotation de  $\mathcal{D}$  autour de l'axe des abscisses. (On pourra exprimer  $\mathcal{V}$  en fonction de  $J$  et  $K$ )

**PARTIE D**

On considère dans le même repère que  $(C)$  la courbe  $(\Gamma)$  de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\ln t}{2} \\ y(t) = -\frac{1+\ln t}{t} + 1 \end{cases} ; t \geq 1$$

1. Déterminer une équation cartésienne de  $(\Gamma)$
2. Expliquer comment on peut tracer  $(\Gamma)$  à partir de  $(C)$  puis tracer  $(\Gamma)$  en pointillés

**Fonctions exponentielles – Fonctions polynômes**  
**Calcul d'aires et de volumes**

**PROBLEME 15**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 1 + e^{-x} - 2e^{-2x}$  et  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthogonal  $(\mathbf{O}; \vec{i}, \vec{j})$  (unités graphiques : 2 cm)

**PARTIE A**

Soit le polynôme  $P$  défini sur  $\mathbb{R}$  par :  $P(X) = 1 + X - 2X^2$

1. Étudier le signe de  $P(X)$  en fonction de  $X$
2. En déduire le signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$
3. Que peut-on en déduire pour la courbe  $(\mathcal{C})$  ?

**PARTIE B**

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .  
Qu'en déduire pour la courbe  $(\mathcal{C})$  ?
2. Vérifier que  $f(x) = e^{-2x}(e^{2x} + e^x - 2)$ , puis déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$
3. Soit  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ 
  - a. calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$
  - b. Montrer que  $f'(x)$  a le même signe que  $(4 - e^x)$ .  
En déduire le signe de  $f'(x)$  pour tout réel  $x$
  - c. Dresser le tableau de variations de  $f$ .  
On montrera que le maximum est un nombre rationnel.
4.
  - a. Déterminer une équation de la tangente  $(T_0)$  à la courbe  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse 0.
  - b. Démontrer que la courbe  $(\mathcal{C})$  et la droite  $(D)$  d'équation  $y = 1$  n'ont qu'un point d'intersection  $A$  dont on déterminera les coordonnées
  - c. Étudier la position de la courbe  $(\mathcal{C})$  par rapport à la droite  $(D)$ .
5. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(\mathcal{C})$  au point  $A$ .
6. Tracer les droites  $(D)$  ;  $(T_0)$  et  $(T)$ , puis la courbe  $(\mathcal{C})$ . On précisera le point de  $(\mathcal{C})$  d'abscisse  $-\ln 2$ .

**PARTIE C**

1. Calculer l'aire, en  $\text{cm}^2$ , de la partie de plan limitée par la courbe  $(\mathcal{C})$ , l'axe des ordonnées et la droite  $(D)$ .
2. Soit  $\lambda$  un réel strictement supérieur à  $\ln 2$  ;  
On pose  $\mathcal{A}(\lambda) = 4 \int_{\ln 2}^{\lambda} [f(x) - 1] dx$ 
  - a. Donner une interprétation géométrique de  $\mathcal{A}(\lambda)$
  - b. Calculer  $\mathcal{A}(\lambda)$ . En déduire  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$
3. Calculer le volume  $V$  en unité de volume du solide de révolution obtenue par rotation autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe  $(\mathcal{C})$  correspondant à  $-\ln 2 \leq x \leq 0$

**PROBLÈME 16**

**PARTIE A**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = -3 - \ln x + \frac{1}{x}$

1. Calculer les limites de  $g$  aux bornes de son domaine de définition.
2. Déterminer la fonction dérivée  $g'$  de  $g$  et dresser le tableau de variation de  $g$ .
3. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$  et que cette solution appartient à  $[0,4 ; 0,5]$ .
4. Dédire de ce qui précède, l'étude du signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .
5. On pose  $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\alpha} g(x) dx$ 
  - a. Interpréter graphiquement  $I$
  - b. Montrer que  $I = \alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \ln 2$

**PARTIE B**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = e^{-x}(3 + \ln x)$   
et on désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 4 cm

1.
  - a. Étudier la limite de  $f$  en 0
  - b. Établir que  $f(x) = 3e^{-x} + \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x}{e^x}$  pour tout  $x > 0$  et calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
  - c. Dédire de cette étude les asymptotes de la courbe  $(\mathcal{C})$
2. Déterminer la fonction dérivée  $f'$  de  $f$  et vérifier que pour tout réel  $x$  strictement positif on a :  $f'(x) = e^{-x} \cdot g(x)$
3. Démontrer que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha e^{\alpha}}$  et donner un encadrement de  $f(\alpha)$  à  $5 \times 10^{-1}$  près
4. Dédire de l'étude faite à la question A. 4. les variations de  $f$ .
5. Déterminer le point d'intersection de la courbe  $(\mathcal{C})$  avec l'axe des abscisses.
6. Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$ .

**PARTIE C**

Soit  $h$  la fonction définie sur  $[0,4 ; 0,5]$  par :  $h(x) = \frac{1}{3 + \ln x}$

1. Montrer que  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $h(x) = x$
2. Étudier les variations de  $h$ .  
En déduire que pour tout  $x$  de  $[0,4 ; 0,5]$ ,  $h(x)$  appartient à  $[0,4 ; 0,5]$
3. Démontrer que pour tout  $x$  de  $[0,4 ; 0,5]$ ,  $|h'(x)| \leq \frac{3}{5}$
4. On définit la suite  $(U_n)$  par  $U_0 = 0,45$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = h(U_n)$ 
  - a. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_n \in [0,4 ; 0,5]$
  - b. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{5} |U_n - \alpha|$
  - c. En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n$
  - d. Montrer que la suite  $(U_n)$  est convergente et préciser sa limite.
  - e. A partir de quelle valeur  $n_0$  de  $n$  est-on sûr que  $U_n$  représente une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-5}$  près?

## PROBLÈME 17

## PARTIE A

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2 e^{-x}$

ainsi que sa courbe représentative  $(\mathcal{C})$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. Préciser les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$
2. Calculer la dérivée de  $f$ .
3. En déduire le tableau de variation de  $f$ .
4. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse  $-1$
5. Tracer  $(T)$  et  $(\mathcal{C})$ . On choisira une unité graphique de 4 cm.

## PARTIE B

1. Calculer  $J = \int_0^1 x e^{-x} dx$
2. Vérifier que  $f$  est telle que :  $f'(x) + f(x) = 2x e^{-x}$
3. En déduire que :  $\int_0^1 f(x) dx = 2J - f(1)$
4. Déduire des questions précédentes l'aire  $\mathcal{A}$  en  $\text{cm}^2$  du domaine plan délimité par la courbe  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$

## PARTIE C

1. Justifier graphiquement que l'équation  $f(x) = f(2)$  admet une seconde solution, notée  $\alpha$ , et appartenant à l'intervalle  $I = [-1; 0]$
2. Soit  $g$  la fonction définie par sur  $I$  par :  $g(x) = \left(-\frac{2}{e}\right) e^{\frac{x}{2}}$   
Montrer que  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $g(x) = x$
3. Montrer que pour tout  $x$  appartenant à  $I$ ,  $g(x)$  appartient à  $I$
4. Montrer que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $|g'(x)| \leq \frac{1}{e}$ .
5. En déduire que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{e} |x - \alpha|$
6. On définit la suite  $(U_n)$  par  $U_0 = -0,5$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = g(U_n)$ 
  - a. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_n \in I$
  - b. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |U_n - \alpha|$
  - c. En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2e^n}$
  - d. Montrer que la suite  $(U_n)$  est convergente et préciser sa limite.
  - e. Déterminer le plus petit entier  $n$  tel que l'inégalité précédente fournisse une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-6}$  près?

## PROBLÈME 18

### PARTIE A

On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$$

1. Dresser le tableau des variations de  $g$
2. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  telle que  $1,89 < \alpha < 1,90$
3. Dédire de ce qui précède le signe de  $g(x)$

### PARTIE B

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$   
( $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$ ;  $\|\vec{j}\| = 10 \text{ cm}$ )

1. Calculer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ . En déduire les asymptotes à  $(\mathcal{C})$
2. Dresser le tableau des variations de  $f$
3. Vérifier que  $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$   
En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$  d'amplitude  $2 \times 10^{-3}$
4. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  en 1
5. Tracer  $(T)$  et  $(\mathcal{C})$

### PARTIE C

On considère la fonction numérique  $F$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

1. Montrer que  $F$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et préciser  $F'(x)$   
En déduire le sens de variation de  $F$ .
2. Montrer que pour tout  $t \geq 1$ ,  $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$
3. On pose  $I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$  et  $J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$ 
  - a. A l'aide d'une intégration par parties calculer  $I(x)$
  - b. A l'aide d'une intégration par parties et de l'égalité  $\left(\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}; t > 0\right)$  ; calculer  $J(x)$
  - c. En déduire que pour tout  $x > 1$ ;  $\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$
4. Soit  $x$  un réel strictement supérieur à 1.
  - a. Interpréter graphiquement  $F(x)$
  - b. On pose  $\mathcal{A} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ . Dédire de la question 3.c que  $\ln 2 \leq \mathcal{A} \leq 1$

### PARTIE D

Soit  $G$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$G(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) - F(x)$$

1. Calculer  $G'(x)$  pour tout  $x > 0$
2. Vérifier que pour tout  $x > 0$ ,  $G(x) = 0$
3. Dédire de ce qui précède la limite de  $F$  en 0

**PROBLÈME 19**

**PARTIE A**

1. On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = x - e^{x-1}$$

- a. Étudier les variations de  $g$  (on ne demande pas dans cette question de calculer les limites de  $g$ ).
- b. Calculer  $g(1)$  et montrer que pour tout réel  $x$ ,  $g(x) \leq 0$
- c. En déduire que  $xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$ , puis que  $1 - xe^{-x} > 0$
2. On désigne par  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$$

Soit  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm

- a. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  et vérifier que pour tout réel  $x$ ,
- $$f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$$
- b. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- c. Étudier les variations de  $f$  et dresser le tableau de variations.
- d. Écrire une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 0.
- e. Tracer  $(T)$ , puis  $(C)$  (on admettra que  $(C)$  est au-dessus de  $(T)$  pour  $x < 0$ , et en-dessous pour  $x > 0$ ).
- 3.
- a. Déterminer les images par  $f$  des intervalles  $[0; 1]$  et  $[1; +\infty[$ .
- b. En déduire que pour tout  $x$  positif ou nul :  $1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$

**PARTIE B**

1. Donner une interprétation géométrique du nombre :  $I = \int_0^1 f(x) dx$
2. Soit  $n$  un entier naturel non nul, et soit  $J_n = \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$
- a. À l'aide d'une intégration par parties montrer que :  $J_1 = 1 - \frac{2}{e}$
- b. On se propose de calculer  $J_2$  sans utiliser des intégrations par parties ; déterminer les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que la fonction  $H$  définie par :  
 $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$  soit une primitive de  $h(x) = x^2 e^{-2x}$ .  
En déduire que :  $J_2 = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{5}{e^2} \right)$
3. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose  $U_n = 1 + J_1 + J_2 + \dots + J_n$
- a. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $1 + xe^{-x} + x^2 e^{-2x} + \dots + x^n e^{-nx} = \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}}$
- b. En déduire que  $I - U_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) dx$
- c. En utilisant A 1.c et 3.b montrer que pour tout réel  $x$  positif ou nul :  
 $0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) \leq \frac{1}{e^n(e-1)}$
- d. En déduire un encadrement de  $I - U_n$  ; étudier la convergence de la suite  $(U_n)$
4. Montrer que  $U_2 \leq I \leq U_2 + \frac{1}{e^2(e-1)}$

## PROBLÈME 20

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{1-x} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2}{x} - \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2cm.

