MATHEMATIQUES

SERIE D

Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE

Complète les phrases suivantes par les groupes de mots suivants : « Le théorème (a) des valeurs intermédiaires » ; « La valeur moyenne (b) de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ » ; « l'inégalité de (c) la moyenne » et « l' inégalité (d) des accroissements finis ».

1- Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ $avec\ a \neq b$. Le nombre réel μ tel que
$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ est la valeur moyenne de fonction f sur l'intervalle $[a ; b]$

2- Soit f une fonction continue sur un intervalle K, $a\ et\ b$ deux éléments de K. Tout nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent par f compris entre $a\ et\ b$. Ceci traduit... a ...

3- Soit f une fonction continue sur un intervalle K, a et b deux éléments de K avec a < b. Si m et M sont deux nombres réels tels que pour tout t élément de $[a, b], m < f(t) < M$, alors
$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$. Ceci traduit ... c ...

4- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K, $a\ et\ b$ deux éléments de K avec $a < b$. S'il existe deux nombres réels $m\ et\ M$ tels que pour tout x élément de $[a, b]$, $m < f'(x) < M$, alors
$m(b-a) < f(b) - f(a) < M(b-a)$. Ceci traduit ... d ...

EXERCICE 2

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, trois réponses A, B et C sont proposées mais une seule permet d'avoir l'affirmation juste. Ecris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre qui donne la réponse juste qui le complète. Aucune justification n'est demandée.

	Enoncés		Réponses proposées
1	$cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ est la formule de :	A	Euler
		B	Moivre
		C	Binôme de Newton
2	Toute similitude directe S de rapport k multiplie	A	Les distances par k^2 et les aires par k
		B	Les distances par k et les aires par k^3
		C	Les distances par$k$ et les aires par k^2
3	Si deux événements E et F d'un univers sont tels que : $P(E) = 0{,}2$; $P(F) = 0{,}4\ et\ P(E \cup F) = 0{,}52$ alors E et F sont	A	indépendants
		B	incompatibles
		C	impossibles
4	On donne l'application F du plan dans lui-même d'expression analytique :	A	$z' = (1-i)z + 2 + 5i$

	$\begin{cases} x' = x - y + 5 \\ y' = x + y - 2 \end{cases}$ L'écriture complexe de F est :	B	$z' = (1+i)z + 2 + 5i$
		C	$z' = (1+i)z + 5 - 2i$

EXERCICE 3

Le tableau ci-dessous indique pour chaque année, le nombre de milliers de mariages contractés dans les mairies de Côte d'Ivoire, x_i désigne le rang de l'année tandis que y_i désigne le nombre (en milliers) de mariages.

Années	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang x de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de mariages y_i	395	374	p	334	312	q	266

Les nombres de milliers de mariages contractés en 2014 et en 2017 dans les archives de la direction générale des statistiques ont été égarés. Cependant, ces valeurs avaient permis par la méthodes des moindres carrées d'obtenir la droite de régression de $y \ en \ x$ dont l'équation réduite est la suivante : $(\mathcal{D}): y = -22x + 397$.