### PARTIE A

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 1.  
Interpréter graphiquement le résultat obtenu
2.
  - a. Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
  - b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .  
Interpréter les résultats graphiquement les résultats obtenus.
3. Etudier le sens de variations de  $f$  puis dresser son tableau de variations sur  $\mathbb{R}$ .
4. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $]1; +\infty[$  et que  $2,3 < \alpha < 2,4$ . Préciser l'autre point d'intersection de  $(\mathcal{C})$  avec l'axe des abscisses
5. Tracer  $(\mathcal{C})$ .

### PARTIE B

1. On désigne par  $\mathcal{A}$  l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = \alpha$ .
  - a. Calculer  $\mathcal{A}$
  - b. Démontrer que  $\mathcal{A} = p\alpha + q + \frac{r}{\alpha}$  où  $p, q$  et  $r$  sont des entiers.
  - c. En déduire un encadrement de  $\mathcal{A}$  à  $2 \cdot 10^{-1}$  près
2. Soit  $\mathcal{D}$  le domaine plan délimité par la courbe  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 0$ . Calculer le volume  $\mathcal{V}$  en unité de volume du solide de révolution engendré par la rotation de  $\mathcal{D}$  autour de l'axe des abscisses.  
(On pourra faire une double intégration par parties.)

### PARTIE C

On considère dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe  $(\Gamma)$  de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \\ y(t) = t + 2e^t \end{cases}, t < 0$$

1. Démontrer que  $(\Gamma)$  est une partie de  $(\mathcal{C})$ .
2. Déterminer les coordonnées du vecteur dérivé  $\vec{V}(t)$  pour  $t = -\ln 2$  et représenter ce vecteur sur le graphique précédent au point  $M(-\ln 2)$

**PROBLÈME 21**

**PARTIE A**

Soit la fonction numérique  $f$  de la variable  $x$  définie sur  $[-1; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = (x + 1) \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) & \text{si } x > -1 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en  $-1$ .  
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x > -1$  et résoudre dans  $] -1; +\infty[$  l'équation  $f'(x) = 0$  et l'inéquation  $f'(x) > 0$ . En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $[-1; +\infty[$ .
3. On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ; unité graphique 2 cm.
  - a. Donner une équation des tangentes  $(T_0)$  et  $(T_1)$  à  $(C)$  aux points d'abscisses 0 et 1
  - b. Dresser le tableau de variation de  $f$
4. Tracer  $(C)$  ainsi que les tangentes  $(T_0)$  et  $(T_1)$  et la demi-tangente à  $(C)$  en  $-1$ .

**PARTIE B**

Pour tout réel  $t > -1$ , on pose  $\mathcal{A}(t) = \int_0^t f(x) dx$

1. Démontrer que  $\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2}(t + 1)^2 \ln\left(\frac{t+1}{2}\right) - \frac{1}{4}(t + 1)^2 + \frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2}$ . (On pourra s'aider d'une intégration par parties.)
2. Calculer  $\lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} \mathcal{A}(t)$ . (On rappelle que  $\lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln u = 0$ .)
3. On désigne par  $\mathcal{A}_1$  l'aire en  $\text{cm}^2$  de l'ensemble des points  $M(x, y)$  du plan tels que
 
$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$
  - a. Justifier l'égalité  $\mathcal{A}_1 = 4 \left( \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} \mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(1) \right)$
  - b. Calculer  $\mathcal{A}_1$

**PARTIE C**

On désigne par  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[0; +\infty[$

1. Démontrer que  $g$  est une bijection de  $[0; +\infty[$  sur un intervalle  $I$  que l'on précisera.
2. Tracer la courbe représentative  $(C')$  de la réciproque  $g^{-1}$  de  $g$  dans le même repère que  $(C)$ .
3. On désigne par  $\mathcal{A}_2$  l'aire en  $\text{cm}^2$  de l'ensemble des points  $M(x, y)$  du plan tels que
 
$$\begin{cases} -\ln 2 \leq x \leq 0 \\ f(x) \leq y \leq g^{-1}(x) \end{cases}$$

Démontrer que  $\mathcal{A}_2 = 4(\mathcal{A}(-\ln 2) - \mathcal{A}(1))$

**PARTIE D**

On considère la courbe  $(\Gamma)$  de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = 2e^{-t} - 1 \\ y(t) = -2te^{-t} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. Démontrer que  $(\Gamma)$  et  $(C)$  ont un axe de symétrie qu'on précisera
2. Tracer  $(\Gamma)$  en pointillées dans le même repère que  $(C)$ .

PROBLÈME 22

PARTIE A

1. Soit la fonction numérique  $g$  définie pour tout nombre réel  $x$  par :

$$g(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

- Étudier les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .  
On ne demande pas de construire sa représentation graphique
  - Prouver que pour tout réel  $x$ ,  $0 \leq g(x) \leq 2$
  - Calculer  $g''(x)$  pour tout réel  $x$  et étudier le sens de variation de  $g'$  sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ .
  - En déduire que pour tout  $x$  appartenant à  $[1; +\infty[$ ,  $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$
2. Soit la fonction numérique  $f$  définie pour tout  $x$  réel positif par :
- $$f(x) = 1 + \ln[g(x)]$$
- Étudier les variations de  $f$
  - Tracer avec précision la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ayant pour unité graphique 4 cm.
  - Prouver que, pour tout  $x$  réel positif, on a :  $1 \leq f(x) \leq 1 + \ln 2 < 2$
  - En utilisant le 1.), prouver que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[1; 2]$ , on a :  $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$
  - Soit  $m$  un réel quelconque.  
Déterminer graphiquement, en discutant selon les valeurs de  $m$ , le nombre de solutions positives de l'équation  
$$f(x) = m$$

PARTIE B

On définit une suite  $(U_n)$  de la façon suivante :

$$U_0 = \frac{1}{5} \text{ et pour tout entier naturel } n, U_{n+1} = f(U_n)$$

- Placer  $U_0$  sur l'axe des abscisses du repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  puis par un procédé géométrique, représenter sur ce même axe  $U_1, U_2$  et  $U_3$
- Prouver que, quel que soit l'entier naturel non nul  $n$ , on a :  $1 < U_n < 2$
- Soit  $h$  la fonction numérique définie sur l'intervalle  $[1; 2]$  par :  $h(x) = f(x) - x$ 
  - Montrer que  $h$  est une fonction décroissante.
  - En déduire que l'équation  $f(x) = x$  a une seule solution  $\alpha$  comprise entre 1 et 2.
- Prouver que pour tout entier  $n$  non nul, on a :  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$

En déduire que  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$  et que la suite  $(U_n)$  converge vers  $\alpha$

### PROBLÈME 23

#### PARTIE A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 1 + (1 - x)e^{-x}$

1. Etudier les variations de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$
2. En déduire le signe de  $g(x)$  pour tout réel  $x$

#### PARTIE B

On appelle  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x - 1 + xe^{-x}$

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni du repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique : 2 cm).

1. Étudier le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$
2. Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$  puis dresser le tableau de variation de  $f$
3. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet sur  $\mathbb{R}$  une unique solution notée  $\alpha$ , puis vérifier  $0 < \alpha < 1$
4. Démontrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à  $(C)$  et préciser la position relative de  $(D)$  et  $(C)$ .
5. La courbe  $(C)$  admet en un point A une tangente parallèle à la droite  $(D)$ . Déterminer les coordonnées de A.
6. Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 0
7. Tracer  $(D)$ ,  $(T)$  et  $(C)$  ainsi que la tangente à  $(C)$  en A
8. Calculer l'aire  $\mathcal{A}(\lambda)$  en  $\text{cm}^2$  du domaine plan délimité par la courbe  $(C)$ , la droite  $(D)$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \lambda$  où  $\lambda$  est un réel strictement positif. Calculer la limite de  $\mathcal{A}(\lambda)$  lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$

#### PARTIE C

1. Démontrer que, sur  $\mathbb{R}$ , l'équation  $f(x) = 0$  équivaut à l'équation  $\frac{e^x}{e^{x+1}} = x$
2. On appelle  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  par :  $h(x) = \frac{e^x}{e^{x+1}}$ .
  - a. Etudier les variations de  $h$ .
  - b. En déduire que, pour tout réel  $x$  de  $[0 ; 1]$ ,  $h(x)$  appartient à  $[0 ; 1]$ .
3. Calculer  $h''(x)$  pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 1]$  ; étudier le sens de variation de  $h'$  et en déduire que, pour tout réel  $x$  de  $[0 ; 1]$ ,  $0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{4}$ .
4. On définit la suite  $(U_n)$  pour tout entier naturel  $n$  par : 
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$$
  - a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n$  appartient à l'intervalle  $[0 ; 1]$ .
  - b. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$
  - c. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$  puis que la suite  $(U_n)$  converge vers  $\alpha$
  - d. Déterminer un entier  $p$  tel que  $U_p$  soit une valeur approchée à  $10^{-6}$  près de  $\alpha$

## PROBLÈME 24

### PARTIE A

On considère la fonction numérique  $f$ , de la variable réelle  $x$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{-x} \sin x$$

On appelle  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe d'équation  $y = f(x)$  dans le plan rapporté à un repère orthogonal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . On prendra 2cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées, et 4cm pour l'unité sur l'axe des abscisses.

1. Montrer que, pour tout réel  $x$  :  $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$   
En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et l'existence d'une asymptote pour la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .
2. Montrer que la fonction dérivée  $f'$  de  $f$  vérifie :  $f'(x) = \sqrt{2}e^{-x} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  pour  $x$  élément de  $\mathbb{R}$
3. On étudie la fonction  $f$  sur l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ . En déduire le tableau de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
4. Représenter la fonction  $f$  sur l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ , ainsi que les courbes  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$  d'équations  $y = -e^{-x}$  et  $y = e^{-x}$
5. Déterminer algébriquement sur  $\mathbb{R}$ , puis sur  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ , les coordonnées des points communs à :
  - a.  $(\mathcal{C}_f)$  et l'axe des abscisses.
  - b.  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_1)$
  - c.  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_2)$
6. Déterminer un réel  $\alpha$  tel que, pour  $x \geq \alpha$ , on ait  $|f(x)| \leq 10^{-2}$ .

### PARTIE B

Le but de cette partie est de déterminer une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. En calculant les dérivées successives de la fonction  $f$  jusqu'à l'ordre 4, trouver une relation entre la fonction  $f$  et sa dérivée d'ordre 4 notée  $f^{(4)}$ .
2. En déduire qu'on peut choisir  $F(x) = -\frac{1}{4}f^{(3)}(x)$
3. On pose  $I = \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx$ . Montrer que  $I = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}$

### PARTIE C

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $I_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x) dx$

1. Vérifier que  $I_0 = I$  et interpréter  $I_0$  comme l'aire d'un domaine plan. Hachurer ce domaine.
2. Montrer que, pour tout naturel  $n$ ,  $I_n = \frac{e^{-2n\pi}}{2} (e^{-\pi} + 1)$
3. Prouver que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique. Calculer sa raison.
4. Prouver que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et préciser sa limite.

## PROBLÈME 25

### PARTIE A

Soit la fonction  $g$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , qui, à tout  $x$ , associe :  $g(x) = (x - 1)e^x + x^2$

1. Etudier les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$
2. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution  $\alpha$  et une seule sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et que  $\alpha$  est dans l'intervalle  $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$
3. Déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $[0; +\infty[$

### PARTIE B

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}$$

1. Montrer que les équations  $f(x) = x$  et  $g(x) = 0$  sont équivalentes sur  $[0; +\infty[$ , et que, par suite, l'équation  $f(x) = x$  admet  $\alpha$  pour solution unique sur  $I$
2.
  - a. Calculer la dérivée de  $f$  et en déduire le sens de variation de  $f$  sur  $[0; +\infty[$
  - b. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - c. Dresser le tableau de variation de  $f$
  - d. Construire la courbe représentative  $(\mathcal{C})$  de  $f$  sur  $[0; +\infty[$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité 4cm). On indiquera en particulier les tangentes à  $(\mathcal{C})$  aux points d'abscisse 0 et 1.

### PARTIE C

1. Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $I$ ,  $f(x)$  appartient à  $I$ .
2. Soit la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par : 
$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n), \quad \forall n > 1 \end{cases}$$
  - a. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_n \in I$
  - b. Montrer que, pour tout  $x \in I$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
  - c. En appliquant le théorème de l'inégalité de la moyenne, démontrer que :  
pour tout  $n > 1$ ,  $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha|$
  - d. En déduire, par un raisonnement par récurrence, que :  
pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
  - e. En déduire que  $(U_n)$  converge vers  $\alpha$ .
  - f. À priori, combien suffit-il de calculer de termes de la suite pour obtenir une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-7}$  près ?

**PROBLÈME 26**

**PARTIE A**

On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x^2 - 2 \ln x$$

1. Étudier le sens de variation de  $g$ .
2. En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .

**PARTIE B**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$$

On appelle  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2 cm).

1. Déterminer la limite de  $f$  en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
2.
  - a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - b. Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = \frac{x}{2}$  est asymptote à la courbe  $(\mathcal{C})$
  - c. Déterminer la position de  $(\mathcal{C})$  par rapport à  $(\Delta)$  sur  $]0; +\infty[$   
Montrer, en particulier, que  $(\Delta)$  coupe  $(\mathcal{C})$  en un point A que l'on déterminera.
3. Étudier le sens de variation de  $f$  et dresser le tableau de variation de  $f$
4. Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe  $(\mathcal{C})$  où la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  est parallèle à  $(\Delta)$ . Préciser les coordonnées de B.
5. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  a une solution unique  $\alpha$   
Justifier l'encadrement :  $0,34 < \alpha < 0,35$
6. Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$  et les droites  $(\Delta)$  et  $(T)$ .

**PARTIE C**

On considère la suite numérique  $(x_n)$  définie par :

$$x_n = e^{\frac{n-2}{2}} \text{ pour tout nombre entier naturel } n$$

1.
  - a. Montrer que  $(x_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
  - b. Montrer que  $(x_n)$  est une suite croissante.
2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $a_n = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left( f(x) - \frac{x}{2} \right) dx$ 
  - a. Donner une interprétation géométrique de  $a_n$
  - b. Montrer que  $a_n = \frac{2n+1}{2}$  pour tout nombre entier naturel  $n$ .  
En déduire que  $(a_n)$  est une suite arithmétique.

### PROBLÈME 27

Pour tout entier  $n$  strictement positif on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

On note  $(\mathcal{C}_n)$  la courbe représentative de  $f_n$  dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  orthogonal (unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées)

#### PARTIE A

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$   
Que peut-on en déduire pour  $(\mathcal{C}_1)$  ?
2. Étudier le sens de variation de  $f_1$  et donner le tableau des variations de  $f_1$
3. Déterminer une équation de la tangente en  $x_0 = 1$ , à la courbe  $(\mathcal{C}_1)$
4. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$   
Que peut-on en déduire pour  $(\mathcal{C}_2)$  ?
5. Calculer  $f_2'(x)$  et donner le tableau des variations de  $f_2$

#### PARTIE B

1. Étudier le signe de  $f_1(x) - f_2(x)$  ; en déduire la position relative de  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$
2. Tracer  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$

#### PARTIE C

$n$  étant un entier naturel non nul, on pose :  $I_n = \int_1^e f_n(x) dx$

1. On pose  $F(x) = \frac{1+\ln x}{x}$ . Calculer  $F'(x)$ , en déduire  $I_1$
2. En utilisant une intégration par parties montrer que :

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$$

3. Calculer  $I_2$  puis l'aire en  $\text{cm}^2$  du domaine compris entre les courbes  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$

#### PARTIE D

1. En utilisant la question 2. de la partie C, montrer par récurrence que, pour tout  $n$  entier naturel non nul :  
$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$
2. En utilisant un encadrement de  $\ln x$  sur  $[1; e]$ , montrer que, pour tout  $n$  entier naturel non nul :  $0 \leq I_n \leq 1$
3. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$

## PROBLÈME 28

### PARTIE A

Soit l'équation différentielle (E):  $y' + y = x - 1$

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_1^x (t - 1)e^t dt$
2. Soit  $z$  une fonction dérivable sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels.  
On pose :  $f(x) = z(x)e^{-x}$ 
  - a. Montrer que la fonction  $f$  est solution de (E) si, et seulement si, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  
 $z'(x) = (x - 1)e^x$
  - b. À l'aide de la première question, déterminer toutes les fonctions  $z$  vérifiant, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $z'(x) = (x - 1)e^x$
3.
  - a. Dédire de la question précédente les solutions de (E)
  - b. Déterminer la solution de (E) pour laquelle l'image de 1 est 0.

### PARTIE B

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x - 2 + e^{1-x}$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique : 2 cm).

On désigne par  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$

1.
  - a. Étudier le sens de variation de  $f$
  - b. Préciser  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis dresser le tableau de variation de  $f$
2.
  - a. Montrer que la droite  $(D)$ , d'équation  $y = x - 2$ , est asymptote à la courbe  $(C_f)$
  - b. Préciser la position de  $(C_f)$  par rapport à  $(D)$
3. Tracer  $(D)$  et  $(C_f)$

### PARTIE C

Soit  $x_0$  un nombre réel strictement positif.

1. On considère le domaine limité par la courbe  $(C_f)$ , son asymptote  $(D)$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = x_0$   
Exprimer, à l'aide de  $x_0$ , l'aire  $S_1$  en unité d'aire de ce domaine.
2. On considère la fonction  $g$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = e^{1-x}$ 
  - a. Étudier les variations de  $g$  et tracer sa courbe représentative  $(C_g)$  dans un autre repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique : 2 cm)
  - b. Donner une interprétation, en termes d'aire, de l'intégrale ayant servi au calcul de  $S_1$  à l'aide de la courbe  $(C_g)$ .
3. A est le point de coordonnées  $(x_0; 0)$ . B est le point de la courbe  $(C_g)$  d'abscisse  $x_0$ . Soit  $(T)$  la tangente à la courbe  $(C_g)$  au point d'abscisse  $x_0$ . C est le point d'intersection de  $(T)$  et de l'axe des abscisses.  
Déterminer les coordonnées de C.
4. Calculer (en unités d'aire) l'aire  $S_2$  du triangle ABC. Vérifier que  $S_1 + 2S_2 = e$

**PROBLÈME 29**

**PARTIE A**

1. On définit la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par :

$$g(x) = 2x - (x - 1) \ln(x - 1)$$

a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  (On admet le résultat suivant :  $\lim_{X \rightarrow 0} X \ln X = 0$ )

b. Calculer  $g'(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]1; +\infty[$

c. Résoudre l'inéquation  $1 - \ln(x - 1) > 0$  d'inconnue  $x$  appartenant à l'intervalle  $]1; +\infty[$

d. Étudier le sens de variation de  $g$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$

e. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  a une solution unique, notée  $\alpha$  dans l'intervalle  $[e + 1; e^3 + 1]$ , et étudier le signe de  $g(x)$  sur chacun des intervalles  $]1; \alpha[$  et  $] \alpha; +\infty[$

2. Soit  $\varphi$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par :  $\varphi(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$

a. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$  et prouver que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$

b. Calculer  $\varphi'(x)$  et montrer que  $\varphi'(x)$  est du signe de  $g(x^2)$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$

c. Montrer que  $\varphi$  est croissante sur l'intervalle  $]1; \sqrt{\alpha}[$  et décroissante sur l'intervalle  $] \sqrt{\alpha}; +\infty[$

**PARTIE B**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$

1. Vérifier que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$ , on a :  $f(x) = \varphi(e^x)$

2. En déduire :

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b. le sens de variation de  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  et que  $f$  admet un maximum en  $\ln(\sqrt{\alpha})$

3. Montrer que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$ ,  $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

4. Représenter graphiquement la courbe  $(C_f)$  de  $f$  dans un repère orthogonal, d'unités 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de  $\alpha$ . On précisera les coordonnées du point d'intersection de  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses.