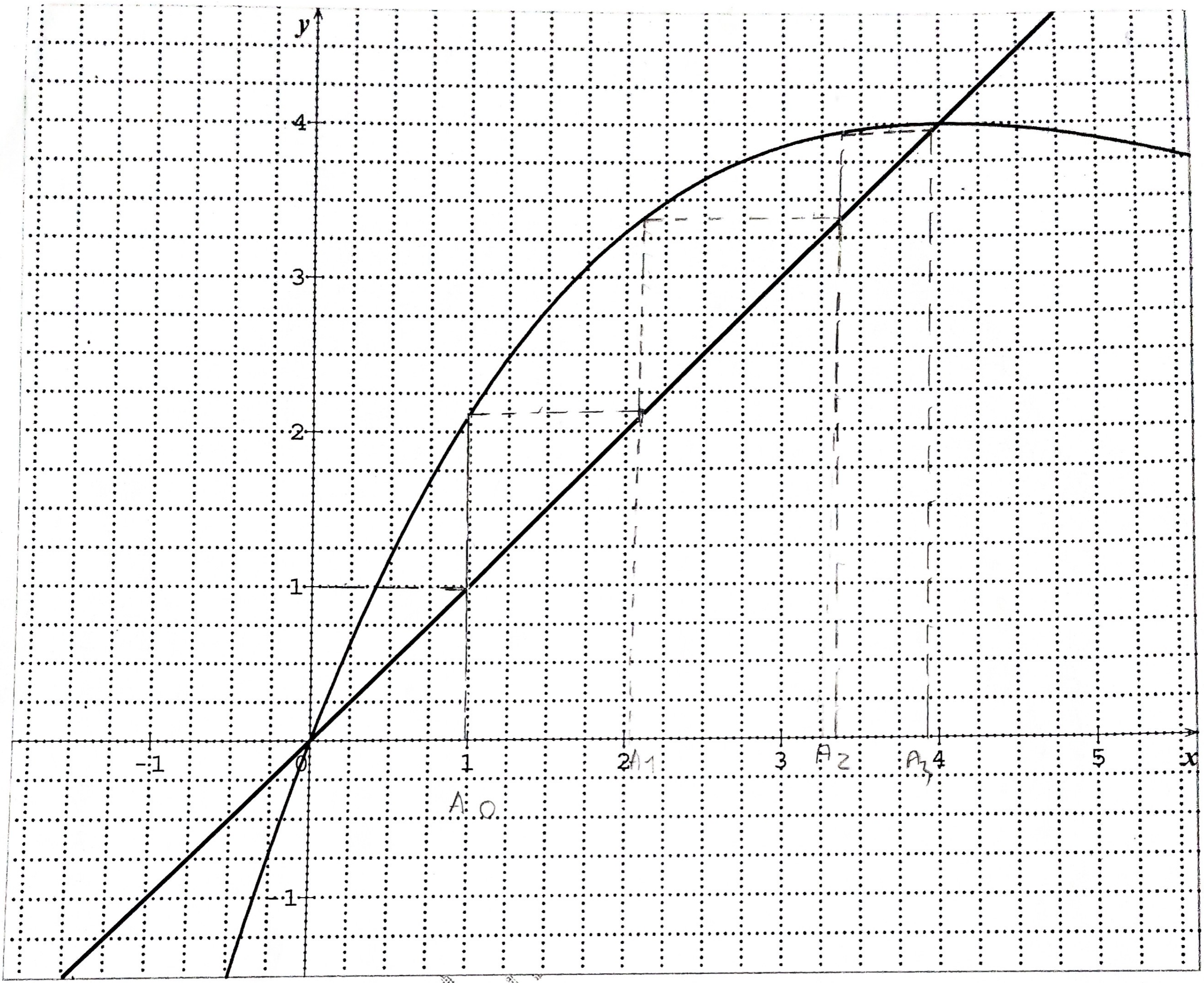
1. On suppose que la relation entre $x \ et \ y$ traduite par la droite $(\mathcal{D})$ reste encore valable pour les années à venir :
   a) A combien peut-on estimer le nombre de mariages en Côte d'Ivoire au cours de l'année 2022 ?
   b) A partir de quelle année l'on assistera à deux fois moins de mariages qu'en 2018 ?
2. a) Calcule la moyenne $\bar{x}$ et la variance $V(x)$de x.
   b) Vérifie que $\bar{y} = \frac{1681+p+q}{7}$
   c) Démontre que : $Cov(x,y) = \frac{2q-p-823}{7}$
3. Détermine les valeurs de $p \ et \ q$.

EXERCICE 4

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n e^{1-\frac{1}{4}U_n} \end{cases}$

Dans la figure de l'annexe ci-jointe on a tracé, dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe représentative $(\mathcal{C}_h)$ de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = xe^{1-\frac{1}{4}x}$, et la droite (Δ) d'équation : $y = x$.