**PARTIE C**

1. Vérifier que  $f$  est solution de l'équation différentielle :  $y' + y = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$

2. On pose :  $h(x) = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$ ;  $x > 0$

a. Trouver une primitive  $H$  de  $h$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$

b. En déduire les primitives  $F$  de  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$

3. Calculer l'aire en unité d'aire du domaine délimité par  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = \ln(\sqrt{2})$  et  $x = \ln(\sqrt{\alpha})$

### PROBLÈME 30

#### PARTIE A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = x \ln x - x + 1$  et  $(\mathcal{C})$  sa représentation graphique dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 2cm

1. Étudiez les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$
2. Étudiez les variations de  $g$ . En déduire le signe de  $g(x)$  en fonction de  $x$ . On note  $(\mathcal{C}')$  la représentation graphique de la fonction  $x \mapsto \ln x$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$
3. Montrez que  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}')$  ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et  $e$  et que, pour tout  $x$  élément de  $[1; e]$ , on a :  $x \ln x - x + 1 \leq \ln x$ . (On ne demande pas de représenter  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}')$ )
4.
  - a. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :  $J = \int_1^e (x-1) \ln x \, dx$
  - b. Soit  $\Delta$  le domaine plan défini par :  $\Delta = \{M(x, y); 1 \leq x \leq e \text{ et } g(x) \leq y \leq \ln x\}$   
Déterminer, en  $\text{cm}^2$ , l'aire de  $\Delta$ .

#### PARTIE B

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{x-1} \ln x$

1. Étudiez les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en 1 (pour l'étude de la limite en 1, on pourra utiliser un taux d'accroissement).
2. Déterminer le tableau de variation de  $f$  (on pourra remarquer que  $f'(x)$  s'écrit facilement en fonction de  $g(x)$ ).
3. Tracer la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (Unité graphique 2 cm)

#### PARTIE C

1. Montrer que l'équation  $f(x) = \frac{1}{2}$  admet une unique solution notée  $\alpha$  et que  $3,5 < \alpha < 3,6$
2. Soit  $h$  la fonction définie sur  $]1; +\infty[$  par :  $h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 
  - a. Montrer que  $\alpha$  est solution de l'équation  $h(x) = x$
  - b. Etudier le sens de variation de  $h$
  - c. On pose  $I = [3; 4]$ . Montrer que pour tout  $x$  élément de  $I$  on a  $h(x)$  appartient à  $I$  et  $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$
3. On définit la suite  $(U_n)$  par :  $U_0 = 3$  et pour tout  $n \geq 0$ ,  $U_{n+1} = h(U_n)$   
Justifier successivement les trois propriétés suivantes :
  - a. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_n - \alpha|$
  - b. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$
  - c. La suite  $(U_n)$  converge vers  $\alpha$ .
4. Donner un entier naturel  $p$ , tel que des majorations précédentes on puisse déduire que  $U_p$  est une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près.

**PROBLÈME 31**

Les tracés de courbes seront faits dans un plan rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 2 cm).

**PARTIE A**

Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = \ln(x + 1)$  et  $g(x) = \frac{2x}{x+2}$

On notera  $(\mathcal{C})$  la représentation graphique de  $f$  et  $(\Gamma)$  celle de  $g$ .

1. Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions  $f$  et  $g$
2. Soit  $h$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $h(x) = f(x) - g(x)$ 
  - a. Étudier le sens de variation de  $h$  sur  $[0; +\infty[$
  - b. Calculer  $h(0)$ . (L'étude de la limite de  $h$  en  $+\infty$  n'est pas demandée.)
  - c. En déduire que pour tout réel  $x$  positif ou nul,  
(1) 
$$\frac{2x}{x+2} \leq \ln(x + 1)$$
  - d. Interpréter graphiquement ce résultat
3. Construire dans le même repère les courbes  $(\mathcal{C})$  et  $(\Gamma)$ , et montrer qu'elles admettent en O une même tangente  $(\mathcal{D})$  que l'on tracera.

**PARTIE B**

1. Étudier le sens de variation de  $\varphi$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  
$$\varphi(x) = \ln(x + 1) - x$$
2. Étudier la limite de  $\varphi$  en  $+\infty$  et donner la valeur de  $\varphi$  en 0.  
En déduire que pour tout réel  $x$  positif ou nul :  
(2) 
$$\ln(x + 1) \leq x$$
3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer :  $I = \int_0^1 \ln(x + 1) dx$   
(On remarquera éventuellement que :  $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ )
4. En déduire le calcul de  $J = \int_0^1 (x - \ln(x + 1)) dx$  puis de  
$$K = \int_0^1 \left( \frac{2x}{x+2} - \ln(x + 1) \right) dx$$
  
(Pour le calcul de  $K$  on pourra vérifier que :  $\frac{2x}{x+2} = 2 - \frac{4}{x+2}$ )
5. Interprétez géométriquement les valeurs des intégrales  $J$  et  $K$  en utilisant les courbes  $(\mathcal{C})$ ,  $(\Gamma)$  et la droite  $(\mathcal{D})$  obtenues dans la partie A.

**PARTIE C**

1. Soit  $u$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  de la façon suivante :  
$$u(0) = 1 \text{ et si } x \neq 0, u(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$
  
Démontrer que la fonction  $u$  est continue sur  $[0; 1]$ .
2. On pose :  $L = \int_0^1 u(x) dx$   
En utilisant les inégalités (1) et (2) obtenues dans les parties A et B, montrer que :  
$$\int_0^1 \frac{2}{x+2} dx \leq L \leq 1$$
  
En déduire un encadrement de  $L$ .

### PROBLÈME 32

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Toutes les courbes demandées seront représentées sur un même graphique (unité graphique : 2 cm).

#### PARTIE A

On définit la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - 1)$

1. Calculer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Etudier les variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$
3. Soit  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $(\mathcal{C})$  dans  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  et  $A$  le point de  $(\mathcal{C})$  d'abscisse 3. Calculer l'ordonnée de  $A$ .  
Soit  $B$  le point de  $(\mathcal{C})$  d'abscisse  $\frac{5}{4}$ ;  $P$  le projeté orthogonal de  $B$  sur l'axe  $(O; \vec{i})$  et  $H$  le projeté orthogonal de  $B$  sur l'axe  $(O; \vec{j})$ .  
Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points  $B, P$  et  $H$ .  
Placer les points  $A, B, P$  et  $H$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  et représenter la courbe  $(\mathcal{C})$

#### PARTIE B

Soit  $r$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . A tout point  $M$  du plan d'affixe  $z$ , la rotation  $r$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$

1.
  - a. Donner  $z'$  en fonction de  $z$
  - b. On note  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  ( $x, y, x', y'$  réels). Exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ , puis exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $x'$  et  $y'$
  - c. Déterminer les coordonnées des points  $A', B'$  et  $P'$  images respectives des points  $A, B$  et  $P$  par la rotation  $r$
2. On appelle  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = e^{-2x} + 2e^x$  et  $(\Gamma)$  sa courbe représentative dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ 
  - a. Montrer que lorsqu'un point  $M$  appartient à  $(\mathcal{C})$ , son image  $M'$  par  $r$  appartient à  $(\Gamma)$   
On admet que lorsque le point  $M$  décrit  $(\mathcal{C})$ , le point  $M'$  décrit  $(\Gamma)$
  - b. Tracer sur le graphique précédent les points  $A', B'$  et  $P'$  et la courbe  $(\Gamma)$  (l'étude des variations de  $g$  n'est pas demandée).

#### PARTIE C

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

1. Calculer l'intégrale  $\int_0^{\ln 2} g(x) dx$ . Interpréter graphiquement cette intégrale.
2.
  - a. Déterminer, en unités d'aire, l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine plan  $D$  limité par les segments  $[AO]$ ,  $[OH]$  et  $[HB]$  et l'arc de courbe  $(\mathcal{C})$  d'extrémités  $B$  et  $A$ .
  - b. On pose  $I = \int_{\frac{5}{4}}^3 \ln(\sqrt{1+x} - 1) dx$ . Trouver une relation entre  $\mathcal{A}$  et  $I$  puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale  $I$ .

### PROBLÈME 33

#### PARTIE A

On considère la fonction  $h$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $h(x) = xe^x - 2e^x + 2$

1. Déterminer les variations de  $h$  (on précisera  $h(0)$  mais la limite en  $+\infty$  n'est pas demandée).
2. Calculer  $h\left(\frac{3}{2}\right)$ . En déduire qu'il existe un unique réel  $a$  appartenant à l'intervalle  $I = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$  tel que  $h(a) = 0$
3. Etudier le signe de  $h(x)$  sur  $]0; +\infty[$

#### PARTIE B

Soit la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$

1. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de l'intervalle  $]0; +\infty[$
2. Montrer que, pour tout nombre  $x$  strictement positif :  $f'(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 2}{x^3}$   
En déduire le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variations.
3. Montrer que  $f(a) = \frac{-1}{a(a-2)}$  et en déduire le signe de  $f(a)$
4. Représenter l'allure de la courbe  $(\mathcal{C})$  de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 1cm. On prendra  $a = 1,62$ ;  $f(a) = 1,62$  et on placera les points de  $(\mathcal{C})$  d'abscisses respectives 2 et 3

#### PARTIE C

1. Démontrer que sur  $]0; +\infty[$ , l'équation  $h(x) = 0$  équivaut à  $2(1 - e^{-x}) = x$
2. Soit la fonction  $g$  définie sur  $I = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$  par :  $g(x) = 2(1 - e^{-x})$   
Montrer que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $I$ ,  $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
3. Soit la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  définie par :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{3}{2} \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

On admet que, pour tout entier  $n$ ,  $x_n$  appartient à  $I$

- a. Démontrer que, pour tout entier  $n$  :  
 $|x_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|x_n - a|$  et  $|x_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$
- b. En déduire que la suite  $(x_n)$  converge vers  $a$ .
- c. Déterminer un entier  $p$  tel que  $x_p$  soit une valeur approchée à  $10^{-3}$  près du nombre réel  $a$ .

**Fonctions exponentielles**  
**Calcul d'aires et Etude d'une suite récurrente**

**PROBLÈME 34**

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (Unités graphiques : 2 cm)

**PARTIE A**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (x + 3)e^{-\frac{x}{2}}$

1. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  puis en  $+\infty$
2. Etudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser son tableau de variations.
3. Construire la courbe  $(\Gamma)$  représentative de  $f$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$
4. A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $I = \int_{-3}^0 x e^{-\frac{x}{2}} dx$  et en déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine définie par les couples  $(x, y)$  tels que  $0 \leq y \leq f(x)$  et  $-3 \leq x \leq 0$
5.
  - a. Démontrer que l'équation  $f(x) = 3$  admet deux solutions dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $\alpha$  la solution non nulle, montrer que :  $-2 < \alpha < -\frac{3}{2}$
  - b. Plus généralement, déterminer graphiquement, suivant les valeurs du nombre réel  $m$ , le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = m$

**PARTIE B**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 3\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$

1. Démontrer que  $f(x) = 3$  si et seulement si  $g(x) = x$
2. Soit  $g'$  et  $g''$  les dérivées première et seconde de la fonction  $g$ 
  - a. Calculer, pour tout réel  $x$ ,  $g'(x)$  et  $g''(x)$ . Justifier que  $g'(\alpha) = \frac{\alpha+3}{2}$
  - b. Etudier le sens de variation de  $g'$ , puis celui de  $g$ .
3. On se place désormais dans l'intervalle  $I = [-2; \alpha]$   
Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $I$ 
  - a.  $g(x)$  appartient à  $I$
  - b.  $\frac{1}{2} \leq g'(x) \leq \frac{3}{4}$
  - c. En déduire, à l'aide d'une intégration, que pour tout  $x$  de l'intervalle  $I$ , on a :
$$0 \leq \frac{1}{2}(\alpha - x) \leq g(\alpha) - g(x) \leq \frac{3}{4}(\alpha - x)$$
4. On considère la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_0 = -2$  et  $U_{n+1} = g(U_n)$ 
  - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n$ ,  $U_n$  appartient à l'intervalle  $I$ .  
Justifier que, pour tout entier  $n$ ,
$$0 \leq \alpha - U_{n+1} \leq \frac{3}{4}(\alpha - U_n) \text{ puis que } 0 \leq \alpha - U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$
  - b. En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente et donner sa limite.
  - c. Déterminer le plus petit entier  $p$  tel que :  $\left(\frac{3}{4}\right)^p \leq 10^{-2}$   
Que représente  $U_p$  pour le réel  $\alpha$

**PROBLÈME 35**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 3 cm).

**PARTIE A**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans le plan.

1.
  - a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$
  - b. Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$  on a :
$$f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$$
  - c. En déduire que la courbe  $(\mathcal{C})$  admet comme asymptote la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$
  - d. Étudier la position relative de  $(\mathcal{C})$  et  $(D)$
2. Étudier le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variations.
3. Tracer la droite  $(D)$  et la courbe  $(\mathcal{C})$

**PARTIE B**

Pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$  on pose :  $F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t}) dt$

On ne cherchera pas à calculer  $F(x)$

1. Soit  $x$  un réel strictement positif. En utilisant la question 1 de la partie A, donner une interprétation géométrique de  $F(x)$
2. Étudier le sens de variation de  $F$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$
3. Soit  $a$  un réel strictement positif.
  - a. Montrer que, pour tout  $t$  appartenant à l'intervalle  $[1; 1 + a]$ , on a :
$$\frac{1}{a+1} \leq \frac{1}{t} \leq 1$$
  - b. En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis à la fonction logarithme, établir que  $\frac{a}{a+1} \leq \ln(a + 1) \leq a$
4. Soit  $x$  un réel strictement positif. Déduire de la question 3 :
$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t} dt$$
 puis
$$\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x}$$
5. On admet que la limite de  $F(x)$ , lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  existe et est un nombre réel noté  $\ell$   
Établir que  $\frac{1}{2} \ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$
6. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $U_n = \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-2t}) dt$ 
  - a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $0 \leq U_n \leq \ln(1 + e^{-2n})$   
(On pourra utiliser le sens de variations de la fonction  $h$ , définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $h(t) = \ln(1 + e^{-2t})$ )
  - b. Déterminer la limite de la suite  $(U_n)$
7. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ 
  - a. Exprimer  $S_n$  à l'aide de  $F$  et  $n$ .
  - b. La suite  $(S_n)$  est-elle convergente ? Dans l'affirmative, donner un encadrement de sa limite.

**PROBLÈME 36**

**PARTIE A**

Soit la fonction  $g$  définie sur  $] -1; +\infty[$  par :  $g(t) = \ln(1+t) - \frac{2t}{1+t}$

On appelle  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $g$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité 2 cm).

1. Étudier le sens de variations de  $g$
2. Déterminer les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-1$
3. Montrer qu'il existe un réel  $\alpha$  et un seul dans l'intervalle  $[1; +\infty[$  tel que :  $g(\alpha) = 0$   
Donner un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$  de  $\alpha$
4. Tracer la tangente à  $(\mathcal{C})$  en l'origine  $O$  du repère, puis la courbe  $(\mathcal{C})$
5.
  - a. Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout réel  $t$  appartenant à  $] -1; +\infty[$ ,  
$$\frac{t}{1+t} = a + \frac{b}{1+t}$$
  - b. Calculer l'intégral  $\int_0^x g(t)dt$  ou  $t$  appartient à  $] -1; +\infty[$   
(au cours du calcul, utiliser une intégration par parties).
  - c. Montrer que l'aire, exprimée en  $\text{cm}^2$ , du domaine compris entre la courbe  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $t = 0$  et  $t = \alpha$  est égale à  $\frac{4\alpha(\alpha-3)}{\alpha+1}$
  - d. En utilisant 3. donner un encadrement de cette aire.

**PARTIE B**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^{2x})$

1. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Calculer  $f'(x)$  et comparer les signes de  $f'(x)$  et  $g(e^{2x})$   
Préciser, en fonction de  $\alpha$ , la valeur de  $x$  pour laquelle  $f'(x) = 0$
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$  (on pourra poser  $t = e^{2x}$ ).
3. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$   
(On pourra utiliser l'égalité  $1 + e^{2x} = e^{2x}(1 + e^{-2x})$ )
4. Dresser le tableau de variations de  $f$
5. Montrer que le maximum de  $f$  est égal à  $\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$
6. Donner une valeur approchée de ce maximum en utilisant la valeur approchée par excès de  $\alpha$  trouvée en partie A 3.
7. Tracer la courbe représentative  $(\Gamma)$  de  $f$  dans un autre repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$   
(Unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

**PROBLÈME 37**

**PARTIE A**

Le but de cette partie est d'étudier la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0.
2. Soit la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = \ln x + x + 1$ 
  - a. Étudier les variations de  $g$
  - b. Établir que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution  $\beta$  et une seule, et que  $0,27 \leq \beta \leq 0,28$ .  
(On ne demande pas de construire la courbe représentative de  $g$ )
3. Pour  $x > 0$ , exprimer  $f'(x)$  à l'aide de  $g(x)$ . En déduire les variations de  $f$ . On montrera que  $f(\beta) = -\beta$
4. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ , puis la limite de  $\ln x - f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Interpréter graphiquement ce dernier résultat
5. Construire les courbes représentatives ( $\mathcal{C}$ ) de  $f$  et ( $\Gamma$ ) de  $x \mapsto \ln x$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  [unité graphique 4 cm].

**PARTIE B**

On se propose d'étudier l'équation  $f(x) = 1$

Soit  $h$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $h(x) = e \cdot e^{\frac{1}{x}}$

1. Montrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une solution  $\alpha$  et une seule, et que  $3,5 \leq \alpha \leq 3,7$   
Placer le point de ( $\mathcal{C}$ ) d'abscisse  $\alpha$
2. Prouver que l'équation  $f(x) = 1$  équivaut à l'équation  $h(x) = x$
3. Étudier la monotonie de  $h$
4. Prouver que pour tout élément  $x$  de  $[3,5; 3,7]$ ,
  - a.  $h(x)$  appartient aussi à  $[3,5; 3,7]$
  - b.  $|h'(x)| \leq |h'(3,5)| \leq \frac{1}{3}$
  - c.  $|h(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$
5. Soit  $(U_n)$  la suite d'éléments de  $[3,5; 3,7]$ , définie par la relation de récurrence :  $U_{n+1} = h(U_n)$  et la condition initiale  $U_0 = 3,5$ 
  - a. Montrer que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_n - \alpha|$
  - b. En déduire que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$
  - c. Montrer que la suite  $(U_n)$  converge et préciser sa limite
  - d. Déterminer un entier  $p$  tel que  $U_p$  soit une valeur approchée à  $10^{-3}$  près du nombre réel  $\alpha$ .

**Fonctions exponentielles**  
**Calcul d'aires et Etude d'une suite récurrente**

**PROBLÈME 38**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^{x+1}}$

On note  $(\Gamma)$  sa représentation graphique dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  unité graphique 2 cm.

**PARTIE A**

1.
  - a. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f(-x) + f(x) = 2$   
En déduire que  $(\Gamma)$  possède un centre de symétrie, qu'on désignera par A et dont on précisera les coordonnées.
  - b. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$   
Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . (On pourra par exemple utiliser 1.a. ou poser  $X = e^x$ )  
En déduire que  $(\Gamma)$  possède deux asymptotes dont on précisera les équations.
  - c. Calculer  $f'(x)$  et en déduire les variations de la fonction  $f$
2.
  - a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe  $(\Gamma)$  au point d'abscisse 0.
  - b. On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\varphi(x) = f(x) - (x + 1)$   
Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $\varphi'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^{x+1}}\right)^2$ . En déduire le sens de variation de la fonction  $\varphi$  puis son signe (on précisera  $\varphi(0)$ ).
  - c. Déduire de ce qui précède la position de la courbe  $(\Gamma)$  par rapport à la droite (T)
3. Tracer dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , la droite (T) ainsi que la courbe  $(\Gamma)$  et ses asymptotes.