1. a- Par une lecture graphique donne $h([0;4])$.
   b- Sur l'axe des abscisse, place le point $A_0(U_0;0)$ puis construis les points $A_1(U_1;0)$, $A_2(U_2;0) \ et \ A_3(U_3;0)$
   c- Que peut-on conjecturer sur la monotonie et sur la convergence de la suite (U_n) ?
2. a- Démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n \leq 4$.
   b- Démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$. En déduis la monotonie de la suite (U_n).
3. Démontre alors que la suite (U_n) est convergente et calcule sa limite.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}$
   a- Démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = e^{n-\frac{1}{4}S_n}$.
   b- En déduis alors que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n} = 4$



EXERCICE 5

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un orthonormé (O, I, J) d'unité graphique : 2 cm.

1- a- Calcule $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

b- Justifie que $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$.

c- Dresse le tableau de variation de f et en déduis le signe de $f(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

d- Construis la courbe $(\mathcal{C})$.

2- On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = xln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

a- Justifie que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = f(x)$.

b- En déduis le sens de variation de g sur $]0;+\infty[$.

3- Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = \frac{ln(x+1)}{x}$.

a- Justifie que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g(x) = h\left(\frac{1}{x}\right)$.

b- En déduis que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

4- Soit α un réel strictement supérieur à 1. On note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire en cm² du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

a- En utilisant les résultats de la question 2) a) calcule $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α.

b- Détermine $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

5- Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

a- Justifie que $ln(a_n) = g(n)$.

b- En déduis que la suite (a_n) est croissante.

c- Justifie que la suite (a_n) est convergente et précise sa limite.

6- Soit (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{ln(a_k)}{k}$

Justifie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = h(n)$. En déduis $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE 6 (SITUATION COMPLEXE 1)

Lors d'une campagne innovante du Fonds des Nations Unies pour la population intitulée « 7 Milliards d'Actions », qui mettait l'accent sur les défis, les possibilités et les actions nécessaires à notre avenir commun sur la Terre, les élèves de la promotion terminale d'un lycée ont appris que :

- plus de la moitié de la croissance démographique dans le monde d'ici à 2050 aura lieu en Afrique ;
- la population d'Afrique subsaharienne, par exemple, devrait doubler d'ici à 2050 ;
- selon les projections, la population mondiale devrait augmenter de 2 milliards de personnes au cours des trente prochaines années, passant de 7,7 milliards actuellement à 9,7 milliards en 2050 ;
- la population d'un pays était de 4, 75 millions d'habitants en 1990 et de 5,5 millions d'habitants en 1995.

Etonnés du boum démographique de ce pays, ces élèves veulent déterminer l'année où la population de ce pays atteindra 20 millions d'habitants, si on suppose que la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle au nombre d'habitants. Ils désignent par $f(t)$ le nombre de millions d'habitants à l'instant t.

Ayant entendu ces informations, tu veux tester tes connaissances et aussi les aider.

Réponds, dans ces conditions, à la préoccupation de ces élèves.

EXERCICE 7 (SITUATION COMPLEXE 2)

Dans le cadre de la lutte contre le corona virus, une ONG s'intéresse à la population du quartier toits rouges dans la commune de Yopougon. Le quartier est délimité par un trapèze rectangle EFGH. Les sommets E, F, G et H sont respectivement repérés dans un plan complexe muni d'un repère orthonormé d'unité 1 km par leurs affixes respectives : $-1+i$, $4+i$, $2+4i$ et $-1+4i$. La densité de cette population est de 500 habitants au km².

70 % de la population est jeune et 30 % est moins jeune.

L'ONG décide de placer un seau d'eau et un savon tous les 500 m² de la cour de l'hôpital « AFOSUP » qui est délimité dans le plan complexe par l'ensemble des points d'affixe z vérifiant : $|2iz + 5 - i| = 1$.

Pour plus d'efficacité, le responsable de l'ONG souhaite d'abord avoir un plan de ce quartier et de l'hôpital à l'échelle 2 cm pour 1 km, ensuite, il voudrait savoir le nombre de jeunes, de moins jeunes et le nombre de seaux nécessaires pour cet hôpital.

A partir d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, aide le responsable de cette ONG à obtenir ces données dont il a besoin pour lutter efficacement contre cette pandémie.