**PARTIE B**

1.
  - a. Montrer que  $f(x) = x$  si et seulement si  $\varphi(x) = -1$
  - b. En déduire, en utilisant les résultats de A 2. que la droite (D) d'équation  $y = x$  coupe la courbe  $(\Gamma)$  en un seul point dont l'abscisse  $\alpha$  est comprise entre 2 et 3.
2.
  - a. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = -1 + \frac{4e^x}{e^{x+1}}$ .  
En déduire une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$
  - b. Exprimer, en fonction de  $\alpha$ , l'aire du domaine limité par la courbe  $(\Gamma)$ , la droite (D) et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \alpha$

**PARTIE C** : Dans cette partie on désigne par  $I$  l'intervalle  $[2; 3]$

1.
  - a. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 4\left(\frac{1}{e^{x+1}} - \frac{1}{(e^{x+1})^2}\right)$
  - b. En déduire que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $I$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
  - c. En déduire que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $I$ ,  $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$
2. On définit la suite  $(U_n)$  d'éléments de l'intervalle  $I$  par : 
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
  - a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|3 - \alpha|$
  - b. Déterminer un entier naturel  $p$  tel que  $U_p$  soit une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près.

**Fonction logarithme népérien**  
**Calcul d'aires et encadrement**

**PROBLÈME 39**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(0) = \frac{3}{2} \text{ et } f(x) = 2x \ln x - \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2} \text{ (ln désigne le logarithme népérien)}$$

**PARTIE A**

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = 2 \ln x - x + 1$

1. Déterminer les limites en 0 et en  $+\infty$  de  $g$   
Étudier les variations de  $g$
2. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  deux solutions 1 et  $\alpha$ .  
En déduire le signe de  $g$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$
3. Vérifier que :  $3,5 \leq \alpha \leq 4$

**PARTIE B**

1. Soit  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ . Vérifier que  $f'(x) = g(x)$  (pour  $x > 0$ )  
Étudier le sens de variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$
2.
  - a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  puis dresser son tableau de variations
  - b. Montrer que  $f$  est continue en zéro.
  - c. Calculer la limite de  $\frac{f(x)-f(0)}{x}$  lorsque  $x$  tend vers zéro par valeurs strictement positives. Que peut-on en conclure ?
3.
  - a. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  deux solutions 1 et  $\beta$
  - b. Justifier les inégalités :  $5 \leq \beta \leq 6$
4. La tangente  $(D)$  à la courbe  $(C)$  représentative de  $f$  au point d'abscisse 5 a pour équation  $y = h(x)$ 
  - a. Calculer  $h(x)$  et étudier les variations de la fonction  $\Delta$  définie sur  $[5; +\infty[$  par  $\Delta(x) = f(x) - h(x)$   
En déduire que pour tout  $x \geq 5$ , on a :  $f(x) \leq h(x)$
  - b. Soit  $\lambda$  l'abscisse du point d'intersection de  $(D)$  et de l'axe  $(Ox)$ . Calculer  $\lambda$  et prouver que  $\beta \leq \lambda$
5. Rassembler dans un tableau les résultats obtenus sur  $f$ . Tracer la droite  $(D)$  et la courbe  $(C)$  représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 2 centimètres.

**PARTIE C**

Soit  $F$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $F(x) = x^2 \ln x - \frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$

1. Vérifier que  $F$  est sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  la primitive de  $f$  qui s'annule au point 1.
2. On pose  $\mathcal{A} = \int_1^\beta f(t) dt$ 
  - a. Montrer que :  $F(5) \leq F(\beta)$  (1)
  - b. Montrer que :  $\mathcal{A} \leq F(5) + \int_5^\beta h(t) dt$   
Prouver que :  $\int_\beta^\lambda h(t) dt \geq 0$   
En déduire l'inégalité :  $\mathcal{A} \leq F(5) + \int_5^\lambda h(t) dt$  (2)
3. Donner un encadrement de  $\mathcal{A}$  à  $10^{-2}$  près.

**PROBLÈME 40**

**PARTIE A**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^x - 2e^{\frac{x}{2}}$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 2 centimètres.

1. Calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$  et étudier les variations de  $f$ .
2. Préciser les coordonnées du point d'intersection de  $(\mathcal{C})$  avec l'axe des abscisses
3. Construire  $(T)$  et  $(\mathcal{C})$
4. Soit  $\lambda$  un réel strictement inférieur à 0. On désigne par  $\mathcal{D}$  le domaine plan constitué des points dont les coordonnées  $(x, y)$  vérifient :

$$\begin{cases} \lambda \leq x \leq 0 \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

- a. Calculer l'aire  $\mathcal{A}(\lambda)$  en  $cm^2$  du domaine  $\mathcal{D}$ . En déduire  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$
- b. Calculer le volume  $\mathcal{V}(\lambda)$  en unité de volume du solide de révolution engendré par rotation de  $\mathcal{D}$  autour de l'axe des abscisses. En déduire  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{V}(\lambda)$

**PARTIE B**

1. Montrer que l'équation  $f'(x) = 1$  admet une unique solution  $\beta = 2 \ln \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$   
Calculer  $f(\beta)$
2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = f(x) - x$ 
  - a. Déterminer le signe de  $g(\beta)$  et montrer que  $g$  est strictement monotone sur chacun des deux intervalles  $]-\infty; \beta[$  et  $]\beta; +\infty[$
  - b. En déduire que l'équation  $f(x) = x$  admet exactement deux solutions  $a$  et  $b$  avec  $a < 0 < \beta < b$
3. Calculer  $f''(x)$  pour tout réel  $x$  et étudier les variations de  $f'$
4. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) \geq -\frac{1}{4}$   
En déduire que pour tout  $x \in ]-\infty; 0]$ ,  $-\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq 0$
5. Soit  $(x_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $x_0 = \beta$  et la relation de récurrence  $x_{n+1} = f(x_n)$ 
  - a. Montrer que pour tout  $x \in ]-\infty; 0]$ ,  $f(x) \in ]-\infty; 0]$ .  
En déduire que  $n \geq 1$ ,  $x_n \leq 0$
  - b. Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $|x_{n+1} - a| \leq \frac{1}{4} |x_n - a|$   
En déduire que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  
 $|x_n - a| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |x_1 - a| \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
  - c. Montrer que la suite  $(x_n)$  converge vers  $a$

**Fonction logarithme népérien**  
**Etude d'une suite récurrente**

**PROBLÈME 41**

**PARTIE A**

Dans cette partie le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique : 2 cm.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \text{ pour } x > 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans ce repère

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$ 
  - a. Étudier le sens de variation de  $g$
  - b. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
  - c. En déduire le signe de  $g(x)$  pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$
  - d. Montrer que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[2; 3]$ , on a  $g(x) < \frac{1}{2}$
2.
  - a. Déterminer la limite, quand  $x$  tend vers zéro par valeurs strictement positives, de  $x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$  (on pourra poser  $X = \frac{2}{x}$ ) et démontrer que  $f$  est continue en 0
  - b. La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0 ? Donner une interprétation graphique de ce résultat.
  - c. Étudier le sens de variation de  $f$  (on vérifiera que  $f'(x) = g(x)$ )
3.
  - a. Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2$  (on pourra poser  $X = \frac{2}{x}$ )
  - b. En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
  - c. Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$  est asymptote à  $(C)$  au voisinage de  $+\infty$
4. Tracer dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  la droite  $(\Delta)$ , la courbe  $(C)$  et la droite d'équation  $y = x$

**PARTIE B**

Dans cette partie, on désigne par  $I$  l'intervalle  $[2; 3]$

1.
  - a. Soit  $h$  la fonction définie sur  $I$  par  $h(x) = f(x) - x$ . Montrer que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $h'(x) < 0$  (on remarquera que  $h'(x) = g(x) - 1$ ).
  - b. En déduire le sens de variation de  $h$  et montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une unique solution dans  $I$ ; on note  $\alpha$  cette solution.
2.
  - a. Montrer que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$
  - b. En déduire que, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$
3. On définit la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :  $U_0 = 2$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = f(U_n)$   
On admet que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_n$  appartient à l'intervalle  $I$ 
  - a. Établir pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , les inégalités suivantes :
    - (i)  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$
    - (ii)  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
  - b. En déduire que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Quelle est sa limite ?
  - c. Déterminer  $n_0$  entier naturel tel que  $U_{n_0}$  soit une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près.

**Fonctions exponentielles – Fonction logarithme népérien**  
**Etude d'une suite récurrente**

**PROBLÈME 42**

Le plan est rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2 cm).  
Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^{x-1} - 1$

**PARTIE A**

1. Établir le tableau de variation de  $f$  et tracer sa courbe représentative  $(\mathcal{C})$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$
2.
  - a. Justifier que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  à préciser
  - b. Expliciter  $f^{-1}(x)$  pour tout élément  $x$  de  $J$
  - c. Sans étudier  $f^{-1}$ , tracer la courbe  $(\Gamma)$  de  $f^{-1}$  dans le même repère que  $(\mathcal{C})$
3. On pose  $\varphi(x) = f(x) - x$ 
  - a. Déterminer la limite de  $\varphi(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$
  - b. Dresser le tableau de variation de  $\varphi$  et démontrer que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet deux solutions qu'on notera  $a$  et  $b$  ( $a < b$ )
  - c. En déduire que l'équation  $f(x) = x$  admet comme seules solutions  $a$  et  $b$  et établir que  $2 < b < \frac{5}{2}$
4. Calculer l'aire en  $\text{cm}^2$  du domaine plan limité par les courbes  $(\mathcal{C})$  et  $(\Gamma)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ . On donnera le résultat uniquement en fonction de  $a$  et  $b$

**PARTIE B**

Soit la fonction  $g$  définie sur  $I = \left[2; \frac{5}{2}\right]$  par :  $g(x) = \ln(x + 1) + 1$

1. Montrer que, sur  $I$ , l'équation  $f(x) = x$  équivaut à l'équation  $g(x) = x$
2.
  - a. Démontrer que, pour tout élément  $x$  de  $I$ ,  $g(x)$  appartient à  $I$ .
  - b. Montrer que pour tout élément  $x$  de  $I$  :  $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{3}$
  - c. En déduire que, pour tout élément  $x$  de  $I$  :  $|g(x) - b| \leq \frac{1}{3}|x - b|$
3. Soit  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $w_0 = 2$  et pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $w_{n+1} = g(w_n)$ 
  - a. Établir que pour tout  $n \geq 0$ ,  $w_n$  appartient à  $I$
  - b. Montrer que pour tout  $n \geq 0$ ,  $|w_{n+1} - b| \leq \frac{1}{3}|w_n - b|$
  - c. En déduire que  $|w_n - b| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$
  - d. Montrer alors que la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et préciser sa limite
  - e. Déterminer un entier  $q$  tel que  $w_q$  soit une valeur approchée de  $b$  à  $10^{-2}$  près

### PROBLÈME 43

#### PARTIE A

On se propose de résoudre l'équation différentielle

$$(E): y' - 2y = \frac{2}{1+e^{-2x}}$$

1. Déterminer la solution de l'équation  $y' - 2y = 0$  qui prend la valeur 1 en 0.
2. Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ , telle que  $f(0) = \ln 2$ , et soit  $g$  la fonction définie par l'égalité :  $f(x) = e^{2x}g(x)$ 
  - a. Calculer  $g(0)$
  - b. Calculer  $f'(x)$  en fonction de  $g'(x)$  et de  $g(x)$
  - c. Montrer que  $f$  est solution de (E) si, et seulement si  $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$
  - d. En déduire l'expression de  $g(x)$ , puis celle de  $f(x)$  de telle sorte que  $f$  soit solution de (E)

#### PARTIE B

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^{2x} \ln(1 + e^{-2x})$

1. On pose :  $h(x) = \ln(1 + e^{-2x}) - \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ 
  - a. Étudier la limite de  $h$  en  $+\infty$
  - b. Étudier le sens de variation de  $h$
  - c. En déduire le signe de  $h(x)$  pour tout  $x$  réel.
2. Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x)$  est du signe de  $h(x)$
3. Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$   
Montrer que  $f(x) = e^{2x}[-2x + \ln(1 + e^{2x})]$ . En déduire la limite de  $f$  en  $-\infty$
4. Dresser le tableau de variations de  $f$
5. Représenter graphiquement la courbe ( $\mathcal{C}$ ) de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  en prenant 5 cm pour unité.

#### PARTIE C

1. En remarquant que  $\frac{1}{1+e^{-2x}} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$  ; déterminer sur  $\mathbb{R}$ , une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1+e^{-2x}}$
2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire (en unité d'aire) de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative ( $\mathcal{C}$ ) de la fonction  $f$  et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 0$

#### PARTIE D

On définit la suite  $(U_n)$  pour tout entier naturel  $n$  par :  $U_0 = 0$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$

1. Montrer que pour tout élément  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $f(x)$  appartient à  $[0; 1]$ . En déduire que pour tout  $n \geq 0$ ,  $U_n \in [0; 1]$
2. Montrer par récurrence que la suite  $(U_n)$  est croissante. En déduire qu'elle converge
3. Soit  $\alpha$  la limite de la suite  $(U_n)$ . Montrer que  $f(\alpha) = \alpha$  et que  $\alpha \in [0; 1]$

## Fonctions exponentielles

### Calcul Intégral et calcul d'aires

#### PROBLÈME 44

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} \text{ et } g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

On note  $(\mathcal{C})$  et  $(\Gamma)$  les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique : 4 cm).

#### PARTIE A

1.

- Etudier le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$   
Préciser les éventuelles asymptotes à  $(\mathcal{C})$
- Prouver que le point  $\Omega$  de coordonnées  $(0; \frac{1}{2})$  est centre de symétrie de  $(\mathcal{C})$
- On note  $(T)$  la tangente à  $(\mathcal{C})$  au point  $\Omega$ .  
Déterminer le coefficient directeur de  $(T)$ .
- Représenter  $(T)$  et  $(\mathcal{C})$

2.

- En observant que, pour tout nombre réel  $x$ , on a  $g(x) = f(-x)$ , montrer que  $(\Gamma)$  est l'image de  $(\mathcal{C})$  par une symétrie que l'on déterminera.
- Vérifier que, pour tout nombre réel  $x$ , on a  $f(x) + g(x) = 1$   
En déduire que  $(\Gamma)$  est l'image de  $(\mathcal{C})$  par une autre symétrie que l'on déterminera.
- Déterminer le coefficient directeur de la tangente  $(T')$  à  $(\Gamma)$  au point  $\Omega$
- Représenter  $(T')$  et  $(\Gamma)$  sur la figure de la question 1

**PARTIE B :** On note  $I = \int_0^1 f(t) dt$  et  $J = \int_0^1 g(t) dt$

1. En utilisant l'égalité de la question **A 2.b**, calculer  $I + J$

2.

- Montrer que, pour tout nombre réel  $t$ ,  $\frac{1}{1+e^{-t}}$  peut s'écrire sous la forme  $\frac{e^t}{e^t+1}$
- En déduire une primitive  $G$  de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ , puis la valeur de  $J$

3. Calculer la valeur de  $I$

4.

- Prouver que, pour tout nombre réel  $x$  appartenant à  $[0; +\infty[$ ,  $f(x) \leq g(x)$
- On note  $\Delta$  l'ensemble des points du plan dont les coordonnées  $(x, y)$  vérifient :  
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$$
  
On note  $\mathcal{A}$  l'aire, exprimée en  $\text{cm}^2$ , du domaine  $\Delta$   
Exprimer  $\mathcal{A}$  en fonction de  $I$  et  $J$ . En déduire la valeur exacte de  $\mathcal{A}$

#### PARTIE C

On considère les fonctions  $h$  et  $H$  définies sur  $[0; +\infty[$  par :

$$h(x) = e^x \ln(1 + e^{-x}) \text{ et } H(x) = \int_0^x h(t) dt$$

1.

- Que représente  $H$  pour  $h$ ?
- En déduire que  $H$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$

2. On note  $h'$  la fonction dérivée de  $h$

- Vérifier que, pour tout nombre réel  $x$  appartenant à  $[0; +\infty[$ ,  $h(x) = h'(x) + g(x)$
- En déduire  $H(x)$  en fonction de  $x$

**Fonction logarithme népérien**  
**Calcul d'aires et Etude d'une suite récurrente**

**PROBLÈME 45**

**PARTIE A**

L'objet de cette partie est d'étudier la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} + x - 1$$

On appelle  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  dont l'unité vaut 2 cm.

1.
  - a. Étudier sur  $]0; +\infty[$  le sens de variation de la fonction  $g$  définie par :  
 $g(x) = x^3 - 2 \ln x + 1$
  - b. En déduire que  $g(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$
2.
  - a. Calculer  $f'(x)$ , et démontrer que  $f'(x)$  et  $g(x)$  sont de même signe.
  - b. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition, puis construire son tableau de variations.
  - c. Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à la courbe  $(\mathcal{C})$   
Étudier la position de  $(\Delta)$  par rapport à  $(\mathcal{C})$
  - d. Écrire une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse 1.
3. Tracer les droites  $(T)$  et  $(\Delta)$  et construire la courbe  $(\mathcal{C})$

**PARTIE B**

Soit  $\lambda$  un réel supérieur ou égal à 1.

1. On appelle  $\mathcal{A}(\lambda)$  l'aire en unité d'aire de la partie du plan comprise entre  $(\mathcal{C})$ ,  $(\Delta)$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = \lambda$   
Calculer  $\mathcal{A}(\lambda)$ . (On pourra utiliser une intégration par parties).
2. Déterminer la limite  $L$  de  $\mathcal{A}(\lambda)$  quand  $\lambda$  tend vers  $+\infty$
3. Montrer que l'équation :  $\mathcal{A}(\lambda) = \frac{L}{2}$  est équivalente à l'équation  $(E)$  définie par  $2 \ln \lambda - \lambda + 2 = 0$
4. Prouver que l'équation  $(E)$  admet une unique solution  $a$  sur  $[1; +\infty[$   
Vérifier que  $5 < a < 6$

**PARTIE C**

Cette partie va permettre de déterminer une approximation de  $a$

Pour cela, on introduit la suite  $(U_n)$  définie par  $U_0 = 5$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = \varphi(U_n)$ , où  $\varphi$  est la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $\varphi(x) = 2 \ln x + 2$

1.
  - a. Démontrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_n$  appartient à  $[5; 6]$ .
  - b. Montrer que la suite  $(U_n)$  est croissante.
  - c. Montrer que la suite  $(U_n)$  est convergente
2.
  - a. Prouver que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[5; 6]$  on a :  $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{5}$
  - b. En déduire que pour  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $|U_{n+1} - a| \leq \frac{2}{5} |U_n - a|$
  - c. Démontrer alors que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $|U_n - a| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$
  - d. En déduire la limite de  $(U_n)$
3. Déterminer un entier  $n$  tel que  $U_n$  soit une valeur approchée de  $a$  à  $10^{-3}$  près.

**PROBLÈME 46**

**PARTIE A**

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x(1 - \ln x) \text{ pour } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu
2.
  - a. Calculer la dérivée  $f'$ , de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ . En déduire le sens de variations de  $f$
  - b. Déterminer la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$
  - c. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$
3. On note  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de la fonction  $f$ 
  - a. On note  $N$  le point de  $(\mathcal{C})$  d'abscisse 1,  $R$  le point d'intersection de  $(\mathcal{C})$  et de l'axe des abscisses,  $Q$  le point de  $(\mathcal{C})$  où la tangente est parallèle à la droite d'équation  $y = 2x$ . Calculer les coordonnées des points  $N, R, Q$  et donner les coefficients directeurs des tangentes à  $(\mathcal{C})$ , en chacun de ces points.
  - b. En adoptant 4 cm pour l'unité et en plaçant l'axe des ordonnées à 6 cm du bord gauche de la feuille, construire  $(\mathcal{C})$ , ainsi que les tangentes à  $(\mathcal{C})$  en  $N, R$  et  $Q$

**PARTIE B**

1. On note  $\varphi$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[1; +\infty[$ 
  - a. Démontrer que  $\varphi$  est une application bijective de  $[1; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  à préciser.
  - b. Tracer la courbe  $(\mathcal{C}')$  de  $\varphi$  dans le même repère que  $(\mathcal{C})$
2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = 2x(\ln x - 1)$   
Sans étudier  $g$ , tracer sa courbe représentative  $(\Gamma)$  dans le même repère que  $(\mathcal{C})$ .  
Expliquer

**PARTIE C**

1. Soit  $\lambda$  un nombre de l'intervalle  $]0; e[$   
Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale  $I(\lambda) = \int_{\lambda}^e x \ln x \, dx$
2. En déduire la valeur de  $\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^e f(x) \, dx$   
Que représente  $\mathcal{A}(\lambda)$ ?
3. Montrer que  $\mathcal{A}(\lambda)$  admet pour limite  $\mathcal{A} = \frac{e^2}{2}$  quand  $\lambda$  tend vers zéro. On admettra que cette limite  $\mathcal{A}$  représente l'aire du domaine limité par  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = e$
4. En déduire l'aire  $\mathcal{A}'$  en  $\text{cm}^2$  du domaine limité par  $(\Gamma)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = e$

**PROBLÈME 47**

**PARTIE A**

1. Soit  $g$  la fonction  $[0; +\infty[$  définie par :  $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2 + 1)$ 
  - a. Étudier les variations de  $g$ , déterminer sa limite en  $+\infty$   
(On pourra poser  $X = x^2 + 1$ )
  - b. En déduire que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[1; +\infty[$ . Prouver que  $\frac{7}{4} \leq \alpha \leq 2$
2. Préciser le signe de  $g(x)$  sur  $[0; +\infty[$

**PARTIE B**

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  unité 2 cm.

Soit  $f$  l'application définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On appelle  $(C)$  sa courbe représentative.

1. Montrer que  $f$  est dérivable en 0. Interpréter graphiquement ce résultat
2. Étudier la parité de  $f$ . Que peut-on en déduire pour la courbe  $(C)$  ?
3. Étudier les variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$  et sa limite en  $+\infty$
4. Soit la fonction  $\varphi$  définie sur  $] -1; +\infty[$  par :  $\varphi(x) = \ln(x + 1) - x$ 
  - a. Étudier les variations de  $\varphi$
  - b. Montrer que pour tout  $x > -1$ ,  $\ln(x + 1) \leq x$
  - c. En déduire la position relative de  $(C)$  et de sa tangente en 0.
5. Tracer la courbe  $(C)$   
On prendra  $\alpha = 1,87$  et  $f(\alpha) = 0,84$

**PARTIE C**

On note  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

1. Soit  $r$  un réel strictement positif fixé. Montrer que  $F(r)$  et  $F(-r)$  sont les aires de domaines isométriques du plan. En déduire la parité de  $F$
2. Déterminer les variations de  $F$
3.
  - a. Montrer que  $0 \leq F(1) \leq \frac{1}{2}$  en utilisant la position de  $(C)$  par rapport à sa tangente en 0
  - b. Montrer que pour tout réel  $t$  supérieur ou égal à 1,  $\frac{\ln(t^2)}{t} \leq \frac{\ln(t^2+1)}{t} \leq \frac{\ln(2t^2)}{t}$
  - c. Soit  $x$  un réel,  $x \geq 1$ , calculer  $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt$   
En déduire les limites de  $F(x)$  et de  $\frac{F(x)}{x}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et interpréter graphiquement ces résultats
4. Dresser le tableau de variation de  $F$  et donner l'allure de la courbe représentative de  $F$  en prenant 0,4 pour valeur approchée de  $F(1)$  dans un autre repère d'unité 1 cm

## PROBLÈME 48

### PARTIE A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{2}$

1. Étudier les variations de  $g$
2. Calculer  $g(1)$  et étudier le signe de  $g(x)$  pour tout réel  $x$  élément de  $]0; +\infty[$

### PARTIE B

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique : 2 cm).

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

On appelle  $(\mathcal{C})$  la représentation graphique de  $f$  et  $(\mathcal{C}_0)$  la représentation graphique de la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$

1. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$
2. Calculer  $f'(x)$  et vérifier que  $f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$
3. Dresser le tableau de variation de  $f$
4. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \sqrt{x}]$ . Que peut-on déduire pour  $(\mathcal{C})$ ?
5. Préciser les positions relatives de  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}_0)$
6. Dessiner  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}_0)$

### PARTIE C

Soit  $(U_n)$  la suite définie par :  $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$  pour tout entier  $n > 0$

1. Soit  $J = \int_1^2 f(x) dx$ 
  - a. Interpréter graphiquement  $J$
  - b. Calculer  $\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$  à l'aide d'une intégration par parties
  - c. En déduire  $J$
2. Soit  $k$  un entier naturel tel que :  $0 \leq k \leq n - 1$   
En utilisant les variations de  $f$  sur  $[1; +\infty[$ , montrer que :  
$$f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_1^2 f(x) dx \leq f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$
3. En déduire que :  $U_n - \frac{f(2)}{n} \leq J \leq U_n - \frac{f(1)}{n}$
4. Montrer que  $J + \frac{f(1)}{n} \leq U_n \leq J + \frac{f(2)}{n}$   
En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

**PROBLÈME 49**

**PARTIE A**

On considère les fonctions  $f_1, f_2, f_3$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_1(x) = (x + 1)e^{-x}, f_2(x) = -xe^{-x}, f_3(x) = (x - 1)e^{-x}$$

On appelle  $(C_1), (C_2), (C_3)$  leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan d'unité graphique 2cm

1.
  - a. Calculer la dérivée  $f_1'$  de  $f_1$  et étudier son signe.  
En déduire le sens de variations de  $f_1$
  - b. Déterminer les limites de  $f_1$  en  $+\infty$ , en  $-\infty$
  - c. Dresser le tableau de variation de  $f_1$
2. Etudier les variations de  $f_2$
3.
  - a. Calculer la dérivée  $f_3'$  de  $f_3$  et étudier son signe.  
En déduire le sens de variations de  $f_3$
  - b. Déterminer les limites de  $f_3$  en  $+\infty$ , en  $-\infty$
  - c. Dresser le tableau de variation de  $f_3$
4. Étudier deux à deux les positions relatives des courbes  $(C_1), (C_2)$  et  $(C_3)$
5. Tracer  $(C_1), (C_2)$  et  $(C_3)$  sur le même graphique

**PARTIE B**

Soit  $\lambda$  un réel strictement supérieur à  $-1$ .

1. Montrer que  $f_1$  est solution de l'équation différentielle :  $y' + y = e^{-x}$   
En déduire une primitive  $F_1$  de  $f_1$  sur  $\mathbb{R}$
2. Calculer l'aire  $\mathcal{A}(\lambda)$  en  $\text{cm}^2$  du domaine plan limité par  $(C_1)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = -1$  et  $x = \lambda$ .  
En déduire  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$
3. A l'aide d'une intégration par parties calculer l'aire  $\mathcal{B}(\lambda)$  en  $\text{cm}^2$  du domaine plan limité par les courbes  $(C_2)$  et  $(C_3)$  et les droites d'équations  $x = \frac{1}{2}$  et  $x = \lambda$ .  
En déduire  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{B}(\lambda)$

**PARTIE C**

Pour  $n$  entier naturel non nul, on appelle  $M_n$  le point de  $(C_1)$  d'abscisse  $n \ln 2$  et  $P_n$  son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses

On pose  $f(x) = f_1(x) - f_3(x)$  pour tout  $x$  réel.

1. Calculer, en unités d'aire, l'aire  $U_n$  du domaine plan limité par la courbe  $(C_3)$ , la courbe  $(C_1)$  et les segments  $[P_n M_n]$  et  $[P_{n+1} M_{n+1}]$
2. Calculer,  $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$  en fonction de  $n$   
En déduire que la suite  $(S_n)$  converge et préciser sa limite

**PROBLÈME 50**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^{-x} \sin x$

On note  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  où l'unité de longueur est de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 10 cm sur l'axe des ordonnées

**PARTIE A**

Dans cette partie on cherche à représenter  $f$

1.

- a. Calculer  $f'$  et vérifier que :  $f'(x) = \sqrt{2}e^{-x} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$   
b. Résoudre sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$  l'inéquation :  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$

En déduire le signe de  $f'$  sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$

- c. Dresser, sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$ , le tableau de variations de  $f$ . Préciser les tangentes à  $(\mathcal{C})$  aux deux extrémités de l'intervalle.

2. On note  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$  les représentations graphiques, dans le repère choisi, des deux fonctions :

$$x \mapsto e^{-x} \text{ et } x \mapsto -e^{-x}$$

- a. Donner les abscisses sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$  des points où  $(\mathcal{C})$  rencontre  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$

- b. Vérifier qu'en chacun des points communs précédents, les courbes  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}_1)$  d'une part,  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}_2)$  d'autres parts, ont même tangente.

- c. Représenter sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$  les courbes  $(\mathcal{C})$ ,  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$

3. Soit  $\Phi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\Phi(x) = e^{-2\pi} f(x - 2\pi)$  et on note  $(\mathcal{C}')$  sa courbe dans le repère choisi. Que peut-on dire de  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}')$  ?

**PARTIE B**

1.

- a. Montrer que  $f$  est solution de l'équation différentielle :  $y'' + 2y' + 2y = 0$

En déduire que  $f(x) = -\frac{1}{2}(2f'(x) + f''(x))$

- b. Donner alors une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  en fonction de  $f$  et  $f'$

- c. Calculer l'intégrale  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

2. On pose  $B_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt$  où  $k$  est un entier positif ou nul

Soit  $S_n = B_0 + B_1 + \dots + B_n$ .

- a. Exprimer  $S_n$  à l'aide de la fonction  $F$

- b. En déduire que la suite  $(S_n)$  admet une limite que l'on précisera.

3.

- a. Donner, sans calculer l'intégrale, le signe de  $B_k$  suivant la parité de l'entier  $k$ .

- b. Calculer  $B_0$  puis  $B_k$  pour  $k$  entier positif.

Vérifier que  $B_k = (-1)^k e^{-k\pi} B_0$

- c. Calculer  $T_n = |B_0| + |B_1| + \dots + |B_n|$

Montrer que  $T_n$  admet une limite lorsque  $n$  tend vers l'infini. Préciser cette limite.

- d. On pose  $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  et  $T = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

Vérifier que  $\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = \frac{2}{B_0}$